

## الباب الرابع

### التحويلات بين الفراغات الاتجاهية

#### Transformations

نقدم في هذا الباب مراجعة سريعة عن الرواسم أو التحويلات بين الفراغات

الاتجاهية.

(١٤) مقدمة :

نفرض أن لدينا فراغان اتجاهيان  $\mathbb{R}^m$  ،  $\mathbb{R}^n$  ونعرف الراسم  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

كما يلي:

$$X = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow Y = (y_1, \dots, y_m)$$

$$y = f(x)$$

حيث

أو الصورة المفصلة:

$$y_1 = f_1(x) = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

⋮

$$y_m = f_m(x) = f_m(x_1, \dots, x_n)$$

العلاقة  $y = f(x)$  تسمى دالة اتجاهية بين الفراغات الاتجاهية  $\mathbb{R}^m$  ،  $\mathbb{R}^n$ .

مثال (١٤) :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X = (x_1, x_2) \longrightarrow Y = (y_1, y_2, y_3)$$

حيث

بحيث

$$y_1 = x_1, y_2 = x_1 + x_2, y_3 = x_2 \quad (4.1)$$

العلاقة  $f$  المعرفة بالعلاقات (4.1) تعرف راسم من المستوى  $\mathbb{R}^2$  إلى الفراغ  $\mathbb{R}^3$  ويسمى

دالة اتجاهية  $\text{multi valued function}$ .

مثال (٢٤) :

$$\text{الدالة } f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ المعرفة بالقاعدة}$$

$$f(x) = (x, y, z) = x + y - z \in \mathbb{R}$$

يعرف تحويل من الفراغ  $\mathbb{R}^3$  إلى خط الأعداد وتسمى دالة حقيقية real valued function .

### (٢٤) التحويلات (الدوال) الخطية Linear mapping

إذا كانت الدالة  $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  خطية بمعنى العلاقات التي تعرف الدالة

$y = f(x)$  كلها دوال خطية في المتغيرات  $x_1, \dots, x_n$  فإننا نقول أن  $f$  دالة خطية

linear function . فمثلاً  $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   $f$  المعرفة بالقاعدة:

$$(x, y, z) \longrightarrow (x + y, x - z, z - y)$$

دالة خطية.

وعموماً يمكننا تعريف الدالة الخطية بين الفراغات  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$  على الصورة:

**تعريف (١٤):**

يقال أن الدالة  $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  خطية إذا تحققت

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (4.2)$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \lambda \in \mathbb{R}$$

أو ما يكافئ

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

هندسياً؛ يقال أن الدالة  $f$  خطية إذا كانت تحافظ على الخطية بمعنى صورة تركيبية

خطية  $\lambda x + \mu y$  هي تركيبية خطية  $\lambda f(x) + \mu f(y)$  من الصورة  $f(x), f(y)$  أو

صورة خط مستقيم في  $\mathbb{R}^n$  هي خط مستقيم في  $\mathbb{R}^m$  .

**مثال (٢٤):**

الراسم  $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  المعرفة بالقاعدة  $f(x, y, z) = x$  والذي يسمى

راسم الإسقاط على محور  $x$  هو راسم خطي حيث أنه يحقق

$$f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= x_1 + x_2 = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2)$$

$$f(\lambda(x, y, z)) = f(\lambda x, \lambda y + \lambda z) \quad \text{بالإضافة إلى}$$

$$= \lambda x = \lambda f(x, y, z), \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

تعريف (٢٤):

لرسم  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  نعرف

$$\text{Im} f = \{y \in \mathbb{R}^m : y = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$

وتسمى صورة  $f$  وهي فراغ جزئي من النطاق المصاحب  $\mathbb{R}^m$ .

$$\ker f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0 \in \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^n$$

وتسمى قلب  $\ker f$  لتحويل  $f$  وهو فراغ جزئي من النطاق  $\mathbb{R}^n$ .

مثال (٤٤):

أوجد  $\text{Im} f$ ،  $\ker f$  حيث  $f$  رسم معرف بالقاعدة

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, y, 0)$$

الحل:

واضح أن  $\text{Im} f$  هي

$$\text{Im} f = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} = xy \text{ المستوى}$$

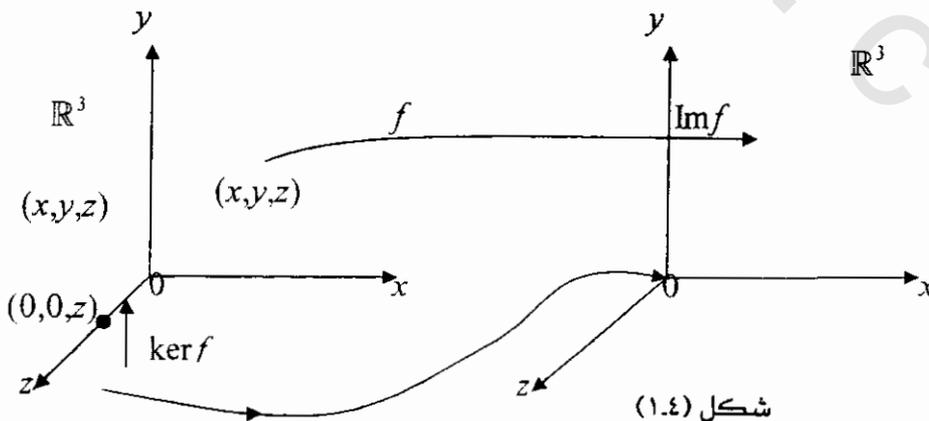
أي أن  $\text{Im} f$  هي المستوى  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

$$\ker f = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\} \quad \text{وكذلك}$$

$$= \{(x, y, z) : (x, y, 0) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(0, 0, z)\} = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$$

وهو محور  $z$  في الفراغ الاقليدي  $\mathbb{R}^3$ . كما هو موضح في شكل (١.٤).



شكل (١.٤)

التحويلات الخطية تحقق الخواص التالية:

(i) إذا كان لدينا  $f, g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  تحويلين فإن  $f + g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

تحويل خطي يعرف بالقاعدة

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(ii) إذا كان لدينا  $f, g, h$  تحويلات خطية من  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}^m$  فإن

$$(f + g)(x) = (g + f)(x) \quad \text{خاصية الابدال}$$

$$(f + (g + h))(x) = ((f + g) + h)(x) \quad \text{خاصية الدمج}$$

(iii) التحويل الخطي الصفري  $O$  والمعرف بالقاعدة

$$O(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(vi) الممكوس الجمعي للتحويل الخطي  $f$  هو  $-f$  ويحقق

$$(f + (-f))(x) = O(x)$$

وبالتالي يمكن القول أن مجموعة التحويلات الخطية تكون زمرة مع عملية جمع التحويلات الخطية والتي تسمى زمرة التحويلات الخطية linear group of transformation.

تعريف (٢٤):

يقال أن التحويل الخطي غير شاذ non singular إذا كان له معكوس (في

حالة تحصيل الرواسم أو ضرب الرواسم) أي إذا كان تناظر أحادي

one to one correspondences = bijective (surjective + injective)

= فوقي (شامل) + أحادي (تقابل)

حيث تحصيل الرواسم يعرف بالقاعدة (الباب الثاني)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ومما سبق في الباب الثاني رأينا أن تحصيل الرواسم ليس إبدالي ولكنه دامج أي أن

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

لأي ثلاث تحويلات خطية من  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}^n$ .

معكوس التحويل الخطي  $f: V \longrightarrow V$  هو  $f^{-1}: V \longrightarrow V$  ويعرف القاعدة

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

Identity حيث  $f$  تحويل خطي من الفراغ  $V$  إلى نفسه،  $I$  راسم التطابق أو الوحدة mapping ويعرف بالقاعدة

$$I : V \longrightarrow V, I(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

أي أن مجموعة التحويلات الخطية غير الشاذة المعرفة على الفراغ  $\mathbb{R}^n$  تعرف زمرة مع عملية تحصيل الرواسم.

وعموماً نفرض أن  $f : V \longrightarrow W$  تحويل خطي من فراغ  $V$  إلى فراغ  $W$  إذا وجد تحويل خطي آخر  $f^{-1} : W \longrightarrow V$  يحقق

$$f^{-1} \circ f = I_V, f \circ f^{-1} = I_W$$

حيث  $I_V : V \longrightarrow V, I_W : W \longrightarrow W$ ،  $I_V$  رواسم التطابق (الوحدة) على الفراغ  $V$ ،  $I_W$  على الترتيب فإنه يقال أن  $f$  قابل للعكس،  $f^{-1}$  معكوس  $f$ .

مثال (٥٤):

إذا كان  $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  تحويلات خطية معرفة بالقاعدة

$$T(x, y, z) = (x + y, x - z)$$

$$S(x, y) = (x - y, 2x - y, 3y)$$

حيث  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . أوجد  $TS, ST$ .

العل:

من تعريف تحصيل التحويلات نجد أن

$$ST(x, y, z) = S(T(x, y, z)) = S(x + y, x - z)$$

$$= ((x + y) - (x - z) - (x - z), 3(x - z))$$

$$= (x + y, x + 2y - z, 3x - 3z) \in \mathbb{R}^3$$

$$ST : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

أي أن

$$TS(x, y) = T(S(x, y))$$

بينما

$$= T(x - y, 2x - y, 3y)$$

$$= ((x - y) + (2x - y), (x - y) - 3y)$$

$$= (3x - 2y, x - 4y) \in \mathbb{R}^2$$

$$TS: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

أي أن

واضح أن  $ST \neq TS$

مثال (٦٤):

إذا كان  $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  تحويل خطي معرف بالقاعدة

$$T(x, y) = (2x + 3y, 3x + 4y)$$

هل  $T$  قابلة للعكس؟

العل:

للإجابة على هذا السؤال يوجد اتجاهين:

أحدهما وهو إثبات أن  $T$  تناظر أحادي وهذا واضح من كون أن  $T$  فوقى وأحادي والآخر

نحاول إيجاد راسم  $S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  يحقق  $ST = I$  حيث

$$T(x, y) = (a, b), S(a, b) = (x, y)$$

ومن تعريف  $T$  المعطى في المثال يكون

$$(2x + 3y, 3x + 4y) = (a, b)$$

$$\therefore 2x + 3y = a, 3x + 4y = b$$

واضح أن مجموعة المعادلات هذه لها حل وحيد  $x, y$  حيث أن محدد المعاملات

$(8 - 9 = -1 \neq 0)$  لا يساوي الصفر وباستخدام طريقة كرامر مثلاً نجد أن

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 3 \\ b & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = -4a + 3b, y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = -2b + 3a$$

إذا الراسم  $S$  يمكن تعريفه كالآتي:

$$S(a, b) = (3b - 4a, 3a - 2b)$$

ويمكن التحقق من أن  $TS = I, ST = I$  كما يلي:

$$ST(x, y) = S(T(x, y)) = S(2x + 3y, 3x + 4y)$$

$$\begin{aligned} &= (3(3x + 4y) - 4(2x + 3y), 3(2x + 3y) - 2(3x + 4y)) \\ &= (x, y) = I(x, y) \end{aligned}$$

$$\therefore ST = I$$

بالمثل فإن

$$\begin{aligned} TS(a, b) &= T(S(a, b)) \\ &= T(3b - 4a, 3a - 2b) \\ &= (2(3b - 4a) + 3(3a - 2b), 3(3b - 4a) + 4(3a - 2b)) \\ &= (a, b) = I(a, b) \end{aligned}$$

إذاً  $TS = I$  ومن تعريف المعكوس حيث  $ST = I$ ،  $TS = I$  يكون  $S = T^{-1}$ .

### (٢٤) مصفوفة التحويل الخطي:

نفرض أن لدينا فراغ اتجاهي  $V$  بعده  $n$  وأساسه  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  وفراغ اتجاهي  $W$  بعده  $m$  وأساسه  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ ،  $T: V \rightarrow W$  تحويل خطي. تغير صورة أساس  $V$  بالتراسم  $T$  حيث

$$Tv_1 = z_1, Tv_2 = z_2, \dots, Tv_n = z_n$$

حيث  $z_1, z_2, \dots, z_n \in W$  إذاً المتجهات  $z_i$  تكتب كتركيبات خطية من أساس  $W$  على الصورة

$$z_1 = a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \dots + a_{1m}w_m$$

$$z_2 = a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{2m}w_m$$

⋮

$$z_n = a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \dots + a_{nm}w_m$$

أو في الشكل المختصر

$$z_i = Tv_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}w_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

الشكل الرياضي  $A = (a_{ij})$  يسمى مصفوفة التحويل الخطي  $T: V \rightarrow W$  بالنسبة للأساسين المرتبين  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ،  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  للفراغات  $V$ ،  $W$  على الترتيب.

مثال (٤٤)؛

إذا كان  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  تحويل خطي معرف بالقاعدة

$$T e_1 = e_1 + e_3, T e_2 = e_1 + e_3, T e_3 = e_1 + e_2$$

حيث  $\{e_1, e_2, e_3\}$  الأساس المعتاد للفراغ  $\mathbb{R}^3$ . أوجد مصفوفة التحويل  $T$ .

العل:

من تعريف التحويل المعطى يتضح أن صورة الأساس المعتاد معبر عنها كتراكيب

خطية من الأساس المعتاد للنطاق المصاحب وبذلك تكون مصفوفة التحويل هي معاملات

التراكيب الخطية بنفس الترتيب المعطى أي أن:

$$T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

أي أن مصفوفة التحويل الخطي هي

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة (٤٤)؛

من المثال السابق يتضح أن ترتيب صفوف التحويل  $T$  يعتمد على ترتيب أساس  $V$

(النطاق) وترتيب أعمدها يعتمد على ترتيب أساس  $W$  (النطاق المصاحب).

### تمارين (٤)

(١) بين أي من التحويلات الآتية يكون خطي.

(i)  $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (3x - y, y^2)$

(ii)  $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (3x + 2z, y)$

(٢) إذا كان  $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  تحويل خطي معرف بالقاعدة

$$T(x, y) = (4x - 2y, 3y - 6x)$$

أوجد صورة الخطوط المستقيمة الآتية بالتحويل  $T$ :

(i)  $L_1 = \{t(1, 5) : t \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 5)\} = \{(t, 5t), t \in \mathbb{R}\}$

(ii)  $L_2 = \{t(2, 1) + (3, 5), t \in \mathbb{R}\} = \{(2t + 3, t + 5), t \in \mathbb{R}\}$

(إرشاد: في (i) أوجد صورة النقطة العامة  $(t, 5t)$  وفي (ii) أوجد صورة النقطة العامة

$$(2t + 3, t + 5) \text{ على الخط } L_2)$$

(٣) أوجد مصفوفة التحويل الخطي  $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  المعرف بالقاعدة

$$T(x, y, z) = (x + 3y, y - 2, x + 6z)$$

بالنسبة للأساس المعتاد للفراغ  $\mathbb{R}^3$ .

(٤) أوجد  $TS, ST$  حيث الراسمان  $T, S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  معرفات بالقاعدتان

$$T(a, b) = (2a - b, 3b)$$

$$S(x, y) = (y - x, 4x)$$

حيث  $a, b, x, y \in \mathbb{R}$  وبين فيما إذا كان  $S$  معكوس  $T$  أم لا؟

(٥) بين أن  $T \circ T = T^2 = I$  في حالة  $T$  معرف بالقاعدة

$$T(a, b) = (a, 3a - b)$$