

## الباب الثاني عشر

### التحويلات التآلفية Affine Transformations

نقدم في هذا الباب نوع من الهندسات يسمى الهندسة التآلفية affine geometry وهي هندسة أكثر عمومية من الهندسة الإقليدية وأقل عمومية من الهندسة الإسقاطية ونقدم كذلك التحويلات التآلفية في الفراغ التآلفي.

#### (١.١٢) الهندسة التآلفية Affine Geometry

الهندسة التآلفية هي هندسة لا تحتوي على أي مفهوم لنقطة الأصل origin وكذلك الطول والزاوية ولكن تحتوي على مفهوم طرح النقاط لتعرف متجه. إنها تحتل مكان متوسط intermediate بين الهندسة الإقليدية والهندسة الإسقاطية. إنها هندسة الفراغ التآلفي Affine space الذي هو فراغ جزئي من الفراغ الإسقاطي كما نرى في الجزء (٢.١٢).

الهندسة التآلفية يمكن شرحها على أنها هندسة المتجهات، لا تحتوي على أي مفاهيم للطول والزاوية. الفراغ التآلفي يختلف أو يميز عن الفراغ الاتجاهي الذي له نفس البعد dimension بإهمال forgetting نقطة الأصل  $o$ . أي أن الفراغ التآلفي هو فراغ المتجهات الحرة free vectors كما كان يطلق عليها في المراجع القديمة. مما سبق يتضح مدى قرب close الهندسة التآلفية من الجبر الخطي وغالباً لا يمكن فصلهما isolated.

الآن نحن بصدد تعريف واضح للفراغ التآلفي affine space من خلال ثلاث مفاهيم متوافقة consistent معاً كالتالي:

١. الفراغ التآلفي هو مكمل لنقاط اللانهاية points at infinity في الفراغ الإسقاطي.
  ٢. الفراغ التآلفي هو الفراغ المصاحب للهندسة التآلفية.
  ٣. الفراغ التآلفي يعرف من خلال الفراغ الاتجاهي.
- ونوضح ذلك فيما يلي:

لاحظ أن ارتباطات combinations المتجهات  $u - v$  لا تتغير بانتقال  $u$  يتحرك في اتجاه ما بينما  $-v$  تتحرك في الاتجاه الآخر). هذا الارتباط يمكن النظر إليه على أنه ارتباط خطي من المتجهات بشرط مجموع المعاملات يساوي الصفر. وهذا يبين لنا أن الفراغ التآلفي هو فراغ اتجاهي مع عمليات الطرح subtractions والضرب في عدد قياسي scalar multiplications.

### (١.١.١٢) التراكيب الخطية: Linear Combinations

١. بالنسبة لمجموعة المتجهات  $V = \{u\}$  فإن  $u, u+v, \alpha u$  يسمى تركيب خطي وفي الحالة العامة فإن

$$\sum_i \alpha_i u_i$$

يسمى تركيب خطي من المتجهات  $u_i$  بحيث لا يوجد قيد على المعاملات  $\alpha_i$ . التحويل الخطي  $T$  يعرف كما يلي:

$$T(u+v) = T(u) + T(v), T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

وفي الحالة العامة فإن التحويل الخطي  $T$  يعرف بالعلاقة

$$T\left(\sum_i \alpha_i u_i\right) = \sum_i \alpha_i T(u_i)$$

٢. بالنسبة لمجموعة النقاط  $P = \{p_i\}$  فإن  $p_1 + u = p_2$  وهذا معناه أن أي نقطة مضافة (مجموعة) إلى متجه تكون النتيجة نقطة.

### (٢.١.١٢) التراكيب التآلفية: Affine Combinations

طرح النقاط: point subtraction

$p_1 - p_2$  تعني متجه  $u \in V$  بحيث  $p_1 = p_2 + u$  للنقاط  $p_1, p_2 \in P$  وفي الحالة العامة (by extension)  $\sum_i \alpha_i p_i$  يكون متجه إذا كان وكان فقط  $\sum_i \alpha_i = 0$

دمج النقاط: point blending

$P = (1 - \lambda)p_1 + \lambda p_2$  تعني  $P = p_1 + \lambda(p_2 - p_1)$  حيث  $p \in P$ .  
بأسلوب آخر فإننا نكتب

$$P = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

في الحالة العامة فإننا نقول أن  $\sum_i \alpha_i p_i$  نقطة إذا كان  $\sum_i \alpha_i = 1$

### هندسياً Geometrically

لنقطة  $P = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$  فإن النسبة الآتية تتحقق

$$\frac{|P - p_1|}{|P - p_2|} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

إذا كانت  $P$  تقسم القطعة المستقيمة  $p_1 p_2$  بنسبة  $b_2 : b_1$  فإن

$$P = \frac{b_1 p_1 + b_2 p_2}{b_1 + b_2}, \quad b_1 + b_2 \neq 0$$

مما سبق عرضه يمكن الوصول إلى النتائج التالية:

١. في التراكيب الاتجاهية  $\sum_i \alpha_i u_i$  لا توجد أي شروط على المعاملات أي أن المتجهات

تشكل من أي تراكيب (تراكيب خطية)

٢. التراكيب النقطية  $\sum_i \alpha_i p_i$  تعطي نقطة (تركيب تآلفي) إذا كان وكان فقط

$$\sum_i \alpha_i = 1, \quad \text{وتعطي متجه (تركيب اتجاهي) إذا كان وكان فقط } \sum_i \alpha_i = 0$$

مثال (١١٢):

المعنى الهندسي للمعادلة البارامترية للخط المستقيم في الفراغ التآلفي يعطى من:

نفرض أن  $L$  خط مستقيم نقاطه  $L(t)$  معرفة كالتالي:

$$\begin{aligned} L(t) &= p_1 + t(p_2 - p_1) \\ &= (1-t)p_1 + t p_2, \quad p_1, p_2 \in P \end{aligned}$$

حيث الأوزان  $1-t$  weights،  $t$  تعرف ارتباط تآلفي وتكون النتيجة نقطة على الخط

المستقيم  $L$ .

### (٢.١١٢) التحويلات التآلفية: Affine Transformations

نفرض أن  $A_1, A_2$  فراغان تآلفيان وأن  $T : A_1 \rightarrow A_2$  راسم (تحويل) يقال أن

$T$  تحويل تآلفي إذا تحقق:

١.  $T$  يرسم المتجهات إلى متجهات والنقاط إلى نقاط.

٢.  $T$  تحويل خطي على المتجهات

$$T(P+u) = T(P) + T(u) \quad ٣$$

في الحالة العامة فإن  $T$  يحافظ على التراكيب التآلفية بالنسبة للنقاط أي أن

$$T(\sum \alpha_i p_i) = \sum \alpha_i T(p_i)$$

حيث

$$\sum \alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{تركيب تآلفي (نقطة)} \\ 0 & \text{تركيب اتجاهي (متجه)} \end{cases}$$

ملاحظة (١.١٢):

التحويلات التآلفية ترسم الخطوط المستقيمة إلى خطوط مستقيمة أي أن

$$T((1-t)p_0 + t p_1) = (1-t)T(p_0) + tT(p_1)$$

ملاحظة (٢.١٢):

التحويلات التآلفية تحفظ النسب للمسافات على الخط المستقيم والمكس صحيح

بمعنى أنه إذا كان التحويل يحفظ النسب للمسافات على خط مستقيم فإن التحويل تآلفي.

مثال (٢.١٢):

تحويل الحركة المتماسكة (محصلة دوران وانتقال) rigid body motion

ومغير البعد والقص والانعكاس كلها تحويلات تآلفية.

**٤.١.١٢) الفرق بين التحويل الخطي والتآلفي: Affine vs Linear**

١- التحويل  $T$  خطي إذا تحقق

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

لكل القيم  $\alpha, \beta$  في الحقل  $F$

التحويل  $T$  تآلفي إذا تحقق

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

إذا كان  $\alpha + \beta = 1$

٢. إذا كان  $T$  تحويل خطي حيث

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v), \alpha + \beta = 1$$

إذاً  $T$  يكون تآلفي.

٣. إذا كان  $T$  تحويل تآلفي،  $\alpha + \beta \neq 1$  إذاً  $T(\alpha u + \beta v)$  قد لا تساوي

$T(\alpha u + \beta v)$  وبالتالي فإنه من الممكن أن تكون  $T$  تآلفي ولكن ليست خطي.

٤. التحويلات التآلفية أكثر عمومية super class من التحويلات الخطية.

٥. بطريقة أخرى فإن سلوك التحويلات الخطية مقيد بالنسبة لمدى أوسع من القيم  $\alpha, \beta$

ولتوضيح ذلك نعتبر  $T(\alpha u + \beta v)$ :

١. سلوك التحويلات الخطية يتحدد لجميع القيم  $\alpha, \beta$ .

٢. سلوك التحويلات التآلفية يتحدد فقط عندما  $\alpha + \beta = 1$ . وتسلك سلوك مختلف للقيم

الأخرى للمقدار  $\alpha + \beta$ .

٣. جميع التحويلات التي درسناها في الأبواب السابقة كانت خطية.

٤. تحويل الانتقال هو الوحيد غير خطي ولكنه تآلفي.

(٥.١.١٢) صور النقاط والتجهات بالتحويلات التآلفية:

نفرض أن  $A_1, A_2$  فراغيان تآلفيان بعدد كل منهما يساوي 2،

و  $T: A_1 \rightarrow A_2$  تحويل تآلفي ونفرض أن  $F_1, F_2$  إطارات للفراغات  $A_1, A_2$  على

الترتيب حيث

$$F_1 = (u_1, u_2, O_1), F_2 = (v_1, v_2, O_2)$$

ونفرض نقطة  $P = p_1 u_1 + p_2 u_2 + |O_1$  في الفراغ  $A_1$  حيث  $(p_1, p_2, 1)$  هي إحداثيات

$P$  بالنسبة للإطار  $F_1$ . ونقوم بحساب الإحداثيات  $(p'_1, p'_2, 1)$  للنقطة  $T(p)$  بالنسبة

للإطار  $F_2$ .

التحويل التآلفي يتحدد تماماً عن طريق صورة الإطار  $F_1$  كالاتي:

إذا كان

$$T(u_1) = t_{11}v_1 + t_{12}v_2$$

$$T(u_2) = t_{21}v_1 + t_{22}v_2 \quad (*)$$

$$T(O_1) = t_{31}v_1 + t_{32}v_2 + O_2$$

$$T(P) = T(p_1u_1 + p_2u_2 + O_1) \quad \text{إذا}$$

$$= p_1T(u_1) + p_2T(u_2) + T(O_1) \quad (**)$$

بالتعويض من (\*) في (\*\*) وتجميع الحدود المتشابهة نحصل على :

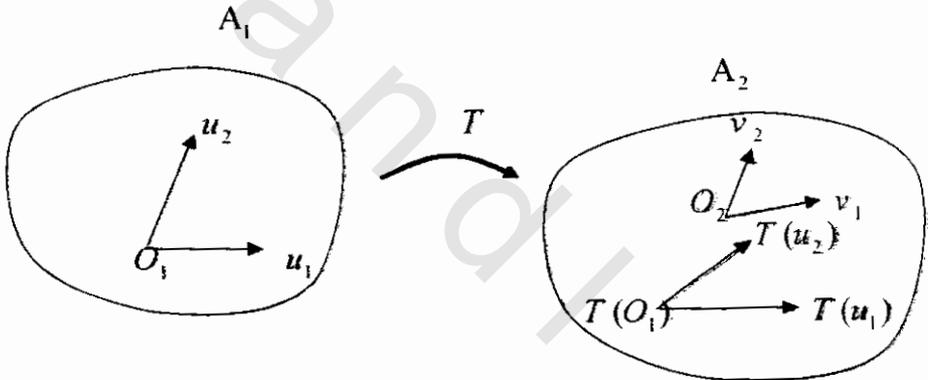
$$T(P) = p'_1v_1 + p'_2v_2 + O_2$$

حيث

$$p'_1 = p_1t_{11} + p_2t_{21} + t_{31}$$

$$p'_2 = p_1t_{12} + p_2t_{22} + t_{32}$$

كما هو موضح في شكل (١.١٢).



شكل (١.١٢)

(٦.١.١٢) مصفوفة التحويل التآلفي:

تمثل النقاط والمتجهات بمصفوفات  $n \times 1$  وعلى سبيل المثال في المستوى التآلفي

فإن

$$P \equiv \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ونعلم أن الإحداثيات تتحدد بالنسبة لإطار ما وليكن  $F = (u_1, u_2, 0)$  . إذاً

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ = F p$$

بالنسبة للتحويلات التآلفية نجد أن:

$$T(P) = T(F_1 P) = [T(u_1) T(u_2) T(O_1)] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [t_{11}v_1 + t_{12}v_2, t_{21}v_1 + t_{22}v_2, t_{31}v_1 + t_{32}v_2 + O_2] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [v_1 v_2 O_2] \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{31} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= F_2 M_T P = F_2 P'$$

$$P' = M_T P$$

حيث

$$M_T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{31} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة  $M_T$  تسمى مصفوفة التحويل التآلفي  $T$  بالنسبة للإطارات  $F_1, F_2$  وبالتالي

نجد أن النقطة  $P$  تحولت إلى النقطة  $P' = M_T P$  ويمكن استنتاج هذا من العلاقة

$$F_1 = F_2 M_T$$

المصفوفية

المصفوفة  $M_T$  يمكن وصفها كما يلي:

العمودي الأول في  $M_T$  يمثل  $T(u_1)$  في  $F_2$  ، العمود الثاني في  $M_T$  يمثل  $T(u_2)$  في

$F_2$  ، العمود الثالث في  $M_T$  يمثل  $T(O_1)$  في  $F_2$  .

### (٢.١٢) التحويلات التآلفية والهندسة الإسقاطية:

في المستوى الإسقاطي  $P_2$  نأخذ مستقيم عند اللانهاية ويسمى مستقيم في اللانهاية أو المستقيم المثالي ideal line or line at infinity ويرمز له بالرمز  $\infty$  ونتيجة لما سبق عرضه يمكن إثبات النظرية الآتية:

**نظرية (١.١٢):**

مجموعة كل الإسقاطيات projectivities والمتشاكله ذاتياً بالنسبة للخط  $\infty$  (ترسم الخط  $\infty$  إلى نفسه) تكون زمرة جزئية من زمرة الإسقاطيات.

**تعريف (٢.١٢):**

الزمرة الجزئية في النظرية السابقة تسمى الزمرة التآلفية affine group ويرمز لها بالرمز  $AfG(2, R)$  وأي تحويل ينتمي إليها يسمى تحويل تآلفي affine transformation.

**ملاحظة (٢.١٢):**

التحويلات التآلفية ترسم النقاط المحددة من المستوى الإسقاطي (نقاط ليست على الخط  $\infty$ ) إلى نقاط محددة. أي أنها تحويلات تناظر أحادي من المستوى الإسقاطي محذوف منه الخط  $\infty$  (المستوى المثقوب).

**تعريف (٢.١٢):**

المستوى الإسقاطي بدون خط اللانهاية  $\infty$  يسمى مستوى تآلفي affine plane. لإيجاد التمثيل التحليلي للتحويلات التآلفية نختار خط اللانهاية  $\infty$  ممثلاً بالمعادلة  $x_3 = 0$  وأن صورته  $x'_3 = 0$  (بمعنى أن الخط  $x_3 = 0$  رسم إلى نفسه). ومن التحويل (11.1) فإنه من الضروري والكافي أن تتعدم المعاملات  $c_{31}, c_{32}$ . إذاً التحويلات التآلفية تعطى بالتمثيل الآتي:

$$\begin{aligned} \rho' x'_1 &= c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 \\ \rho' x'_2 &= c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + c_{23} x_3 \\ \rho' x'_3 &= c_{33} x_3 \end{aligned} \quad (12.1)$$

بما أن لكل النقاط المحددة تكون  $x_3 \neq 0$  فإن كل مستوى التآلفي يمكن

$$\text{تمثيله بإحداثيات غير متجانسة } y = \frac{x_2}{x_3}, x = \frac{x_1}{x_3}$$

واضح من التمثيل (12.1) أنه لا معنى لاستخدام الإحداثيات المتجانسة في دراسة الزمرة التآلفية وذلك واضح بقسمة كل من المعادلات الأولى والثانية على المعادلة الثالثة في (12.1) ويوضع  $x'_1/x'_3 = x'$ ,  $x'_2/x'_3 = y'$  و  $c_{11}/c_{33} = a_1$ ,  $c_{12}/c_{33} = b_1$ ,  $c_{21}/c_{33} = a_2$ ,  $c_{22}/c_{33} = b_2$ ،  $c_{13}/c_{33} = c_1$ ،  $c_{23}/c_{33} = c_2$  فإننا نحصل على:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1 \quad (12.2)$$

$$y' = a_2x + b_2y + c_2$$

أو التمثيل المصفوي

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (12.3)$$

التحويل في (12.3) يكون تحويل تآلفي إذا كان

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

خلاف ذلك فإن التحويل ليس أحادي.

وبما أن التحويلات (12.3) تحتوي على ست بارامترات فإن الزمرة التآلفية هي

زمرة 6- البارامترية 6-parameter group.

**تعريف (٤.١٢):**

هندسة الزمرة التآلفية تسمى الهندسة التآلفية affine geometry.

**تعريف (٥.١٢):**

الهندسة التآلفية هي دراسة الخواص اللاتغيرية invariants للأشكال

والكميات المرتبطة بها والتي لا تتغير تحت تأثير الزمرة التآلفية.

توجد فروق واضحة بين الهندسة التآلفية والهندسة الإسقاطية ونوضح ذلك من

خلال المثال التالي:

**مثال (٢٠١٢):**

في الهندسة الإسقاطية أي خطين يتقاطعا ولكن في الهندسة التآلفية توجد خطوط متوازية. وهذا واضح لأن الخطوط في المستوى الإسقاطي  $P_2$  تتقاطع في نقطة على خط اللانهاية  $\infty$ . وهذه الخاصية تتحول إلى توازي الخطوط في المستوى التآلفي عندما المستوى الإسقاطي يستبعد منه خط اللانهاية (النقطة المشتركة (نقطة التقاطع) تحذف بعد استبعاد خط اللانهاية).

مما سبق يمكن صياغة النظرية الآتية :

**نظرية (٢٠١٢):**

مسلمة التوازي الإقليدية محققة في الهندسة التآلفية.

**ملاحظة (٤١٢):**

لاحظ أنه كما هو معروف على الخط الإقليدي فإن الترتيب الخطي linear ordering للنقاط محقق على الخط التآلفي affine line.

بما أن التحويلات التآلفية هي في الأصل تحويلات إسقاطية بمعنى أن الزمرة التآلفية هي زمرة جزئية من الزمرة الإسقاطية ولهذا فإنه إذا كانت خاصية لاتغيرية بالنسبة للإسقاطيات تظل لاتغيرية بالنسبة للتحويلات التآلفية. وعلى العكس من ذلك توجد لا تغيرات تآلفية affine invariants وليست لاتغيرات إسقاطية projective invariants.

**تعريف (٦٠١٢):**

لأي ثلاث نقاط  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3)$  تقع على خط مستقيم في المستوى التآلفي collinear فإننا نعرف النسبة البسيطة simple ratio  $[M_1 M_2 M_3]$  لثلاث نقاط بالصيغ الآتية:

$$[M_1 M_2 M_3] = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \quad \text{or} \quad [M_1 M_2 M_3] = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \quad (12.4)$$

**نظرية (٢٠١٢):**

النسبة البسيطة لثلاث نقاط على خط مستقيم كمية لاتغيرية بالنسبة للزمرة التآلفية.

**البرهان:**

نفرض أن  $M'_1, M'_2, M'_3$  صور لثلاث نقاط  $M_1, M_2, M_3$  (ليست مستقيمة) من خلال التحويلات التآلفية (12.3).

نفرض أن  $(x'_i, y'_i)$  هي إحداثيات النقاط  $M'_i$  ،  $i = 1, 2, 3$  . ومن (12.3) والتعويض في تعريف النسبة البسيطة (12.4) فإننا نحصل على

$$[M'_1, M'_2, M'_3] = \frac{x'_2 - x'_1}{x'_3 - x'_2}$$

حيث

$$\begin{aligned} x'_3 - x'_2 &= a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2) \\ x'_2 - x'_1 &= a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1) \\ &= [M_1, M_2, M_3] \{ a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2) \} \end{aligned}$$

إذاً

$$[M'_1, M'_2, M'_3] = [M_1, M_2, M_3]$$

وهذا يعني أن الدالة  $[M_1, M_2, M_3]$  لا تغيرية تحت أي تحويل تآلفي، وبهذا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية.

من هذه النظرية نجد أنه لا توجد نقاط لاتغيرية موضوعة بطريقة اختيارية في المستوى التآلفي (ليست على خط واحد). وهذا سببه أن التحويلات التآلفية تنقل أي ثلاث نقاط ليست مستقيمة إلى ثلاث نقاط ليست مستقيمة. ومن تعريف النسبة التبادلية لأربع نقاط في المستوى الإسقاطي رأينا أنه لا توجد أربع نقاط لاتغيرية موضوعة بطريقة اختيارية في المستوى الإسقاطي وهذا يوصلنا إلى برهان النظرية الآتية :

**نظرية (٤١٢):**

لا يوجد في الزمرة التآلفية ثلاث نقاط اختيارية لاتغيرية.

**تعريف (٧١٢):**

النسبة البسيطة  $[M_1, M_2, M_3]$  لثلاث نقاط مستقيمة في المستوى التآلفي تسمى اللاتغيري الأساسي basic invariant للزمرة التآلفية.

السؤال الذي يطرح نفسه الآن هل يمكن تعريف المستوى التآلفي (الهندسة التآلفية) بطريقة مستقلة تماماً عن الهندسة الإسقاطية؟  
الإجابة نعم يمكن عن طريق نظام مناسب من المسلمات ونوضح ذلك فيما يلي:

### مسلمات الهندسة التآلفية :

نعني بالمستوى التآلفي affine plane مجموعة عناصر من نوعين وهي النقاط والخطوط المستقيمة والتي تحقق خمس مجموعات من المسلمات تفصيلها كالاتي :  
(١) المجموعة الأولى تعرف علاقة الوقوع incidence بين العناصر وتحتوي على أول ثلاث مسلمات في المجموعة I من نظام المسلمات الإقليدية.

(٢) المجموعة الثانية تعرف ترتيب النقاط على خط وهي نفسها المجموعة II من مسلمات الهندسة الإقليدية (بما أن الترتيب الخطي للنقاط محقق على الخط التآلفي affine line فإن مسلمات بينية betweenness تنطبق على مسلمات البينية الإقليدية).

(٣) المجموعة الثالثة تحتوي على مسلمة ديدكند للاتصال.

(٤) المجموعة الرابعة تحتوي على مسلمة إقليدس للتوازي.

(٥) المجموعة الخامسة تحتوي على نظرية ديسارجيس Desargue's theorem

هذه النظرية تم تعديلها لتلائم مع حقيقة أن التوازي موجود في الهندسة التآلفية.

مما سبق عرضه فإنه يمكننا القول بأن الهندسة التآلفية تم تعريفها من خلال نظام مسلماتي مستقل تماماً عن الهندسة الإسقاطية وفي هذا النظام تتحقق كل مسلمات الهندسة الإقليدية (سواءً في بعدين أو ثلاث أبعاد) فيما عدا مسلمات التطابق axioms of congruence.

### (٢.١٢) الهندسة التآلفية أحادية المقاس Unimodular Affine Geometry

تعريف (٨.١٢) :

التحويل التآلفي (12.3) يسمى أحادي المقاس unimodular إذا تحقق:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1 \quad (12.5)$$

### نظرية (٥.١٢) :

مجموعة التحويلات التآلفية أحادية المقاس تكون زمرة.

### البرهان :

من الجبر الخطي نجد أن :

- (١) من خواص المحددات والمصفوفات نجد أنه إذا كانت مصفوفة حاصل ضرب مصفوفتين فإن محددها يساوي حاصل ضرب محددي المصفوفتين. ولهذا يمكن إثبات أن ضرب تحويلين تآلفين أحادي المقاس هو تحويل تآلفي أحادي المقاس.
- (٢) معكوس تحويل تآلفي أحادي المقاس هو تحويل تآلفي أحادي المقاس حيث أنه تحويل تآلفي فإن محدده مصفوفة معكوس التحويل هي مقلوب محدده مصفوفة التحويل التآلفي وإذا كان المحدد يساوي  $\pm 1$  فإن مقلوبه يساوي  $\pm 1$ .

### تعريف (٩.١٢) :

مجموعة التحويلات التآلفية أحادية المقاس تكون زمرة تسمى الزمرة التآلفية أحادية المقاس unimodular affine group ويرمز لها بالرمز  $uniG(2, R)$ .

### تعريف (١٠.١٢) :

الهندسة المصاحبة للزمرة التآلفية أحادية المقاس تسمى الهندسة التآلفية أحادية المقاس unimodular affine geometry.

رأينا سابقاً أن الزمرة التآلفية للمستوى تتحدد من خلال 6 بارامترات وحيث أن الزمرة التآلفية تحقق الشرط (12.4) فإننا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية :

### نظرية (٦.١٢) :

الزمرة التآلفية أحادية المقاس هي زمرة 5-البارامترية 5-parameter group. واضح أن كل الأشياء objects التي في الهندسة التآلفية العامة تكون موجودة في الهندسة التآلفية أحادية المقاس، لكن الهندسة التآلفية أحادية المقاس تحتوي على أشياء غير موجودة في الهندسة التآلفية لأن الخصائص اللاتغيرية للزمرة التآلفية أحادية المقاس أكثر بكثير منها في الزمرة التآلفية.

نوضح الآن الفروق الواضحة بين الزمرة التآلفية والزمرة التآلفية أحادية المقاس من خلال الأمثلة الآتية:

مثال (٢.١٢):

الزمرة التآلفية أحادية المقاس تحتوي على خاصية أن وضع ثلاث نقاط بطريقة اختيارية هو خاصية لاتغيرية.

الحل:

طبعاً هذه الخاصية غير محققة في الهندسة التآلفية العامة. لذلك نفرض أن  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3)$  ثلاث نقاط في المستوى التآلفي نقلت (رسمت) إلى ثلاث نقاط  $M'_1(x'_1, y'_1)$ ,  $M'_2(x'_2, y'_2)$ ,  $M'_3(x'_3, y'_3)$  في المستوى نفسه.

بالتحويل التآلفي أحادي المقاس (12.3)، (12.5)، من السهل أن نتحقق من

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

وهذا يعني أن القيمة المطلقة للمحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (12.6)$$

هي كمية لاتغيرية. وتوضح كذلك أن وضع ثلاث نقاط بطريقة اختيارية هو خاصية لاتغيرية.

ملاحظة (٥.١٢):

نعني بأن النقاط وضعت بطريقة اختيارية بأنه لا توجد شروط عليها فمثلاً نقول في الهندسة الإسقاطية والهندسة التآلفية النقاط تقع على خط مستقيم.

مثال (٤.١٢):

وضح أن مساحة المثلث في الهندسة التآلفية أحادية المقاس كمية لاتغيرية.

الحل:

من المثال السابق وتعريف مساحة المثلث الذي رؤوسه  $M_1, M_2, M_3$  نجد أن

المساحة

$$area = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (12.7)$$

كمية لاتغيرية.

مثال (٥.١٢):

من المثال السابق يمكن تعريف مساحة أي مضلع polygon وكذلك مساحة أي

شكل منحنى curvilinear figure عن طريق مساحة المثلث.

من الأمثلة السابقة نصل إلى صياغة النظرية الآتية :

نظرية (٧.١٢):

مساحة الأشكال معرفة في الهندسة التآلفية أحادية المقاس.

(٤.١٢) الزمرة العمودية والهندسة الإقليدية :

## Orthogonal Group and Euclidean Geometry

التحويلات التآلفية (12.2) تسمى تحويلات متعامدة orthogonal إذا كانت

المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

مصفوفة متعامدة. المصفوفة المتعامدة تحقق (من الجبر الخطي)

$$A A' = I \quad (12.8)$$

حيث  $t$  ترمز لتبديل الصفوف بالأعمدة أي أن  $A'$  هي المصفوفة البديلة أو المنقولة

.transpose

**نظرية (8.12):**

مجموعة التحويلات المتعامدة تكون زمرة.

**الإثبات:**

من الجبر الخطي التحويل يعرف من خلال مصفوفة وضرب المصفوفات هو مصفوفة وبالتالي محصلة تحويلين متعامدين هو تحويل متعامد. وكذلك معكوس المصفوفة المتعامدة هو مصفوفة متعامدة وهذا يكفي لإثبات النظرية.

**تعريف (11.12):**

التحويلات المتعامدة في النظرية السابقة تكون زمرة تسمى الزمرة المتعامدة orthogonal group ويرمز لها بالرمز  $OG(2, \mathbb{R})$  ويمكن التأكد بسهولة من صحة ما يأتي :

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + b_2^2 &= 1 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

$$Det A = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1 \quad (12.10)$$

من الشرط (12.10) يتضح أن :

**نظرية (9.12):**

زمرة التحويلات المتعامدة هي زمرة جزئية من زمرة التحويلات التآلفية أحادية المقاس.

**ملاحظة (6.12):**

زمرة التحويلات المتعامدة هي زمرة جزئية من الزمرة التآلفية.

وحيث أن زمرة التحويلات المتعامدة هي زمرة تآلفية وتحقق الشروط (12.9). إذاً زمرة التحويلات المتعامدة تعتمد على ثلاث بارامترات  $(3 = 6-3)$  أي أن الزمرة  $OG(2, \mathbb{R})$  هي زمرة 3-البارامترية 3-parameter group.

ذكرنا سابقاً أن معكوس المصفوفة المتعامدة هو مصفوفة متعامدة وبالتالي فإن المصفوفة  $A$  تحقق شروط هي صورة أخرى للشروط (12.9) وهي  $A' A = I$  ولهذا فإن:

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= 1 \\ b_1^2 + b_2^2 &= 1 \\ ab_1 + a_2b_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

الشروط (12.9) تكافئ الشروط (12.11).

**تعريف (١٢.١٢):**

في هندسة الزمرة المتعامدة الكمية الحقيقية

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (12.12)$$

تسمى المسافة distance بين النقطتين  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ .

**نظرية (٩.١٢):**

المسافة d المعرفة في (12.12) هي كمية لاتغيرية بالنسبة للزمرة المتعامدة

$.OG(2, \mathbb{R})$

**البرهان:**

نترض أن  $M'_1(x'_1, y'_1)$ ,  $M'_2(x'_2, y'_2)$  صور النقط

$M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  بالتحويلات المتعامدة (12.2)، (12.8).

$$\begin{aligned} d^2(M'_1, M'_2) &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 \quad \text{إذا} \\ &= [a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1)]^2 + [a_2(x_2 - x_1) + b_2(y_2 - y_1)]^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2)(x_2 - x_1)^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \\ &\quad + (b_1^2 + b_2^2)(y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

وباستخدام (12.8) نجد أن

$$d^2(M'_1, M'_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore d(M'_1, M'_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} > 0 \\ &= d(M_1, M_2) \end{aligned}$$

**ملاحظة (٧.١٢):**

على الطالب أن يتأكد أن دالة المسافة

$$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(M_1, M_2) \longrightarrow d(M_1, M_2) > 0$$

تحقق الشروط العامة لدالة المسافة وهي :

$$d(M_1, M_2) = d(M_2, M_1) \quad \text{symmetry (التماثل)}$$

$$d(M_1, M_2) \leq d(M_1, M_3) + d(M_3, M_1) \quad \text{triangle inequality متباينة المثلث}$$

حيث  $E^2 = \mathbb{R}^2$  يرمز للمستوى المقابل لزمرة التحويلات المتعامدة  $OG(2, \mathbb{R})$ .

**نظرية (١٠.١٢):**

المسافة تعتبر لاتغيري أساسي basic invariant لهندسة زمرة التحويلات المتعامدة.

**البرهان:**

من الواضح أن كل الكميات اللاتغيرية الأخرى يمكن التعبير عنها من خلال دالة المسافة وعلى سبيل المثال كل من الطول والمساحة والزوايا يعبر عنها بدلالة المسافة وهذا كافٍ لبرهان النظرية.

**نظرية (١١.١٢):**

هندسة زمرة التحويلات المتعامدة هي الهندسة الأولية (الإقليدية).

**البرهان:**

البرهان طويل ويمكن التحقق من أن كل مسلمات الهندسة الإقليدية محققة في هندسة زمرة التحويلات المتعامدة.

**(٥.١٢) مقارنة بين الهندسات:**

مما سبق نرى أن

$$OG(2, \mathbb{R}) \subseteq UnAfG(2, \mathbb{R}) \subseteq AfG(2, \mathbb{R}) \subseteq PG(2, \mathbb{R})$$

أي أن زمرة الإسقاطيات والتي تعتبر أساس الهندسة الإسقاطية أوسع وأعم من الزمرة المتعامدة التي تعتبر أساس الهندسة الإقليدية. لكن في نفس الوقت، الهندسة الإسقاطية أفقر الهندسات المذكورة سابقاً والهندسة الإقليدية أغناها بالنسبة للأشياء (العناصر) التي تكونها.

في الهندسة الإقليدية يمكنك الدراسة والتعرف على الأشياء التآلفية (النسبة البسيطة لثلاث نقاط على خط مستقيم، التوازي وهكذا) وأشياء الهندسة الإسقاطية projective objects (النسبة التبادلية لأربع نقاط، وهكذا). على العكس من ذلك فإن الخصائص التآلفية affine properties للأشكال لا يمكن دراستها في الهندسة الإسقاطية. الخصائص المترية metric properties (الخصائص التي تعتمد على القياس للأطوال) لم تأخذ في الاعتبار في الهندسة التآلفية.

في الحالة العامة يمكن صياغة ما سبق في النظرية الآتية :

### نظرية (١٢.١٢):

الزمرة الأوسع winder group تعتبر أساساً لهندسة أضيق narrower geometry بالنسبة لمجموعة عناصرها الهندسية geometric objects.

### البرهان:

البرهان يتضح مما تقدم عرضه بالإضافة إلى أنه كلما قلت عدد البارامترات في الزمرة، اتسعت المفاهيم الهندسية والعكس صحيح بمعنى أن الزمرة التي عدد بارامترات أكبر فإن خصائصها الهندسية فقيرة.

### (٦.١٢) تمثيل التحويلات الهندسية من خلال تحويلات تآلفية:

نوضح كيف يمكن كتابة التحويلات الهندسية التي قدمناها في الأبواب السابقة من خلال التحويلات التآلفية والإحداثيات المتجانسة.

### مثال (٥.١٢):

الانتقال يتحدد من خلال المتجه  $[\Delta x, \Delta y, 0]^t$  حيث النقطة  $[x, y, 1]^t$  تنقل إلى النقطة  $[x + \Delta x, y + \Delta y, 1]^t$  حيث المتجه لا يتغير تحت تأثير الانتقال وبالتالي تحويل خطي بالنسبة لجميع المتجهات.

الانتقال ليس تحويل خطي بالنسبة لجميع النقاط ونوضح ذلك بالنسبة للنقاط

$$P_1 = [x_1, y_1, 1], P_2 = [x_2, y_1, 1]$$

$$\therefore T(P_1) + T(P_2) = [x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y, 1]^t + [x_2 + \Delta x, y_2 + \Delta y, 1]^t$$

$$= [x_1 + x_2 + 2\Delta x, y_1 + y_2 + 2\Delta y, 2]^t$$

$$T(P_1 + P_2) = [x_1 + x_2 + \Delta x, y_1 + y_2 + \Delta y, 2]$$

$$T(P_1 + P_2) \neq T(P_1) + T(P_2)$$

أي أن

من العرض السابق نجد أن النقطة  $[x, y, 1]^t$  تحولت إلى النقطة  $[x + \Delta x, y + \Delta y, 1]^t$  من خلال التحويل المصفوفي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ 1 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن المتجهات  $[x, y, 0]$  لا تتغير تحت تأثير المصفوفة  $T(\Delta x, \Delta y)$  حيث

$$T(\Delta x, \Delta y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة (٨.١٢):

لاحظ أن  $[x, y, 1]^t$  هي الإحداثيات المتجانسة للنقطة  $(x, y)$ .

مثال (٦.١٢):

مغير البعد بالنسبة لنقطة يتحدد بالمعاملات  $S_x, S_y \in \mathbb{R}$  وهو خطي بالنسبة للنقاط والمتجهات. حيث النقطة  $[x, y, 1]^t$  تتحول إلى  $[S_x x, S_y y, 1]^t$  بينما المتجه  $[x, y, 0]^t$  يتحول إلى  $[S_x x, S_y y, 0]^t$  أي أن التحويل المصفوفي لمغير البعد يكتب في الصورة

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x x \\ S_y y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix}$$

حيث 1 يشير إلى حالة النقاط و 0 يشير إلى حالة المتجهات.

مثال (٧.١٢):

الدوران ضد عقارب الساعة حول نقطة الأصل بزاوية  $\theta$  تحويل خطي عند تأثيره على النقاط والمتجهات والتمثيل المصفوفي لتحويل الدوران يعطى من

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix}$$

حيث  $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  هي مصفوفة الدوران.

مثال (٨١٢):

القص بالمعاملات  $\alpha, \beta$  في اتجاه محور  $x$ ، محور  $y$  تحويل خطي بالنسبة للنقاط

والتجهات وتمثيله المصفوفة يعطى من

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \beta y \\ \alpha x + y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix}$$

حيث مصفوفة القص هي  $Sh(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

مثال (٩١٢):

الانعكاس في خط مستقيم  $L$  تحويل خطي بالنسبة للنقاط والتجهات ويمثل

مصفوفياً كما يلي (باعتبار  $L$  هو محور  $x$ )

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix}$$

مثال (١٠١٢):

فيما يلي نكتب التحويلات الهندسية المشهورة في الفراغ الثلاثي باستخدام

الإحداثيات المتجانسة وذلك باعتبار نقطة  $P = [x, y, z, 1]^T$  تحولت إلى نقطة

$P' = [x', y', z', 1]^T$  بتحويل هندسي في الفراغ الثلاثي حيث مصفوفته  $T$  تعطى من:

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{الانتقال ثلاثي الأبعاد:}$$

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{مغير البعد ثلاثي الأبعاد:}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{الإنعكاس حول المستوى } yz:$$

$$R_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{الإنعكاس حول المستوى } xz:$$

$$R_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{الإنعكاس في المستوى } xy:$$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{الدوران حول محور } x:$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{الدوران حول محور } y:$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{الدوران حول محور } z:$$

مثال (١١.١٢):

بين أن محصلة دوران وانتقال ليست إبدالية

الهل:

نعتبر دوران  $R(\theta)$  حول نقطة أصل الإحداثيات وانتقال  $T(h, k)$  حيث

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T(h, k)R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & h \\ \sin \theta & \cos \theta & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = R(\theta)T[h, k] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & h \cos \theta - k \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & h \sin \theta + k \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

واضح أن

$$T(h, k)R(\theta) \neq R(\theta)T(h, k)$$

ملاحظة (٩.١٢):

بالنسبة للإحداثيات المتجانسة لاحظنا ما يلي:

١- النقطة في المستوى الإسقاطي  $P_2$  تمثل بثلاث إحداثيات على الأقل أحدهما مختلف عن الصفر.

٢- المتجهان  $a, b$  ثلاثي الأبعاد يمثلان نفس النقطة في  $P_2$  إذا كان وكان فقط  $a = hb$  حيث  $h$  عدد قياسي مختلف عن الصفر.

٣- النقطة  $(x, y)$  ثنائية الأبعاد في المستوى الإقليدي تناظر متجهات  $(hx, hy, h)$  ثلاثية البعد في المستوى الإسقاطي  $P_2$  تمثل  $(x, y, 1)$ .

٤- كل نقطة  $(x, y)$  تناظر شعاع في فراغ ثلاثي بدايته نقطة أصل الإحداثيات  $O = (0, 0, 0)$  خلال النقطة  $(x, y, 1)$ .

## تمارين (١٢)

- (١) عرف الزمرة ومن ثم عرف زمرة التحويلات.
- (٢) عرف كل من زمرة التحويلات الإسقاطية، التآلفية، التآلفية أحادي القياس، المتعامدة.
- (٣) وضع بمثال أن الخواص الهندسية التي تحققها زمرة التحويلات التآلفية تتحقق في الزمرة الإسقاطية بينما العكس ليس بالضرورة صحيح.
- (٤) وضع بمثال أن الخواص الهندسية التي تحققها زمرة التحويلات التآلفية أحادية القياس تتحقق في كل من الزمرة التآلفية والزمرة الإسقاطية والعكس ليس بالضرورة صحيح.
- (٥) وضع بمثال أن خواص الهندسة الإقليدية صحيحة في كل من الهندسة التآلفية وحيدة القياس والهندسة التآلفية والهندسة الإسقاطية والعكس ليس بالضرورة صحيح.
- (٦) أذكر أحد الكميات التلافيرية في كل من الزمرة الإسقاطية والزمرة التآلفية والزمرة التآلفية أحادية القياس والزمرة المتعامدة.
- (٨) وضع العلاقة بين الهندسة المصاحبة لزمرة وعدد البارامترات التي تعرف الزمرة.