الباب الرابع عشر

التحويلات الحافظة للزوايا

Conformal Mapping

دراسة الخواص الهندسية للتحويلات الحافظة للزوايا عن طريق الدوال التحليلية تعتبر ذات أهمية خاصة في تكوين الدوال المركبة وتطبيقاتها. وهذا هو موضوع الدراسة في هذا الباب.

(١.١٤) مقدمة:

(١.١.١٤) الأعداد المركبة:

تعريف (١.١٤):

أي ثنائي مرتب (a, b) حيث $a,b \in \mathbb{R}$ يسمى عدد مركب. العدد الحقيقي a يسمى المركبة الحقيقية والعدد الحقيقي b يسمى المركبة التخيلية للعدد المركب (a, b). ويحقق $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c , b = d$

نفرض أن $\mathbb{C} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ هي مجموعة الأعداد المركبة. ونعرف العمليتين الثنائيتين (عملية الجمع وعملية الضرب) على المجموعة $\mathbb{C}$ كما يأتي:

(عملية الجمع) $+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\ ,\ \forall (a,b),\ (c,d)\in\mathbb{C}$$

(عملية الضرب) $. : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(a,b).(c,d) = (ac-bd, ad+bc), \forall\ (a,b),\ (c,d)\in\mathbb{C}$$

تعرف العملية $\mathbb{R}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (عملية الضرب في عدد حقيقي).

$$k(a,b)=(ka,kb),\ \ \forall\ k\in\mathbb{R}\ ,\ (a,b)\in\mathbb{C}$$

نظرية (١.١٤):

النظام $(\mathbb{C},+)$ زمرة إبدالية.

البرهان:

(i) العملية + إبدالية: نفرض أن $(a,b),\ (c,d)\in\mathbb{C}$

$$\therefore\ (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)+(a,b)$$

(ii) العملية + دامجة : نفرض أن $(a,b),\ (c,d),\ (u,v) \in \mathbb{C}$

$$\therefore (a,b)+(c,d)+(u,v)=(a+c,b+d)+(u,v)$$

$$=((a+c)+u,(b+d)+v)$$

$$=(a+(c+u),b+(d+v))$$

$$=(a,b)+(c+u,d+v)$$

$$=(a,b)+(c+u,d+v)$$

$$=(a,b)+((c,d),(u,v))$$

(iii) العنصر المحايد : يوجد العنصر $(0,0)\in\mathbb{C}$ والذي يحقق

$$(a,b)+(0,0)=(0,0)+(a,b)=(a,b),\ \forall(a,b)\in\mathbb{C}$$

ويسمى العدد المركبة $(0, 0)$ الصفر المركب the complex zero.

(iv) لكل عنصر $(a,b)\in\mathbb{C}$ يوجد العنصر $(-a,-b)\in\mathbb{C}$ والذي يحقق

$$(a,b)+(-a,-b)=(-a,-b)+(a,b)=(0,0)$$

العدد المركب $(-a,-b)$ يسمى معكوس العدد المركب (a, b) بالنسبة لعملية الجمع additive inverse.

إذا كان $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ فإننا سنكتب $\bar{z}=(a,-b)$. العدد $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد z conjugate.

ملاحظة (١،١٤):

الأعداد الحقيقية يمكن اعتبارها حالات خاصة من الأعداد المركبة وذلك لأنه من تعريف عمليتي الجمع والضرب على المجموعة $\mathbb{C}$ نرى ما يأتي :

$$(x,0)+(x',0)=(x+x',0)$$
$$(x,0).(x',0)=(x\,x',0)$$

وسوف نكتب x بدلاً من $(x,0)$ أي أننا سوف نعتبر العدد المركب $(x,0)$ بمقابلة العدد الحقيقي x

ملاحظة (٢.١٤):

العدد المركب الذي على الصورة $(0,y)$ ، $y \neq 0$ يسمى عدد تخيلي خالص pure imaginary.

ملاحظة (٣.١٤):

$$-(x,y)=(-x,-y)$$
$$(x,y)-(u,v)=(x,y)+(-1)(u,v)$$

نظرية (٣.١٤):

$(\mathbb{C}-\{0\},.)$ زمرة إبدالية، حيث $0=(0,0)$

البرهان:

(i) عملية الضرب إبدالية :

$$(x,y).(u,v)=(xu-yv,xv+yu)$$
$$=(u,v).(x,y),\quad \forall\ (x,y),(u,v)\in\mathbb{C}$$

(ii) عملية الضرب دامجة:

$$((x,y).(u,v)).(a,b)=(xu-yv,xv+yu)(a,b)$$
$$=((xu-yv)a-(xv+yu)b,(xu-yv)b+(xv+yu)a)$$
$$=(x(ua-vb)-y(ub+va),(ub+va)+y(ua-vb))$$
$$=(x,y).(ua-vb,ub+va)$$
$$=(x,y).((u,v).(a,b))\ \forall(x,y),\ (u,v),(a,b)\in\mathbb{C}$$

(iii) العنصر المحايد الضربي Identity :

العدد المركب $(1,0)=1$ يحقق

$$(x,y)\ (1,0)=(1,0)\ (x,y)=(x,y),\ \forall(x,y)\in\mathbb{C}$$

(iv) المعكوس الضربي Inverse :

لأي عنصر $z=(x,y)\neq(0,0)$ يكون $\bar{z}=(x,-y)$

$$z\,\bar{z}=(x,y).(x,-y)$$
$$=(x^2+y^2,0)=x^2+y^2=|z|^2 \qquad (14.1)$$

ونكتب

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\left(\frac{x}{|z|^2},\frac{-y}{|z|^2}\right)=\frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (14.2)$$

المقدار الحقيقي $|z|$ يسمى طول العدد المركب، واضح أن: $z\,z^{-1}=(1,0)$. إذاً z^{-1} معكوس z بالنسبة لعملية الضرب.

عملية ضرب الأعداد المركبة توزيعية Distributive بالنسبة لعملية الجمع بمعنى: إذا كان $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ فإن

$$\begin{aligned} z_1.(z_2+z_3) &= z_1z_2+z_1z_3 \\ (z_1+z_2).z_3 &= z_1z_3+z_2z_3 \end{aligned} \quad (14.3)$$

مما سبق يمكنك التأكد من أن النظام $(\mathbb{C},+,.)$ حقل بمعنى أن $(\mathbb{C},+)$ زمرة إبدالية، $(\mathbb{C}-\{0\},.)$ زمرة وأن الضرب موزع على الجمع ويقال أن $\mathbb{C}$ حقل الأعداد المركبة Field of complex numbers.

وهذا الحقل تعميم وتوسيع لحقل الأعداد الحقيقية أي $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ حيث أن أي عدد حقيقي x يمكن كتابته $(x,0)\in\mathbb{C}$. وبالتالي توجد بعض الخصائص للحقل $\mathbb{C}$ غير موجودة في الحقل $\mathbb{R}$ ولذلك نقوم بدراسة خصائص الأعداد المركبة.

ملاحظة (١٤ـ٤):

نفرض أن $i=(0,1)$، إذاً لأي عدد مركب $(x,y)\in\mathbb{C}$ يكون

$$\begin{aligned}(x,y)&=(x,0)+(0,y)\\ &=(x,0)+(y,0)(0,1)=x+y\,i=x+i\,y\end{aligned}$$

$\therefore$ أي عدد مركب (x,y) يمكن كتابته في الصورة $x+y\,i=x+i\,y$ وهذه هي الصورة المعتادة للعدد المركب.

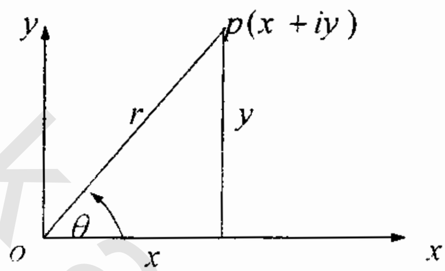
إذا كان $z=x+i\,y$ فإن x تسمى الجزء الحقيقي Real Part و y الجزء التخيلي Imaginary Part للعدد المركب z ونكتب $R(z)=x\,,\ I(z)=y$.

وسوف نستخدم هذه الصورة للعدد المركب في دراسة الأعداد المركبة ومنها يمكن القول أن أي نقطة في المستوى يمكن تمثيلها بعدد مركب، ومجموعة كل الأعداد

المركبة في المستوى تسمى المستوى المركب Complex Plane او مستوى ارجند Argand Plane.

(٢.١.١٤) الصورة القطبية للعدد المركب: The polar form

نفرض أن $p \equiv (x + iy) \neq 0$ نقطة في المستوى المركب ونفرض أن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ وأن (r, θ) هي الإحداثيات القطبية للنقطة، كما هو مبين في شكل (١.١٤): إذاً: $x = r\cos\theta\ ,\quad y = r\sin\theta\ ,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$



شكل (١.١)

∴ يمكن أن نكتب

$$z = x + i\,y = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

وهذه الصورة تسمى الصورة القطبية للعدد المركب z وأحياناً نكتب

$$\cos\theta + i\sin\theta = \text{cis}\,\theta \qquad (14.4)$$

إذاً

$$z = r\ \text{cis}\ \theta$$

العدد الحقيقي غير السالب r يسمى مقياس العدد المركب z, θ تسمى سعة العدد المركب "argument of z" ونكتب $\arg\ z = \theta$. الزاوية θ تحقق:

$$x = r\cos\theta\ ,\ y = r\sin\theta\ ,\ \frac{y}{x} = \tan\theta$$

الزاوية θ قد تكون موجبة أو سالبة. ولا بد أن نلاحظ أن هناك خطورة في تعيين θ من العلاقة $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ ، ونوضح ذلك بالمثال الآتي:

مثال (١.١٤):

اكتب $1 - i$ في الصورة القطبية.

الحل:

نفرض أن $r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1 - i$

إذاً $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ ويكون إذاً

$$\cos\theta = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\theta = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

إذاً θ تقع في الربع الرابع، وعليه فإن

$$\theta = \tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{7\pi}{4}, 2\pi \ldots, -\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{-\pi}{4}, -2\pi, \ldots$$

أي أن θ تحقق $\theta = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi$ ، حيث k أي عدد صحيح.

نأخذ أي قيمة من هذه القيم $(k = 0)$، إذاً

$$\begin{aligned} 1 - i &= \sqrt{2}(\cos(-\tfrac{\pi}{4})) + i\sin(-\tfrac{\pi}{4}) \\ &= \sqrt{2}\ \mathrm{cis}\,(-\tfrac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

ملاحظة (٥.١٤):

قد يفكر أحد أنه يمكن أن يحدد قيمة θ باستخدامه (فقط) للعلاقة

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \quad \theta = \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

ولكن $\frac{3\pi}{4}$ ليست من قيم $\arg(1 - i)$

ملاحظة (٦.١٤):

عادة نختار قيم $\theta = \arg(z)$ التي تحقق $-\pi < \theta \le \pi$

نظرية (٥.١٤):

$$|zw| = |z||w|, \quad \arg(zw) = \arg z + \arg w \qquad (14.6)$$

البرهان:

نفرض أن $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), w = s(\cos\phi + i\sin\phi),$

إذاً $$\begin{aligned} zw &= rs(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi) \\ &= rs\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi), \end{aligned}$$

إذاً $$zw = rs\ \mathrm{cis}\,(\theta + \phi)$$

ومنها تنتج النظرية.

ملاحظة (٧،١٤):

العلاقة $\arg z + \arg w = \arg z\,w$ تعني أن مجموع $\arg z, \arg w$ هو إحدى قيم $\arg z\,w$.

نظرية (٦،١٤):

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}\ , \quad \arg\frac{z}{w} = \arg z - \arg w \qquad (14.7)$$

البرهان:

بنفس الطريقة التي أتبعناها في نظرية (٥ـ١٤).

نظرية (٧،١٤):

إذا كانت n عدد صحيح، فإن

$$|z^n| = |z|^n\ , \quad \arg z^n = n \arg z \qquad (14.8)$$

هذه الخاصية للأعداد المركبة تسمى نظرية : يموافر Demoiferth.

البرهان:

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ فإن

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$
$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad (14.9)$$

مثال (٢،١٤):

اختصر العدد المركب $z = \dfrac{1+i}{-2\sqrt{3}+2i}$ أي أكتبه على الصورة $z = x + iy$

الحل:

أولاً: بالضرب بسط ومقام في مرافق المقام

$$\frac{1+i}{-2\sqrt{3}+2i} = \frac{(1+i)(-2\sqrt{3}-2i)}{12+4} = \frac{1}{8}\left[(1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})\right.$$

ثانياً: نستخدم الصورة القطبية

$$\frac{1+i}{-2\sqrt{3}+2i}=\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}{4\cos\frac{5}{6}\pi}=\frac{\sqrt{2}}{4}\ \text{cis}(-7\frac{\pi}{12})$$

مثال (٣،١٤):

أوجد قيمة $z=(1+i)^8$ بأكثر من طريقة

الحل:

أولاً: باستخدام نظرية ذات الحدين

$$(1+i)^8=1+8i+\frac{8\times 7}{1\times 2}i^2+\frac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3}i^3+\ldots+i^8$$

$$=1+8i-28-56i+\ldots=16$$

ثانياً: باستخدام الصورة القطبية:

$$z=(1+i)^8=[\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{\pi}{4}]^8=16\,\text{cis}\ 2\pi=16$$

ملاحظة (٨،١٤):

يتضح من المثالين السابقين أن الصورة القطبية (عادة) تكون أسهل في التعامل معها عن الصورة الكارتيزية $z=x+iy$

(٣،١،١٤) صيغة أويلر للعدد المركب: Euler formula for a complex number

نعلم أن (مفكوك الدالة الأسية) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$

وبوضع $x=i\theta$ نحصل على:

$$e^{i\theta}=1+i\theta+\frac{(-1)\theta^2}{2!}+\frac{(-1)\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\ldots$$

إذاً وبفصل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي نحصل على

$$=(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\ldots)+i(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\ldots)$$

ومن مفكوك ماكلورين للدوال $\cos\theta$, $\sin\theta$ (انظر مفكوكات الدوال في حساب التفاضل والتكامل) نجد أن

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \qquad (14.10)$$

إذاً أي عدد مركب z يمكن أن يكتب على الصورة :

$$z = r\ (\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \qquad (14.11)$$

وهذه الصورة تسمى صيغة أويلر للعدد المركب.

ومن (14.10) نستنتج أن

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta,\ \bar{z} = re^{-i\theta}$$

ومن (14.10) ، (14.11) نستنتج أن (بالجمع مرة والطرح مرة أخرى)

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\ ,\ \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

وواضح أن

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}.e^{2ik\pi}$$

حيث k أي عدد صحيح، ولكن :

$$e^{2ik\pi} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1$$

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$$

(٢.١٤) التحويلات الحافظة للزوايا Conformal Mappings

(١.٢.١٤) التحويلات في المستوى المركب:

نعتبر الدالة المركبة $w = f(z)$

حيث $w = u + iv = f(z)$

$$w = f(z) = u\ (x, y) + i\ v(x, y)$$

من خلال هذه الدالة المركبة نجد أن هناك تحويل من المستوى $x\,y$ أو المستوى z المركب (مستوى أرجند) إلى المستوى $u\,v$ المركب أو المستوى w المركب.

وإذا رمزنا للمستوى z المركب بالرمز P_z والمستوى w المركب بالرمز P_w فإن التحويل (الراسم) يعطى من:

$$T: P_z \longrightarrow P_w$$

حيث $(x, y) \longrightarrow (u, v)$

أو $z = x + iy \longrightarrow w = u + iv$

والتناظر بين نقاط المستوى P_z والمستوى المركب P_w يعطى من :

$$u = u(x, y) \quad , v = v(x, y) \qquad (14.12)$$

هذه المعادلات تسمى معادلتي التحويل.

وإذا كان التحويل T احادي injective (متباين) وفوقي surjective (شامل) فإنه تحويل تناظر أحادي (تقابل) one-to-one correspondence أو bijective.

في هذه الحالة أي مجموعة جزئية $A \subset P_z$ من النقاط الهندسية (شكل هندسي) تنقل إلى مجموعة جزئية $A' \subset P_w$ من النقاط الهندسية (شكل هندسي) في المستوى المركب w والعكس صحيح بمعنى أن

$$A = T^{-1}(A') \quad \text{أو} \qquad A' = T(A)$$

حيث T^{-1} معكوس التحويل (14.12).

التحويل (14.12) قد يكون خطي linear أو غير خطي non linear وكي يوجد معكوس للتحويل يجب أن يتحقق :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (14.13)$$

هذا الشرط يسمى محدد اليعقوبية أو جاكوبي التحويل Jacobian determinant

التحويل العكسي يعطى من

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \qquad (14.14)$$

وفي هذه الحالة يكون :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

حيث

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1 \qquad (14.15)$$

إذاً التحويل (14.12) يكون تناظر أحادي إذا كان كل من الدوال الحقيقية u ، v قابلين للتفاضل ومتصلين في المنطقة A وأن محدد اليعقوبية مختلف عن الصفر.

إذا كانت الدالة $w = f(z)$ دالة تحليلية في المتغير المركب $z = x + i\,y$ فإن معادلتي كوشي ريمان محققتين (أنظر كتاب التحليل المركب) أي أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ &= \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \\ &= \left| f'(z) \right|^2 \end{aligned}$$

إذاً

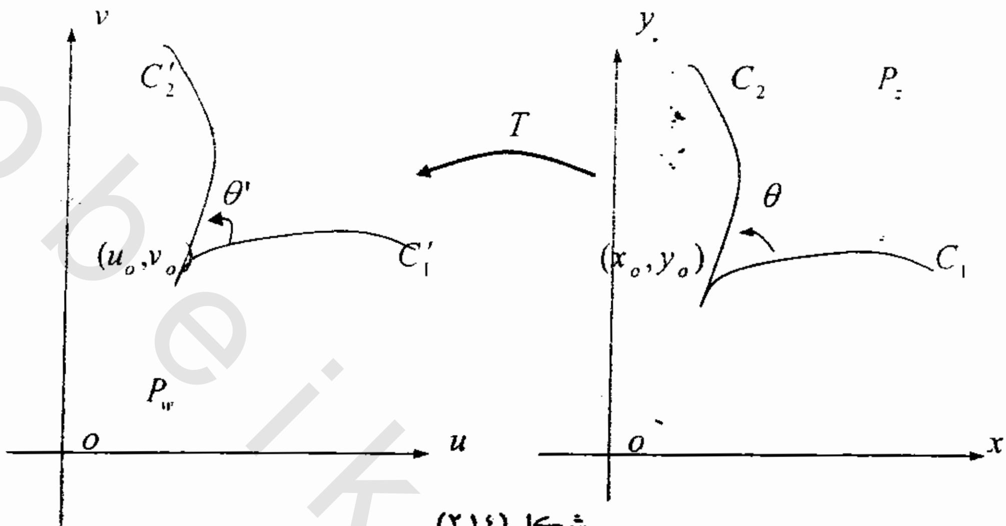
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left| f'(z) \right|^2 \qquad (14.16)$$

أي أن التحويل تناظر أحادي في المناطق التي يتحقق فيها $f'(z) \neq 0$ والنقطة التي عندها $f'(z) = 0$ تسمى نقطة حرجة Critical point.

(٢.٢.١٤) التحويل الحافظ للزوايا:

تعريف (٢.١٤):

التحويل من المستوى P_z إلى المستوى P_w الذي يحافظ على قياس الزاوية بين منحنيين C_1, C_2 في المستوى z عند النقطة (x_o, y_o) دون تغير في القيمة والاتجاه يسمى تحويل حافظ للزاوية conformal mapping عند النقطة (x_o, y_o). التحويل الذي يحافظ على قياس الزوايا دون المحافظة على اتجاهاتها يسمى تحويل مساوياً للزوايا كما هو مبين في الشكل (٢.١٤).



شكل (٢-١٤)

في شكل (٢-١٤) نرى أن $C_2' = T(C_2)$, $C_1' = T(C_1)$ ، $\theta' = \theta$.

مما سبق يمكننا صياغة النظرية الآتية:

نظرية (٨-١٤):

إذا كانت $w = f(z)$ دالة تحليلية و $f'(z) \neq 0$ في منطقة ما $A \subset P_z$ فإن التحويل $w = f(z)$ يكون حافظاً للزوايا عند جميع نقط A.

ملاحظة (٩-١٤):

في التحويلات الحافظة لزوايا الأشكال الصغيرة في منطقة جوار لنقطة ما z_o في المستوى P_z تنقل إلى أشكال صغيرة مماثلة في المستوى w. الصورة في هذه الحالة يحدث لها تكبير أو تصغير Stretching حيث معامل التكبير أو التصغير هو $(f'(z))^2$ (معامل تكبير المساحة). المسافات الصغيرة في المستوى z في منطقة الجوار المباشر للنقطة z_o تكبر أو تصغر بالمقدار $f'(z_o)$ (معامل التكبير الخطي).

نعطي الآن نظرية هامة تسمى نظرية تحويل ريمان Riemann's Theorem.

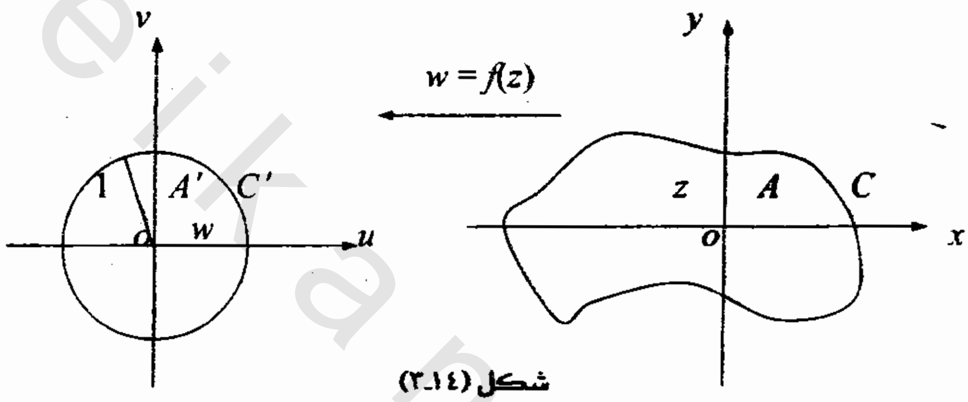
نظرية (٩-١٤):

ليكن C منحنى بسيط مغلق في المستوى P_z ويحوي داخله منطقة A أي أن A boundary $= C =$ حد A. وليكن C' هو دائرة نصف قطرها الوحدة ومركزها

نقطة الأصل وتحوي داخلها منطقة A' أي ان حد $C' = A'$. إذاً توجد دالة $w = f(z)$ (تحويل) تحليلية في A تحول كل نقطة في A إلى نقطة مناظرة في A' وكل نقطة في C إلى نقطة مناظرة في C' ويكون التناظر أحادياً أي أن:

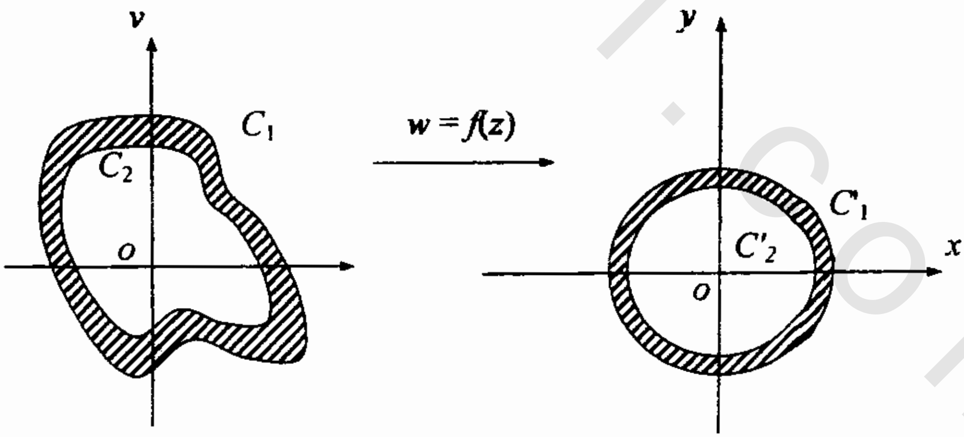
$$z \in A \subset P_z \longrightarrow w \in A' \subset P_w$$
$$z \in C \longrightarrow w \in C' \qquad (14.17)$$

كما هو مبين في شكل (٣.١٤):



شكل (٣.١٤)

ويمكن تعميم تحويل ريمان إلى منطقة محدودة بين منحنيين مغلقين بسيطين أحدهما داخل الآخر إلى منطقة محدودة بدائرتين متحدتي المركز كما هو مبين بالشكل (٤.١٤):



شكل (٤.١٤)

تعريف (٣.١٤):

يقال أن النقطة z_1 نقطة ثابتة أو لا تغيرية fixed أو Invariant بالنسبة للتحويل $w = f(z)$ إذا تحقق

$$f(z_1) = z_1$$

مثال (٤.١٤):

النقاط اللاتغيرية للتحويل

$$w = f(z) = z^2$$

تعطى من $z = z^2 = f(z)$ أي هي $z = 0, 1$

مثال (٥.١٤):

التحويل $w = z + \beta$ يسمى تحويل الإزاحة Translation حيث $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ ثابت مركب. هندسياً هذا التحويل يزيح النقاط والأشكال في اتجاه المتجه β باعتبار أن العدد المركب β يمثل متجه (β_1, β_2).

مثال (٦.١٤):

التحويل $w = f(z) = e^{i\theta_o} z$ يسمى تحويل الدوران Rotation حيث θ_o ثابت حقيقي. بهذا التحويل تدار الأشكال في المستوى z بزاوية θ_o وإذا كانت $\theta_o > 0$ يكون الدوران في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة بينما إذا كانت $\theta_o < 0$ يكون الدوران في اتجاه عقارب الساعة.

تحويل الدوران يكتب في الصورة المثلثية:

$$\begin{aligned} w = f(z) &= \text{cis } \theta_o z \\ &= (\cos\theta_o + i \sin\theta_o) z \end{aligned}$$

مثال (٧.١٤):

التحويل $w = f(z) = a\,z$ يسمى تحويل مغير البعد (تحويل التشابه) similarity transformation حيث a ثابت حقيقي (في حالة $a > 1$ يسمى تكبير وفي حالة $a < 1$ يسمى تصغير).

مثال (١٤-٨):

التحويل $w=f(z)=\frac{1}{z}$ يسمى تحويل التعاكس Inversion والذي يأخذ الصورة

$$w=f(z)=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

$$=\frac{\bar{z}}{x^2+y^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

أي أن:

$$(x,y)\longrightarrow\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \qquad (14.18)$$

مثال (١٤-٩):

التحويل $w=f(z)=\alpha z+\beta$ يسمى تحويل خطي linear transformation حيث α,β ثابتان مركبان. وإذا وضعنا

$$\xi=e^{i\theta_0}\tau \quad , \quad w=\xi+\beta$$

حيث $\alpha=ae^{i\theta_0}$

فإننا نرى أن التحويل الخطي هو محصلة الإزاحة والدوران ومغير البعد.

مثال (١٤-١٠):

التحويل

$$w=f(z)=\frac{a_{11}z+a_{12}}{a_{21}z+a_{22}} \quad , \ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0 \quad (14.19)$$

يسمى التحويل الكسري ويمكن بسهولة أن نبين أن هذا التحويل محصلة إزاحة ودوران ومغير بعد وتعاكس.

الحل:

بالقسمة الاعتيادية نجد أن:

$$w=\frac{a_{11}}{a_{21}}+\frac{a_{12}a_{22}-a_{11}a_{22}}{a_{21}(a_{21}z+a_{22})}$$

$$=\lambda+\frac{\mu}{z+\nu}$$

حيث $\nu=\frac{a_{22}}{a_{21}}$, $\mu=\frac{(a_{12}a_{22}-a_{11}a_{22})}{a_{21}}$, $\lambda=\frac{a_{11}}{a_{22}}$ ثوابت

إذاً التحويل يكافئ

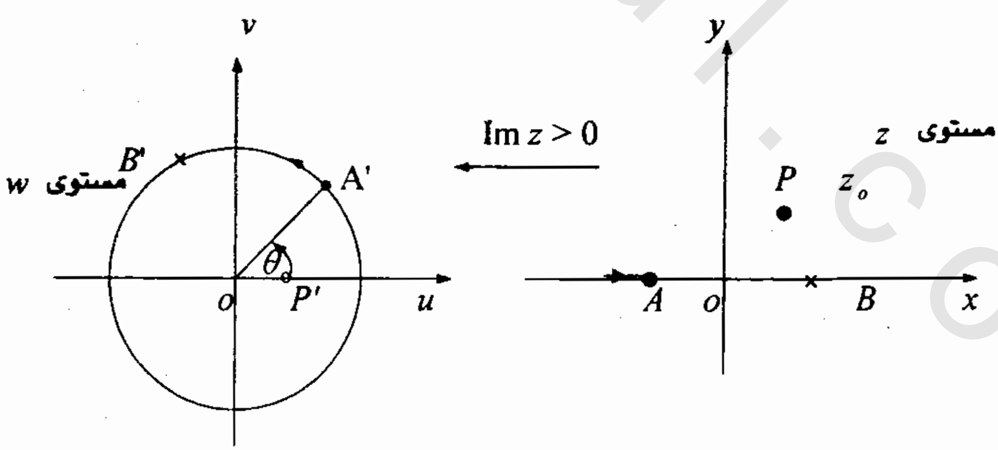
$$w=\lambda+\mu\tau\ ,\quad \xi=z+\nu\ ,\quad \tau=\frac{1}{\xi}$$

مثال(١١.١٤):

التحويل

$$w=e^{i\theta_o}\frac{z-z_o}{z-\bar{z}_o}\qquad(14.20)$$

حيث z_o أي نقطة P في النصف الأعلى للمستوى z، يحول نصف المستوى الأعلى من المستوى z إلى النقاط الداخلية لدائرة الوحدة $|w|=1$ وكل نقطة على محور x تنقل إلى محيط الدائرة. الثابت θ_o يتعين بأخذ نقطة ثابتة على محور x تناظر نقطة ثابتة على المحيط كما هو مبين في شكل (٥.١٤):



شكل (٥.١٤)

مثال (١٢.١٤):

التحويل الكسري يحول الدوائر في المستوى z إلى دوائر في المستوى w والخطوط المستقيمة إلى خطوط مستقيمة.

الحل:

المعادلة العامة للدائرة في المستوى المركب z هي

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0 \qquad (14.21)$$

حيث $\alpha > 0$ ، $\gamma > 0$ ، β ثابت مركب. وإذا كانت $\alpha = 0$ فإن الدائرة تؤول إلى خط مستقيم (دائرة نصف قطرها لانهائي).

تحت تحويل التعاكس $w = \frac{1}{z}$ أو $z = \frac{1}{w}$ فإن المعادلة (14.21) تؤول إلى المعادلة

$$Cw\bar{w} + \bar{\beta}w + \beta\bar{w} + A = 0$$

في المستوى w.

أكمل بالنسبة لتحويل الدوران ومغير البعد.

مثال (١٣.١٤):

أوجد النقاط الثابتة للتحويل

$$w = \frac{2z - 5}{z + 4}$$

الحل:

النقاط الثابتة للتحويل المعطى هي حل المعادلة :

$$\frac{2z - 5}{z + 4} = z$$

أو

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

أي أن النقاط الثابتة هما $z = -1 \pm 2i$

مثال (١٤.١٤) :

أوجد التحويل الكسري الذي يحول النقاط $z = 0, -i, -1$ إلى النقاط $w = i,$ $1, 0$ على الترتيب.

الحل:

بالتعويض عن z، w في التحويل الكسري

$$w=\frac{a_{11}z+a_{12}}{a_{21}z+a_{22}}$$

نحصل على ثلاث معادلات في أربع مجاهيل

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}$$

أي أن الحل بالتأكيد يعتمد على أحد هذه المجاهيل باعتباره بارامتر وليكن

$$a_{12}=a_{11}\ ,\ a_{22}=-i\ a_{11},\ a_{21}=i\ a_{11}$$

وبالتالي فإن:

$$w=f(z)=\frac{a_{11}z+a_{11}}{i\,a_{11}z-i\,a_{11}}$$

مثال (١٥،١٤):

أوجد التحويل الكسري الذي يحول نصف المستوى العلوي للمستوى z ($\operatorname{Im} z>0$) إلى دائرة الوحدة في المستوى w بحيث صورة $z=i$ هي نقطة الأصل $w=0$ بينما النقطة عند اللانهاية تناظر النقطة $w=-1$.

الحل:

بوضع $z=i$ تناظر $w=0$، $z=\infty$ تناظر $w=-1$.

إذاً
$$w=e^{i\theta_0}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$$

وبالتعويض بالنقاط z المعطاة وما يناظرها فإن :

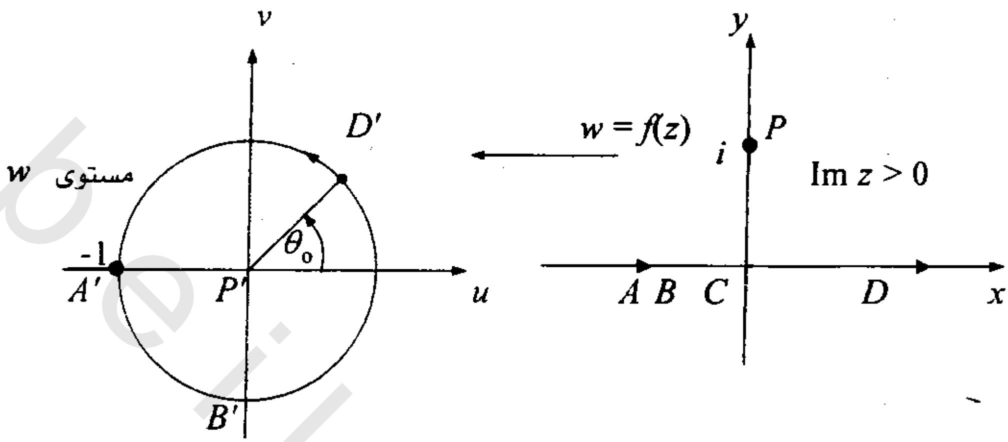
$$0=e^{i\theta_0}\frac{i-z_0}{i-z_0}$$

$$\therefore\ z_0=i$$

والنقطة $z=\infty$ يناظرها $w=e^{i\theta_0}=-1$ وبالتالي فإن التحويل الكسري المطلوب هو:

$$w=\frac{i-z}{i+z}$$

كما هو موضح بالشكل (١٤ـ٦):



شكل (١٤ـ٦)

مثال (١٤ـ١٦):

أثبت أن التحويل $w = f(z)$ يجعل المماس لأي منحنى C في المستوى z عند النقطة z_o يدور بزاوية $\arg f'(z)$ حيث $f(z)$ تحليلية عند z_o، $f'(z_o) \neq 0$ (جاكوبيان التحويل لا يساوي الصفر).

الحل:

نفرض أن المنحنى C في المستوى P_z معطى بالتمثيل البارامتري

$$x = x(t) \;,\; y = y(t) \text{ أو } z = z(t)$$

وصورته C' معطاة بالتمثيل البارامتري

$$v = v(t) \;,\; u = u(t) \text{ أو } w = w(t)$$

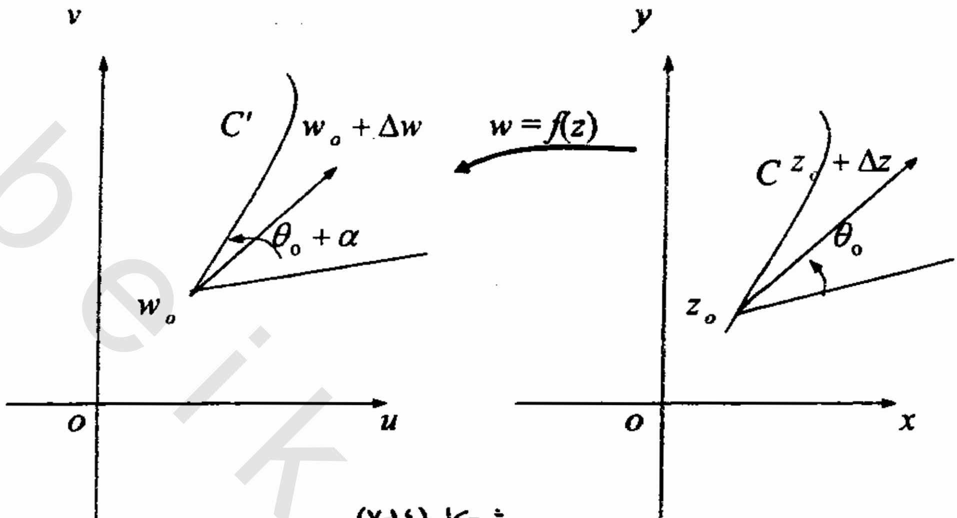
في المستوى P_w .

إذاً ميل المماس (اتجاه المماس) للمنحنيات C، C' هي $\frac{dz}{dt}$ ، $\frac{dw}{dt}$ على الترتيب عند النقاط المتناظرة.

وبما أن
$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz}\,\frac{dz}{dt} = f'(z)\,\frac{dz}{dt}$$

$$\therefore\ \left(\frac{dw}{dt}\right)_{w=w_o} = f'(z_o)\left(\frac{dz}{dt}\right)_{z=z_o}$$

حيث إن $f(z)$ تحليلية عند z_o كما هو موضح بالشكل (٧.١٤):



شكل (٧.١٤)

مثال (١٧.١٤):

بين أن الزاوية بين منحنيين C_1, C_2 يمران بالنقطة z_o في المستوى P_z تظل محفوظة في القيمة والاتجاه تحت التحويل $w = f(z)$ إذا كانت $f(z)$ تحليلية عند z_o ، $f'(z_o) \neq 0$ أي التحويل حافظ للزوايا.

الحل:

من المثال السابق كل منحنى يدور بزاوية $\arg f'(z_o)$ تحت تأثير التحويل $w = f(z)$. وبالتالي فإن الزاوية بين المنحنيين تدور بنفس القيمة أي أنها تظل محفوظة في القيمة والاتجاه.

تمارين (١٤)

(١) أثبت أن التحويل $w=\frac{1}{z}$ يحول الدائرة $C:|z-3|=5$ إلى الدائرة $C':\left|w+\frac{3}{16}\right|=\frac{5}{16}$

(٢) أوجد صورة منطقة ما بداخل الدائرة بالتحويل السابق.

(٣) برهن أن التحويل $w=\dfrac{z-i}{iz-1}$ يحول المنطقة $\operatorname{Im} z\geq 0$ إلى المنطقة $|w|\leq 1$.

(٤) في التمرين السابق أوجد صورة المنطقة $\operatorname{Im} z\leq 0$.

(٥) أثبت أن التحويل

$$w=\tfrac{1}{2}(z\,e^{-\alpha}+z^{-1}e^{\alpha})$$

حيث α عدد حقيقي، يحول منطقة ما بداخل الدائرة $|z|=1$ إلى خارج قطع ناقص.

(٦) أثبت أن التحويل $w=\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{2}{3}}$ يحول دائرة الوحدة إلى منطقة وتدية الشكل.

(٧) ارسم صورة الدائرة $(x-3)^2+y^2=2$ والمستقيم $2x+3y=7$ تحت تأثير التحويل $w=\frac{1}{z}$.

(٨) أثبت أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون التحويل $w=F(z,\bar{z})$ حافظ للزوايا في منطقة ما A هو $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}=0$ ، $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ في A وأعط تفسير لذلك.

(٩) أثبت أن التحويل $w=f(z)$ يحول المضلع في المستوى z إلى مضلع مشابه له في المستوى w إذا كان وفقط إذا كان $f'(z)$ ثابت لا يساوي الصفر.

(١٠) عين صورة الدائرة في المستوى z بالتحويل $w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ (هذا التحويل يسمى تحويل جوكوفسكي وله أهمية خاصة في الديناميكا الهوائية).

(١١) أثبت أن التحويل $z=a(w+i-i\,e^{-iw})$ يحول السيكلويد $x=a(t-\sin t)\ ,\ \ g=a(1-\cos t)$ إلى خط مستقيم.

(١٢) أثبت أن التحويل $z=a(\cosh w+i\sinh w)$ يحول القطع الزائد $x=a\cosh t\ ,\ y=a\sinh t$ إلى خط مستقيم.

(١٣) أوجد التحويل الكسري الذي يحول النقاط

$$z_1 = i \ , \ z_2 = -i \ , \ z_3 = 1$$

في المستوى P_z إلى النقاط

$$w_1 = 0 \ , \ w_2 = 1 \ , \ w_3 = \infty$$

في المستوى P_w على الترتيب.

(١٤) أوجد التحويل الكسري الذي يحول الرؤوس

$$z_1 = 1 + i \ , \ z_2 = -i \ , \ z_3 = 2 - i$$

في المستوى P_z إلى النقاط

$$w_1 = i \ , \ w_2 = 1 \ , \ w_3 = 0$$

في المستوى P_w ومن ثم أوجد صورة منطقة ما بداخل المثلث الذي رؤوسه z_1, z_2, z_3.

(١٥) أثبت أن التحويل الكسري

$$w = e^{i\theta} \frac{z - p}{\overline{p} z - 1}$$

يحول الدائرة $|z| = 1$ إلى الدائرة $|w| = 1$ حيث p ثابت مركب.

(١٦) أثبت أن تحويل جوكوفسكي $w = z + \frac{k^2}{z}$ يمكن كتابته على الصورة

$$\frac{w - 2k}{w + 2k} = \left(\frac{z - k}{z + k}\right)^2$$

(١٧) أوجد التحويل الكسري الذي يحول الدائرة $|z - 1| = 2$ إلى الخط $x + y = 1$.

(١٨) إذا كان $u = u(x, y) \ , \ v = v(x, y)$ تحويل من المستوى $x\,y$ إلى المستوى $u\,v$، بين أن الشرط الضروري والكافي كي يكون التحويل حافظاً للزوايا هو

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

واستنتج أنه إما أن يكون

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

أو

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

وبالتالي فإن الدالة $u + i v$ يجب أن تكون دالة تحليلية في المتغير $x + i y$

(١٩) أوجد الشروط على الأعداد $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ كي يكون التحويل الكسري $w = f(z) = \dfrac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}$ محققاً أن $z = f(w)$. في هذه الحالة يقال أن التحويل الكسري التفافياً.

(٢٠) أثبت أن التحويلين $w = \dfrac{z+1}{z-1}$ ، $w = \ln\dfrac{z}{2}$ التفافيان.

(٢١) أوجد الشروط التي يجب أن تتحقق كي يكون التحويل الكسري $w = \dfrac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}$ له نقطة لاتغيرية.

(٢٢) أثبت أن التحويل الكسري

$$w = \frac{a_{11}z + \bar{a}_{12}}{a_{12}z + \bar{a}_{11}} \quad , \quad |a_{11}|^2 - |a_{12}|^2 = 1$$

يحول دائرة الوحدة وما بداخلها إلى نفس دائرة الوحدة وما بداخلها.