الباب السادس

ميكانيكا الكم النسبية

Relativistic Quantum Mechanics

ميكانيكا الكم النسبية
Relativistic Quantum Mechanics

مقدمة :

فشلت معادلة شرودنجر (غير النسبية) في وصف الكثير من العمليات الفيزيائية مثل وجود اللف للجسيمات الأولية ، وبعض الظواهر التي تحدث عند الطاقات العالية مثل عملية إنتاج الزوج وعملية الأشعة الكابحة وغيرها .

وكانت أول محاولة للإنتقال من ميكانيكا الكم غير النسبية إلى ميكانيكا الكم النسبية مع محاولة كلاين وجوردون .

معادلة كلاين – جوردون (Klein-Gordon Equa.) :

الهاملتونيان النسبي يعطي من العلاقة :

$$H^2 = p^2c^2 + m_0^2 c^4$$

حيث m_0 هي الكتلة الساكنة (rest mass) للجسيم ، P كمية الحركة .

معادلة القيمة الذاتية للمؤثر H^2 :

$$H^2 \psi(\vec{r},t) = E^2 \psi(\vec{r},t)$$

$$\therefore\ (p^2 c^2 + m_0^2 c^4)\psi(\vec{r},t) = E^2 \psi(\vec{r},t)$$

وبالتعويض عن $E, \vec{P}$ بصورتها كمؤثرات :

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \quad , \quad E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$p^2 = (-i\hbar\vec{\nabla})\cdot(-i\hbar\vec{\nabla}) = -\hbar^2\vec{\nabla}$$

$$E^2 = (i\hbar\frac{\partial}{\partial t})\ (i\hbar\frac{\partial}{\partial t}) = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\therefore (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4)\ \psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

وبالقسمة على $-\hbar^2 c^2$:

$$\left(\nabla^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\therefore \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

$$\therefore \left(\Box - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\vec{r},t) = 0$$

وهي معادلة كلاين – جوردون ، حيث مؤثر دالمبيرت

$$\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

وتصف هذه المعادلة الجسيمات عديمة اللف $(s=0)$ مثل ميزونات π (بـاي) وميزونات k (كبا) .

معادلة الأتصال (كثافة الشحنة والتيار في معادلة كلاين – جوردون) :

معادلة كلاين جوردون :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

بأخذ المرافق المركب للطرفين :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi^* = 0 \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

بضرب (1) في ψ^* و (2) في ψ والطرح نحصل على :

$$\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^* - \frac{1}{c^2}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\right) = 0$$

بالضرب في $\frac{\hbar}{2im_0}$:

$$\frac{\hbar}{2im_0}\left(\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*\right)-\frac{\hbar}{2im_0c^2}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\right)=0$$

$$\therefore\frac{\hbar}{2im_0}\left(\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*\right)+\frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\right)=0$$

ومن نظرية جرين في المتجهات :

$$\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*=\vec{\nabla}\cdot\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$$

$$\therefore\ \frac{\hbar}{2im_0}\vec{\nabla}\cdot\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$$

$$+\frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\right)=0$$

وبكتابة :

$$\vec{J}=\frac{\hbar}{2im_0}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$$

$$\rho=\frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$$

نحصل على :

$$\therefore\ \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}\qquad\text{(3)}$$

وهي معادلة الأتصال (أو الأستمرارية) ، حيث $\vec{J}$ تعرف بكثافة التيار (current density) و ρ تعرف بكثافة الاحتمال (probability density) .

أمثلة محلولة على معادلة كلاين – جوردون :

مثال (١) : أكتب معادلة كلاين – جوردون لجسيم مشحون بشحنة $(-e)$ في وجود مجال كهرومغنطيسي جهده القياسي $\vec{A}$ والإتجاهي ϕ ، ثم أثبت أنه في التقريب اللانسبي فإن هذه المعادلة تؤول إلى معادلة شرودنجر لجسيم يتحرك في مجال كهرومغنطيسي وصورتها :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\frac{ie\hbar}{m_0c^2}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}+\frac{ie\hbar}{2m_0c^2}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{e^2A^2}{2m_0c^2}+e\phi\right)\psi$$

الحل :

في حالة وجود جسيم مشحون بشحنة $-e$ (أي الألكترون) في مجال كهرومغنطيسي جهده القياس ϕ والإتجاهي $\vec{A}$ فإن تأثير المجال على الجسيم يتسبب في وضع كمية الحركة $\vec{P}$ والطاقة E للجسيم بالصورة :

$$\vec{P}\rightarrow\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\quad,\quad E\rightarrow E-e\phi$$

وتصبح العلاقة النسبية بين الطاقة وكمية الحركة :

$$E^2=p^2c^2+m_0^2c^2$$

$$\downarrow$$

$$\left(E-e\phi\right)^2=\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2c^2+m_0^2c^4$$

$$=\left(c\vec{P}-e\vec{A}\right)^2+m_0^2c^4 \qquad \text{\_\_\_\_\_}(1)$$

بالتأثير بالعلاقة (1) على دالة $\psi(\vec{r},t)$ وإستبدال كل من $E,\vec{P}$ بالمؤثرين $\vec{P}=-i\hbar\vec{\nabla}\ ,\ E=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ نحصل على معادلة كلاين جوردون لجسيم مشحون في مجال كهرومغنطيسي .

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\phi)^2\psi(\vec{r},t)=\left(-i\hbar c\vec{\nabla}-e\vec{A}\right)^2\psi(\vec{r},t)$$
$$+m_0^2c^4\psi(\vec{r},t) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

الطرف الأيسر من العلاقة (2) :

$$L\cdot H\cdot S\cdot=(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\phi)^2\psi=(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\phi)(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\phi)\psi$$
$$=-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\underbrace{-i\hbar e\frac{\partial(\phi\psi)}{\partial t}}-i\hbar e\phi\frac{\partial\psi}{\partial t}+e^2\phi^2\psi$$
$$=-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\underbrace{-i\hbar e\,\phi\frac{\partial\psi}{\partial t}-i\hbar e\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\psi}-i\hbar e\phi\frac{\partial\psi}{\partial t}+e^2\phi^2\psi$$
$$=-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-2i\hbar e\,\phi\frac{\partial\psi}{\partial t}-i\hbar e\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\psi+e^2\phi^2\psi$$

والطرف الأيمن من العلاقة (2) :

$$R\cdot H\cdot S\cdot=\left(-i\hbar c\vec{\nabla}-e\vec{A}\right)^2\psi+m_0^2c^4\psi$$
$$=\left(-i\hbar c\vec{\nabla}-e\vec{A}\right)\cdot\left(-i\hbar c\vec{\nabla}-e\vec{A}\right)\psi+m_0^2c^4\psi$$
$$=-\hbar^2c^2\nabla^2\psi+i\hbar ce\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\psi+i\hbar ec\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi$$
$$+e^2A^2\psi+m_0^2c^4\psi$$
$$=-\hbar^2c^2\nabla^2\psi+i\hbar ce\underbrace{\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\psi+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)\psi\right]}$$
$$+i\hbar ec\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi+e^2A^2\psi+m_0^2c^4\psi$$
$$=-\hbar^2c^2\nabla^2\psi+2i\hbar ce\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi+i\hbar ce\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)\psi$$
$$+e^2A^2\psi+m_0^2c^4\psi$$

وتصبح العلاقة (2) :

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-2ie\hbar\phi\frac{\partial}{\partial t}-ie\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}+e^2\phi^2\right)\psi$$

$$=\left(-\hbar^2c^2\nabla^2+2i\hbar ec\vec{A}\cdot\vec{\nabla}+i\hbar ec\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right.$$

$$\left.+e^2A^2\psi+m_0^2c^4\right)\psi \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(3)}$$

وهي معادلة كلاين جوردون في وجود مجال كهرومغنطيسي جهديه ϕ, A .

<u>**في حالة عدم وجود المجال**</u> : $\phi=0$, $A=0$ وتؤول المعادلة (3) إلى :

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)=\left(-\hbar^2c^2\nabla^2+m_0^2c^4\right)\psi$$

وبالقسمة على $-\hbar^2c^2$:

$$\therefore\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\left(\nabla^2-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi$$

$$\therefore\left(\underbrace{\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}}-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi=0$$

$$\therefore\ \boxed{\left(\Box-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi=0}$$

وهي معادلة كلاين – جوردون للجسيم الحر (في عدم وجود مجال) .

<u>**التقريب اللانسبي**</u> :

في هذا التقريب نعوض عن

$$\psi=\psi_0e^{-\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}\quad=\psi_0e^{-\frac{im_0c^2t}{\hbar}}$$

حيث $\varepsilon = m_0 c^2$ هي الطاقة الساكنة (المناظرة للكتلة الساكنة)

$$\therefore \; \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi_0 \, e^{-\frac{i m_0 c^2 t}{\hbar}} \left(-\frac{i m_0 c^2}{\hbar} \right) + \frac{\partial \psi_0}{\partial t} e^{-\frac{i m_0 c^2 t}{\hbar}}$$

$$= \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial t} - \frac{i m_0 c^2}{\hbar} \underbrace{\psi} \right) e^{-\frac{i m_0 c^2 t}{\hbar}} \qquad \text{\_\_\_\_ (4)}$$

وبالتفاضل مرة ثانية نحصل على :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} - \frac{2 i m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar} \psi_0 \right) e^{-\frac{i m_0 c^2 t}{\hbar}} \qquad \text{\_\_\_\_ (5)}$$

<u>في التقريب اللانسبي</u> :

بإعتبار تأثير $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ على ψ_0 يعطي نتيجة من رتبة $e\phi\psi_0$ وهي صغيرة بالمقارنة مع $m_0 c^2 \psi_0$ فإن الحد الأول في (5) ، (4) يمكن إهماله ، وكذلك الحدان الأخيران في الطرف الأيسر للمعادلة (3) وتؤول المعادلة (3) إلى :

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t^2} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + \frac{i e\hbar}{m_0 c} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} + \frac{i e\hbar}{2m_0 c} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{e^2 A^2}{2m_0 c^2} + e\phi \right) \psi_0$$

وهي معادلة شرودنجر اللانسبية لحركة جسيم في مجال كهرومغنطيسي .

<u>مثال (٢)</u> : بإستخدام المتجهات الرباعية ومن معادلة كلاين – جوردون أوجد معادلة الأتصال في صورتها النسبية (الرباعية)

$$\boxed{\partial_\mu j_\mu = 0}$$

مع تعبير مناسب للمتجه الرباعي للتيار – الشحنة (j_μ) الناتج عن حركة جسيم شحنته $(-e)$ في مجال كهرومغنطيسي جهده الرباعي الكهرومغنطيسي A_μ حيث $A_\mu = (\vec{A}, i\phi)$ [مع ملاحظة شرط لورنتز بالصورة $\partial_\mu A_\mu = 0$] .

الحل :

بإستخدام المتجهات الرباعية يمكن كتابة معادلة كلاين جوردون $\left(\Box - m_0^2\right)\psi = 0$ [أستخدمنا نظام الوحدات الذي فيه $\hbar = 1$, $c = 1$] بالصورة :

$$\partial_\mu^2 \psi - m_0 \psi = 0 \qquad \_\_\_\_(1)$$

حيث $\Box = \partial_\mu^2$

تفاعل الجسيم ذو الشحنة $(-e)$ مع المجال يمكن دراسته بإستبدال :

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$$

حيث A_μ هو المتجه الرباعي للجهد : $A_\mu = (\vec{A}, i\phi)$

وتؤول معادلة كلاين – جوردون في وجود المجال الذي جهده A_μ إلى الصورة :

$$\left(\vec{\partial}_\mu - ieA_\mu\right)^2 \psi - m_0^2 \psi = 0 \qquad \_\_\_\_(2)$$

وبأخذ المرافق المركب :

$$\psi^* \left(\bar{\partial}_\mu + ieA_\mu\right)^2 - m_0^2 \psi^* = 0 \qquad \_\_\_\_(3)$$

[$\vec{\partial}_\mu$ تدل على أن ∂_μ تؤثر على ψ بعدها ، $\bar{\partial}_\mu$ تؤثر على ψ^* قبلها]

ولكن :

$$\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)^2 = \left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)$$

$$= \partial_\mu^2 - ie\underbrace{\partial_\mu A_\mu}_{A_\mu \partial_\mu} - ieA_\mu\partial_\mu - e^2A_\mu^2$$

$$= \partial_\mu^2 - 2ieA_\mu\partial_\mu - e^2A_\mu^2 \quad \Big| \partial_\mu A_\mu = A_\mu \partial_\mu$$

أيضاً :

$$\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)^2 = \left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)$$

$$= \partial_\mu^2 + ie\underbrace{\partial_\mu A_\mu}_{A_\mu \partial_\mu} + ieA_\mu\partial_\mu - e^2A_\mu^2$$

$$= \partial_\mu^2 + 2ieA_\mu\partial_\mu - e^2A_\mu^2$$

وتصبح (2) :

$$\left(\vec{\partial}_\mu^2 - 2ie\,A_\mu\,\vec{\partial}_\mu - e^2A_\mu^2\right)\psi - m_0^2\psi = 0 \qquad \text{\_\_\_\_ (4)}$$

$$\psi^*\left(\overleftarrow{\partial}_\mu^2 + 2ie\,A_\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - e^2A_\mu^2\right) - m_0^2\psi^* = 0 \qquad \text{\_\_\_\_ (5)}$$

بضرب (4) من اليسار في ψ^* و (5) من اليمين في ψ والطرح :

$$\psi^*\left(\vec{\partial}_\mu^2 - 2ieA_\mu\,\vec{\partial}_\mu - e^2A_\mu^2\right)\psi - m_0^2\psi^*\psi = 0$$

$$\psi^*\left(\overleftarrow{\partial}_\mu^2 + 2ieA_\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - e^2A_\mu^2\right)\psi - m_0^2\psi^*\psi = 0 \,\Big|\, \overleftarrow{\partial}_\mu\psi = \psi\,\overleftarrow{\partial}_\mu$$

$$\therefore \psi^*\left(\partial_\mu^2\psi\right) - \left(\partial_\mu^2\psi^*\right)\psi - 2ie\psi^*A_\mu\left(\vec{\partial}_\mu\psi\right)$$

$$-2ie\left(\overleftarrow{\partial}_\mu\psi^*\right)A_\mu\psi = 0 \qquad \text{\_\_\_\_ (6)}$$

ولكن :

$$\partial_\mu\left[\underbrace{\psi^*}\,\underbrace{\vec{\partial}_\mu\psi} - \underbrace{\psi^*\overleftarrow{\partial}_\mu}\,\underbrace{\psi}\right] = \psi^*\left(\partial_\mu^2\psi\right) + \left(\vec{\partial}_\mu\psi^*\right)\left(\vec{\partial}_\mu\psi\right)$$

$$-\left(\psi^*\overleftarrow{\partial}_\mu\right)\left(\vec{\partial}_\mu\psi\right) - \left(\partial_\mu^2\psi^*\right)\psi = \psi^*\left(\partial_\mu^2\psi\right) - \left(\partial_\mu^2\psi^*\right)\psi$$

أيضاً :

$$\partial_\mu\left[\underbrace{\psi^*}\,\underbrace{A_\mu\psi}\right]=\psi^*\underbrace{\partial_\mu\left(A_\mu\psi\right)}+\left(\partial_\mu\psi^*\right)\left(A_\mu\psi\right)$$

$$=\psi^*\left[A_\mu\left(\partial_\mu\psi\right)+\left(\partial_\mu A_\mu\right)\psi\right]+\left(\partial_\mu\psi^*\right)\left(A_\mu\psi\right)$$

$$=2\psi^*A_\mu\left(\vec{\partial}_\mu\psi\right)+2\left(\vec{\partial}_\mu\psi\right)\left(A_\mu\psi\right)$$

[حيث :

$$\psi^*\partial_\mu\left(A_\mu\psi\right)=\psi^*\left(A_\mu\vec{\partial}_\mu\psi+\vec{\partial}_\mu A_\mu\psi\right)$$

$$=\psi^*A_\mu\left(\vec{\partial}_\mu\psi\right)+\left(\vec{\partial}_\mu\psi^*\right)A_\mu\psi\;]$$

وتصبح العلاقة (6) بالصورة :

$$\partial_\mu\left[\psi^*\vec{\partial}_\mu\psi-\psi^*\bar{\partial}_\mu\psi\right]-2ie\partial_\mu\left[\psi^*A_\mu\psi\right]=0$$

وبكتابة :

$$2\psi^*\vec{\partial}_\mu\psi=\left[\psi^*\vec{\partial}_\mu\psi-\psi^*\bar{\partial}_\mu\psi\right]$$

$$\therefore\partial_\mu\left[2\psi^*\vec{\partial}_\mu\psi-2ie\,\psi^*A_\mu\psi\right]=0$$

وبوضع

$$j_\mu=2\left[\psi^*\vec{\partial}_\mu\psi-ie\,\psi^*A_\mu\psi\right]$$

$$\therefore\;\boxed{\partial_\mu j_\mu=0}$$

وهي معادلة الأتصال ، حيث التيار الرباعي يعطي بالعلاقة :

$$j_\mu=2\,\psi^*\vec{\partial}_\mu\psi-2ie\,\psi^*A_\mu\psi$$

$$=\psi^*\vec{\partial}_\mu\psi-\psi^*\bar{\partial}_\mu\psi-2ie\psi^*A_\mu\psi$$

$$=\psi^*\left(\vec{\partial}_\mu-ieA_\mu\right)\psi-\psi^*\left(\bar{\partial}_\mu+ieA_\mu\right)\psi$$

<u>في حالة عدم وجود مجال</u> : $A_\mu=0$:

$$\therefore j_\mu=\psi^*\vec{\partial}_\mu\psi-\psi^*\bar{\partial}_\mu\psi$$

مثال (٣) : إذا كان هاملتونيان كلاين – جوردون (H) يكتب بدلالـــة مصــفوفات باولي σ_y, σ_z بالصورة :

$$H = \left(\sigma_z + i\sigma_y\right) p^2 / 2m_0 + m_0 c^2 \sigma_z$$

حيث :

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \;,\; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

فأثبت أن معادلة كلاين – جوردون يمكن وضعها في صورة معادلة شرودنجر $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ حيـــث ψ هـــي ملفـــوف spinor (دالـــة موجيـــة ذات مركبتين) وصورتها :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

الحل :

بإعتبار الملفوف ψ بالصورة :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

فإن معادلة كلاين – جوردون :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

أو :

$$\left(-p^2 / \hbar^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi \qquad \Big| \qquad p^2 = -\hbar^2 \nabla^2$$

تكافئ المعادلتين :

$$\left(-p^2/\hbar^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi_1=\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi_1 \qquad (1)$$

$$\left(-p^2/\hbar^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi_2=\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi_2 \qquad (2)$$

وبإستخدام هاملتونيان كلاين – جوردون المعطي :

$$H=\left(\sigma_z+i\sigma_y\right)p^2/2m_0+m_0c^2\sigma_z \qquad (3)$$

يمكن إثبات أن معادلة شرودنجر بالصورة :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi \qquad (4)$$

تكافئ معادلة كلاين – جوردون (المعادلتين (2) ، (1)) كالأتي :

بالتعويض عن H من (3) في (4) :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=\left\{\left(\sigma_z+i\sigma_y\right)p^2/2m_0+m_0c^2\sigma_z\right\}\psi$$

$$=\left\{\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right]p^2/2m_0+m_0C^2\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

ونحصل من ذلك على المعادلتين :

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}=\left(p^2/2m_0+m_0c^2\right)\psi_1+p^2/2m_0\,\psi_2 \qquad (5)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t}=-p^2/2m_0\,\psi_1-\left(p^2/2m_0+m_0c^2\right)\psi_2 \qquad (6)$$

[بعد فك المصفوفات]

وبوضع قيمة ψ_1 من (6) في (5) والأختصار نحصل على :

$$\left(-p^2\big/\hbar^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi_2=\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi_2 \qquad \text{\_\_\_\_\_(7)}$$

وبالمثل : بوضع قيمة ψ_2 من (5) في (6) والأختصار نحصل على :

$$\left(-p^2\big/\hbar^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi_1=\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi_1 \qquad \text{\_\_\_\_\_(8)}$$

من (8) ، (7) نرى أنه بأستخدام الهاملتونيان (3) يمكننا كتابة معادلة كلاين – جوردون في صورة معادلة شرودنجر .

وهو المطلوب .

معادلة ديراك النسبية (Relativistic Dirac Equation)

أستنتج ديراك معادلة موجية لوصف حركة الجسيمات ذات اللف حيث أن معادلة كلاين – جوردون نجحت فقط في وصف حركة الجسيمات عديمة اللف ، وقد أقترح ديراك أن تكون المعادلة الموجية التي يجب أستنتاجها معادلة تفاضلية خطية (من الرتبة الأولى) في الإحداثيات والزمن .

ولأشتقاق معادلة ديراك :

أقترح ديراك تعديل الهاملتونيان النسبي بحيث يكون خطياً في مشتقات الإحداثيات ، ولتنفيذ هذا الأقتراح : وضع ديراك الكمية الآتية كمربع كامل :

$$H^2=p^2c^2+m_0^2c^4=c^2\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)+m_0^2c^4$$
$$=c^2\left[p_x^2+p_y^2+p_z^2+m_0^2c^2\right] \text{\_\_\_\_(1)}$$

وذلك بكتابة :

$$\left[p_x^2+p_y^2+p_z^2+m_0^2c^2\right]$$
$$=\left(\alpha_x p_x+\alpha_y p_y+\alpha_z p_z+\beta\, m_0 c\right)^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

حيث المعاملات $\alpha_n = \alpha_x , \alpha_y , \alpha_z ; \beta$ يمكن إيجادها وهي ليست بالضرورة أعداداً عادية .

والآن : الطرف الأيمن في (2) :

$$\left(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta m_0 c\right)^2$$
$$=\left(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta m_0 c\right)\left(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta m_0 c\right)$$
$$= \alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_x \alpha_y p_x p_y + \alpha_x \alpha_z p_x p_z + \alpha_x \beta p_x m_0 c +$$
$$+ \alpha_y \alpha_x p_y p_x +$$
$$+ \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_y \alpha_z p_y p_z + + \alpha_y \beta p_y m_0 c + \alpha_z \alpha_x p_z p_x$$
$$+ \alpha_z \alpha_y p_z p_y +$$
$$+ \alpha_z^2 p_z^2 + \alpha_z \beta p_z m_0 c + \beta \alpha_x p_x m_0 c + \beta \alpha_y p_y m_0 c +$$
$$+ \beta \alpha_z p_z m_0 c + \beta^2 m_0^2 c^2$$

وبأخذ $\alpha_n = (\alpha_x , \alpha_y , \alpha_z) ; \beta$ تخضع للعلاقات التبادلية الآتية :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_x \alpha_y = -\alpha_y \alpha_x , \alpha_x \alpha_z = -\alpha_y \alpha_x , \alpha_y \alpha_z = -\alpha_z \alpha_y \\ \alpha_x \beta = -\beta \alpha_x \quad , \alpha_y \beta = -\beta \alpha_y \quad , \alpha_z \beta = -\beta \alpha_z \end{array}\right\} \text{\_(3)}$$

فإن الحدود التبادلية تتلاشى ، ونحصل على :

$$\left(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta m_0 c\right)^2$$
$$= \alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 + \beta m_0^2 c^2 \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

أيضاً : بأخذ :

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1 \qquad \text{\_\_\_\_(5)}$$

فإن العلاقة (2) تكون متحققة .

وبذلك نحصل على العلاقة الآتية (من (1)) :

$$H=\pm c\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2+m_0^2c^2}$$
$$=\pm c\left(\alpha_x p_x+\alpha_y p_y+\alpha_z p_z+\beta m_0 c\right)$$

وبأخذ الإشارة الموجبة :

$$H=c\left(\alpha_x p_x+\alpha_y p_y+\alpha_z p_z\right)+\beta m_0 c^2$$
$$=c\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right)+\beta m_0 c^2=-i\hbar c\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right)+\beta m_0 c^2 \quad \text{\_\_\_\_(6)}$$

$\vec{p}=-i\hbar\vec{\nabla}$ | ويعرف بهاملتونيان ديراك .

وتصبح معادلة ديراك بالصورة :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi=-i\hbar c\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi+\beta m_0 c^2\psi$$

$$\therefore \boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-i\hbar c\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi+\beta m_0 c^2\psi} \quad \text{\_\_\_\_(7)}$$

حيث $\vec{\alpha}=\alpha_n\,;\beta$ هي مؤثرات تحقق العلاقات (5) ، (3) ، وحيث أن المؤثرات يمكن التعبير عنها كمصفوفات ، فإن $\vec{\alpha}=\alpha_n\,;\beta$ يمكن كتابتها في صورة مصفوفات ، وتعرف عادة بمصفوفات ديراك Dirac Matrices .

خواص مصفوفات ديراك :

أقترح ديراك الخواص الآتية للمصفوفات $\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z,\beta$

(i) أن هذه المصفوفات هي مصفوفات هيرميتية ، حيث أنها تدخل في مؤثر هاملتون ، وهو مؤثر هيرميتي .

$$\therefore\ \alpha_n^+=\alpha_n \quad , \quad \beta^+=\beta$$

(ii) حيث أن $\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1$

[المعادلة (5)]

فإن القيمة الذاتية لكل من هذه المصفوفات تساوي (± 1) .

(iii) من العلاقات اللاتبادلية (3) :

$$\alpha_x \alpha_y = -\alpha_y \alpha_x \rightarrow \underbrace{\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = 0}_{\text{علاقة لا تبادلية}}$$

$$\alpha_x \beta = -\beta \alpha_x \rightarrow \underbrace{\alpha_x \beta + \beta \alpha_x = 0}_{\text{علاقة لا تبادلية}}$$

ومن هذه العلاقات يمكن إثبات أن أثر أي مصفوفة منها يساوي صفراً .

<u>فمثلاً</u> :

$$\alpha_x \beta = -\beta \alpha_x \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (1)$$

بالضرب من اليمين في β وإعتبار أن $\beta^2 = 1$:

$$\alpha_x \beta^2 = -\beta \alpha_x \beta \qquad \therefore \alpha_x = -\beta \alpha_x \beta$$

ومن خواص أثر المصفوفات فإن :

$$Tr\,ABC = Tr\,CAB$$

$$\therefore Tr\,\alpha_x = -Tr\,\beta \alpha_x \beta = -Tr\,\beta^2 \alpha_x = -T_r\,\alpha_x$$

$$\therefore 2\,Tr\,\alpha_x = 0 \rightarrow \boxed{Tr\,\alpha_x = 0}$$

وهذا معناه أن مجموع العناصر القطرية في المصفوفات α_x يساوي صفراً

وبالمثل فإن : $T_r\,\alpha_y = 0 \quad , \quad T_r\,\alpha_z = 0$

<u>أيضاً بالنسبة إلي</u> β : من (1) :

$$\alpha_x \beta = -\beta \alpha_x$$

فبالضرب من اليسار في $\alpha_x \leftarrow \alpha_x^2\,\beta = -\alpha_x\,\beta\,\alpha_x$

وبإعتبار $\alpha_x^2 = 1 \leftarrow$ $\quad \therefore\ \beta = -\alpha_x\,\beta\,\alpha_x$

$$\therefore\ Tr\,\beta = -Tr\,\alpha_x\,\beta\,\alpha_x = -Tr\,\alpha_x^2\,\beta = -Tr\,\beta$$

$$\therefore\ 2Tr\,\beta = 0 \qquad \rightarrow \boxed{Tr\,\beta = 0}$$

وحيث أن الأثر يعرف بأنه مجموع العناصر القطرية التي تمثل القيم الذاتية فـإن عدد القيم الذاتية الموجبة (+1) والسالبة (-1) يكون متساوياً حتى يكـون النـاتج يساوي صفراً ، وهذا يعني أن المؤثرات α_n, β يجـب أن تكـون مصـفوفات زوجية (even-dimensional) ← $N = 2$ وأبسط مصفوفة زوجية البعد هـي المصفوفة 2×2 .

<u>**وطبقاً للنظرية الآتية**</u> : أي مصفوفة إختيارية 2×2 يمكن التعبيرعنهـا كتركيبـة خطية من مصفوفات باولي $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ والمصـفوفة 2×2 الأحاديـة (I) ، فقد إختار ديراك التمثيل الآتي للمصفوفات α_n, β :

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

أو بإختصار :

$$\alpha_n = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_n \\ \sigma_n & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

وبالتعويض عن قيم I , $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ حيث :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نحصل على α_n, β كمصفوفات 4×4 كالتالي :

$$\alpha_x=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\quad,\quad \alpha_y=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\alpha_z=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\quad,\quad \beta=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

حل معادلة ديراك لجسيم حر (الحلول الموجية المستوية) :

حيث أن $\vec{\alpha}, \beta$ هي مصفوفات 4×4 فإن الدالة الموجية نفسها يجب أن تكون مصفوفة عمود ذات أربع مركبات :

$$\psi(\vec{r},t)=\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}$$

وبالتعويض في معادلة ديراك :

$$\left[c\,(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})+\beta m_0 c^2\right]\psi=E\,\psi$$

$$\therefore\left[c\,(\alpha_x p_x+\alpha_y p_y+\alpha_z p_z)+\beta m_0 c^2\right]\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}$$

وبالتعويض عن $\alpha_x , \alpha_y , \alpha_z , \beta$ بصورها المصفوفية :

$$\left[c\,p_x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\,p_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + c\,p_z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$= E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & cp_x \\ 0 & 0 & cp_x & 0 \\ 0 & cp_x & 0 & 0 \\ cp_x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -icp_x \\ 0 & 0 & icp_x & 0 \\ 0 & -icp_x & 0 & 0 \\ icp_x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c\,p_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c\,p_z \\ c\,p_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c\,p_z & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\left. + \begin{pmatrix} m_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_0 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_0 c^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} m_0c^2 & 0 & cp_z & cp_x - icp_y \\ 0 & m_0c^2 & cp_x + icp_y & -cp_z \\ cp_z & cp_x - icp_y & -m_0c^2 & 0 \\ cp_x + icp_y & -cp_z & 0 & -m_0c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$= E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

وبذلك نحصل على ٤ معادلات خطية في الدوال ψ .

$$m_0c^2\psi_1 + cp_z\psi_3 + c(p_x - ip_y)\psi_4 = E\psi_1 \qquad \text{\_\_\_\_} (1)$$

$$m_0c^2\psi_2 + c(p_x + ip_y)\psi_3 - cp_z\psi_4 = E\psi_2 \qquad \text{\_\_\_\_} (2)$$

$$cp_z\psi_1 + c(p_x - ip_y)\psi_2 - m_0c^2\psi_3 = E\psi_3 \qquad \text{\_\_\_\_} (3)$$

$$c(p_x + ip_y)\psi_1 - cp_z\psi_2 - m_0c^2\psi_4 = E\psi_4 \qquad \text{\_\_\_\_} (4)$$

نفرض الحلول المناظرة لهذه المعادلات في صورة معادلة موجية مستوية [ولذلك يطلق عليها الحلول الموجية المستوية] :

$$\psi_\mu(\vec{r},t) = U_\mu e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)} \qquad \text{\_\_\_\_} (5)$$

$$\mu = 1, 2, 3, 4$$

بالتعويض من (5) في (4) ، (3) ، (2) ، (1) نحصل بعد الأختصار على المعادلات الجبرية الآتية للدوال U_μ .

$$(E - m_0c^2)u_1 - cp_zu_3 - c(p_x - ip_y)u_4 = 0$$

$$(E - m_0c^2)u_2 - c(p_x + ip_y)u_3 + cp_zu_4 = 0$$

$$(E + m_0c^2)u_3 - c(p_x - ip_y)u_2 - cp_zu_1 = 0$$

$$(E + m_0c^2)u_4 + cp_zu_2 - c(p_x + ip_y)u_1 = 0$$

والتي يمكن كتابتها بالصورة :

$$\left.\begin{aligned}
(E-m_0c^2)u_1+0\cdot u_2-cp_zu_3-c(p_x-ip_y)u_4&=0\\
0\cdot u_1+(E-m_0c^2)u_2-c(p_x+ip_y)u_3+cp_zu_4&=0\\
-cp_zu_1-c(p_x-ip_y)u_2+(E+m_0c^2)u_3+0\cdot u_4&=0\\
-c(p_x+ip_y)u_1+cp_zu_2+0\cdot u_3+(E+m_0c^2)u_4&=0
\end{aligned}\right\}\ (6)$$

حل هذه المعادلات يستلزم أن يكون محدد معاملات المصفوفة يساوي صفراً .

$$\begin{vmatrix}
E-m_0c^2 & 0 & -cp_z & -c(p_x-ip_y)\\
0 & E-m_0c^2 & -c(p_x+ip_y) & cp_z\\
-cp_z & -c(p_x-ip_y) & E+m_0c^2 & 0\\
-c(p_x+ip_y) & cp_z & 0 & E+m_0c^2
\end{vmatrix}=0$$

وبفك هذا المحدد نحصل على :

$$\left(E^2-m_0^2c^4-c^2p^2\right)=0 \qquad \_\_\_\_\_(7)$$

$\therefore \boxed{E^2=c^2p^2+m_0^2c^4}$; وهي العلاقة النسبية المعروفة بين E,P

$$\therefore E=\pm\sqrt{c^2p^2+m_0^2c^4}=E_\pm$$

وهذا يعني أن هناك قيمتان للطاقة أحدهما موجبة E_+ والأخرى سالبة E_- .

<u>باعتبار E_+</u> : من المعادلات (6) :

بأخذ : $u_1=1\ ,\ u_2=0$

$$\therefore u_3=\frac{cp_z}{E_++m_0c^2}\quad ,\quad u_4=\frac{c(p_x+ip_y)}{E_++m_0c^2}$$

بأخذ : $u_1=0\ ,\ u_2=1$

$$\therefore u_3=\frac{c(p_x-ip_y)}{E_++m_0c^2}\quad ,\quad u_4=\frac{-cp_z}{E_++m_0c^2}$$

باعتبار E_ : من المعادلات (6) :

بأخذ : $u_3 = 1 \ , \ u_4 = 0$

$$\therefore u_1 = \frac{c p_z}{E_- - m_0 c^2} \quad , \quad u_2 = \frac{c(p_x + i p_y)}{E_- - m_0 c^2}$$

بأخذ : $u_3 = 0 \ , \ u_4 = 1$

$$\therefore u_1 = \frac{c(p_x - i p_y)}{E_- - m_0 c^2} \quad , \quad u_4 = \frac{-c p_z}{E_- - m_0 c^2}$$

وبذلك نكون قد حصلنا على الحلول الأربعة بالصورة :

$$u^{(1)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{c p_z}{E_+ + m_0 c^2} \\ \dfrac{c(p_x + i p_y)}{E_+ + m_0 c^2} \end{pmatrix} \quad , \quad u^{(2)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{c(p_x - i p_y)}{E_+ + m_0 c^2} \\ \dfrac{-c p_z}{E_+ + m_0 c^2} \end{pmatrix}$$

[في حالة الطاقة الموجبة E_+]

$$v^{(1)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{c p_z}{E_- - m_0 c^2} \\ \dfrac{c(p_x + i p_y)}{E_- - m_0 c^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v^{(2)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{c(p_x - i p_y)}{E_- - m_0 c^2} \\ \dfrac{-c p_z}{E_- - m_0 c^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[في حالة الطاقة الموجبة E_-]

الدوال $v^{(2)}$, $v^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(1)}$ وهي مصفوفات عمود تعرف بملفوفات ديراك (Dirac Spinors) .

الملفوفات $u^{(r)}(\bar{p})$ حيث $r=1,2$ هي ملفوفات الطاقة الموجبة ، حيث

$u^{(1)}$ تصف الجسيمات ذات اللف أعلى up-spin .

$u^{(2)}$ تصف الجسيمات ذات اللف أسفل down-spin .

الملفوفات $v^{(r)}(\bar{p})$ حيث $r=1,2$ هي ملفوفات الطاقة السالبة ، حيث

$v^{(1)}$ تصف الجسيمات ذات اللف أعلى .

$v^{(2)}$ تصف الجسيمات ذات اللف أسفل .

ويصبح حل معادلة ديراك للجسيم الحر من المعادلة :

$$\psi_\mu(\vec{r},t)=u_\mu e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-wt)}$$

هو حاصل ضرب ملفوفات ديراك في المعامل $\exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-wt)\right]$.

حالة خاصة :

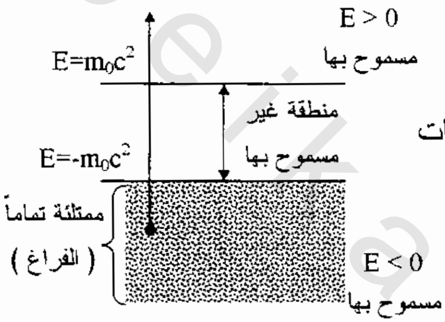
إذا كان الجسيم في حالة سكون : $\bar{p}=0$ فإن الملفوفات الأربعة تأخذ الصورة المبسطة الآتية :

الطاقة E	$+m_0c^2$	$+m_0c^2$	$-m_0c^2$	$-m_0c^2$
الملفوف	$u^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	$u^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$	$v^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$	$v^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$
اللف	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

تفسير ديراك لوجود الطاقة السالبة :

نظرية الثقب أو الفجوة (hole theory) :

(i) في نظرية ديراك فإن الحالة الأرضية (ground state) للذرة ليست هي أقل الحالات طاقة حيث يوجد متصل من الحالات ذات الطاقة السالبة من $(-m_0c^2)$ إلى $(-\infty)$ بمعنى أنه لا يوجد حد أدنى للحالات الطاقوية السالبة .



(ii) أقترح ديراك أن كل حالات الطاقة السالبة تكون ممتلئة تماماً بالإلكترونات تحت الشروط المعتادة .

وطبقاً لمبدأ باولي للأستبعاد فإن : إنتقال الإلكترون ذو الطاقة الموجبة إلى تلك الحالات المشغولة يكون ممنوعاً .

وتعرف الحالة الممتلئة تماماً بالحالات ذات الطاقة السالبة بالفراغ (Vacuum) .

(iii) لما كانت الإلكترونات ذات الطاقة الموجبة لا تستطيع الإنتقال إلى الحالات الممتلئة السالبة فلا مانع للإلكترون ذو الطاقة السالبة $(E_i < 0)$ أن يمتص فوتوناً ذو طاقة كافية فيتحول من حالة الطاقة السالبة إلى حالة ذات طاقة موجبة $(E_f > 0)$ وبالتالي فإن فجوة (hole) ذات طاقة موجبة $(E_i > 0)$ سوف تظهر في الفراغ الممتلئ بالحالات السالبة .

وهذه الفجوة فسرها ديراك بأنها جسيم ذو شحنة موجة (+e) وطاقة موجبة وقد تم إكتشاف هذا الجسيم بعد ٦ سنوات من نظرية ديراك وذلك بواسطة أندرسون وأطلق على هذا الجسيم إسم البوزترون .

وتعرف هذه النظرية بنظرية الفجوة أو الثقب .

عملية إنتاج الزوج (Pair production) طبقاً لنظرية الفجوة :

إن إمتصاص فوتون ذو طاقة كافية بواسطة إلكترون ذو طاقة سالبة $e^-(E_i < 0)$ سوف يحوله إلى حالة ذات طاقة موجبة $e^-(E_f > 0)$

$$e^- \underline{(E_i < 0)} + photon \rightarrow e^- (E_f > 0)$$

وطبقاً لنظرية الفجوة فإن هذا التحول ينتج عنه فجوة (أو ثقب) هو عبارة عن جسيم ذو طاقة موجبة $e^+(E_i > 0)$ ، ويكون الناتج هو ظهور نظام مكون من إلكترون ذو طاقة موجبة $(E_f > 0)$ وبوزترون ذو طاقة موجبة $(E_i > 0)$

$$photon \rightarrow e^- (E_f > 0) + e^+ \underline{(E_i > 0)}$$

[وهذا يعني التحول : $e^- (E_i < 0) \rightarrow e^+ (E_i > 0)$]

ويعرف هذا بعملية إنتاج الزوج ، أي عملية إنتاج الفوتون لزوج إلكترون – بوزترون .

عملية فناء الزوج (Pair annihilation) طبقاً لنظرية الفجوة :

إذا قام الإلكترون ذو الطاقة الموجبة $(E_f > 0)$ بملئ الفجوة (التي هي عبارة عن البوزترون ذو الطاقة الموجبة $(E_i > 0)$ فإن الإلكترون والبوزترون يختفيان وينبعث فوتون طاقته أكبر من مجموع طاقتي الإلكترون والبوزترون . $(E >> 2m_0 c^2)$

وتعرف هذه العملية بفناء الزوج ، وهي عكس العملية السابقة

$$e^- (E_f > 0) + e^+ \underline{(E_i > 0)} \rightarrow photon$$

وقد تم مشاهدة هاتين العمليتين بالتجارب المعملية .

معادلة الأتصال (كثافة الشحنة والتيار في معادلة ديراك) :

الدالة الموجية لديراك يمكن كتابتها في صورة ملفوف (مصفوفة عمود) ذو أربعة مركبات

$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ ويكون المرافق الهيرميتي لها عبارة عن مصفوفة صف :

$$\psi^+ = \left(\psi_1^* \psi_2^* \psi_3^* \psi_4^* \right)$$

معادلة ديراك يمكن كتابتها بالصورة :

$$-i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + m_0 c^2 \beta\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad \text{\_\_\_\_ (1)}$$

بأخذ المرافق الهيرميتي لها :

$$i\hbar c\vec{\nabla}\psi^+\cdot\vec{\alpha} + m_0 c^2 \psi^+ \beta = -i\hbar\frac{\partial\psi^+}{\partial t} \qquad \text{\_\_\_\_ (2)}$$

[حيث $\vec{\alpha}^+ = \vec{\alpha}$, $\beta^+ = \beta$]

والآن : بضرب (1) من اليسار في ψ^+ و (2) من اليمين في ψ نحصل على :

$$-i\hbar c\psi^+\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + m_0 c^2 \psi^+\beta\psi = i\hbar\,\psi^+\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad \text{\_\_\_\_ (3)}$$

$$i\hbar c\vec{\nabla}\psi^+\cdot\vec{\alpha}\psi + m_0 c^2 \psi^+\beta\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi^+}{\partial t}\psi \qquad \text{\_\_\_\_ (4)}$$

بطرح (3) من (4) نحصل على :

$$-i\hbar c\left(\psi^+\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla}\psi^+\cdot\vec{\alpha}\psi\right) = i\hbar\left(\psi^+\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi^+}{\partial t}\psi\right)$$

$$-i\hbar c\vec{\nabla}\cdot(\underbrace{\psi^+\vec{\alpha}}\,\underbrace{\psi}) = i\hbar\frac{\partial(\psi^+\psi)}{\partial t}$$

[حيث : من المتجهات $\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}\psi)=\phi\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi+\vec{A}\psi\cdot\vec{\nabla}\phi$]

$$c\vec{\nabla}\cdot(\psi^{+}\vec{\alpha}\psi)+\frac{\partial(\psi^{+}\psi)}{\partial t}=0$$

وبكتابة : $\vec{J}=c(\psi^{+}\vec{\alpha}\psi)$, $\rho=\psi^{+}\psi$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة في صورة نسبية (رباعية) :

وذلك بإدخال المصفوفات : $\vec{\gamma}=-i\beta\vec{\alpha}$, $\gamma_4=\beta$

والرمز $\bar{\psi}=\psi^{+}\gamma_4$ ، فنحصل على :

$$\rho=\psi^{+}\psi=\bar{\psi}\gamma_4\psi\rightarrow J_4=ic\rho=ic(\bar{\psi}\gamma_4\psi)$$

$$\left[\gamma_4^2=1\leftarrow\psi^{+}=\bar{\psi}\gamma_4\right]$$

$$\vec{J}=c(\psi^{+}\vec{\alpha}\psi)=c(\bar{\psi}\gamma_4\vec{\alpha}\,\psi)=ic(\bar{\psi}\vec{\gamma}\psi)=ic(\bar{\psi}\gamma_n\psi)$$

$$\left[i\vec{\gamma}=\beta\vec{\alpha}=\gamma_4\vec{\alpha}\leftarrow\vec{\gamma}=-i\beta\vec{\alpha}\right]$$

وبذلك تتحول معادلة الإتصال إلى :

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_1}+\frac{\partial J_2}{\partial x_2}+\frac{\partial J_3}{\partial x_3}+\frac{\partial(ic\rho)}{\partial(ict)}=0$$

$$\therefore\ \frac{\partial J_n}{\partial x_n}+\frac{\partial J_4}{\partial x_4}=0$$

$$\boxed{\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=0}\qquad\rightarrow\ \mu=1,2,3,4$$

أمثلة محلولة على معادلة ديراك :

مثـــال (١) : بإســـتخدام هاملتونيـــان ديـــراك لجســـيم حـــر وصـــورته $\hat{H}=c(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})+m_0c^2\beta$ ، أثبـــت أن مـــؤثر كميـــة الحركـــة الزاويـــة $\hat{\vec{L}}=\vec{r}\wedge\vec{p}$ لا يمثل ثابتاً للحركة ، بينما مؤثر كمية الحركة الزاوية الكلية $\vec{J}=\vec{L}+\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}'$ يكون ثابتاً للحركة حيـــث $\vec{\sigma}'=\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix}$ ، $\vec{\sigma}$ هي مصفوفات باولي .

الحل:المؤثر $\hat{\vec{L}}$ في ميكانيكا الكم اللانسبية (شرودنجر) يمثل ثابتاً للحركـــة ، أي يكون متبادلاً مع الهاملتونيـــان $\hat{H}$ ، أمـــا فـــي الميكانيكـــا الكميـــة النســـبية (ديراك) فالأمر مختلف ، حيث $\hat{L}$ لا يمثل ثابتاً للحركة ، ولإثبات ذلك :

نأخذ المركبة $\hat{L}_x$ للتبسيط :

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_x,H\right] &= \hat{L}_x H - H L_x \\
&= \left[\hat{L}_x, c(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})+m_0c^2\beta\right] \\
&= \hat{L}_x\left[c(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})+m_0c^2\beta\right]-\left[c(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})+m_0c^2\beta\right]\hat{L}_x \\
&= \hat{L}_x\left[c(\alpha_x p_x+\alpha_y p_y+\alpha_z p_z)+m_0c^2\beta\right] \\
&\quad -\left[c(\alpha_x p_x+\alpha_y p_y+\alpha_z p_z)+m_0c^2\beta\right]\hat{L}_x
\end{aligned}$$

ولكن : $\hat{L}_x$ تتبادل مع p_x ومع β

$$\left[\hat{L}_x,p_x\right]=0\ ,\ \left[\hat{L}_x,\beta\right]=0$$

ولا تتبادل مع p_y أو p_z

$$\begin{aligned}
\therefore\ \left[\hat{L}_x,H\right] &= \hat{L}_x\left[c(\alpha_y p_y+\alpha_z p_z)\right]-\left[c(\alpha_y p_y+\alpha_z p_z)\right]\hat{L}_x \\
&= c\left[\alpha_y(\hat{L}_x p_y - p_y\hat{L}_x)+\alpha_z(\hat{L}_x p_z - p_z\hat{L}_x)\right] \\
&= c\left\{\alpha_y\left[\hat{L}_x,p_y\right]+\alpha_z\left[\hat{L}_x,p_z\right]\right\} \qquad ____(1)
\end{aligned}$$

ولكن :

$$\therefore \left[\hat{L}_x, p_y\right] = \hat{L}_x p_y - p_y \hat{L}_x$$

$$= (y p_z + z p_y) p_y - p_y (y p_z + z p_y)$$

$$= y p_z p_y - z p_y^2 - p_y y p_z + p_y z p_y$$

$$= y p_z p_y - z p_y^2 - p_y y p_z + z p_y^2$$

$$= y \underbrace{p_z p_y} - p_y y p_z = y \underbrace{p_y p_z} - p_y y p_z$$

$$= (y p_y - p_y y) P_z = i\hbar p_z$$

حيث :

$$\hat{L}_x = y p_z - z p_y \quad , \quad p_y z = z p_y \rightarrow \left[z, p_y\right] = 0$$

$$p_z p_y = p_y p_z \rightarrow \left[p_y, p_z\right] = 0$$

$$\left[y, p_y\right] = y p_y - p_y y = i\hbar$$

$$\left[z, p_z\right] = z p_z - p_z z = i\hbar$$

أيضاً :

$$\left[\hat{L}_x, p_z\right] = \hat{L}_x p_z - p_z \hat{L}_x$$

$$= (y p_z - z p_y) p_z - p_z (y p_z - z p_y)$$

$$= y p_z^2 - z p_y p_z - p_z y p_z + p_z z p_y$$

$$= y p_z^2 - z p_y p_z - y p_z^2 + p_z z p_y$$

$$= - z p_y p_z + p_z z p_y = - z p_z p_y + p_z z p_y$$

$$= -(z p_z - p_z z) p_y = - i\hbar p_y$$

حيث أستخدمنا العلاقات التبادلية الآتية :

$$[p_x , p_y] = 0 \quad , \quad [p_y , p_z] = 0 \quad , \quad [p_z , p_x] = 0$$

$$[x \, , \, p_y] = 0 \quad , \quad [y \, , \, p_z] = 0 \quad , \quad [z \, , \, p_x] = 0$$

$$[x \, , \, p_x] = [y \, , \, p_y] = [z \, , \, p_z] = i\hbar$$

وتصبح العلاقة (1) :

$$[\hat{L}_x , H] = c\left\{ \alpha_y (i\hbar \, p_z) + \alpha_z (-i\hbar \, p_y) \right\}$$

$$= i\hbar c(\alpha_y p_z - \alpha_z \, p_y) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

من (2) يتضح أن :

$[\hat{L}_x , H] \neq 0$ وهذا يعني أن $\hat{L}_x$ لا تمثل للحركة .

وبالمثل فإن $\hat{L}_y , \hat{L}_z$ لا تمثل ثوابت للحركة .

$\therefore$ $\hat{\vec{L}}$ لا يمثل ثابتاً للحركة .

والآن : نثبت أيضاً أن المؤثر $\vec{\sigma}'$ لا يمثل هو الآخر ثابتاً للحركة أي $[\vec{\sigma}' , H] \neq 0$ ، بينما المؤثر $\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}'$ يكون ثابتاً للحركة ،

حيث $\vec{\sigma}' = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$.

الإثبات : نأخذ المركبة x للمؤثر $\vec{\sigma}'$ ، حيث :

$$\sigma'_x = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}$$

ومن الممكن إثبات أن :

(١) σ'_x يتبادل مع المؤثر β : $[\sigma'_x , \beta] = 0$

(٢) σ'_x يتبادل مع α_x : $[\sigma'_x \, , \alpha_x] = 0$

(٣) σ'_x لا يتبادل مع α_y,α_z بحيث أن :

$$[\sigma'_x , \alpha_y] = 2i\alpha_z \quad , [\sigma'_x , \alpha_z] = -2i\alpha_y$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

<u>ولنحسب المبدول</u> $[\sigma'_x, H]$:

$$\begin{aligned}
[\sigma'_x , H] &= [\sigma'_x , c(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}) + m_0 c^2 \beta] \\
&= [\sigma'_x , c(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})] \\
&= [\sigma'_x , c(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z)] \\
&= [\sigma'_x , c(\alpha_y p_y + \alpha_z p_z)] \\
&= c\{ \sigma'_x (\alpha_y p_y + \alpha_z p_z) - (\alpha_y p_y + \alpha_z p_z)\sigma'_x \} \\
&= c\{ \sigma'_x \alpha_y p_y + \sigma'_x \alpha_z p_z - \alpha_y p_y \sigma'_x - \alpha_z p_z \sigma'_x \} \\
&= c\{ \sigma'_x \alpha_y p_y + \sigma'_x \alpha_z p_z - \alpha_y \sigma'_x p_y - \alpha_z \sigma'_x p_z \} \\
&= c\{ (\sigma'_x \alpha_y - \alpha_y \sigma'_x) p_y - (\sigma'_x \alpha_z - \alpha_z \sigma'_x) p_z \} \\
&= c\{ [\sigma'_x , \alpha_y] p_y - [\sigma'_x , \alpha_z] p_z \} \\
&= c\{ (2i\alpha_z) p_y - (-2i\alpha_y) p_z \} \\
&= 2ic(\alpha_x p_y - \alpha_y p_z) \\
&= -2ic(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y) \qquad ______(3)
\end{aligned}$$

حيث أستخدمنا العلاقات : $[\sigma'_x , p_z] = 0$, $[\sigma'_x , p_y] = 0$

$$\sigma'_x p_z = p_z \sigma'_x \qquad\qquad \sigma'_x p_y = p_y \sigma'_x$$

من (3) يتضح أن $\left[\vec{\sigma}'_x, H\right] \neq 0$ أي أن σ'_x لا يمثل ثابتاً للحركة .

وبالمثل فإن σ'_z , σ'_y لا تمثل ثوابت للحركة أي أن $\vec{\sigma}'$ لا يمثل ثابتاً للحركة:

$$\left[\vec{\sigma}', H\right] \neq 0$$

والآن : نعتبر المؤثر $\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}'$:

من (2) :

$$\left[\hat{L}_x, H\right] = ic\hbar\left(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

ومن (3) :

$$\left[\sigma'_x, H\right] = -2ic\left(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(3)$$

بضرب (3) في $-\frac{1}{2}\hbar$ وأستخدام (2) :

$$\therefore\ -\frac{1}{2}\hbar\left[\sigma'_x, H\right] = ic\hbar\left(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y\right) = \left[L_x, H\right]$$

$$\therefore \left[L_x, H\right] + \frac{1}{2}\hbar\left[\sigma'_x, H\right] = 0$$

$$\therefore \left[L_x + \frac{1}{2}\hbar\sigma'_x, H\right] = 0$$

$$\boxed{\left[J_x, H\right] = 0} \quad , \quad J_x = L_x + \frac{1}{2}\hbar\sigma'_x$$

وهذا يعني أن J_x تمثل ثابتاً للحركة .

وبالمثل يمكن إثبات أن J_z J_y تمثل ثوابت للحركة .

$\therefore$ $\vec{J}$ تمثل ثابتاً ← $\boxed{\left[\vec{J}, H\right] = 0}$

حيث $\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}'$ يمثل مؤثر كمية الحركة الزاوية الكلية لجسيم ديراك

وبكتابة $\vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}'$ فإن : $\boxed{\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}}$

مثال (٢) : بإستخدام معادلة ديراك النسبية ، أثبت وجود خاصية اللف للإلكترونات .

الحل :

من مثال (١) وجدنا أن تطبيق مؤثر هاملتون لديراك وصورته $H = c(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}) + m_0 c^2 \beta$ [للجسيم الحر] يؤدي إلى أن مؤثر كمية الحركة الزاوية المدارية $\vec{L}$ لا يمثل ثابتاً للحركة وبأخذ المركبة x للمؤثر $\vec{L}$ وجدنا أن :

$$[L_x, H] = ic\hbar(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y) \neq 0$$

وبالتالي يمكن إضافة كمية (هي في الواقع مؤثر) إلى $\vec{L}$ وتكون من نفس نوعه (أي كمية حركة زاوية) بحيث أن مجموعهما يكون ثابتاً للحركة ، وقد رمزنا لهذا المؤثر الجديد بالرمز $\vec{\sigma}'$ وبإعتبار المركبة x له وجدنا أن :

$$[\sigma'_x, H] = -2ic(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y) \neq 0$$

وبكتابة معادلة هيزنبرج للحركة للمؤثر L_x :

$$i\hbar\frac{dL_x}{dt} = [L_x, H] = i\hbar c(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y)$$

$$\therefore \frac{dL_x}{dt} = c(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y) \qquad \text{(1)}$$

وللمؤثر σ'_x :

$$i\hbar\frac{d\sigma'_x}{dt} = [\sigma'_x, H] = -2ic(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y)$$

$$\therefore \frac{d\sigma'_x}{dt} = -\frac{2c}{\hbar}(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y)$$

وبالضرب في $-\frac{1}{2}\hbar$:

$$\therefore -\frac{1}{2}\hbar\frac{d\sigma'_x}{dt} = c(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y) \qquad \text{(2)}$$

من (2) ، (1) :

$$\frac{dL_x}{dt} = -\frac{1}{2}\hbar\frac{d\sigma'_x}{dt}$$

$$\therefore \frac{dL_x}{dt} + \frac{1}{2}\hbar\frac{d\sigma'_x}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left[L_x + \frac{1}{2}\hbar\,\sigma'_x\right] = 0$$

وبكتابة $J_x = L_x + \frac{1}{2}\hbar\,\sigma'_x$ ، فإن :

$$\frac{dJ_x}{dt} = 0$$

ومن هذا نرى أن J_x يمثل ثابتاً للحركة ، وبإعتبار المركبتين $J_y\,J_z$ فإن :

$$\boxed{\frac{d\vec{J}}{dt} = 0}$$

حيث $\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}'$

الكمية $\frac{1}{2}\hbar\,\vec{\sigma}'$ المضافة إلى كمية الحركة الزاوية المدارية تمثل أيضاً كمية حركة زاوية ، وكنها ليست مدارية وقد أشير إليها بأنها تمثل كمية حركة زاوية لفية (أو لف) وذلك حيث أن الإلكترون في حركته لـه نوعان من الحركة الزاوية : مدارية (في مداره) ويمثلها $\vec{L}$ ، ولفيه (حول محورة) ، فلابد أن الكمية ($\frac{1}{2}\hbar\,\vec{\sigma}'$) تمثل هذا النوع من الحركة ولنرمز إليها بالرمز $\vec{S}$

$$\therefore\ \vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\,\vec{\sigma}'$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}}$

وتكون معادلة ديراك النسبية بذلك قد تنبأت بوجود اللف الإلكتروني .

<u>مثال (٣)</u> : بإستخدام معادلة ديراك النسبية لجسيم حر ، أثبت الآتي :

(i) الكمية (S^2) تمثل ثابتاً للحركة حيث : $\vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\,\vec{\sigma}'$

(ii) الكمية $k = \beta(\vec{\sigma}' \cdot \vec{L} + \hbar)$ هي الآخرى تمثل ثابتاً للحركة .

حيث : $\vec{\sigma}' = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$

<u>الحل</u> :

(i) <u>إثبات أن (S^2) تمثل ثابتاً للحركة</u> :

$$H = c(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + m_0 c^2 \beta$$

$$[S^2, H] = [S_x^2 + S_y^2 + S_z^2, H]$$

$$= [S_x^2, H] + [S_y^2, H] + [S_z^2, H] \qquad \text{——— (1)}$$

والآن : بإستخدام العلاقة :

$$[AB, H] = A[B,H] + [A,H]B$$

$$\therefore [S_x^2, H] = [S_x S_x, H] = S_x [S_x, H] + [S_x, H] S_x \qquad \text{——— (2)}$$

وحيث أن :

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \text{ وبأخذ } \sigma'_x = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}$$

$$\therefore \rho_1 \sigma'_x = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix} = \alpha_x$$

$$\therefore \alpha_x = \rho_1 \sigma'_x \qquad \rightarrow \boxed{\sigma'_x = \rho_1 \alpha_x}$$

حيث $\rho_1^2 = 1$

$$\therefore \quad S_x = \frac{1}{2}\hbar\ \sigma'_x = \frac{1}{2}\hbar\ \rho_1 \alpha_x$$

$$\therefore \left[S_x , H\right]=\frac{1}{2}\hbar\left[\sigma'_x , H\right]=\frac{1}{2}\hbar\, \rho_1\left[\alpha_x , H\right]=\frac{1}{2}\hbar\, \rho_1\left[\alpha_x , c(\vec{\alpha},\vec{p})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\hbar\, c\rho_1\left[\alpha_x , (\alpha_x p_x+\alpha_y p_y+\alpha_z p_z)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\hbar c\, \rho_1\left[\alpha_x , (\alpha_y p_y+\alpha_z p_z)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\hbar c\, \rho_1\left\{\alpha_x\ (\alpha_y p_y+\alpha_z p_z)-(\alpha_y p_y+\alpha_z p_z)\alpha_x\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\hbar c\, \rho_1\left\{\alpha_x\ (\alpha_y p_y+\alpha_z p_z)-(\alpha_y \alpha_x p_y+\alpha_z \alpha_x p_z)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\hbar c\, \rho_1\left\{\alpha_x\ (\alpha_y p_y+\alpha_z p_z)+(\alpha_x \alpha_y p_y+\alpha_x \alpha_z p_z)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\hbar c\, \rho_1\left\{2\alpha_x\ (\alpha_y p_y)+2\alpha_x(\alpha_z p_z)\right\}$$

$$=\ \hbar c\, \rho_1\left\{\alpha_x \alpha_y p_y+\alpha_x \alpha_z p_z\right\}$$

$$\therefore\ S_x\left[S_x , H\right]=\frac{1}{2}\hbar^2 c\rho_1^2\left\{\alpha_x\alpha_x \alpha_y p_y+\alpha_x\alpha_x \alpha_z p_z\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\hbar^2 c\left\{\alpha_y p_y+\alpha_z p_z\right\} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(3)$$

حيث أستخدمنا العلاقات :

$$\left[\alpha_x , \beta\right]=0 \qquad , \qquad \left[\alpha_x , p_x\right]=0$$

$$\alpha_x\alpha_y+\alpha_y\alpha_x=0 \rightarrow \alpha_x\alpha_y=-\alpha_y\alpha_x$$

$$\left[\alpha_x , p_y\right]=0 \qquad , \qquad \left[\alpha_x , p_z\right]=0$$

$$\rho_1^2=1 \qquad , \qquad \alpha_x^2=1$$

أيضاً :

$$\left[S_x , H\right] S_x = \frac{1}{2}\hbar^2 c\rho_1^2 \left\{ \alpha_x\alpha_y p_y \alpha_x + \alpha_x\alpha_z p_z \alpha_x \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\hbar^2 c \left\{ \alpha_x\alpha_y \alpha_x p_y + \alpha_x\alpha_z \alpha_x p_z \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\hbar^2 c \left\{ -\alpha_x\alpha_x \alpha_y p_y - \alpha_x\alpha_x \alpha_z p_z \right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\hbar^2 c \left\{ \alpha_y p_y + \alpha_z p_z \right\} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(4)$$

حيث أستخدمنا العلاقات :

$$\left[\alpha_x , p_y\right] = 0 \rightarrow \alpha_x \alpha_y = \alpha_y \alpha_x$$

$$\alpha_x \alpha_y = -\alpha_y \alpha_x \quad , \quad \alpha_x \alpha_z = -\alpha_z \alpha_x$$

بالتعويض من (4) ، (3) في (2) :

$$\therefore \left[S_x^2 , H\right]$$

$$= \frac{1}{2}\hbar^2 c \left\{ \alpha_y p_y + \alpha_z p_z \right\} - \frac{1}{2}\hbar^2 c \left\{ \alpha_y p_y + \alpha_z p_z \right\} = 0$$

وبالمثل فإن :

$$\left[S_x^2 , H\right] = 0 \quad , \quad \left[S_z^2 , H\right] = 0$$

وتصبح (1) :

$$\left[S^2 , H\right] = \left[S_x^2 , H\right] + \left[S_y^2 , H\right] + \left[S_z^2 , H\right] = 0$$

أي أن S^2 يمثل ثابتاً للحركة .

(ii) **إثبات أن $k=\beta(\vec{\sigma}'\cdot\vec{L}+\hbar)$ يمثل ثابتاً للحركة .**

$$[k,H]=\left[k,c\,(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})+m_0c^2\beta\right] \qquad \Big|\ [k,\beta]=0$$

$$=\left[k,c\,(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\right]=\left[\beta(\vec{\sigma}'\cdot\vec{L}+\hbar),c\,(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\right]$$

$$=c\left[\beta(\vec{\sigma}'\cdot\vec{L})\ ,\ (\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\right]+\beta c\hbar(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}) \qquad \_\_\_\_(1)$$

ولكن :

$$\left[\beta\vec{\sigma}'\cdot\vec{L},\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right]=\beta(\vec{\sigma}'\cdot\vec{L})(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})-\underbrace{(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\ \beta}(\vec{\sigma}'\cdot\vec{L})$$

$$=\beta(\vec{\sigma}'\cdot\vec{L})(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})+\underbrace{\beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})}(\vec{\sigma}'\cdot\vec{L}) \_\_(2)$$

$$\Big|\ (\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\ \beta=-\ \beta\,(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})$$

ومن العلاقة التي تربط المؤثرين $\vec{A},\vec{B}$ اللذان يتبادلان مع $\vec{\sigma}'$ مع المؤثر $\vec{\alpha}$

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{A})\ (\vec{\sigma}'\cdot\vec{B})=\rho_1\ (\vec{A}\cdot\vec{B})+i\vec{\alpha}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$$

$$(\vec{\sigma}'\cdot\vec{A})\ (\vec{\alpha}\cdot\vec{B})=\rho_1\ (\vec{B}\cdot\vec{A})+i\vec{\alpha}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{A}) \qquad \Big|\ \rho_1=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}$$

يمكن كتابة العلاقة (2) بالصورة :

$$\therefore\left[\beta\vec{\sigma}'\cdot\vec{L},\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right]$$

$$=\beta\left[\rho_1(\vec{L}\cdot\vec{p})+i\vec{\alpha}\cdot(\vec{L}\wedge\vec{p})+\rho_1(\vec{p}\cdot\vec{L})+i\vec{\alpha}\cdot(\vec{p}\wedge\vec{L})\right]$$

$$=\beta\left[\rho_1(\vec{L}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot\vec{L})+i\vec{\alpha}\cdot(\vec{L}\wedge\vec{p}+\vec{p}\wedge\vec{L})\right] \qquad \_\_(3)$$

ولكن : $\vec{p}\cdot\vec{L}=\vec{p}\cdot(\vec{r}\wedge\vec{p})=0\ ,\ \vec{L}\cdot\vec{p}=(\vec{r}\wedge\vec{p})\cdot\vec{p}=0$

أيضاً :

$$\vec{L}\wedge\vec{p}+\vec{p}\wedge\vec{L}=(\vec{r}\wedge\vec{p})\wedge\vec{p}+\vec{p}\wedge(\vec{r}\wedge\vec{p})$$

$$=\left\{-\vec{r}p^2+(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{p}\right\}+\left\{\vec{r}p^2+(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{p}\right\}$$

$$=\left\{(\vec{r}\cdot\vec{p}-\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{p}\right\}=i\hbar\vec{p}$$

حيث :

$$(\vec{r}\cdot\vec{p}-\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{p}=\underbrace{[\vec{r},\vec{p}]}_{i\hbar''}\ \vec{p}=i\hbar\vec{p}$$

وتصبح (3) :

$$\therefore\left[\beta\vec{\sigma}'\cdot\vec{L}\,,\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right]\ =\beta\left[i\vec{\alpha}\cdot(i\hbar\vec{p})\right]=-\beta\hbar(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})$$

وبالتعويض في (1) :

$$\left[k,H\right]\ =-c\beta\hbar(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})+\beta c\hbar(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})=0\quad\rightarrow\boxed{\left[k,H\right]\ =0}$$

وهذا يعني أن k يتبادل مع H أي أنه ثابت للحركة ، وهو المطلوب .

مثال (4) : التفاعل بين الإلكترون والمجال الكهرومغنطيسي

بإعتبار التفاعل بين الإلكترون مع المجال الكهرومغنطيسي الذي جهديه $\vec{A}\,,\phi$ ، وبإستخدام معادلة ديراك النسبية والعلاقة :

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$$

كيف تحصل على معادلة باولي التي تشتمل على التفاعل بين العزم المغنطيسي للإلكترون $\vec{\mu}=\dfrac{e\hbar}{2m_0c}\vec{\sigma}$ والحث المغنطيسي للمجال $\vec{B}$.

الحل :

إن تفاعل الإلكترون مع المجال الكهرومغنطيسي الذي جهديه القياسي ϕ والإتجاهي $\vec{A}$ يستلزم إستبدال المؤثرين :

$$\vec{p}\rightarrow\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\quad,\quad E\rightarrow E-e\phi$$

نكتب دالة ديراك ذات الأربعة مركبات بدلالة دوال ذات مركبتين :

$$\psi_A=\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}\quad,\quad\psi_B=\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix},\ \psi=\begin{pmatrix}\psi_A\\\psi_B\end{pmatrix}\qquad\_\_\_\_(1)$$

وبذلك فإن معادلة ديراك يمكن كتابتها بالصورة الآتية (بدلالة مصفوفات ديراك) :

$$c\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} m_0 c^2 \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

$$= E\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

$$\left[c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\psi_A = (E+m_0 c^2)\psi_B \ , \ c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\psi_B = (E-m_0 c^2)\psi_A\right]$$

وفي وجود المجال الكهرومغنطيسي فإن المعادلة (2) تصبح :

$$c\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}) \\ \vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} m_0 c^2 \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

$$= (E-e\phi)\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(3)$$

$$\left[c\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-\tfrac{e}{c}\vec{A})\,\psi_A = (E-e\phi+m_0 c^2)\,\psi_B \ ,\right.$$
$$\left. c\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-\tfrac{e}{c}\vec{A})\psi_B = (E-e\phi-m_0 c^2)\,\psi_A\right].$$

وبكتابة $\vec{\pi} = \vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}$ فإننا نحصل على المعادلتين :

$$c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\psi_A = (E-e\phi+m_0 c^2)\,\psi_B \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(4)$$

$$c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\psi_B = (E-e\phi-m_0 c^2)\,\psi_A \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(5)$$

وبإعتبار حلول الطاقة الموجبة فإننا نكتب : $E = m_0 c^2 + \varepsilon$

حيث ε صغيراً جداً ، وتصبح (4) :

$$c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\psi_A = (2m_0 c^2+\varepsilon-e\phi)\,\psi_B$$

وللقيم الصغيرة من ε و ϕ [ويعرف هذا بالتقريب اللانسبي] ، فإننا نحصل على :

$$c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\psi_A \simeq (2m_0 c^2)\,\psi_B$$

$$\therefore\ \psi_B \simeq \frac{1}{2m_0 c}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\psi_A$$

وبالتعويض في المعادلة (5) :

$$\therefore\ c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\left[\frac{1}{2m_0 c}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\psi_A\right]=(E-e\phi-m_0 c^2)\psi_A$$

$$\therefore\ \frac{1}{2m_0}\left[\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\ \right]^2\psi_A=(\varepsilon-e\phi)\psi_A \quad \text{\_\_(6)} \quad \Big|\, E-m_0 c^2=\varepsilon$$

وبإستخدام العلاقة : $(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$

نحصل على :

$$\left[\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\right]^2=(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})=\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}+i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{\pi}\wedge\vec{\pi})$$

$$=\pi^2+i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{\pi}\wedge\vec{\pi})$$

وحيث أن $\vec{\pi}$ يمثل مؤثراً فإن حاصل الضرب الإتجاهي $(\vec{\pi}\wedge\vec{\pi})$ لا يكون متلاشياً .

$$\therefore\ \vec{\pi}\wedge\vec{\pi}=\left(\ \vec{p}-{}^{e}\!/\!_{c}\vec{A}\ \right)\wedge\left(\ \vec{p}-{}^{e}\!/\!_{c}\vec{A}\ \right)$$

$$=-{}^{e}\!/\!_{c}\left(\ \vec{p}\wedge\vec{A}+\vec{A}\wedge\vec{p}\ \right) \qquad \text{\_\_\_\_\_(7)}$$

وحيث أن :

$$\left(\ \vec{p}\wedge\vec{A}+\vec{A}\wedge\vec{p}\ \right)_x=\left(p_y A_z-p_z A_y\right)+\left(A_y p_z-A_z p_y\right)$$

$$=\left(p_y A_z-A_z p_y\right)+\left(A_y p_z-p_z A_y\right)$$

$$=-i\hbar\frac{\partial A_z}{\partial y}+i\hbar\frac{\partial A_y}{\partial z}=i\hbar\left(\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)$$

$$=i\hbar\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)_x$$

وذلك لأن :

$$\left(p_y A_z - A_z P_y\right) f = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial y}A_z - A_z\frac{\partial}{\partial y}\right]f$$

$$= -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial y}A_z f - A_z\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$= -i\hbar\left[A_z\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial A_z}{\partial y} - A_z\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$= -i\hbar f\frac{\partial A_z}{\partial y}$$

$$\therefore \left(p_y A_z - A_z P_y\right) = -i\hbar\frac{\partial A_z}{\partial y}$$

وبالمثل فإن :

$$\left(A_y P_z - p_z A_y\right) = i\hbar\frac{\partial A_y}{\partial z}$$

وبذلك نوجد علاقات مماثلة للمركبات y,z للكمية $(\vec{p}\wedge\vec{A} + \vec{A}\wedge\vec{p})$

$$\therefore (\vec{p}\wedge\vec{A} + \vec{A}\wedge\vec{p}) = i\hbar(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = i\hbar\vec{B}$$

حيث $\vec{B}$ تمثل الحث المغنطيسي وتعطي بالعلاقة $\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$.

وبالتعويض في (7) :

$$\vec{\pi}\wedge\vec{\pi} = -\frac{ie\hbar}{c}\vec{B}$$

$$\therefore \quad [\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}]^2 = \pi^2 + i\,\vec{\sigma}\cdot\left(-\frac{ie\hbar}{c}\vec{B}\right) = \pi^2 - \frac{e\hbar}{c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$$

وتصبح المعادلة (6) : $\frac{1}{2m_0}\left[\pi^2 - \frac{e\hbar}{c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right]\psi_A = (\varepsilon - e\phi)\,\psi_A$

$$\therefore \boxed{\left[\frac{1}{2m_0}\pi^2 - \frac{e\hbar}{2m_0 c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + e\phi\right]\psi_A = \varepsilon\,\psi_A} \qquad (8)$$

وهي معادلة باولي (Pauli equation) حيث $\pi = \vec{p} - e/_C\,\vec{A}$ والتي تشبه معادلة شرودنجر (اللانسبية) لحركة جسيم في مجال كهرومغنطيسي ، ولكن مع إختلاف هام هو وجود حد إضافي هو الحد الثاني في الطرف الأيسر ، وهذا الحد يعني أن الإلكترون في وجود المجال المغنطيسي يكون له طاقة إضافية مقدارها $(-\vec{\mu}\cdot\vec{B})$ حيث $\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2m_0 c}\vec{\sigma}$ ، وهذا يعني أن الإلكترون يسلك كما لو كان يمتلك عزماً مغناطيسياً $\vec{\mu}$ يرتبط بلفه المغزلي ، حيث :

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2m_0 c}\vec{\sigma} = \mu_B\,\vec{\sigma} \qquad (9)$$

ويعرف $\frac{e\hbar}{2m_0 c} = \mu_B$ بمجنيتون بوهر (Bohr Magneton) .

وبهذا نرى أن معادلة ديراك قد تنبأت بوجود عزم مغنطيسي للجسيمات ذات اللف $\left(\frac{1}{2}\right)$ ومنها الإلكترونات ويعطي هذا العزم بالعلاقة (9) .

مثال (٥) : التفاعل بين الحركة اللفية والمدارية (L-S interaction) :

سوف نثبت هنا أن معادلة ديراك النسبية قد تنبأت بوجود تفاعل بين الحركة اللفية والحركة المدارية متمثلاً في طاقة التفاعل اللفية – المدارية (Spin-Orbit interaction energy) والتي يمثلها حد إضافي سوف يظهر بإستخدام معادلة ديراك .

الإثبات :

معادلة ديراك :

$$E\psi = \left[\, c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) + m_0 c^2 \beta + V \,\right] \psi$$

وبأخذ $\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$ حيث ψ_A , ψ_B ملفوفان ذو مركبتين ، وإعتبار التقريب الكلاسيكي حيث : $E = m_0 c^2 + \varepsilon$ وأخذ $V = e\phi$ فإننا نحصل على العلاقتين الآتيتين :

$$c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\psi_A = (E - e\phi + m_0 c^2)\,\psi_B$$

$$c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\psi_B = (E - e\phi - m_0 c^2)\,\psi_A$$

أو :

$$c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\psi_A = (2\, m_0 c^2 + \varepsilon - e\phi)\,\psi_B \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

$$c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\psi_B = (\varepsilon - e\phi)\,\psi_A \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

من (1) نحصل على :

$$\psi_B = (2\, m_0 c^2 + \varepsilon - e\phi)^{-1} c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\psi_A$$

وبالتعويض في (2) نحصل على :

$$c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,(2\, m_0 c^2 + \varepsilon - e\phi)^{-1} c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\psi_A = (\varepsilon - e\phi)\psi_A$$

$$\therefore \frac{1}{2m_0}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\left(1 + \frac{\varepsilon - e\phi}{2\, m_0 c^2}\right)^{-1} (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\ \psi_A = (\varepsilon - e\phi)\psi_A$$

وحيث أن $\varepsilon , e\phi$ أقل بكثير جداً من $m_0 c^2$ (في الحد اللانسبي) فإنه من الواجب إهمال القوة الثانية والقوى الأعلى في المفكوك في الطرف الأيسر :

$$\therefore \frac{1}{2m_0}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\left(1-\frac{\varepsilon-e\phi}{2\,m_0\,c^2}\right)(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\ \psi_A=(\varepsilon-e\phi)\psi_A$$

$$\therefore \varepsilon\psi_A=\frac{1}{2m_0}\left[\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\left(1-\frac{\varepsilon}{2\,m_0\,c^2}\right)(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})+\right.$$

$$\left.+\frac{e}{2\,m_0\,c^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\phi(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\right]\psi_A+e\phi\,\psi_A$$

$$=\frac{1}{2m_0}\left[\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\left(1-\frac{\varepsilon}{2\,m_0\,c^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{e}{2\,m_0\,c^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\ \phi\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\right]\psi_A+e\phi\,\psi_A \quad \text{\_\_(3)}$$

والآن : بإستخدام العلاقة :

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\cdot\vec{B})+i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$$

$$\therefore\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})=(\vec{p}\cdot\vec{p})+i\vec{\sigma}\cdot(\underbrace{\vec{p}\wedge\vec{p}}_{\text{صفر}})=p^2$$

أيضاً :

$$(\vec{p}\phi)f=-i\hbar\left[\vec{\nabla}(\phi f)\right]=-i\hbar\left[\phi\vec{\nabla}f+f\vec{\nabla}\phi\right]=\left[\phi\vec{p}-i\hbar\vec{\nabla}\phi\right]f$$

$$\therefore\ \vec{p}\phi=\phi\vec{p}-i\hbar\vec{\nabla}\phi$$

$$\therefore\ \underbrace{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})}\ \underbrace{\phi(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})}=\phi\underbrace{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})}\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})-i\hbar(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\phi)(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})$$

$$=\phi p^2+i\hbar(\vec{\sigma}\cdot\vec{E})\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})$$

$$=\phi p^2+i\hbar\left[(\vec{E}\cdot\vec{p})+i\vec{\sigma}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{p})\right]$$

حيث E هي شدة المجال الكهربي ($\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$) .

وبإستخدام العلاقات السابقة فإن المعادلة (3) تصبح :

$$\therefore\ \varepsilon\psi_A = \frac{1}{2m_0}\left[\ p^2\left(1-\frac{\varepsilon}{2\,m_0c^2}\right)+\frac{e}{2\,m_0c^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left\{\phi\,p^2+i\hbar\left[(\vec{E}\cdot\vec{p})+i\vec{\sigma}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{p})\right]\right\}\ \right]\psi_A+e\phi\,\psi_A$$

$$=\left[{p^2}/{2m_0}\left(1-\frac{\varepsilon-e\phi}{2\,m_0c^2}\right)+e\phi\right]\psi_A+\frac{i\hbar e}{4\,m_0^2c^2}(\vec{E}\cdot\vec{p})\,\psi_A$$

$$-\frac{e\hbar}{4\,m_0^2c^2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{p})\psi_A \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ }(4)$$

وبكتابة : $\varepsilon={p^2}/{2m_0}+e\phi \quad\leftarrow\quad \varepsilon-e\phi={p^2}/{2m_0}$

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}\ ,\ \vec{L}=\vec{r}\wedge\vec{p}\ \ ,\ \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi=-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r}=-\frac{1}{r^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{r}$$

$$\vec{p}=-i\hbar\underbrace{\vec{\nabla}}=-i\hbar\underbrace{\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial}{\partial r}}\vec{r} \qquad\Bigg|\qquad \hat{r}=\frac{\vec{r}}{r},\ \vec{r}\cdot\vec{r}=r^2$$

فإن الحد الثالث يصبح :

$$\frac{i\hbar e}{4\,m_0^2\,c^2}\,(\vec{E}\cdot\vec{p})=-\frac{\hbar^2 e}{4\,m_0^2\,c^2}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\right]$$

والحد الأخير يصبح :

$$\frac{-\hbar e}{4\,m_0^2\,c^2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{p})=\frac{-e\hbar}{4\,m_0^2\,c^2}\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\underbrace{-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{r}}_{\vec{E}}\wedge\vec{p}\right)\right]$$

$$=\frac{e}{2\,m_0^2\,c^2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}\ \left[\vec{S}\cdot(\vec{r}\wedge\vec{p})\ \right]=\frac{e}{2\,m_0^2\,c^2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}(\vec{S}\cdot\vec{L})$$

وتصبح العلاقة (4) بالصورة :

$$\varepsilon\psi_A=\left[p^2/2m_0-\frac{p^2}{8\,m_0^3c^2}+e\phi\right]\psi_A-\frac{\hbar^2 e}{4m_0^2c^2}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\psi_A+\frac{e}{2m_0^2c^2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}(\vec{S}\cdot\vec{L})\psi_A \quad \text{\_\_(5)}$$

الحد الأخير في هذه العلاقة يعطي طاقة التفاعل بين الحركة اللفيـة والحركـة المدارية (L-S interaction) وصورتها : $\frac{e}{2m_0^2c^2r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}(\vec{S}\cdot\vec{L})$

وقد ظهرت كنتيجة مباشرة لمعادلة ديراك النسبية .

أما الحد $\left[\frac{-\hbar^4 e}{4m_0^2c^2r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\right]$ فيعطي تصحيحاً نسبياً لطاقـة الجهـد ، وليس له نظير في الميكانيكا الكلاسيكية ويسمى حد داروين (Darwin term).

الحدان الأول والثالث في الطرف الأيمن : $\left(p^2/2m_0+e\phi\right)$ يعطيان معادلة شرودنجر اللانسبية .

الحد الثاني $p^2/8m_0^3c^2$ هو تصحيح نسبي ، ويمكن الحصول عليه من إيجاد مفكوك الجذر التربيعي للعلاقة النسبية $E^2=c^2p^2+m_0^2c^4$

$$\therefore\ E=(c^2p^2+m_0^2c^4)^{\frac{1}{2}}=m_0c^2\left(1+\frac{p^2}{m_0^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=m_0c^2\left(1+\frac{p^2}{2m_0^2c^2}-\frac{p^2}{8m_0^4c^4}+\cdots\cdots\right)$$

$$\simeq m_0c^2+p^2/2m_0-\frac{p^2}{8m_0^3c^2}$$

الصورة المتغايرة لمعادلة ديراك (Covariant Form of Dirac Equation)

مقدمه :

لإيجاد صورة لمعادلة ديراك لا تتغير بإستخدام تحويلات لورنتز النسبية التي صورتها :

$$x'_\mu = a_{\mu\nu}\, x_\nu$$

حيث معاملات التحويل تحقق العلاقات :

$$a_{\mu\nu}\; a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}$$

وحيث المتجه الرباعي A_μ يكتب بالصورة :

$$A_\mu = (A_1\ ,\ A_2\ ,A_3\ ,A_4\ ) = (\vec{A}, A_4) = (\vec{A}, i A_0)$$

حيث $A_4 = i\, A_0$ هو تمثيل آخر للمتجه الرباعي .

$$A_\mu\; B_\mu = \vec{A}\cdot\vec{B} + A_4\, B_4 = \vec{A}\cdot\vec{B} - A_0\, B_0$$

وهذان التمثيلان لا يتغيران بإستخدام تحويلات لونتز حيث :

$$A'_\mu\; B'_\mu = (a_{\mu\nu}\, A_\nu)\,(A_{\mu\lambda}\, B_\lambda) = \delta_{\nu\lambda}\, A_\nu\, B_\lambda = A_\nu\, B_\nu$$

أيضاً فإن المتجه الرباعي للتدرج :

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\nu} = a_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

وكذلك فإن قانون التحويل للممتد ذو المرتبة الثانية يكتب بإستخدام تحويلات لورنتز بالصورة :

$$A'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}\, a_{\nu\sigma}\, A_{\lambda\sigma}$$

ويمسى المتجه الرباعي a_μ : مماثل زمني (Time like) إذا كان

$$a^2 = |\vec{a}|^2 - a_0^2 < 0$$

ويمسى مماثل فراغي (space like) إذا كان : $a^2 > 0$

المتجه الرباعي للطاقة وكمية الحركة p_μ حيث :

$p_\mu = \left(\vec{p}, i\frac{E}{c} \right)$ هو متجه مماثل زمني

حيث :

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2$$

والعلاقات المؤثرية :

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = i\hbar\vec{\nabla}$$

يمكن كتابتها في صورة واحدة :

$$p_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar\partial_\mu$$

حيث $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$

<u>أيضاً</u> : يمكن إستخدام الوحدات الطبيعية (natural units)

وفيها نأخذ $\hbar = c = 1$

ويأخذ ثابت التركيب الدقيق القيمة :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$$

والآن : <u>نوجد الصورة المتغايرة لمعادلة ديراك</u> :

معادلة ديراك :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\hbar c(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla})\psi + \beta m_0 c^2\psi$$

$$\therefore -c\hbar\frac{\partial\psi}{\partial ict}$$

$$= -i\hbar c\left(\alpha_x\frac{\partial\psi}{\partial x} + \alpha_y\frac{\partial\psi}{\partial y} + \alpha_z\frac{\partial\psi}{\partial z} \right) + \beta m_0 c^2\psi$$

بالقسمة على $\hbar c$:

$$\therefore -\frac{\partial \psi}{\partial ict} = -i\left(\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\right) + \beta \frac{m_0 c}{\hbar}\psi$$

$$= -i\left(\alpha_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right) + \beta \frac{m_0 c}{\hbar}\psi \qquad \Big| n = 1, 2, 3$$

وبضرب الطرفين في β وإعتبار أن $\beta^2 = 1$ ، $x_4 = ict$

$$\therefore -\beta \frac{\partial \psi}{\partial x_4} = -i\beta\alpha_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} + \frac{m_0 c}{\hbar}\psi$$

وبأخذ $\gamma_4 = \beta$ ، $\gamma_n = -i\beta\alpha_n$

$$\therefore \gamma_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} + \gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_4} + \frac{m_0 c}{\hbar}\psi = 0$$

$$\therefore \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar}\psi = 0 \qquad \Big| \mu = n, 4$$

وبإستخدام الوحدات الطبيعية $(\hbar = c = 1)$ وإعتبار أن $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial_\mu$

$$\therefore \boxed{(\gamma_\mu \partial_\mu + m_0)\ \psi = 0}$$

وهي الصورة المتغايرة لمعادلة ديراك .

يلاحظ أن المصفوفات

$$\gamma_\mu = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = (\gamma_n, \gamma_4) = (\vec{\gamma}, \gamma_4)$$

وهي مصفوفات هيرميتية ، وأثرها يساوي صفراً :

$$\boxed{\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu} \quad , \quad \boxed{Tr\ \gamma_\mu = 0}$$

خواص مصفوفات γ_μ لديراك :

بإستخدام خواص المصفوفات α_n , β وتعريفات مصفوفات γ_μ لديراك (حيث $\mu = 1,2,3,4$) فإنه يمكننا كتابة :

(1) $$\gamma_n = -i\beta\alpha_n = -i\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_n \\ \sigma_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_n \\ i\sigma_n & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $$\gamma_4 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

حيث $(n = 1,2,3)$ σ_n هي مصفوفات اللف لباولي .

وتتميز مصفوفات γ لديراك بالخواص الآتية :

(i) $$\boxed{\gamma_\mu \gamma_\mu = 4} \qquad (1)$$

الإثبات :

$$\gamma_\mu \gamma_\mu = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2 = 1+1+1+1 = 4$$

حيث :

$$\gamma_1^2 = \gamma_1\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

وهكذا بالنسبة لـ γ_3^2 , γ_2^2 ، وأيضاً :

$$\gamma_4^2 = \gamma_4\gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 & 0 \\ 0 & I^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = 1$$

(ii) $\boxed{\gamma_\mu \gamma_v + \gamma_v \gamma_\mu = 2\delta_{\mu v}}$ ______**(2)**

الإثبات :

لنأخذ $v = 2$, $\mu = 1$ كمثال :

$$\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

حيث : $\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = 0$ (من خواص مصفوفات باولي)

أيضاً بأخذ $v = 1$, $\mu = 1$:

$$\therefore\ \gamma_1 \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_1 = 2\gamma_1 \gamma_1 = 2\gamma_1^2 = 2\cdot 1 = 2$$

وهكذا بالنسبة للقيم الأخرى لـــ μ, v :

$$\therefore \gamma_\mu \gamma_v + \gamma_v \gamma_\mu = 2\delta_{\mu v} = \begin{cases} 2 & (\mu = v) \\ 0 & (\mu \neq v) \end{cases}$$

(iii) $\boxed{\gamma_\mu \gamma_v \gamma_\mu = -2\gamma_v}$ ______**(3)**

الإثبات :

$$\gamma_\mu \gamma_v \gamma_\mu = \left[\gamma_\mu \gamma_v \gamma_\mu + \gamma_v \gamma_\mu \gamma_\mu - \gamma_v \gamma_\mu \gamma_\mu\right]$$

$$= \left[\gamma_\mu \gamma_v + \gamma_v \gamma_\mu - \gamma_v \gamma_\mu\right]\gamma_\mu = \left[2\delta_{\mu v} - \gamma_v \gamma_\mu\right]\gamma_\mu$$

$$= 2\underbrace{\delta_{\mu v} \gamma_\mu}_{\downarrow} - \gamma_v \underbrace{\gamma_\mu \gamma_\mu}_{\downarrow}$$

$$= \quad 2\gamma_v \quad - \quad 4\gamma_v = -2\gamma_v$$

(iv) $\boxed{\gamma_\mu \gamma_v \gamma_\lambda \gamma_\mu = 4\,\delta_{v\lambda}}$ ______(4)

<u>الإثبات</u> :

$$\gamma_\mu \gamma_v \gamma_\lambda \gamma_\mu = \left(\gamma_\mu \gamma_v + \gamma_v \gamma_\mu - \gamma_v \gamma_\mu\right)\left(\gamma_\lambda \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\lambda - \gamma_\mu \gamma_\lambda\right)$$
$$= \left(2\delta_{\mu v} - \gamma_v \gamma_\mu\right)\left(2\delta_{\lambda\mu} - \gamma_\mu \gamma_\lambda\right)$$
$$= 4\delta_{\mu v}\delta_{\lambda\mu} - 2\delta_{\mu v}\gamma_\mu \gamma_\lambda - 2\delta_{\lambda\mu}\gamma_v \gamma_\mu + \gamma_v \underbrace{\gamma_\mu \gamma_\mu}\gamma_\lambda$$
$$= 4\delta_{v\lambda} - 2\gamma_v \gamma_\lambda - 2\gamma_v \gamma_\lambda + 4\gamma_v \gamma_\lambda = 4\delta_{v\lambda}$$

(v) $\boxed{\gamma_\mu \gamma_v \gamma_\lambda \gamma_\rho \gamma_\mu = -2\gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma_v}$ ______(5)

<u>الإثبات</u> :

$$\gamma_\mu \gamma_v \gamma_\lambda \gamma_\rho \gamma_\mu = \gamma_\mu\left(\gamma_v \gamma_\lambda + \gamma_\lambda \gamma_v - \gamma_\lambda \gamma_v\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\gamma_\rho \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\rho - \gamma_\mu \gamma_\rho\right)$$
$$= \gamma_\mu\left(2\delta_{v\lambda} - \gamma_\lambda \gamma_v\right)\left(2\delta_{\rho\mu} - \gamma_\mu \gamma_\rho\right)$$
$$= \gamma_\mu\left(4\delta_{v\lambda}\delta_{\rho\mu} - 2\delta_{v\lambda}\gamma_\mu \gamma_\rho - \right.$$
$$\left. - 2\delta_{\rho\mu}\gamma_\lambda \gamma_v + \gamma_\lambda \gamma_v \gamma_\mu \gamma_\rho\right)$$
$$= 4\delta_{v\lambda}\delta_{\rho\mu}\gamma_\mu - 2\delta_{v\lambda}\underbrace{\gamma_\mu \gamma_\mu}\gamma_\rho -$$
$$- 2\underbrace{\delta_{\rho\mu}\gamma_\mu}\gamma_\lambda \gamma_v + \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_v \gamma_\mu \gamma_\rho$$
$$= 4\delta_{v\lambda}\gamma_\rho - 8\delta_{v\lambda}\gamma_\rho - 2\gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma_v + \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_v \gamma_\mu \gamma_\rho$$
$$= -4\delta_{v\lambda}\gamma_\rho - 2\gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma_v + \underbrace{\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_v \gamma_\mu \gamma_\rho}_{\text{من (4)}}$$
$$= -4\delta_{\mu v}\gamma_\rho - 2\gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma_v + 4\underbrace{\delta_{v\lambda}}\gamma_\rho$$
$$= -2\gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma_v$$

(vI)
$$\boxed{\begin{aligned}&\gamma_\mu\gamma_v\gamma_\lambda+\gamma_\lambda\gamma_v\gamma_\mu\\&=2\delta_{\mu v}\gamma_\lambda+2\delta_{v\lambda}\gamma_\mu-2\delta_{\lambda\mu}\gamma_v\end{aligned}} \qquad (6)$$

الإثبات :

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma_v\gamma_\lambda+\gamma_\lambda\gamma_v\gamma_\mu&=\left(\gamma_\mu\gamma_v+\gamma_v\gamma_\mu-\gamma_v\gamma_\mu\right)\gamma_\lambda+\\&\quad+\left(\gamma_\lambda\gamma_v+\gamma_v\gamma_\lambda-\gamma_v\gamma_\lambda\right)\gamma_\mu\\&=\left(2\delta_{\mu v}-\gamma_v\gamma_\mu\right)\gamma_\lambda+\left(2\delta_{v\lambda}-\gamma_v\gamma_\lambda\right)\gamma_\mu\\&=2\delta_{\mu v}\gamma_\lambda+2\delta_{v\lambda}\gamma_\mu-\gamma_v\left(\gamma_\mu\gamma_\lambda+\gamma_\lambda\gamma_\mu\right)\\&=2\delta_{\mu v}\gamma_\lambda+2\delta_{v\lambda}\gamma_\mu-2\delta_{\mu\lambda}\gamma_v\end{aligned}$$

المصفوفة γ_5 : تعرف المصفوفة γ_5 بأنها حاصل ضرب مصفوفات γ الأربعة :

$$\boxed{\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4}$$

ويمكن إثبات أن γ_5 هي مصفوفة هيرميتية ، حيث :

$$\begin{aligned}\gamma_5^+&=\left(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\right)^+=\gamma_4^1\gamma_3^+\gamma_2^+\gamma_1^+=\gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_1\\&=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4=\gamma_5\end{aligned}$$

أيضاً : فإن γ_5 لا تتبادل مع كل المصفوفات γ_μ ، أي أن :

$$\gamma_5\gamma_\mu+\gamma_\mu\gamma_5=0 \qquad (\mu=1,2,3,4)$$

أيضاً فإن : $\gamma_5^2=1$

وبإستخدام الصور المصفوفية للمصفوفات γ_μ فإن :

$$\gamma_5=\begin{pmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{pmatrix}$$

أيضاً فإن :

$$Tr(\gamma_5^2)=Tr\,I=4$$

أثر حواصل ضرب مصفوفات γ لديراك :

يمكن إثبات العلاقات الآتية لأثر (Trace) مصفوفات γ :

(1) $Tr(\gamma_\mu \gamma_v) = 4\delta_{\mu v}$

(2) $Tr(\gamma_\mu \gamma_v \gamma_\lambda) = 0$

(3) $Tr(\gamma_\mu \gamma_v \gamma_\lambda \gamma_\mu) = 16$

(4) $Tr(\gamma_\mu \gamma_v \gamma_\lambda \gamma_\rho) = 4\delta_{\mu v}\delta_{\lambda\rho} - 4\,\delta_{\mu\lambda}\delta_{v\rho} + 4\delta_{\mu\rho}\delta_{v\lambda}$

(5) $Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_v) = 0$

(6) $Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_v \gamma_\lambda \gamma_\rho) = 4\varepsilon_{\mu v\lambda\rho}$

حيث $\varepsilon_{\mu v\lambda\rho}$ يسمى شبه ممتد ليفي – شفيتا (Levi - Civita pseudotensor)

ومن خواصه : $\boxed{\varepsilon_{1234} = 1}$

إثبات العلاقات السابقة :

(1) $Tr(\gamma_\mu \gamma_v) = Tr(\gamma_v \gamma_\mu)$

$$= \frac{1}{2} Tr(\gamma_\mu \gamma_v + \gamma_v \gamma_\mu)$$

$$= \delta_{\mu v} \cdot Tr\, I = 4\delta_{\mu v} \qquad \Big|\ Tr\, I = 4$$

(2) $\because\ \gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0$

$$\therefore\ \gamma_5 \gamma_\mu = -\gamma_\mu \gamma_5$$

$$\therefore\ \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5^{-1} = -\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5^{-1} = -\gamma_\mu \qquad \Big|\ \gamma_5 \gamma_5^{-1} = 1$$

$$\therefore\ \gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_v \gamma_\lambda)\gamma^{-5} = \gamma_5 \gamma_\mu \underbrace{\gamma_5^{-1}\gamma_5}\gamma_\lambda \underbrace{\gamma_5^{-1}\gamma_5}\gamma_\lambda \gamma_5^{-1}$$

$$= (-\gamma_\mu)(-\gamma_v)(-\gamma_\lambda) = -(\gamma_\mu \gamma_v \gamma_\lambda)$$

وبأخذ الأثر لكلاً الطرفين وإستخدام العلاقة :

$$Tr(ABC)=Tr(CAB)$$

$$\therefore -Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda)=Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_5^{-1})$$

$$=Tr(\gamma_5^{-1} \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda)$$

$$=Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda)$$

$$\therefore Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda)=0$$

وهو المطلوب .

<u>ملحوظة</u> :

هذه النتيجة يمكن تعميمها لحاصل ضرب أي عدد فـردي مـن مصـفوفات γ خلاف γ_5 ، فمثلاً :

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho \gamma_\sigma)=0$$

(3) $\because \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu = 4\delta_{\nu\lambda}$

$$\therefore Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu)=4\,Tr(\delta_{\nu\lambda})=4\cdot 4=16$$

(4) $Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho)=Tr\left[(\gamma_\mu \gamma_\nu)(\gamma_\lambda \gamma_\rho)\right]$

ولكن $\gamma_\mu \gamma_\nu = 2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu$

$$\therefore Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho)=Tr\left[(2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu)(\gamma_\lambda \gamma_\rho)\right]$$

$$=2\delta_{\mu\nu}Tr(\gamma_\lambda \gamma_\rho)-Tr(\gamma_\nu \underbrace{\gamma_\mu \gamma_\lambda} \gamma_\rho)$$

$$=2\delta_{\mu\nu}Tr(\gamma_\lambda \gamma_\rho)-Tr\left[\gamma_\nu \underbrace{(2\delta_{\mu\lambda} - \gamma_\lambda \gamma_\mu)} \gamma_\rho\right]$$

$$=2\delta_{\mu\nu}Tr(\gamma_\lambda \gamma_\rho)-2\delta_{\mu\lambda}Tr(\gamma_\nu \gamma_\rho)+$$

$$+Tr\,\gamma_\nu \gamma_\lambda \underbrace{\gamma_\mu \gamma_\rho}$$

$$= 2\delta_{\mu v} Tr(\gamma_\lambda \gamma_\rho) - 2\delta_{\mu\lambda} Tr(\gamma_v \gamma_\rho) +$$
$$+ Tr\left[(\gamma_v \gamma_\lambda)\,(2\delta_{\mu\rho} - \gamma_\rho \gamma_\mu\right]$$
$$= 2\delta_{\mu v} Tr(\gamma_\lambda \gamma_\rho) - 2\delta_{\mu\lambda} Tr(\gamma_v \gamma_\rho) +$$
$$+ 2\,\delta_{\mu\rho} Tr(\gamma_v \gamma_\lambda) - Tr(\gamma_v \gamma_\lambda \gamma_\rho \gamma_\mu)$$

وبإستخدام العلاقة :

$$Tr(ABCD) = Tr(DABC)$$

$$\therefore 2Tr(\gamma_\mu \gamma_v\, \gamma_\lambda \gamma_\rho) = 2\delta_{\mu v} Tr(\gamma_\lambda \gamma_\rho) - 2\delta_{\mu\lambda} Tr(\gamma_v \gamma_\rho)$$
$$+ 2\,\delta_{\mu v} Tr(\gamma_v \gamma_\lambda)$$
$$= 8\,\delta_{\mu v} \cdot \delta_{\lambda\rho} - 8\delta_{\mu\lambda} \cdot \delta_{v\rho} + 8\delta_{\mu\rho} \cdot \delta_{v\lambda}$$

$$\therefore\ Tr(\gamma_\mu \gamma_v\, \gamma_\lambda \gamma_\rho) = 4\delta_{\mu v}\, \delta_{\lambda\rho} - 4\delta_{\mu\lambda}\, \delta_{v\rho} + 4\delta_{\mu\rho}\, \delta_{v\lambda}$$

وهو المطلوب .

(5) $Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_v)$

نختار γ_λ بحيث أن : $\lambda \neq \mu, v$, $\gamma_\lambda^2 = I$

$$\gamma_\mu \gamma_\lambda + \gamma_\lambda \gamma_\mu = 0 \quad , \quad \gamma_v \gamma_\lambda + \gamma_\lambda \gamma_v = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_}(1)$$

$$\therefore Tr\,(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_v) = Tr\,(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_v \gamma_\lambda \gamma_\lambda)$$
$$= Tr(\gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_v \gamma_\lambda) = -Tr(\gamma_5 \underbrace{\gamma_\lambda \gamma_\mu}_{\substack{=-\gamma_\mu \gamma_\lambda \\ \text{من}(1)}} \gamma_v \gamma_\lambda)$$

$$= Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\lambda \underbrace{\gamma_v \gamma_\lambda}_{=-\gamma_\lambda \gamma_v}) = -Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_v)$$

$$\therefore Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_v) = 0$$

وهو المطلوب .

(6) $Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_v \gamma_\lambda \gamma_\rho) = \varepsilon_{\mu v \lambda \rho} Tr(\gamma_5 \gamma_5) = 4\varepsilon_{\mu v \lambda \rho}$

باختيار $\mu = 1 , v = 2 , \lambda = 3 , \rho = 4$

وإعتبار أن : $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$

$$\therefore Tr(\gamma_5 \; \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4) = Tr(\gamma_5^2) = Tr(I) = 4$$

ومن العلاقة (6) وحيث أن $\varepsilon_{1234} = 1$

$$\therefore Tr(\gamma_5 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4) = 4$$

خواص شبه الممتد $\varepsilon_{\mu v \lambda \rho}$ [Pseudo tensor $\varepsilon_{\mu v \lambda \rho}$] :

(١) عدد مركبات = $4^4 = 256$ منها فقط ! 4 = 24 ليست أصفار ، $\varepsilon_{1234} = 1$.

(٢) إذا أتفق دليلان على الأقل فإن $\varepsilon_{\mu v \lambda \rho} = 0$ فمثلاً : $\varepsilon_{11\lambda\rho} = \varepsilon_{\mu 22\rho} = \varepsilon_{2333} = 0$.

(٣) إذا كانت كل الأدلة مختلفة وفي التتابع 1,2,3,4 [تبديل زوجي] فإن : $\varepsilon_{\mu v \lambda \rho} = +1$.

(٤) إذا كانت كل الأدلة مختلفة وفي التتابع 4,3,2,1 [تبديل فردي] فإن : $\varepsilon_{\mu v \lambda \rho} = -1$.

(٥) من الـ 24 قيمة توجد 12 مركبة لها القيمة +1 و 12 لها القيمة =1- .

أمثله :

$$\varepsilon_{1234} = \varepsilon_{2341} = \varepsilon_{3412} = +1 \quad , \quad \varepsilon_{4321} = \varepsilon_{3214} = \varepsilon_{2143} = -1$$

الحصول على معادلة الإتصال بإستخدام الصورة المتغايرة لمعادلة ديراك :

معادلة ديراك المتغايرة :

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + m_0\right)\psi = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_}(1)$$

بأخذ المرافق الهيرميتي لها :

$$\psi^+\left(\gamma_n \partial_n - \gamma_4 \partial_4 + m_0\right) = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_}(2)$$

وذلك حيث أن :

$$\partial_4^+ = \frac{\partial}{\partial x_4^*} = -\frac{\partial}{\partial x_4} = -\partial_4$$

بالضرب من اليمين في γ_4 نحصل على :

$$\psi^+\left(\gamma_n \partial_n - \gamma_4 \partial_4 + m_0\right)\gamma_4 = 0$$

$$\psi^+\gamma_4\left(-\gamma_n \partial_n - \gamma_4 \partial_4 + m_0\right) = 0 \qquad \Big|\ \gamma_n\gamma_4 = -\gamma_4\gamma_n$$

وبتعريف المترافق (adjoint) لـــ ψ بالعلاقة : $\overline{\psi} = \psi^+\gamma_4$ نحصل على مترافق معادلة ديراك بالصورة :

$$\overline{\psi}\left(-\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m_0\right) = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_}(3)$$

حيث السهم المعكوس على ∂_μ يدل على أنه يؤثر على $\overline{\psi}$.

أيضاً : بضرب (1) من اليسار في $\overline{\psi}$ و (3) من اليمين في ψ والطرح نحصل على معادلة الإتصال (أو الأستمرار) .

$$\overline{\psi}\,\gamma_\mu \partial_\mu \psi + \overline{\psi}\,\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\mu \psi = 0$$

$$\therefore \quad \partial_\mu\left(\overline{\psi}\,\gamma_\mu \psi\right) = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{\partial_\mu j_\mu = 0} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}}$$

حيث $j_\mu = \overline{\psi}\,\gamma_\mu \psi$ يدل على المتجه الرباعي للتيار .

مثال : أثبت أن معادلة ديراك تكون متغايرة (Covariant) بإســتخدام تحــويلات لورنتز ، وأوجد الشرط اللازم لذلك .

الحل :

معادلة ديراك في النظام S :

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_0\right)\psi(x_\mu) = 0 \qquad \_\_\_\_(1)$$

معادلة ديراك في النظام S' :

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} + m_0\right)\psi'(x'_\mu) = 0 \qquad \_\_\_\_(2)$$

تحويل لورنتز : $x'_v = a_{v\mu} x_\mu$ حيث : $a_{\lambda\mu} a_{\mu v} = \delta_{\lambda v}$

$$\frac{\partial x_v}{\partial x'_\mu} = a_{v\mu} \rightarrow \partial'_\mu = \frac{\partial x_v}{\partial x'_\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x_v} = a_{v\mu}\, a_v \quad \_\_(3)$$

وبكتابة العلاقة بين $\psi(x_\mu), \psi'(x'_\mu)$ بالصورة :

$$\psi'(x'_\mu) = S\,\psi(x_\mu) \qquad \_\_\_\_(4)$$

حيث S مصفوفة 4×4 لها معكوس S^{-1} وتعرف بالمصفوفة S (S-matrix) بحيث أن :

$$\psi(x_\mu) = S^{-1}\psi'(x'_\mu) \qquad \_\_\_\_(5)$$

بالتعويض من (3) في (2) :

$$\left(\gamma_\mu a_{v\mu} \partial_v + m_0\right)\psi' = 0$$

وبإستخدام (4) :

$$\left(\gamma_\mu a_{v\mu} \partial_v + m_0\right)S\psi = 0$$

وبالضرب من اليسار في S^{-1} :

$$S^{-1}\left(\gamma_\mu a_{v\mu}\partial_v + m_0\right)S\psi = 0$$

$$\therefore \left(a_{v\mu}S^{-1}\gamma_\mu S\partial_v + m_0\right)\psi = 0 \qquad \Big| \; S^{-1}S = 1$$

وهذه المعادلة تكافئ معادلة ديرك (1) وصورتها :

$$\left(\gamma_v\,\partial_v + m_0\right)\psi = 0$$

بشرط وجود المصفوفة S التي تحقق الشرط :

$$a_{v\mu}S^{-1}\gamma_\mu S = \gamma_v$$

وبالضرب في $a_{\lambda v}$ وإعتبار أن $a_{v\mu}\,a_{\lambda v} = \delta_{\mu\lambda}$

$$\therefore \boxed{S^{-1}\gamma_\lambda S = a_{\lambda v}\gamma_v}$$

وهو الشرط الازم لكي تكون معادلة ديــراك متغــايرة بإســتخدام تحــويلات لورنتز .

ملحوظة : المصفوفة S تعرف بمصفوفة التشتت (scattering Matrix) .

التحويلات المنفصلة (Discrete Transformation) :

هي نوع من التحويلات بحيث لا يوجد أي تحويلات متناهية في الصفر يمكــن أن تولدها .

ويوجد نوعان هامان من التحويلات المنفصلة :

(١) تحويل إنعكاس الفراغ (تحويل – p) Space Reflection

(٢) تحويل عكس الزمن (تحويل – T) Time Reversal

والآن : نوجد صورة مصفوفات التحويل لهذين التحويلين :

[١] **تحويل – p** : هذا التحويل يغير :

$x_1 \to -x_1$, $x_2 \to -x_2$, $x_3 \to -x_3$ بينما x_4 تظل كما هي

$$\left.\begin{aligned} \therefore\, x_n &\to x_n' = -x_n \\ x_x &\to x_4' = x_4 \end{aligned}\right\} \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

لنرمز لمصفوفة هذا التحويل بالرمز p ، ونكتب :

$$\psi'(x') = p\psi(x) \;,\; \psi(x) = p^{-1}\psi'(x') \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

ولإيجاد صورة p : نكتب معادلة ديراك بالصورة المتغايرة :

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + m_0\right)\psi(x) = 0$$

$$\left(\gamma_n \partial_n + \gamma_4 \partial_4 + m_0\right)\psi(x) = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

بإستخدام (2) ، (1) في (3) تحصل على :

$$\left(-\gamma_n \partial_n' + \gamma_4 \partial_4' + m_0\right) p^{-1}\,\psi'(x') = 0$$

وبالضرب من اليسار في p :

$$\therefore \left(-p\,\gamma_n\, p^{-1}\partial_n' + p\,\gamma_4\, p^{-1}\partial_4' + m_0\right)\psi'(x') = 0 \;\text{\_\_\_(4)}$$

$$\Big|\; pp^{-1} = 1$$

ومن أجل خاصية التغاير لمعادلة ديراك فإن المعادلة (4) يجب أن تكافئ المعادلة:

$$\left(\gamma_n \partial_n' + \gamma_4 \partial_4' + m_0\right)\psi'(x') = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(5)}$$

بمقارنة (5) ، (4) نجد أن الشرط الواجب على p هو :

$$p\,\gamma_n\, p^{-1} = -\gamma_n \quad , \quad p\,\gamma_4\, p^{-1} = \gamma_4 \qquad \text{\_\_\_\_(6)}$$

وهذه العلاقات تعني أن p لا يتبادل مع γ_n ولكنه يكون متبادلاً مع γ_4

يلاحظ أن المصفوفة p هي مصفوفة واحدية : $p^{-1} = p^{+}$

أيضاً : يمكن كتابة $p = e^{i\xi}\gamma_4$ حيث $e^{i\xi}$ هو معامل طور (phase factor) ثابت وإختياري .

ولإيجاد قانون التحويل لـ $\overline{\psi}(x)$

$$\overline{\psi}'(x') = \psi'(x')^{+}\,\gamma_4 = (\psi^{+}\gamma_4^{+}e^{-i\xi})\gamma_4 = e^{-i\xi}\,\psi^{+}(x)\gamma_4\gamma_4$$
$$= e^{-i\xi}\,\overline{\psi}(x)\,\gamma_4$$

[٢] تحويل – T : هذا التحويل يغير $t \to -t$

$$\therefore\ x_n \to x'_n = x_n \quad , \quad x_4 \to x'_4 = -x_4 \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

$$\partial_n \to \partial'_n = \partial_n \quad ; \quad \partial_4 \to \partial'_4 = -\partial_4 \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

ولنرمز لمصفوفة التحويل بالرمز T ونكتب :

$$\psi'(x') = T\psi(x) \quad , \quad \psi(x) = T^{-1}\psi'(x') \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

ولإيجاد صورة T :

بإستخدام (3) ، (1) يمكن كتابة معادلة ديراك $(\gamma_\mu\,\partial_\mu + m_0)\,\psi(x) = 0$ بالصورة :

$$(\gamma_n\partial'_n - \gamma_4\partial'_4 + m_0)T^{-1}\,\psi'(x') = 0$$

بالضرب من اليسار في T :

$$\therefore T\,(\gamma_n\partial'_n - \gamma_4\partial'_4 + m_0)T^{-1}\,\psi'(x') = 0$$

$$\therefore\ \left(T\gamma_n T^{-1}\partial'_n - T\gamma_4 T^{-1}\partial'_4 + m_0\right)\psi'(x') = 0 \;\Big|\; TT^{-1} = 1$$

ولتطبيق خاصية التغاير لمعادلة ديراك فإن تلك العلاقة تكافئ العلاقة :

$$(\gamma_n\partial'_n + \gamma_4\partial'_4 + m_0)\,\psi'(x') = 0$$

بشرط أن :

$$T\gamma_n T^{-1} = \gamma_n \quad , \quad T\gamma_4 T^{-1} = -\gamma_4 \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

وهذا الشرط يكون متحققاً إذا كانت T متناسبة مع $\gamma_4\gamma_5$ وذلك لأن :

$$T\gamma_n T^{-1} = \gamma_4\,\gamma_5\gamma_n\gamma_5\gamma_4 = -\,\gamma_4\,\gamma_5^2\,\gamma_n\,\gamma_4$$

$$= -\gamma_4\,\gamma_n\gamma_4 = \gamma_4^2\,\gamma_n = \gamma_n$$

$$T\gamma_4 T^{-1} = \gamma_4\,\gamma_5\gamma_4\gamma_5\gamma_4 = -\,\gamma_4\,\gamma_5^2\,\gamma_4\,\gamma_4$$

$$= -\gamma_4\,\gamma_4^2 = -\,\gamma_4$$

ترافق الشحنة (Charge Conjugation) :

هو تحويل متماثل لا يشبه تحويلات p,T التي ترتبط بتحويلات لورنتز . بكتابة معادلة ديراك للإلكترون (ذو الشحنة e-) في وجود مجال كهرومغنطيسي جهده A_μ بالصورة :

$$\left[\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m_0\right]\psi(x) = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

معادلة ديراك مترافقة الشحنة [للإلكترون المرافق ذو الشحنة +e)

$$\left[\gamma_\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) + m_0\right]\psi^c(x) = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

حيث $\psi^c(x)$ تسمى الدالة الموجية مترافقة الشحنة

(Charge conjugate Wavefunction)

ولإيجاد العلاقة بين $\psi,\ \psi^c$:

نأخذ المرافق للمعادلة (1) بالصورة :

$$\overline{\psi}(x)\left[\gamma_\mu(-\overleftarrow{\partial}_\mu - ieA_\mu) + m_0\right] = 0$$

وبأخذ المنقول (transpose) :

$$\left[\widetilde{\gamma}_\mu(-\partial_\mu - ieA_\mu) + m_0\right]\widetilde{\overline{\psi}}(x) = 0 \qquad \text{\_\_\_(3)}$$

فإذا وجدنا مصفوفة غير منفردة (non-singular) c بحيث أن :

$$c\,\widetilde{\gamma}_\mu c^{-1} = -\gamma_\mu \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

فيمكن كتابة (3) بالصورة :

$$c\left[\tilde{\gamma}_\mu(-\partial_\mu - ieA_\mu) + m_0\right] c^{-1}c\ \tilde{\bar{\psi}}(x) = 0$$

$$\therefore \left[-\gamma_\mu(-\partial_\mu - ieA_\mu) + m_0\right] c\ \tilde{\bar{\psi}}(x) = 0$$

$$\therefore \left[\gamma_\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) + m_0\right] c\ \tilde{\bar{\psi}}(x) = 0 \quad \_\_\_(5)$$

وبمقارنة (5) مع (2) نجد أن :

$$\psi^c = c\ \tilde{\bar{\psi}}(x) \quad \_\_\_\_(6)$$

ومن (4) نجد أن c يجب أن يكون متبادلاً مع γ_1, γ_3 وغير متبادل مع γ_2, γ_4 [لأن : $\tilde{\gamma}_2 = \gamma_2\ , \tilde{\gamma}_4 = \gamma_4\ ;\ \tilde{\gamma}_1 = -\gamma_1\ ,\ \tilde{\gamma}_3 = -\gamma_3$

ولذلك فيمكن إختيار c بالصورة : $c = \gamma_4\ \gamma_2$.

ولإيجاد تحويل $\bar{\psi}^c$: حيث أن $\psi^c = c\tilde{\bar{\psi}}$

$$\therefore (\psi^c)^+ = (\tilde{\bar{\psi}})^+ c^+ = (\tilde{\psi}^+ \gamma_4)^+ c^+ = \tilde{\gamma}_4 \tilde{\psi} c^{-1} = \tilde{\psi}\ \tilde{\gamma}_4\ c^{-1}$$

حيث المصفوفة c للتحويل هي مصفوفة واحدية $c^+ = c^{-1}$

$$\bar{\psi}^c = (\psi^c)^+\ \gamma_4 = \tilde{\psi}\ \gamma_4\ c^{-1}\gamma_4$$

$$= -\tilde{\psi}\ c^{-1}\gamma_4\ \gamma_4 = -\tilde{\psi}\ c^{-1} \qquad \Big|\ \bar{\psi} = \psi^+\ \gamma_4$$

مثال : أوجد المعنى الفيزيائي لتحويل – c (تحويل الترافق الشحني) .

الحل : لإيجاد معنى تغاير معادلة ديراك بالنسبة لترافق الشحنة ، نعتبر تأثير التحويل السابق على كثافة التيار والشحنة وصورتها :

$$j_\mu = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

$$\therefore j_\mu^c = ie\bar{\psi}^c\gamma_\mu\psi^c = -ie\tilde{\psi}c^{-1}\gamma_\mu c\tilde{\bar{\psi}}$$

$$= ie\tilde{\psi}\tilde{\gamma}_\mu\tilde{\bar{\psi}} = ie\widetilde{(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)} \neq -j_\mu$$

وذلك بعكس ما توقعناه

وحيث أن شحنة المجال الكلية تغير إشارتها تحت التحويل c فإن j_μ يجب أيضاً أن تغير شحنتها .

والصعوبة هنا في تعريف j_μ :

فبإعتبار $\psi, \overline{\psi}$ هي مؤثرات غير متبادلة ، وبكتابة :

$$j_\mu = ie\overline{\psi}_\alpha (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta$$

حيث $(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}$ مصفوفة غير متماثلة ، فيجب أن يكون $\overline{\psi}_\alpha \psi_\beta$ غير متماثل ، أي :

$$\overline{\psi}_\alpha \psi_\beta = \frac{1}{2}\left(\overline{\psi}_\alpha \psi_\beta - \psi_\beta \overline{\psi}_\alpha\right)$$

$$\therefore j_\mu = \frac{ie}{2}\left[\overline{\psi}_\alpha (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta - \psi_\beta (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\alpha\right]$$

$$= \frac{ie}{2}\left[(\overline{\psi}\, \gamma_\mu \psi) - (\widetilde{\overline{\psi}\, \gamma_\mu \psi})\right]$$

$$\therefore j_\mu^c = \frac{ie}{2}\left[(\overline{\psi}^c\, \gamma_\mu \psi^c) - (\widetilde{\overline{\psi}^c\, \gamma_\mu \psi^c})\right].$$

$$= -\frac{ie}{2}\left[(\widetilde{\overline{\psi}\, \gamma_\mu \psi}) - (\overline{\psi}\, \gamma_\mu \psi)\right] = -j_\mu$$

كما هو متوقع .

وهذا يعني أن التحويل – c يحول الجسيم إلى جسيم مضاد وبالعكس .

<u>المتغايرات ثنائية الخطية (Bilinear Covariants)</u> :

إن الكميات التي صورتها $(\overline{\psi}\,\Gamma\,\psi)$ ، حيث Γ هي حاصل ضرب مصفوفات γ ، تعرف بالمتغايرات ثنائية الخطية أو لا متغيرات ديراك (Dirac Invariants) ، وذلك بسبب أن لها خواص تحويلية محددة بإستخدام تحويلات لورنتز .

<u>ولإيجاد كل المتغايرات ثنائية الخطية الممكنة</u> : نبدأ بضرب مصفوفات γ

(١) إذا ضربنا أي زوج من γ نحصل على :

أما $\gamma_\mu^2 = 1$ عندما تكون المصفوفتان متساويتان .

أو $\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu = i\,\sigma_{\mu\nu}$ عندما تكون المصفوفتان مختلفتان .

(٢) إذا ضربنا ٣ مصفوفات ، فإننا نحصل على أحد المصفوفات بإشارة مخالفة إلا إذا كانت كل المصفوفات الثلاثة مختلفة ، فمثلاً :

$$\gamma_3 \gamma_2 \gamma_3 = -\gamma_3 \gamma_3 \gamma_2 = -\gamma_2$$

وإذا كانت كل المصفوفات الثلاثة مختلفة فإننا نحصل على مصفوفة جديدة $\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda$ والتي يمكن كتابتها دائماً بالصورة : $\gamma_5 \gamma_\rho$ فمثلاً :

$$\gamma_3 \gamma_2 \gamma_4 = \gamma_1 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_2 \gamma_4 = -\gamma_1 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = -\gamma_1 \gamma_5 = \gamma_5 \gamma_1$$

(٣) إذا ضربنا مصفوفات γ الأربعة فنحصل على مصفوفة واحدة :

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$$

وهذا بالطبع يساوي :

$$\gamma_5 = -\gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_1 = \gamma_3 \gamma_4 \gamma_1 \gamma_2 = \cdots\cdots$$

ولذلك فيمكننا كتابة :

$$\Gamma_A = 1\,,\ \gamma_\mu\,,\ \sigma_{\mu\nu} = -i\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,,\ i\,\gamma_5\,\gamma_\mu\,,\ \gamma_5 \quad \text{\_\_\_\_(1)}$$

الذي يمثل كل التركيبات الممكنة، وهي تشكل ١٦ مصفوفة مستقلة هي :

مصفوفة الوحدة ، ٤ مصفوفات γ_μ ، ٦ مصفوفات $\sigma_{\mu\nu}$ ، ٤ مصفوفات $i\gamma_5\gamma_\mu$ ، مصفوفة γ_5 .

$$\Gamma_A = I\,;\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\,;\ i\gamma_1\gamma_3\,,\ i\gamma_2\gamma_1, i\gamma_3\gamma_2\,, i\gamma_1\gamma_4\,,$$
$$i\gamma_2\gamma_4\,, i\gamma_3\gamma_4\,;\ i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\,, i\gamma_2\gamma_1\gamma_4\,,\ i\gamma_3\gamma_2\gamma_4\,,$$
$$i\gamma_3\gamma_1\gamma_4\,;\ \gamma_5$$

وقد أدخلنا المعامل $\pm i$ في (1) لنحصل على :

$$\Gamma_A^2 = 1 \quad , \quad A = 1,2,\cdots\cdots,16$$

وبذلك نحصل على الأنواع الخمسة التالية للمتغايرات ثنائية الخطية :

(1) $S = \overline{\psi}\,\psi$ (scalar – قياسي)

(2) $V_\mu = \overline{\psi}\,\gamma_\mu\psi$ (vector – إتجاهي)

(3) $T_{\mu\nu} = \overline{\psi}\,\sigma_{\mu\nu}\,\psi$ (tensor – ممتد)

(4) $A_\mu = i\,\overline{\psi}\ \gamma_5\ \gamma_\mu\psi$ (Axial vector – إتجاهي محوري)

(5) $P = \overline{\psi}\ \gamma_5\,\psi$ (Pseudo scalar – شبه قياسي)

والآن لندرس سلوك كل من هذه المتغايرات ثنائية الخطية بإستخدام تحويلات لورنتز :

[١] <u>المتغاير القياسي</u> : $\boxed{S = \overline{\psi}\,\psi}$

حيث أنه تحت تحويلات لورنتز فإن :

$$\psi'(x') = S'\psi(x)$$

$$\therefore S' = \overline{\psi}'\ \psi' = \psi^+ S^+ \gamma_4 S\psi$$
$$= \psi^+\ \gamma_4\gamma_4 S^+ \gamma_4 S\psi$$
$$= \psi^+\ \gamma_4 S^{-1} S\psi = \overline{\psi}\ \psi = S$$

$$\overline{\psi} = \psi^+\gamma_4$$
$$\overline{\psi}' = \overline{S\psi} = \psi^+ S^+\gamma_4$$

حيث :

$$\gamma_4 S^{+} \gamma_4 = S^{-1}$$
$$S^{-1} S = 1$$

وهذا يعني أن S يكون لا متغيراً بإستخدام تحويلات لورنتز .

أيضاً : بإستخدام الإنعكاسي الفراغي فإن :

$$S' = \overline{\psi}' \psi' = e^{-i\xi} \overline{\psi} \gamma_4 \cdot e^{i\xi} \gamma_4 \psi = \overline{\psi} \psi = S$$

أي أن S أيضاً يكون لا متغيراً بإستخدام الإنعكاس الفراغي ، أي أنـــه يشـــكل كمية قياسية (scalar) .

[٢] <u>المتغاير الإتجاهي</u> : $\boxed{V_\mu = \overline{\psi} \gamma_\mu \psi}$

<u>بإستخدام تحويلات لورنتز</u> :

$$V'_\mu = \overline{\psi}' \gamma_\mu \psi' = \overline{\psi} S^{-1} \gamma_\mu S \psi$$
$$= a_{\mu v} \overline{\psi} \gamma_v \psi = a_{\mu v} V_v$$

<u>بإستخدام الإنعكاس الفراغي</u> :

$$V'_\mu = \overline{\psi}' \gamma_\mu \psi' = e^{-i\xi} \psi \gamma_4 \gamma_\mu e^{i\xi} \gamma_4 \psi$$
$$= \overline{\psi} \gamma_4 \gamma_\mu \gamma_4 \psi$$

وهذا يعني أن :

$$V'_n = \overline{\psi} \gamma_4 \gamma_n \gamma_4 \psi = -\overline{\psi} \gamma_4 \gamma_4 \gamma_n \psi$$
$$= -\overline{\psi} \gamma_n \psi = -V_v \qquad (n = 1,2,3)$$
$$V'_4 = \overline{\psi} \gamma_4 \gamma_4 \gamma_4 \psi = \overline{\psi} \gamma_4 \psi = V_4$$

ولذلك فإن V_μ هو متجه ربـــاعي ، تتغيـــر مركباتـــه الفراغيـــة عنـــد تغيـــر خاصية الندية أو الزوجية (parity) .

[٣] المتغاير الممتد : $\boxed{T_{\mu\nu} = \overline{\psi}\,\sigma_{\mu\nu}\,\psi}$

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن :

$$T_{\mu\nu} = \overline{\psi}\,\sigma_{\mu\nu}\,\psi = -i\,\overline{\psi}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\psi$$

حيث $\mu \neq \nu$ ، هو ممتد من الرتبة الثانية .

[٤] المتغاير الإتجاهي المحوري (وأحياناً يسمى شبه الإتجاهي) :

$$\boxed{A_\mu = i\,\overline{\psi}\,\gamma_5\,\gamma_\mu\,\psi}$$

بإستخدام الإنعكاس الفراغي :

$$A'_\mu = i\,\overline{\psi}'\,\gamma_5\,\gamma_\mu\,\psi' = i\,\overline{\psi}\,\gamma_4\,\gamma_5\,\gamma_\mu\,\gamma_4\,\psi$$

$$A'_n = i\,\overline{\psi}\,\gamma_4\,\gamma_5\,\gamma_n\,\gamma_4\,\psi = -i\,\overline{\psi}\,\gamma_5\,\gamma_4\,\gamma_n\,\gamma_4\,\psi$$

$$= i\,\overline{\psi}\,\gamma_5\,\gamma_n\,\gamma_4\,\gamma_4\,\psi = i\,\overline{\psi}\,\gamma_5\,\gamma_n\,\psi = A_n \qquad (n = 1,2,3)$$

$$A'_4 = i\,\overline{\psi}\,\gamma_4\,\gamma_5\,\gamma_4\,\gamma_4\,\psi = i\,\overline{\psi}\,\gamma_4\,\gamma_5\,\psi$$

$$= -i\,\overline{\psi}\,\gamma_5\,\gamma_4\,\psi = -A_4$$

وبإستخدام تحويلات لورنتز :

نجد أن التحويل يحدث بنفس طريقة تحويلات V_μ أي أن :

$$A'_\mu = a_{\mu\nu}\,A_\nu$$

$\therefore$ A_μ يسلك سلوك متجه محوري .

$\therefore$ المتجه المحوري (أو شبه المتجه) : يتحول طبقاً لتحويلات لورنتز بحيث

$$A'_\mu = a_{\mu\nu}\,A_\nu$$

ويتحول طبقاً للإنعكاسي الفراغي بحيث :

$$A'_n = A_n \;,\; A'_4 = -A_4$$

[٥] المتغاير شبه القياسي : $\boxed{P=\overline{\psi}\,\gamma_5\,\psi}$

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن P يتحول مثل القياسي S طبقاً لتحويلات لـورنتز بينما تتغير إشارته طبقاً لتحويلات الإنعكاسي الفراغي ، أي أنه :

طبقاً لتحويلات لورنتز : فإن $p'=p$

وطبقاً للإنعكاسي الفراغي : فإن $p'=-p$

ويمكن تلخيص النتائج السابقة في الجدول الآتي :

الكمية	صورتها	طبقاً لتحويلات لورنتز	طبقاً للإنعكاس الفراغي
القياسية S	$S=\overline{\psi}\,\psi$	$S'=S$	$S'=S$
الإتجاهية V_μ	$V_\mu=\overline{\psi}\,\gamma_\mu\,\psi$	$V'_\mu=a_{\mu\nu}V_\nu$ حيث $V_\nu=\overline{\psi}\,\gamma_\nu\,\psi$	$V'_n=-V_n$ $V'_4=V_4$
الإتجاهية المحورية A_μ	$A_\mu=i\,\overline{\psi}\,\gamma_5\,\gamma_\mu\,\psi$	$A'_\mu=a_{\mu\nu}V_\nu$ حيث $A_\nu=i\overline{\psi}\,\gamma_5\,\gamma_\nu\,\psi$	$A'_n=A_n$ $A'_4=-A_4$
الممتدة $T_{\mu\nu}$	$T_{\mu\nu}=\overline{\psi}\,\sigma_{\mu\nu}\psi$ حيث $\sigma_{\mu\nu}=-i\,\gamma_\mu\,v_\nu$	$T'_{\mu\nu}=a_{\mu\lambda}\,a_{\nu\rho}\,T_{\lambda\rho}$ حيث $T_{\lambda\rho}=\overline{\psi}\,\sigma_{\lambda\rho}\psi$	$T'_{\mu n}=T_{\mu n}$ $T'_{\mu 4}=-T_{\mu 4}$ حيث $T_{\mu n}=\overline{\psi}\,\sigma_{\mu n}\psi$ $T_{\mu 4}=\overline{\psi}\,\sigma_{\mu 4}\psi$
شبه القياسية P	$P=\overline{\psi}\,\gamma_5\,\psi$	$p'=p$	$p'=-p$

خواص Γ_A : علمنا أن :

$$\Gamma_A = I\,;\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4;\ i\gamma_1\gamma_3\,,\ i\gamma_2\gamma_1, i\gamma_3\gamma_2\,, i\gamma_1\gamma_4\,,$$
$$i\gamma_2\gamma_4\,, i\gamma_3\gamma_4\,;\ i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\,, i\gamma_2\gamma_1\gamma_4\,,\ i\gamma_3\gamma_2\gamma_4\,,$$
$$i\gamma_3\gamma_1\gamma_4\,;\ \gamma_5$$

وتتميز Γ_A (حيث $A = 1,2,\cdots\cdots,16$) بالخواص الآتية :

[١] مربع Γ_A يساوي الوحدة : $\Gamma_A^2 = 1$

فمثلاً عندما $A = 6$: $\Gamma_6 = i\gamma_1\gamma_3$

$$\therefore\ \Gamma_6^2 = (i\gamma_1\gamma_3)(i\gamma_1\gamma_3) = -\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_3 = -\gamma_1(-\gamma_1\gamma_3)\gamma_3$$
$$= \gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma_3 = \gamma_1^2\gamma_3^2 = 1\cdot 1 = 1$$

[٢] حاصل ضرب أي عنصرين يتناسب مع عنصر ثالث في المجموعة Γ_A

بمعنى أن : $\Gamma_A\Gamma_B = a\Gamma_C$

فمثلاً : إذا كانت $\Gamma_6 = i\gamma_1\gamma_3\,,\ \Gamma_7 = i\gamma_2\gamma_1$

$$\therefore\ \Gamma_6\Gamma_7 = (i\gamma_1\gamma_3)(i\gamma_2\gamma_1) = -\gamma_1\gamma_3\gamma_2\gamma_1 = \gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_2$$
$$= -\gamma_1^2\gamma_3\gamma_2 = -\gamma_3\gamma_2 \qquad \Big|\ \gamma_2\gamma_1 = -\gamma_1\gamma_2$$
$$= (i)(i\gamma_3\gamma_2) = i\Gamma_8 \qquad \Big|\ \gamma_3\gamma_1 = -\gamma_1\gamma_3$$

حيث $\Gamma_8 = i\gamma_3\gamma_2$

[٣] إذا كان $\Gamma_A \neq I$ فإن Γ_B هو عنصر يمكن إيجاده بحيث :

$$\Gamma_B\Gamma_A\Gamma_B = -\Gamma_A$$

فمثلاً : إذا كان $\Gamma_A = \Gamma_2 = \gamma_1 \neq I$ ، $\Gamma_B = \Gamma_6 = i\gamma_1\gamma_3$

$$\Gamma_6\Gamma_2\Gamma_6 = (i\gamma_1\gamma_3)(\gamma_1)(i\gamma_1\gamma_3) = -\gamma_1\gamma_3\underbrace{\gamma_1\gamma_1}_{1"}\gamma_1$$
$$= -\gamma_1\underbrace{\gamma_3\gamma_3}_{1"} = -\gamma_1 = -\Gamma_2$$

أيضاً : إذا كان

$$\Gamma_B = \Gamma_{16} = \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \quad ، \quad \Gamma_A = \Gamma_3 = \gamma_2 \neq I$$

$$\therefore \Gamma_{16} \Gamma_3 \Gamma_{16} = \gamma_5 \gamma_2 \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_5 \gamma_2$$

$$= -\gamma_5^2 \gamma_2 = -\gamma_2 = -\Gamma_3 \quad \Big| \; \gamma_2 \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_2$$

[٤] إذا كان $\Gamma_A \neq I$ فإن

$$\boxed{Tr(\Gamma_A) = 0}$$

ولإثبات ذلك : نستخدم [٣] :

$$-T(\Gamma_A) = Tr(\Gamma_B \Gamma_A \Gamma_B) = Tr(\Gamma_B \Gamma_B \Gamma_A)$$

$$= Tr(\Gamma_B^2 \Gamma_A) = Tr(\Gamma_A)$$

$$\therefore \boxed{Tr(\Gamma_A) = 0}$$

فمثلاً :

$$Tr(\Gamma_3) = Tr(\gamma_2) = 0$$

$$Tr(\Gamma_{16}) = Tr(\gamma_5) = 0$$

وكذا ....

[٥] كل الـــ Γ_A تكون مستقلة خطياً .

ولإثبات ذلك : يجب أن نبرهن العلاقة :

$$\sum_{A=1}^{16} a_A \Gamma_A = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (1)$$

بشرط أن كل المعـــاملات a_A (حيـــث $A = 1, 2, \cdots\cdots, 16$) تســـاوي أصفاراً .

فبأخذ أثر العلاقة (1) وإستخدام الخاصية [٤] نجد أن : $a_1 = 0$

وبالمثل : بضرب (1) في Γ_A وإستخدام العلاقات :

$$\Gamma_A^2 = 1 \;, \quad \Gamma_A \Gamma_B = a \Gamma_C \;, \quad Tr(\Gamma_A) = 0$$

نجد أن : $a_A = 0$ لكل قيم A . وهو المطلوب .

مسائل على الصورة المتغايرة لمعادلة ديراك

مسألة (١) : (أ) أكتب معادلة ديراك للجسيم ذي الكتلة الساكنة الصفرية (zero mass Dirac Equation) واللف المساوي $\frac{1}{2}$ ، وأذكر خواص هذا الجسيم .

(ب) أثبت أن المصفوفة γ_5 هي ثابت للحركة لجسيمات ديراك ذات الكتلة الصفرية

مسألة (٢) : أوجد ψ_{PCT} أي ψ بعد التطبيق المتتالي للتحويلات T, C, P ثم أثبت أن معادلة ديراك :

$$\left[-i\vec{\alpha}\cdot(\vec{\nabla}+ie\vec{A})+\beta m-eA_0\right]\psi=-E\psi$$

تتحول بإستخدام هذه التحويلات إلى :

$$\left[i\vec{\alpha}\cdot(\vec{\nabla}+ie\vec{A})+\beta m-eA_0\right]\psi_{PCT}=E\psi_{PCT}$$

مع تفسير هذه النتيجة .

مسألة (٣) : (أ) أوجد مؤثري الإسقاط للطاقتين الموجبة والسالبة في معادلة ديراك بالصورة :

$$\Lambda^{\pm}(p)=\frac{m\mp i\gamma_\mu p_\mu}{2m}$$

حيث m هي الكتلة الساكنة للجسيم الديراكي .

مع ذكر خواص هذين المؤثرين .

(ب) بإستخدام خواص الأثر (Trace) لمصفوفات γ لديراك ، أحسب الأثر الآتي :

$$Tr\left[\gamma_\mu\Lambda^{+}(\vec{p})\gamma_\mu\Lambda^{+}(\vec{p}')\right]$$

حلول المسائل

المسألة (١) :

(أ) لكتابة معادلة ديراك للجسيم ذو الكتلة الساكنة الصفرية : نضع $m_0 = 0$ فيصبح هاملتونيان هذا الجسيم بالصورة : $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$

وبذلك فإن هاملتونيان ديراك لهذا الجسيم لا يشتمل على المصفوفة β أو γ_4 ، ولما كان $\vec{\alpha} = i\gamma_4 \vec{\gamma}$ فإن : $H = i\gamma_4 \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$ وتصبح معادلة ديراك بالصورة :

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\gamma_\gamma (\vec{\gamma} \cdot \vec{p})\psi$$

إن الجسيمات ذات الكتلة الساكنة الصفرية وذات اللفات = $\frac{1}{2}$ (أي التي تخضع لمعادلة ديراك) والتي تعرف بجسيمات ديراك ذات الكتلة الساكنة الصفرية موجودة في الطبيعة فعلاً وهي النيوترينوات (جمع نيوترينو) وتنتمي إلى عائلة اللبتونات التي تشتمل على جسيمات ستة هي (الإلكترون e^- والميون μ^- والتاوون τ^- والنيوترينو الإلكتروني υ_e والنيوترينو الميوني υ_μ والنيوترينو التاووني υ_τ) .

وبإدخال مصفوفات اللف لباولي $\vec{\sigma}'$ والتي ترتبط بالمصفوفات $\vec{\gamma}$ لديراك بالعلاقة : $\vec{\sigma}' = -i\gamma_5 \gamma_4 \vec{\gamma}$ فإن هاملتونيان النيوترنيو يصبح :

$$H = i\gamma_4 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} = -\gamma_5 \vec{\sigma}' \cdot \vec{p}$$

$$\vec{\sigma}' = -i\gamma_5 \gamma_4 \vec{\gamma}$$

$$\gamma_5 \vec{\sigma}' = -i\gamma_4 \vec{\gamma}$$

حيث $\gamma_5 \gamma_5 = 1$.

ويعرف مؤثر الحلزونية (helicity operator) بالعلاقة :

$$h = \frac{\vec{\sigma}' \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{\sigma}' \cdot \vec{p}^0$$

حيث $\vec{p}^{\,0} = \dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ متجه الوحدة في إتجاه المتجه $\vec{p}$ فإن :

$\vec{\sigma} \cdot \vec{p}^{\,0} = |\vec{p}|\ h$ وتصبح H بالصورة : $H = -\gamma_5 |\vec{p}|\ h$

(ب) لإثبات أن γ_5 للنيوترينو هو ثابت للحركة نثبت أن : $[\gamma_5 , H] = 0$

ولإثبات ذلك :

حيث أنه لهذا الجسيم : $H = -\gamma_5 (\vec{\sigma}' \cdot \vec{p})$

حيث : $\vec{\sigma}' = -\gamma_5 (i\gamma_4 \vec{\gamma}) = -\gamma_5\, \vec{\alpha}$

$$\therefore\ H = -\ \gamma_5 (-\gamma_5\, \vec{\alpha}) \cdot \vec{p} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \qquad \Big|\ \vec{\alpha} = i\gamma_4 \vec{\gamma}$$

حيث أن γ_5 تتبادل مع $\vec{\alpha}$ فإن :

$$[\gamma_5 , H] = 0$$

وهو المطلوب .

المسألة (٢) :

عندنا :

$$\psi_P = e^{i\xi} \gamma_4 \psi\ ,\ \psi_T = (\gamma_4 \gamma_5 \gamma_2)\, \psi^*\ ,\ \psi_C = (\gamma_4\, \gamma_2)\, \tilde{\bar{\psi}}$$

$$\therefore\ \psi_{PC} = e^{i\xi} (\gamma_4\, \gamma_2)\, \gamma_4\, \tilde{\bar{\psi}} = -e^{i\xi} \gamma_4 \gamma_4 \gamma_2\, \tilde{\bar{\psi}} = -e^{i\xi} \gamma_2\, \tilde{\bar{\psi}}$$

$$\therefore\ \psi_{PCT} = (\gamma_4 \gamma_5 \gamma_2) \cdot (-e^{i\xi} \gamma_2\, \tilde{\bar{\psi}})^* = -\gamma_4 \gamma_5 \gamma_2\, \gamma_2 \cdot e^{i\xi} (\tilde{\bar{\psi}})^*$$

$$= -\gamma_4 \gamma_5 \gamma_4 e^{i\xi} \psi$$

وذلك حيث أن : $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4 = \tilde{\psi}^* \gamma_4$ ومنها : $(\tilde{\bar{\psi}})^* = \gamma_4\, \psi$

وبأخذ عامل الطور الإختياري $e^{i\xi}$ مساوياً للواحد فإننا نحصل على :

$$\psi_{PCT} = -\gamma_4 \gamma_5 \gamma_4 \psi = \gamma_4 \gamma_4 \gamma_5 \psi = \gamma_5\ \psi \qquad \_\_\_\_(1)$$

ولإيجاد تحويل المعادلة

$$\left[-i\vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} + ie\vec{A}) + \beta\ m - eA_0\right] \psi = -E\psi \qquad \_\_\_(2)$$

بإستخدام التحويل PCT نتبع الآتي :

عند التحويل (PT) أي إنعكاسي إحداثيات المكان – الزمان ، فإن x_μ , A_μ تتحول طبقاً للقاعدة :

$$\left.\begin{array}{l} x_\mu \to x'_\mu = -x_\mu \\ A_\mu \to A'_\mu = x_\mu \end{array}\right\} \qquad (3)$$

بينما لا يوجد أي تغيير في x_μ , A_μ تحت التحويل – c .

أيضاً : من العلاقة (1) فإن :

$$\psi = \gamma_5 \psi_{PCT} \qquad (4)$$

بإستخدام (4) ، (3) في (2) نحصل على هذه العلاقة بعد إجراء التحويل PCT كالآتي :

$$\left[-i\vec{\alpha}\cdot(-\overline{\nabla}' - ie\vec{A}') + \beta\ m + eA'_0\right]\gamma_5 \psi_{PCT}(x')$$
$$= -E\gamma_5 \psi_{PCT}(x')$$

$$\therefore\ \gamma_5\left[-i\vec{\alpha}\cdot(-\overline{\nabla}' - ie\vec{A}') + \beta\ m + eA'_0\right]\gamma_5 \psi_{PCT}(x')$$
$$= -E\gamma_5^2 \psi_{PCT}(x')$$

$$\therefore\quad \left[i\vec{\alpha}\cdot(-\overline{\nabla}' - ie\vec{A}') - \beta\ m + eA'_0\right]\psi_{PCT}(x')$$
$$= -E\,\psi_{PCT}(x')$$

$$\therefore\quad \left[i\vec{\alpha}\cdot(\overline{\nabla}' + ie\vec{A}') + \beta\ m - eA'_0\right]\psi_{PCT}(x')$$
$$= E\,\psi_{PCT}(x')$$

وبإسقاط الشُرط نحصل على :

$$\left[i\vec{\alpha}\cdot(\overline{\nabla} + ie\vec{A}) + \beta\ m - eA_0\right]\psi_{PCT}(x)$$
$$= E\,\psi_{PCT}(x) \qquad (5)$$

وبمقارنة العلاقة (5) مع العلاقة (2) نجد أن :

الإلكترون ذو الطاقة السالبة المتحرك إلى الخلف في الزمان والمكان هو عبارة عن جسيم ذو طاقة موجبة يتحرك في الإتجاه الموجب للزمان والمكان . وهذا التفسير للبوزترون كالكترون ذو طاقة سالبة يتحرك إلى الخلف في الزمن ، يشكل أساساً لما يعرف بنظرية فينمان للبوزترون والتي هي من النظريات الأساسية في إلكترودنيا ميكا الكم ، وسوف ندرس ذلك بالتفصيل في كتاب قادم عن إلكتروديناميكا الكم بإذن الله تعالى .

<u>المسألة (٣)</u> : <u>الجزء الأول</u> :

(أ) إن ملفوفات الطاقة الموجبة والسالبة تخضع للعلاقتين :

$$\left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta\ mc^2\right)u^r(\vec{p})=E_p u^r(\vec{p}) \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$\left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta\ mc^2\right)v^r(\vec{p})=-E_p v^r(\vec{p}) \qquad \_\_\_\_(2)$$

وبإستخدام الوحدات الطبيعية ومتجه الطاقة – كمية الحركة الرباعي $p_\mu=(\vec{p}\,,iE_p)$ يمكن كتابة العلاقتين (2) ، (1) بالصورة :

$$\left(i\gamma_\mu\ p_\mu+\ m\right)u^r(\vec{p})=0 \qquad \_\_\_\_(3)$$

$$\left(-i\gamma_\mu\ p_\mu+\ m\right)v^r(\vec{p})=0 \qquad \_\_\_\_(4)$$

حيث $\gamma_4=\beta \quad , \quad \alpha_n=i\beta\gamma_n$

بإستخدام العلاقة (3) يمكننا كتابة :

$$\left(m-i\gamma_\mu\ p_\mu\right)u(\vec{p})=\left[2m-(m+i\gamma_\mu\ p_\mu)\right]u(\vec{p})$$

$$=2mu(\vec{p})$$

$$\therefore\ \frac{m-i\gamma_\mu\ p_\mu}{2m}u(\vec{p})=u(\vec{p}) \qquad \_\_\_\_(5)$$

وبالمثل بإستخدام العلاقة (4) يمكننا الحصول على :

$$\frac{m - i\gamma_\mu p_\mu}{2m} v(\vec{p}) = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(6)}$$

بوضع المؤثر $\frac{m - i\gamma_\mu p_\mu}{2m} = \Lambda^+(\vec{p})$ فإن (6)،(5) $u(\vec{p})$ تصبحان :

$$\Lambda^+(\vec{p})\, u(\vec{p}) = u(\vec{p}) \quad , \quad \Lambda^+(\vec{p})\, v(\vec{p}) = 0$$

وهذا يعني أن المؤثر $\Lambda^+(\vec{p})$ إذا أثر على ملفوف الطاقة الموجبة يعطي قيمة ذاتية $(+1)$ بينما إذا أثر على ملفوف الطاقة السالبة $v(\vec{p})$ فإنه يعطي صفراً .

ويسمى بمؤثر الإسقاط للطاقة الموجبة $\Lambda^+(\vec{p})$

$$\boxed{\Lambda^+(\vec{p}) = \frac{m - i\gamma_\mu p_\mu}{2m}}$$

وبطريقة مماثلة يمكننا إثبات أن المؤثر

$$\frac{m + i\gamma_\mu p_\mu}{2m} = \Lambda^-(\vec{p})$$

إذا أثر على ملفوف الطاقة السالبة $v(\vec{p})$ يعطي قيمة ذاتية $+1$ وإذا أثر على ملفوف الطاقة الموجبة $u(\vec{p})$ يعطي صفراً أي أن :

$$\Lambda^-(\vec{p})\, u(\vec{p}) = 0 \quad , \quad \Lambda^-(\vec{p})\, v(\vec{p}) = v(\vec{p})$$

ويسمى بمؤثر الإسقاط للطاقة السالبة $\Lambda^-(\vec{p})$

$$\boxed{\Lambda^-(\vec{p}) = \frac{m + i\gamma_\mu p_\mu}{2m}}$$

ويمكن بسهولة إثبات العلاقات الآتية :

(i) $\Lambda^+(\vec{p}) + \Lambda^-(\vec{p}) = 1$

(ii) $\left[\Lambda^\pm(\vec{p})\right]^n + \Lambda^\pm(\vec{p})$

فمثلاً : عندما $n = 2$:

$$\left[\Lambda^{+}(\vec{p})\right]^{2} = \left(\frac{m - i\gamma_{\mu}\, p_{\mu}}{2m}\right)\left(\frac{m - i\gamma_{\mu}\, p_{\mu}}{2m}\right)$$

$$= \frac{1}{4m^{2}}\left[m^{2} - 2im\gamma_{\mu}\, p_{\mu} - p_{\mu}^{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4m^{2}}\left[m^{2} - 2im\,\gamma_{\mu}\, p_{\mu} - (-m^{2})\right]$$

$$= \frac{m - i\gamma_{\mu}\, p_{\mu}}{2m} = \Lambda^{+}(\vec{p})$$

حيث أنه للجسيم الحر فإن : $p_{\mu}^{2} = -m^{2}$ (في النسبية) .

(iii) $\Lambda^{+}(\vec{p})\Lambda^{-}(\vec{p}) = \Lambda^{-}(\vec{p})\Lambda^{+}(\vec{p}) = 0$

<u>الجزء الثاني</u> :

حساب الأثر : $Tr\left[\gamma_{\mu}\,\Lambda^{+}(\vec{p})\,\gamma_{\mu}\,\Lambda^{+}(\vec{p}')\right]$

نكتب :

$$\Lambda^{+}(\vec{p}) = \frac{m - i\vec{p}}{2m} = \frac{m - i\gamma_{\alpha}\, p_{\alpha}}{2m} \quad , \because \; \vec{p}' = \gamma_{\alpha}\, p_{\alpha}$$

$$\Lambda^{+}(\vec{p}') = \frac{m - i\vec{p}'}{2m} = \frac{m - i\gamma_{\beta}\, p'_{\beta}}{2m} \quad , \; \vec{p}' = \gamma_{\beta}\, p'_{\beta}$$

$$\therefore\; Tr\left[\gamma_{\mu}\,\Lambda^{+}(\vec{p})\,\gamma_{\mu}\,\Lambda^{+}(\vec{p}')\right]$$

$$= Tr\left[\gamma_{\mu}\,\frac{m - i\gamma_{\alpha}\, p_{\alpha}}{2m}\;\gamma_{\mu}\,\frac{m - i\gamma_{\beta}\, p'_{\beta}}{2m}\right]$$

$$= \frac{1}{4m^{2}}\,Tr\left[\gamma_{\mu}\left(m - i\gamma_{\alpha}\, p_{\alpha}\right)\gamma_{\mu}\left(m - i\gamma_{\beta}\, p'_{\beta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4m^2} Tr\left[\left(m\gamma_\mu - i\gamma_\mu\gamma_\alpha p_\alpha\right)\left(m\gamma_\mu - i\gamma_\mu\gamma_\beta p'_\beta\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4m^2} Tr\Big[m^2 \gamma_\mu\gamma_\mu - im\, p'_\beta \gamma_\mu\gamma_\mu\gamma_\beta$$
$$- im\, p_\alpha \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta p_\alpha p'_\beta\Big]$$

$$= \frac{1}{4m^2} \left[m^2 Tr\left(\gamma_\mu\gamma_\mu\right) - Tr\left(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta p_\alpha p'_\beta\right)\right] \quad (1)$$

وذلك لأن أثر حاصل ضرب عدد فردي من مصفوفات جاما يساوي صفراً .

__والآن__ : $Tr(\gamma_\alpha\gamma_\beta) = 4\delta_{\alpha\beta}$, $Tr(\gamma_\mu\gamma_\mu) = 4$

$$Tr\left(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta p_\alpha p'_\beta\right)$$
$$= p_\alpha p'_\beta Tr\left(\underbrace{\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu}\gamma_\beta\right) \Big| \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu = -2\gamma_\alpha$$
$$= p_\alpha p'_\beta Tr\left(\underbrace{-2\gamma_\alpha\gamma_\beta}\right)$$
$$= p_\alpha p'_\beta (-2)\left(4\delta_{\alpha\beta}\right)$$
$$= -8 p_\alpha p'_\beta \delta_{\alpha\beta} = -8 p_\alpha p'_\beta = -8\vec{p}\cdot\vec{p}'$$

بالتعويض في (1)

$$\therefore Tr\left[\gamma_\mu \Lambda^+(\vec{p})\gamma_\mu \Lambda^+(\vec{p}')\right]$$
$$= \frac{1}{4m^2}\left[4m^2 - (-8\vec{p}\cdot\vec{p}')\right]$$
$$= \frac{1}{m^2}\left[m^2 + 2(\vec{p}\cdot\vec{p}')\right]$$

وهو المطلوب .