بسم الله الرحمن الرحيم
وبه نستعين

مُقَدِّمَة

في علم الرياضيات، كما في أي علم، يبرز للعيان اتجاهين ... أحدهما الميل إلى الأفكار المجردة التي تبلور العلاقات المتأصلة في المادة المحيرة قيد الدراسة، ومن ثم هذا الاتجاه يربط هذه المادة في مجموعة متماسكة من الأفكار والمبادئ بأسلوب مرتب ومنهجي. والاتجاه الآخر هو الميل إلى الفهم البديهي الذي يعزز الإدراك المباشر لموضوع الدراسة وعلاقته الطبيعية بها، وهذا يؤكد المعنى الملموس (concrete) لهذه العلاقات.

وفي الهندسة .. الاتجاه المجرد يقود إلى نظام رائع من النظريات في كل من هندسة التحويلات والهندسة الجبرية والهندسة الريمانية والتوبولوجي والهندسة التفاضلية. هذه النظريات لها استخدامات واسعة في التفكير والاستنتاج المجرد وكذلك في الحسابات الرمزية في الجبر والهندسة.

وعلى الرغم من ذلك فإنه مازال صحيحاً كما كان من قبل أن ذلك الإدراك والفهم البديهي يلعب دوراً رئيسياً في الهندسة. وهذه البديهية الملموسة لها قيمة عظيمة ليس فقط للباحث العلمي، وإنما لأي شخص يرغب في دراسة وإدراك نتائج البحوث والدراسات في الهندسة.

لقد اعتبر الكثيرون أن مفاهيم تشكيلات الهندسة المختلفة من أكثر المواضيع الرياضية المعقدة والتي يصعب الحصول عليها، وهكذا فإنه من العدل القول أن معظم المتخصصين في الرياضيات يحسون بعدم ارتياح في فهم الهندسة لما لها من ارتباط وتداخل بأفرع الرياضيات الأخرى.

وعلى ذلك فإن غايتنا من هذا العرض هي تقديم لموضوع هندسة التحويلات وهو من أهم مواضيع الهندسة في العصر الحديث كما هو موجود حالياً وكما نراه

بالبديهيات والمفاهيم. هذا العرض مبني على أساس من الأفكار البديهية. ومن ثم ربطها في شكل مفاهيم هندسة التحويلات والهندسة التحليلية، والتي لها علاقة وثيقة بمواضيع كثيرة ومتعددة في الحياة ... حيث قال هلبرت

$$\text{space} \times \text{being} = \text{action}$$

ليدلل أن الهندسة مؤشر للوجود.

قبل الميلاد بـ ٣٠٠ عام، قام العالم إقليدس Euclides بعرض كتابه بعنوان الأصول The Elements الذي أصبح الكتاب الشهير في الهندسة، والذي وضع فيه مسلماته الخمس التي اعتمدت عليها جميع نظرياته، ولكنه حاول تجنب استخدام مسلمته الخامسة والخاصة بالتوازي قدر الإمكان في إثباتاته، وبالتحديد الـ ٢٨ نظرية التي أثبتها في كتابه لم يستخدم في براهينها المسلمة الخامسة. ولكن مسلمات إقليدس كان بها قصور، تم معالجة هذا القصور من قبل هلبرت Hilbert فيما بعد والذي أصبح نظام المسلمات الكامل الذي وضعه هلبرت هو الأساس للهندسة. بعد ذلك حاول العلماء استنتاج المسلمة الخامسة من الأربعة الأولى ولكن محاولتهم باءت بالفشل، ومن هذه المحاولات نشأت أنواع أخرى من الهندسات تختلف عن هندسة إقليدس في المسلمة الخامسة وتسمى بالهندسة اللاإقليدية، ومن العلماء الذين قاموا بهذه المحاولات: بوي Bolyai ـ لوباتشفيسكي Lobachevsky. ريمان Riemann وغيرهم ...

العالم بلترامي Beltrami هو الذي وضع دراسات العالمين بوي ولوباتشفيسكي عن الهندسة اللاإقليدية في نفس أهمية الهندسة الإقليدية. وفي عام ١٨٦٨ م كتب بحثاً بعنوان:

Essay on the interpretation of non-Euclidean geometry

والذي وضع فيه نموذج لهندسة لا إقليدية ذات بعدين في هندسة إقليدية ذات ثلاثة أبعاد هذا النموذج تم الحصول عليه من خلال سطح دوراني ناتج عن الدوران لمنحنى

التراكتركس tractrix حول خطه التقاربي، هذا النموذج يسمى شبه الكرة Pseudo-sphere.

وفي عام ١٨٧١ قام العالم كلاين Klien بإتمام الدراسة حول ما بدأه بلترامي حول الهندسة اللاإقليدية مثل هندسة ريمان الكروية Riemann's spherical geometry . أعمال كلاين كانت تعتمد على تعريف للمسافة أعطاه العالم كايلي Cayley في عام ١٨٥٩ عندما قام بإعطاء تعريف معمم للمسافة.

ولقد وضح كلاين بالاعتماد الكلي على نظرية الزمر أن هناك ثلاثة أنواع مختلفة للهندسة وهي هندسة لوباتفيسكي وبوي وتسمى بالهندسة الزائدية heperbolic، وهندسة ريمان وتسمى بالهندسة الناقصية elliptic، والهندسة الإقليدية. كل هذه الأنواع اعتمدت على المسلمات الأربعة الأولى التي وضعها إقليدس ولكن لكل منها نظرته الخاصة بمسلمة التوازي.

موضوع هذا الكتاب هو هندسة التحويلات المصاحبة للنماذج الهندسية المختلفة المرتبطة بالحركة حيث أن واقع الحياة العملي ذاخر بالنماذج الهندسية التي تصف واقع حياتي نعيشه، إذاً ما هو النموذج الهندسي؟

النموذج الهندسي هو نموذج يقترب من الواقع بقدر الإمكان بحيث تتوافر فيه أغلب الخصائص التي يحتاجها الواقع مثل نوعية النقاط والشكل ونوع المشكلة المراد دراستها ومن النماذج المشهورة نموذج سطح الكرة الأرضية ونماذج فراغات النسبية الخاصة والعامة، وكذلك نماذج التصميم المختلفة والتي تحتاج إلى تعاون كبير بين تخصصات مختلفة مثل الهندسة والتحليل العددي والحسابات العلمية مثل نموذج نقل الحركة مثل الإنسان الآلي.

هذا الكتاب يتكون من جزئين، تفصيلهما يجري كالآتي:

الجزء الأول (مقدمة تاريخية ومراجعة مختصرة لما له علاقة بموضوع الكتاب) ويحتوي على أربعة أبواب موضحة كالآتي:

الباب الأول: يعرض نبذة تاريخية عن نشأة الهندسة وتطورها من خلال نظام إقليدس المسلماتي حتى وصلت إلينا بشكلها الحالي ويهتم كذلك بدراسة وعرض نظام هلبرت المسلماتي والذي تم من خلال معالجة القصور في نظام إقليدس ونبين كذلك في هذا الباب كيف ظهرت الهندسة التحليلية وذلك بالاعتماد على مسلمات هلبرت إلى أن وصلنا إلى هندسة التحويلات وأهمية دراستها وماذا نعني بموضوع هندسة التحويلات والذي يلعب دوراً هاماً في أجهزة نقل الحركة.

الباب الثاني: يعتبر مراجعة لما سبق دراسته لموضوع الرواسم وتحصيل الرواسم وزمرة التحويلات والتي درسها الطالب في مقرر الجبر (متطلب سابق).

الباب الثالث: يحتوي على مراجعة لأساسيات الجبر الخطي مثل المحددات والمصفوفات والفراغ الاتجاهي ومرتبة المصفوفة والضرب الداخلي.

الباب الرابع: يحتوي على التحويلات بين الفراغات الاتجاهية وخصوصاً التحويلات الخطية ومصفوفة التحويل الخطي.

الجزء الثاني (التحويلات الهندسية وتطبيقاتها) وهذا الجزء يشتمل على الحركات في كل من المستوى والفراغ وتفصيله يجري كالآتي:

الباب الخامس: يقدم مفهوم التحويل الهندسي أي متى يمكن الحكم على راسم أو تحويل بأنه هندسي مع إعطاء أمثلة مختلفة توضح ذلك.

الباب السادس: يقدم أول أنواع الحركات في المستوى وهو الانعكاس باعتباره تحويل هندسي وفيه نتعرض لخواص الانعكاس في خط مستقيم مائل ونحصل على الصور المختلفة للانعكاس باستخدام الإحداثيات الكارتيزية.

الباب السابع: يتناول الانتقال أو الإزاحة باعتباره تحويل هندسي في اتجاه ما وفيه قدمنا الصور المختلفة للانتقالات باستخدام الإحداثيات.

obeikandl.com

الباب الثامن: يتناول تحويل هندسي وهو الدوران الذي يعتبر أهم التحويلات الهندسية حيث أنه أحد أجزاء الحركة (الحركة العامة تعتبر محصلة انتقال ودوران). وفي هذا الباب قدمنا خواص الدوران حول محور اختياري وكذلك علاقة الدوران بالانعكاس.

الباب التاسع: يقدم تحويل هندسي كمحصلة لانعكاس وانتقال ويسمى الانعكاس الانزلاقي.

الباب العاشر: يعرض تحويلات هندسية لاإقليدية مثل مغير البعد والقص في المستوى والفراغ.

الباب الحادي عشر: يعمم التحويلات السابقة من خلال التحويلات الاسقاطية ولذلك قدمنا هندسة الفراغ الاسقاطي والإحداثيات المتجانسة وزمرة التحويلات الاسقاطية وما يرتبط بها من لا متغيرات مثل النسبة التبادلية.

الباب الثاني عشر: يتناول التحويلات التآلفية وهندسة الفراغ التآلفي وعلاقتها بالتحويلات الاسقاطية وقدمنا حالات خاصة منها مثل التحويلات العمودية وعلاقتها بالهندسة الإقليدية.

الباب الثالث عشر: يتناول العلاقة بين التحويلات الهندسية والتحويلات الخطية من خلال مصفوفة التحويل الهندسي.

الباب الرابع عشر: يقدم نوع من التحويلات الهندسية في المستوى المركب وهي التحويلات الحافظة للزوايا.

الباب الخامس عشر: يقدم زمرة التناظرات التي تعتمد على زمرة التبديلات وزمرة الأشكال الهندسية.

هذا الكتاب كتب بأسلوب علمي بسيط معتمداً على الخلفية العلمية للطالب من حيث أنه درس المنطق الرياضي والجبر وكذلك مفاهيم الهندسة

الإقليدية والتي من خلالها ظهرت الهندسة اللاإقليدية.

لقد نهجنا في معالجة هذا الكتاب النهج الحديث وهو النهج المنطقي الذي ينطلق من مسلمات نقبلها دون برهان ومن مفاهيم نفهمها دون تعريف ثم ننتقل إلى الحقائق الهندسية فلا نقبل واحدة منها دون برهان رياضي صحيح وتوضيح ذلك من خلال الأشكال الهندسية والتي تم رسمها عن طريق الحزم الجاهزة في الحاسب الآلي.

وفي نهاية كل باب توجد مجموعة من التمارين لتثبت المعلومات وتساعد على التفكير والتذكر منها ما هو مشابه للأمثلة التي وردت داخل الباب ومنها ما هو جديد في صياغته وأفكاره.

في نهاية الكتاب قدمنا قائمة المراجع التي اعتمدنا عليها في صياغة وإعداد هذا الكتاب.

الكتاب يحتوي مقررات تدريسية لطلاب كليات التربية للبنات والبنين وكذلك كليات المعلمين والمعلمات وكليات العلوم في الدول العربية بالإضافة إلى أن أجزاء كثيرة من هذا الكتاب تدرس من خلال مقررات دراسية في الجامعات المصرية والعربية.

وفي النهاية نأمل أن يكون هذا الكتاب عوناً للطالب من خلال مساعدة أساتذته ونتمنى من الله أن نكون قد وفقنا في عرض مادة الكتاب بأسلوب شيق ومحبب لدراسة الهندسة وليس البعد عنها، ونسأل الله أن يكون هذا العمل خيراً لوطننا العربي والإسلامي والحمد لله رب العالمين.

المؤلف

نصار السلمي

أستاذ الرياضيات بجامعة أسيوط. مصر