الباب الثاني

فراغ ريمان والممتد المتري

Riemannian Space and Metric Tensor

يعرف فراغ ريمان بأنه فراغ يتكون من مجموعة من النقاط بحيث أن:

(i) كل نقطة تعرف بعدد n من الإحداثيات المستقلة

$$x^1, x^2, \ldots\ldots\ldots x^n \equiv x^\mu$$
$$(\mu = 1, 2, 3, \ldots\ldots n)$$

(ii) المسافة بين أي نقطتين متجاورتين تعطى بالعلاقة الآتية:

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

أو باستخدام اصطلاح التجميع:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \quad \rightarrow (1)$$

الكميات $g_{\mu\nu}$ هي مركبات ممتد متغاير من المرتبة الثانية، وتعرف بالممتد المتري (Metric Tensor) .

المسافة ds^2 تعرف بعنصر الطول في الفراغ الريماني (فراغ ريمان) أو مترية الفراغ (Metric of space).

حالة خاصة من فراغ ريمان:

في حالة الثلاثة أبعاد:

$$x^\mu = x^1, x^2, x^3 = x, y, z$$

ويكون عنصر الطول في هذا الفراغ ذو الأبعاد الثلاثة هو:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$
$$= \sum_{n=1}^{3} (dx^n)^2 = (dx^n)^2 = dx^n dx^n$$

ويعرف هذا الفراغ بالفراغ الاقليدي (نسبة إلى العالم اليوناني القديم إقليدس مؤسس علم الهندسة).

أمثلة محلولة:

مثال(١):

أثبت أن مترية الفراغ الريماني $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ هي كمية لا متغيرة (Invariant).

الحل: المطلوب إثبات أن $ds'^2 = ds^2$

أي:

$$g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

بكتابة قانون التحويل للممتد المتري $g_{\mu\nu}$:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}$$

أو بالصورة:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta}$$

$$\therefore \left(g'_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} \right) = 0$$

وبالضرب في $dx^{\mu} dx^{\nu}$

$$\therefore (g'_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} - g_{\mu\nu}) dx^{\mu} dx^{\nu} = 0$$

$$\therefore g'_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

ولكن :

$$dx'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \quad , \quad dx'^{\beta} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

$$\therefore g'_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

وحيث أن α , β رموز دمية (متكررة) فيمكن استبدالها في الطرف الأيسر بالدليلين μ , ν .

$$\therefore g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

$$\therefore ds'^{2} = ds^{2} = Inv$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (٢):</u>

إذا كانت $ds^{2} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ تمثل كمية لا متغيرة فأثبت أن $g_{\mu\nu}$ يشكل ممتدا متغايرة من المرتبة الثانية.

<u>الحل:</u>

حيث أن ds^{2} هي كمية لا متغيرة، وباعتبار أن

$$dx^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} dx'^{\alpha}$$

$$\therefore\ g'_{\mu\nu}\, dx'^{\mu}\, dx'^{\nu} = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}$$

$$= g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} dx'^{\alpha}\right)\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} dx'^{\beta}\right)$$

$$= g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} dx'^{\alpha} dx'^{\beta}$$

وحيث أن μ , ν هي رموز دمية (متكـــررة) فـــيمكن اســـتبدالها بالـــدليلين (أو الرمزين) α , β في الطرف الأيسر:

$$g'_{\alpha\beta}\, dx'^{\alpha}\, dx'^{\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} dx'^{\alpha} dx'^{\beta}$$

$$\therefore\ \left(g'_{\alpha\beta} - g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}\right) dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = 0$$

وما كانت $dx'^{\alpha}\, dx'^{\beta}$ اختيارية فيمكن أخذها: $dx'^{\alpha}\, dx'^{\beta} \neq 0$

$$\therefore\ g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu}$$

ومن ذلك يتضح أن $g_{\mu\nu}$ هو ممتد متغاير من المرتبة الثانية. وهو المطلوب .

<u>مسألة:</u> حل هذا المثال باستخدام نظرية خارج القسمة .

<u>الحل:</u> تنص هذه النظرية على أنه إذا كان:

حاصل ضرب ممتد x $[X(\mu,\nu)]$ = ممتد آخر

فإن $[X(\mu . \nu)]$ تكون ممتد

في المسألة:

$$[g_{\mu\nu}] \cdot dx^{\mu} dx^{\nu} = Inv.$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

ممتد من المرتبة صفر   ممتد   لابد أن يكون ممتد

الحل التفصيلي:

حيث أن الكمية $g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = Inv.$ أي كمية لا متغيرة وهي تشكل ممتدا من المرتبة صفر، وحيث أن كلا من dx^{μ}, dx^{ν} تشكل ممتدا من المرتبة الأولـــى (متجه) وذلك لأن:

$$dx^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} dx'^{\alpha}, \quad dx^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} dx'^{\beta}$$

فإن حاصل ضربهما:

$$dx^{\mu} dx^{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} dx'^{\alpha} dx'^{\beta}$$

$$\therefore C^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} C'^{\alpha\beta}$$

يشكل ممتدا من المرتبة الثانية.

ومن نظرية خارج القسمة: فإن $g_{\mu\nu}$ لابد أن يكون ممتدا ، وهو المطلوب.

مثال (٣):

أثبت أن الممتد المتري $g_{\mu\nu}$ هو ممتد متماثل، بمعنى أن: $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$

الحل: بكتابة $g_{\mu\nu}$ بالصورة:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu})$$
$$= A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} \qquad \rightarrow (1)$$

حيث $A_{\mu\nu}$ ممتد متماثل: $\leftarrow A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$

$B_{\mu\nu}$ مضاد التماثل: $\leftarrow B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$

بضرب طرفي (١) في $dx^\mu \; dx^\nu$

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}) dx^\mu \; dx^\nu$$

$$\therefore (g_{\mu\nu} - A_{\mu\nu}) dx^\mu \; dx^\nu = B_{\mu\nu} dx^\mu \; dx^\nu \qquad \rightarrow (2)$$

ولكن من مثال سابق:

إذا كان $B_{\mu\nu}$ مضاد التماثل فإن : $B_{\mu\nu} dx^\mu \; dx^\nu = 0$

وذلك حيث أنه بتغيير وضع μ,ν واعتبار أن $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ فإن الكمية $B_{\mu\nu} dx^\mu \; dx^\nu$ تكون:

$$B_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = B_{\nu\mu} dx^\nu dx^\mu = -B_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\therefore 2B_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \qquad \rightarrow B_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$$

وبالتعويض في (٢):

$$\therefore (g_{\mu\nu} - A_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu = 0$$

وحيث أن $dx^\mu dx^\nu$ اختياري فإن $\leftarrow dx^\mu dx^\nu \neq 0$

$$\therefore (g_{\mu\nu} - A_{\mu\nu}) = 0$$

$\therefore g_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}$ = ممتد متماثل

وهو المطلوب

العامل المتمم للممتد $g_{\mu\nu}$:

ويعرف أيضا بالمتعامل (Cofactor) ، إذا كان g هو المحدد المناظر للممتـد المتري $g_{\mu\nu}$ ولنأخذ الحالة البسيطة حيث: $\mu,\nu = 1,2,3$

$$g = \left|g_{\mu\nu}\right| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

يعرف العامل المتمم أو المتعامل (Cofactor) للممتد $g_{\mu\nu}$ بأنه المحدد الناتج من g بحذف الصف والعمود المشتمل على μ,ν وإلحاق الإشـارة $(-1)^{\mu+\nu}$ بالمحدد الناتج ويرمز له بالرمز $G(\mu,\nu)$.

أمثلة:

(١) العامل المتمم (أو متعامل) الممتد g_{11} $(\mu=1\ ,\ \nu=1)$

$$G(1,1) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

(٢) العامل المتمم (أو متعامل) الممتد g_{12} $(\mu=1\ ,\ \nu=2)$

$$G(1,2) = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} g_{21} & g_{23} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g_{21} & g_{23} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix}$$

(٣) العامل المتمم (أو المتعامل) للممتد g_{13} $(\mu=1\ ,\ \nu=3)$

$$G(1,3) = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}$$

ويمكن إثبات العلاقتين الآتيتين:

$$(i) \quad g_{\mu\nu} G(\mu, \nu) = g$$

$$(ii) \quad g_{\mu\nu} G(\alpha, \nu) = 0$$

حيث $\mu \neq \alpha$

<u>إثبات(i)</u>: بفك المحدد g بالطريقة المعتادة:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$= g_{11}\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - g_{12}\begin{vmatrix} g_{21} & g_{23} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} + g_{13}\begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}$$

$$= g_{11}G(1,1) + g_{12}G(1,2) + g_{13}G(1,3)$$

ويمكن الفك أيضا بالصورة:

$$g = -g_{21}\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + g_{22}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} - g_{32}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}$$

$$= g_{21}G(2,1) + g_{22}G(2,2) + g_{23}G(2,3)$$

أيضاً فإن :

$$g = g_{31}G(3,1) + g_{32}\, G(3,2) + g_{33}\, G(3,3)$$

وهذا يعني أن:

$$g = g_{\mu\nu}\, G(\mu, \nu)$$

وهو المطلوب .

<u>إثبات(ii):</u> نعتبر المحدد الآتي الذي فيه عناصر الصفين الثاني والثالث متساوية فقيمته تساوي صفرا

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{vmatrix} = 0$$

بفك هذا المحدد بالنسبة لعناصر الصف الثالث:

$$\therefore g = g_{21}\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22} & g_{23} \end{vmatrix} - g_{22}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} \end{vmatrix} + g_{23}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{23} \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow (1)$$

ولكن:

$$G(3,1) = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22} & g_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22} & g_{23} \end{vmatrix}$$

$$G(3,2) = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} \end{vmatrix}$$

$$G(3,3) = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

<u>حيث:</u>

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

بالتعويض في (١):

$$\therefore g_{21} G(3,1) + g_{22} G(3,2) + g_{23} G(3,3) = 0$$

وهكذا ، بحيث يكون:- $g_{\mu\nu} G(\alpha,\nu) = 0$ حيث: $\mu \neq \alpha$ ،وهو المطلوب.

الممتد المتري المرافق (The Conjugate metric tensor)

يعرف الممتد المتري المرافق $g^{\mu\nu}$ للممتد المتري $g_{\mu\nu}$ بالعلاقة:

$$g^{\mu\nu} = \frac{G(\mu,\nu)}{g}$$

حيث $G(\mu,\nu)$ هي متعامل $g_{\mu\nu}$ في g ، الممتد $g^{\mu\nu}$ هو ممتد مضاد التغاير من المرتبة الثانية.

أمثلة محلولة:

مثال(١): أثبت أن: $g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta^{\alpha}_{\mu}$

الحل: من العلاقة: $g_{\mu\nu} G(\mu,\nu) = g$

بقسمة الطرفين على g:

$$g_{\mu\nu} \cdot \frac{G(\mu,\nu)}{g} = 1 \qquad \rightarrow (1)$$

ولكن من تعريف الممتد المتري المرافق:

$$g^{\mu\nu} = \frac{G(\mu,\nu)}{g} \qquad \rightarrow (2)$$

بالتعويض من (٢) في (١):

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 1 \qquad \rightarrow (3)$$

أيضا: $g_{\mu\nu} G(\alpha,\nu) = 0$ (حيث $(\mu \neq \alpha)$)

بالقسمة على g:

$$\therefore g_{\mu\nu} \frac{G(\alpha,\nu)}{g} = 0$$

$$\therefore g_{\mu\nu} g^{\alpha\nu} = 0 \qquad \rightarrow (4)$$

من (٤) و (٣):

$$\therefore g_{\mu\nu} g^{\alpha\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \alpha) \\ 0 & (\mu \neq \alpha) \end{cases}$$

$$\therefore g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta_{\mu}^{\alpha}$$

مثال (٢): أثبت أن $g^{\mu\nu}$ يشكل ممتدا مضاد التغاير من المرتبة الثانية، ومتماثل أيضاً.

الحل:

يمكن حل هذا المثال بأكثر من طريقة وليكن الحل هنا باستخدام نظرية خارج القسمة كالآتي:

نفرض أن A^{α} ممتدا اختياري مضاد التغاير من المرتبة الأولى (متجه).

ولنعتبر المتجه: $A_{\nu} = g_{\nu\alpha} A^{\alpha}$ فبالضرب في $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} A_{\nu} = g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} A^{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mu} A^{\alpha} = A^{\mu}$$

ومن هذه العلاقة نرى أن A^{μ} ممتد هو حاصل ضرب الكمية $g^{\mu\nu}$ مع الممتد A_{ν} وبتطبيق نظرية خارج القسمة نرى أن $g^{\mu\nu}$ لابد أن يكون ممتدا، وهو بالطبع ممتد مضاد التغاير من المرتبة الثانية.

أيضاً: فحيث أن الممتد $g_{\mu\nu}$ هو ممتد متماثل (مثال سابق) وحيث أن $G(\mu,\nu)$ متماثل أيضاً، فإن: $g^{\mu\nu} = \dfrac{G(\mu,\nu)}{g}$ يكون متماثلاً . وهو المطلوب .

مثال(٣): أثبت أنه لأي نظام متعامد فإن:

$$g_{11} = \frac{1}{g_{11}}, \; g_{22} = \frac{1}{g_{22}}, \; g_{33} = \frac{1}{g_{33}}$$

<u>الحل:</u> حيث أن $g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta_{\mu}^{\alpha}$

فإذا كان $\mu = \nu = \alpha = 1$ فإن: $\therefore g_{11} g^{11} = \delta_1^1 = 1 \rightarrow g_{11} = \frac{1}{g_{11}}$

وإذا كان $\mu = \nu = \alpha = 2$ فإن: $g_{22} g^{22} = \delta_2^2 = 1 \rightarrow g_{22} = \frac{1}{g^{22}}$

وإذا كان $\mu = \nu = \alpha = 3$ فإن: $g_{33} g^{33} = \delta_3^3 = 1 \rightarrow g_{33} = \frac{1}{g^{33}}$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٤):</u> إذا كان طول المتجه A_ν يعرف بالعلاقة:

$$L = \sqrt{A^{\nu} A_{\nu}} = \sqrt{g^{\mu\nu} A_{\mu} A_{\nu}} = \sqrt{g_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu}}$$

حيث: $A^{\nu} = g^{\mu\nu} A_{\mu} \ , A_{\nu} = g_{\mu\nu} A^{\mu}$

فأثبت أن مقدار المتجه والذي يعرف بأنه (L^2) هو كمية قياسية(Invariant).

<u>الحل:</u> من التعريف $L^2 = A^{\nu} A_{\nu} = g^{\mu\nu} A_{\mu} A_{\nu} = g_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu}$

وحيث أن

$$A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_{\nu} \quad , \quad A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}$$

$$\therefore A'_{\mu} A'^{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A_{\nu} A^{\nu} = \delta_{\nu}^{\nu} A_{\nu} A^{\nu} = A_{\nu} A^{\nu} = Inv.$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٥):</u> إذا كانت الزاوية بين متجهين A_{ν}, B^{ν} تعرف بالعلاقة:

$$\cos\theta = \frac{\text{حاصل الضرب القياسي للمتجهين}}{\text{طول المتجه الأول} \times \text{طول المتجه الثاني}}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{A_\nu B^\nu}{\sqrt{A_\nu A^\nu}\sqrt{B_\nu B^\nu}} = \frac{g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu}{\sqrt{A_\nu A^\nu}\sqrt{B_\nu B^\nu}} = g_{\mu\nu} \hat{A}^\mu \hat{B}^\nu$$

حيث $\hat{B}^\nu = \frac{B^\nu}{\sqrt{B_\nu B^\nu}}$, $\hat{A}^\mu = \frac{A^\mu}{\sqrt{A_\nu A^\nu}}$ متجهي الوحدة في اتجاهي المتجهين

فأثبت أن الزوايا θ_{23} , θ_{13} , θ_{12} بين محاور الإحداثيات المنحنية تعطي بالعلاقات:

$$\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \ , \cos\theta_{13} = \frac{g_{13}}{\sqrt{g_{11} g_{33}}} \ , \cos\theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22} g_{33}}}$$

<u>الحل</u>: في اتجاه المنحنى x^1 فإن: $ds^2 = g_{11} (dx_1)^2$ وبالتالي فإن:

$$dx' = \frac{ds}{\sqrt{g_{11}}}$$

ويكون متجه الوحدة المماس للمنحنى x^1 (أي في اتجاهه) هو: $\hat{A}_1^\alpha = \frac{1}{g_{11}} \delta_1^\alpha$

وبالمثل فإن: متجها الوحدة في اتجاهي x^3, x^2 هما:

$$\hat{A}_2^\alpha = \frac{1}{g_{22}} \delta_2^\alpha \ , \hat{A}_3^\alpha = \frac{1}{g_{33}} \delta_3^\alpha$$

$$\therefore \cos\theta_{12} = g_{\mu\nu} \hat{A}_1^\mu \hat{A}_2^\nu = g_{\mu\nu} (\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \delta_1^\mu)(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \delta_2^\nu)$$

$$= g_{12} (\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \delta_1^1)(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \delta_2^2) = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}$$

$$\cos\theta_{13} = g_{\mu\nu} \hat{A}_1^\mu \hat{A}_3^\nu = g_{\mu\nu} (\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \delta_1^\mu)(\frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \delta_3^\nu)$$

$$= g_{13} (\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \delta_1^1)(\frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \delta_3^3) = \frac{g_{13}}{\sqrt{g_{11} g_{33}}}$$

$$\cos\theta_{23} = g_{\mu\nu}\,\hat{A}_2^{\mu}\,\hat{A}_3^{\nu} = g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_2^{\mu}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta_3^{\nu}\right)$$

$$= g_{23}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_2^{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta_3^{3}\right) = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}\,g_{33}}}$$

وفي الحالة الخاصة: إذا كان النظام هو نظام إحداثيات متعامد فإن:

$$g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$$

$$\therefore \cos\theta_{12} = \cos\theta_{13} = \cos\theta_{23} = 0$$

المدتدات المتشاركة - رفع وخفض الأدلة:

Associated Tensor –Raising and Lowering of indices

من الخواص الهامة للممتد المتري $g_{\mu\nu}$ ومرافقة $g^{\mu\nu}$ هي عمليتي رفع وخفض الأدلة كما يلي:

(١) **عملية خفض الدليل:** تعرف بالعلاقة:

$$g_{\mu\nu} A^{\nu} = A_{\mu} \qquad \rightarrow (1)$$

وهذه العملية تحول المتجه مضاد التغاير إلى متجه متغاير.

(٢) **عملية رفع الدليل:** تعرف بالعلاقة:

$$g^{\mu\nu} A_{\nu} = A^{\mu} \qquad \rightarrow (2)$$

وهذه العملية تحول المتجه المتغاير إلى متجه مضاد التغاير.

$\therefore$ الممتد المتري $g_{\mu\nu}$ يخفض الدليل (أي يحول $A^{\mu} \leftarrow A_{\mu}$) .

الممتد المتري المرافق $g^{\mu\nu}$ يرفع الدليل (أي يحول $A_{\mu} \leftarrow A^{\mu}$) .

ويسمى الممتد الناتج من هاتين العمليتين بالممتد المتشارك (Associated Tensor) .

أمثلة محلولة:

مثال(١): إذا كان $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$ فاثبت أن $A^{\nu} = g^{\mu\nu} A_{\mu}$

الحل:

حيث أن

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu} \qquad \rightarrow (1)$$

بالضرب في $g^{\mu\alpha}$:

$$\therefore\ g^{\mu\alpha} A_\mu = g^{\mu\alpha} g_{\mu\nu} A^\nu = \delta^\alpha_\nu A^\nu = A^\alpha$$

$$\therefore\ A^\alpha = g^{\mu\alpha} A_\mu$$

وحيث أن α دليل دمية فيمكن وضعه يساوي ν

$$\therefore\ A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu \rightarrow (2)$$

وهو المطلوب.

<u>ملحوظة:</u> الممتدان A_μ , A^ν في هذا المثال هما ممتدان متشاركان .

<u>مثال(٢):</u> باستخدام الممتد المتري $g_{\mu\nu}$ ومرافقة $g^{\mu\alpha}$ أوجد العلاقة بين الممتدات المتشاركة الآتية:

(i) $\underline{A_{\mu\alpha} , A^\nu_\alpha}$

العلاقة هي: $A_{\mu\alpha} = g_{\mu\nu} A^\nu_\alpha , \quad A^\nu_\alpha = g^{\mu\nu} A_{\mu\alpha}$

(ii) $\underline{A_{\mu\beta} , A^{\nu\alpha}}$

العلاقة هي: $A_{\mu\beta} = g_{\mu\nu} g_{\beta\alpha} A^{\nu\alpha} , A^{\nu\alpha} = g^{\mu\nu} g^{\beta\alpha} A_{\mu\beta}$

(iii) $\underline{A_{\delta\mu\nu} , A^{\alpha\beta\gamma}}$

العلاقة هي: $A_{\delta\mu\nu} = g_{\alpha\delta} g_{\beta\mu} g_{\gamma\nu} A^{\alpha\beta\gamma} , A^{\alpha\beta\gamma} = g^{\alpha\delta} g^{\beta\mu} g^{\gamma\nu} A_{\delta\mu\nu}$

<u>مثال (٣):</u> أثبت أن الأدلة الدمية (المتكررة) يمكن تحريكها كأدلة متغايرة ومضادة التغاير بمعنى أن:

$$A_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$$

الحل:- نعتبر العلاقتين الآتيتين:

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\, g_{\nu\beta}\, A^{\alpha\beta} \qquad \rightarrow (1)$$

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\, B_{\alpha\beta} \qquad \rightarrow (2)$$

بضرب (٢) × (١):

$$A_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = (g_{\mu\alpha}\, g_{\nu\beta}\, A^{\alpha\beta})(g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\, B_{\alpha\beta})$$

$$= g_{\mu\alpha}\, g^{\mu\alpha} . g_{\nu\beta}\, g^{\nu\beta} . A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$$

$$= 1.1.A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$$

وحيث أن μ,ν أدلة دمية فيمكن استبدالها بالدليلين α,β في الطرف الأيسر.

$$\therefore\ A_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$$

وهو المطلوب.

مثال (٤) : أثبت أن : $A^{\alpha}_{\mu}\, B^{\nu}_{\alpha} = A_{\mu\alpha}\, B^{\nu\alpha}$ وذلك بإستخدام خواص الممتدات المتشاركة .

الحـل :

حيث أن : $g^{\mu\alpha} B^{\nu}_{\alpha} = B^{\nu\mu}$

بالضرب g^{α}_{μ} :

$$\therefore\ g^{\alpha}_{\mu}\, g^{\mu\alpha} B^{\nu}_{\alpha} = g^{\alpha}_{\mu} B^{\nu\mu} = B^{\nu\alpha} \qquad \_\_\_\_\_\_ (1)$$

وبالمثل : حيث أن :

$$g_{\nu\alpha} A^{\alpha}_{\mu} = A_{\mu\nu}$$

بالضرب في g^{ν}_{α} :

$$\therefore g^{\nu}_{\alpha}\, g_{\nu\alpha} A^{\alpha}_{\mu} = g^{\nu}_{\alpha} A_{\mu\nu} = A_{\mu\alpha} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

من (٢) ، (١) بالضرب :

$$\begin{aligned} A_{\mu\alpha} B^{\nu\alpha} &= (g^{\nu}_{\alpha}\, g_{\nu\alpha}\, A^{\alpha}_{\mu})(g^{\alpha}_{\mu}\, g^{\mu\alpha}\, B^{\nu}_{\alpha}) \\ &= (g^{\nu}_{\alpha}\, g^{\alpha}_{\mu})(g_{\nu\alpha}\, g^{\mu\alpha}) A^{\alpha}_{\mu} B^{\nu}_{\alpha} \\ &= \delta^{\nu}_{\mu} \cdot \delta^{\mu}_{\nu} A^{\alpha}_{\mu} B^{\nu}_{\alpha} = A^{\alpha}_{\mu} B^{\nu}_{\alpha} \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال(٥): تفاضلات الممتد المتري والممتد المتري المرافق-

باستخدام خواص الممتدين $g_{\mu\nu}\,,\, g^{\mu\nu}$

أثبت أن:

$$(i) \quad dg_{\alpha\beta} = -g_{\mu\alpha}\, g_{\nu\beta}\, dg^{\mu\nu}$$

$$(ii) \quad A^{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} = -A_{\alpha\beta}\, dg^{\alpha\beta}$$

الحل:

حيث أن $dg^{\alpha\beta}$ ، $dg_{\alpha\beta}$ هي تفاضلات الممتد المتري والمتري المرافق.

أولا: حيث أن

$$g_{\mu\alpha} g^{\mu\nu} = \delta^{\nu}_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \nu = \alpha \\ 0 & \nu \neq \alpha \end{cases}$$

بأخذ تفاضلة الطرفين:

$$\therefore d(g_{\mu\alpha}\; g^{\mu\nu}) = 0$$

$$\therefore g_{\mu\alpha}\, dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\, dg_{\mu\alpha} = 0$$

بالضرب في $g_{\nu\beta}$:

$$\therefore g_{\nu\beta}g^{\mu\nu}dg_{\mu\alpha}=-g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha}dg^{\mu\nu}$$

$$\therefore \delta^{\mu}_{\beta}dg_{\mu\alpha}=-g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}dg^{\mu\nu}$$

$$\therefore dg_{\beta\alpha}=-g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}dg^{\mu\nu}$$

وحيث أن $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$ (ممتد متماثل)

$$\therefore dg_{\alpha\beta}=-g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}dg^{\mu\nu} \qquad \rightarrow (i)$$

<u>ثانيا:</u> من (i) بالضرب في $A^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}\therefore A^{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta} &= -A^{\alpha\beta}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}dg^{\mu\nu}\\ &= -g_{\mu\alpha}(g_{\nu\beta}A^{\alpha\beta})dg^{\mu\nu}\\ &= -g_{\mu\alpha}A^{\alpha}_{\nu}dg^{\mu\nu}=-A_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}\end{aligned}$$

وذلك لأن:

$$\begin{Bmatrix} g_{\nu\beta}A^{\alpha\beta}=A^{\alpha}_{\nu} \\ g_{\mu\alpha}A^{\alpha}_{\nu}=A_{\mu\nu} \end{Bmatrix}$$

وحيث أن μ,ν هي رموز دمية (متكررة) فيمكن استبدالها في الطرف الأيمن بالرمزين α,β

$$\therefore A^{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}=-A_{\alpha\beta}dg^{\alpha\beta} \qquad \rightarrow (ii)$$

<u>مسألة :</u> أثبت أن

$(i)\ \ A_{\alpha\beta}\,dg^{\alpha\beta}=A^{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}$

$(ii)\ dg^{\alpha\beta}=-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}dg_{\mu\nu}$

رموز كريستوفل (Christoffel Symbols)

يوجد نوعان من هذه الرموز:

(i) **رموز كريستوفل من النوع الأول**، وتعرف بالعلاقة:

$$\Gamma_{\mu\nu,\alpha}=[\mu\nu,\alpha]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right) \qquad \rightarrow (1)$$

(ii) **رموز كريستوفل من النوع الثاني**، وتعرف بالعلاقة:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}=\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=g^{\sigma\alpha}[\mu\nu,\alpha]$$
$$=\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right) \qquad \rightarrow (2)$$

وهذه الرموز ليست ممتدات، ولها قوانين تحويل خاصة بها، ويمكن اعتبارها تركيبات من المشتقات الجزئية للممتد المتري $g_{\mu\nu}$ وهي متماثلة في μ,ν بمعنى أن:

$$[\mu\nu\ ,\alpha\ ]=[\nu\mu\ ,\alpha\ ] \qquad \rightarrow (3)$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma\\ \nu\mu\end{Bmatrix} \qquad \rightarrow (4)$$

وفي حالة الفراغ ثلاثي الأبعاد: μ,ν,σ تأخذ القيم 1, 2, 3

$$\begin{Bmatrix}1\\ 11\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}1\\ 12\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}1\\ 13\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}1\\ 21\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}1\\ 22\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}1\\ 23\end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix}1\\ 31\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}1\\ 32\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}1\\ 33\end{Bmatrix},\ldots\ldots$$

وبذلك نحصل على ١٨ رمز بدلا من ٢٧، وذلك حيث أن:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \right\}, ,\ldots\ldots\ldots \quad \ldots$$

وهكذا.

أمثلة محلولة:

مثال(١): اثبت الخواص الآتية لرموز كريستوفل

$$(i) \quad [\mu\nu,\alpha]=[\nu\mu,\alpha] \qquad , \qquad (ii) \quad \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\mu \end{matrix} \right\}$$

$$(iii) \quad [\mu\nu,\alpha]=g_{\alpha\sigma} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$$

$$(iv) \quad [\mu\nu,\alpha]+[\alpha\nu,\mu]=\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}$$

$$(v) \quad \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln\sqrt{g}$$

$$(vi) \quad [\mu\nu,\sigma]+[\sigma\mu,\nu]+[\nu\sigma,\mu] \quad =\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\sigma}} \right)$$

الحل:

$$(i) \quad [\mu\nu,\alpha]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\alpha}} \right)=[\nu\mu,\alpha]$$

حيث: $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$

$$(ii)\quad \begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=g^{\sigma\alpha}[\mu\nu,\alpha]$$

وحيث أن :

$$[\mu\nu,\alpha]=[\nu\mu,\alpha]$$

$$\therefore \begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=g^{\sigma\alpha}[\nu\mu,\alpha]=\begin{Bmatrix}\sigma\\ \nu\mu\end{Bmatrix}$$

$$(iii)\quad g_{\beta\sigma}\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=g_{\beta\sigma}\cdot g^{\sigma\alpha}[\mu\nu,\alpha]=\delta^{\alpha}_{\beta}[\mu\nu,\alpha]$$

وعندما $\alpha=\beta$ فان:

$$g_{\alpha\sigma}\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=\delta^{\alpha}_{\alpha}[\mu\nu,\alpha]$$

$$=[\mu\nu,\alpha]\rightarrow\therefore\ [\mu\nu,\alpha]=g_{\alpha\sigma}\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}$$

$$(iv)\quad [\mu\nu,\alpha]+[\alpha\nu,\mu]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)\qquad\rightarrow(1)$$

ولكن:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad \therefore \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\alpha}} \qquad \rightarrow (2)$$

$$g_{\nu\alpha} = g_{\alpha\nu} \quad \therefore \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} \qquad \rightarrow (3)$$

بالتعويض من (٣) و(٢) في (١):

$$\therefore [\mu\nu\ ,\alpha\ ]+ [\alpha\nu\ \ ,\mu\ ]= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}$$

وذلك حيث أن $g_{\mu\alpha} = g_{\alpha\mu}$

(v) حيث أن $g = g_{\mu\nu}G(\mu,\nu)$ ، وحيث أن $G(\mu,\nu)$ لا تشتمل على $g_{\mu\nu}$ صراحة فإن :

$$\therefore \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = G(\mu,\nu)$$

$$\therefore \frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}$$

$$= G(\mu,\nu).\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = gg^{\mu\nu}.\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}$$

$$= gg^{\mu\nu}\left([\mu\lambda,\nu]+[\nu\lambda,\mu]\right)$$

وذلك باستخدام العلاقة (iv)

$$\therefore \frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}} = gg^{\mu\nu}[\mu\lambda\ ,\nu\ ]+ gg^{\mu\nu}[\nu\lambda\ ,\mu\ ]$$

$$= g\begin{Bmatrix} \mu \\ \mu\lambda \end{Bmatrix} + g\begin{Bmatrix} \nu \\ \nu\lambda \end{Bmatrix} = 2g\begin{Bmatrix} \mu \\ \mu\lambda \end{Bmatrix}$$

وذلك حيث ν, μ هي رموز دمية.

$$\therefore \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}} = \begin{Bmatrix} \mu \\ \mu\lambda \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial g}{g}\right] = \begin{Bmatrix} \mu \\ \mu\lambda \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\ln g^{\frac{1}{2}}\right) = \begin{Bmatrix} \mu \\ \mu\lambda \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} \mu \\ \mu\lambda \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln \sqrt{g}$$

ملحوظة:

في حالة التطبيقات الفيزيائية فان g تؤخذ عادة بإشارة سالبة ، وبذلك يمكن كتابة العلاقة الأخيرة بالصورة:

$$\begin{Bmatrix} \mu \\ \mu\lambda \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln \sqrt{-g}$$

ولإثبات ذلك :

$$\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln(-g)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln(-g)$$

$$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{g})\frac{\partial(-g)}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln(g)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln(g) = \frac{1}{2}(\frac{1}{g})\frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}}$$

$$(iv)\ [\mu\nu,\sigma]+[\sigma\mu,\nu]+[\nu\sigma,\mu]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\sigma}}+\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\sigma}}\right)$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٢)</u>: باستخدام خواص رموز كريستوفل أثبت أن:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{m}}=-g^{\mu n}\begin{Bmatrix}\nu\\ mn\end{Bmatrix}-g^{\nu n}\begin{Bmatrix}\mu\\ mn\end{Bmatrix}$$

<u>الحل</u>: حيث أن $\frac{\partial}{\partial x^{m}}(g^{jk}g_{ij})=\frac{\partial}{\partial x^{m}}(\delta_i^{k})=0$ فإن:

$$g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^{m}}+g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{m}}=0$$

$$\therefore g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^{m}}=-g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{m}}$$

وبالضرب في $g^{i\alpha}$ نحصل على:

$$g^{i\alpha}g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^{m}}=-g^{i\alpha}g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{m}}$$

ومن العلاقة $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^m}=[\mu m,\nu]+[\nu m,\mu]$ (العلاقة iv)

$$\therefore \delta_j^{\alpha}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}=-g^{i\alpha}g^{jk}\left([im,j]+[jm,i]\right)$$

$$=-g^{i\alpha}g^{jk}[im,j]-g^{i\alpha}g^{jk}[jm,i]$$

وحيث أن:

$$g^{jk}[im\,,j]=\left\{\begin{matrix}k\\ im\end{matrix}\right\},\ g^{i\alpha}[jm\,,i]=\left\{\begin{matrix}\alpha\\ jm\end{matrix}\right\},\ \delta_j^{\alpha}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}=\frac{\partial g^{\alpha k}}{\partial x^m}$$

$$\therefore \frac{\partial g^{\alpha k}}{\partial x^m}=-g^{i\alpha}\left\{\begin{matrix}k\\ im\end{matrix}\right\}-g^{jk}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ jm\end{matrix}\right\}$$

وبتبديل الرموز $\mu\,,\nu\,,m\,,n$ محل الرمز $\alpha\,,k\,,i\,,j$ (لأنه رموز دمية)

$$\therefore \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^m}=-g^{\mu n}\left\{\begin{matrix}\nu\\ mn\end{matrix}\right\}-g^{\mu n}\left\{\begin{matrix}\mu\\ mn\end{matrix}\right\}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٣)</u>: إذا كانت $g_{\mu\nu}=0$ للفراغ فأحسب رموز كريستوفل من النوع الأول و **الثاني لكل الحالات الممكنة.**

<u>الحل</u>: رموز كريستوفل من النوع الأول:

$$[\mu\nu\,,\alpha]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\qquad\_\_\_(1)$$

ومن النوع الثاني:

$$\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}=g^{\sigma\alpha}[\mu\nu\,,\alpha]=\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\qquad\_\_\_(2)$$

ويكون لدينا الحالات الآتية:

أولاً: لرموز كريستوفل من النوع الأول:

(i) إذا كان $\mu=\nu=\alpha$:

$$[\mu\nu,\alpha]=[\mu\mu,\mu]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\mu}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\mu}}$$

(ii) إذا كان $\mu=\nu\neq\alpha$:

$$[\mu\nu,\alpha]=[\mu\mu,\alpha]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\alpha}}\ , g_{\mu\nu}=0$$ حيث

(iii) إذا كان $\mu=\alpha\neq\nu$:

$$[\mu\nu,\alpha]=[\mu\nu,\mu]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

(iv) إذا كان $\mu\neq\nu\neq\alpha$: فإن:

$$g^{\mu\mu}=\frac{1}{g_{\mu\mu}}$$ حيث $[\mu\nu,\alpha]=0$

ثانياً: لرموز كريستوفل من النوع الثاني:

(i) إذا كان $\mu=\nu=\sigma$:

$$\therefore \left\{\begin{matrix}\sigma\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\mu\\ \mu\mu\end{matrix}\right\}=\frac{[\mu\mu,\mu]}{g_{\mu\mu}}=\frac{1}{2g_{\mu\mu}}\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{m}}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=(\ell n g_{\mu\mu})$$

(ii) إذا كان $\mu=\nu\neq\sigma$:

$$\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \mu\mu\end{matrix}\right\}=\frac{[\mu\mu,\sigma]}{g_{\sigma\sigma}}=-\frac{1}{2g_{\sigma\sigma}}\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\sigma}}$$

(iii) إذا كان $\mu=\sigma\neq\nu$:

$$\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mu\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=\frac{[\mu\nu,\mu]}{g_{\mu\mu}}=\frac{1}{2g_{\mu\mu}}\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\nu}}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\ell n g_{\mu\mu})$$

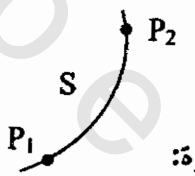
(iv) إذا كانت $\mu\neq\nu\neq\sigma$: فإن

$$\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=0$$

ملحوظة: في حالة الفراغ الإقليدي للإحداثيات الكرتيزية فإن: $g_{\mu\nu}=0$ وبالتـــالي فإن $g_{\mu\mu}=1$ ويكون $\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=0$

الجيوديسيات (Geodesics):

يعرف الجيوديسي بأنه مسار أقصر مسافة بين نقطتين على سطح في فراغ ريمان. فإذا كانت S هي المسافة القوسية على المنحنى الواصل بين النقطتين p_1,p_2 في فراغ ريمان فإن :



$$S=\int_{p_1}^{p_2} dS=\int_{p_1}^{p_2}\sqrt{g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}$$

ويمكن الحصول على معادلة الجيوديسي في فراغ ريمان بالصورة:

$$\frac{d^2x^{\sigma}}{ds^2}+\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}=0$$

(غير مطلوب البرهان)

مثال:

أثبت أن معادلة الجيوديسي في الفراغ الاقليدي ذو الثلاثة أبعاد تؤول إلى معادلة خط مستقيم بالصورة:

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

حيث:

$$l^2+m^2+n^2=1$$

الحل:

في الفراغ الاقليدي ذو الأبعاد الثلاثة، وباستخدام الإحداثيات الكرتيزية:

$$x=x_1,\quad y=x_2,\quad z=x_3$$

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

$$=dx_1^2+dy_2^2+dz_3^2$$

ولكن:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$
$$= g_{11} dx^1 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{13} dx^1 dx^3 + ...$$
$$= g_{11} dx_1^2 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{13} dx^1 dx^3 + ...$$

وبالمقارنة نجد أن:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$$
$$g_{12} = g_{13} = g_{23} = ... = 0$$
$$\therefore g_{\mu\nu} = 1 (\mu = \nu) \quad , \quad g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)$$

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$g^{11} = \frac{G(1,1)}{g} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 1, \qquad g^{22} = g^3 = 1$$

أيضا:

$$g^{12} = g^{23} = g^{31} = 0 \rightarrow g^{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)$$

وتأخذ معادلة الجيوديسي الصورة الآتية:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} = 0 \quad , \qquad \sigma = 1,2,3$$

وذلك حيث أن:

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = 0 \qquad (\mu \neq \nu)$$

بالتكامل نحصل على: . $\frac{dx^{\sigma}}{ds} = const$

$$\therefore \quad \frac{dx^{1}}{ds} = const. = l \quad \rightarrow \frac{dx}{ds} = l$$

$$\frac{dx^{2}}{ds} = const. = m \quad \rightarrow \frac{dy}{ds} = m$$

$$\frac{dx^{3}}{ds} = const. = m \quad \rightarrow \frac{dz}{ds} = n$$

بالتكامل مرة ثانية:

$$\therefore x = ls + a \,, \quad y = ms + b, \quad z = ns + c$$

حيث a, b, c ثوابت.

$$\therefore \frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} = s$$

وهي معادلة خط مستقيم في الفراغ الثلاثي الأبعاد، حيث:

$$ds^{2} = dx^{2} + dy^{2} + dz^{2}$$

$$\therefore 1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^{2} + \left(\frac{dy}{ds}\right)^{2} + \left(\frac{dz}{ds}\right)^{2}$$

$$= l^{2} + m^{2} + n^{2}$$

وهو المطلوب.

أمثلة محلولة على رموز كريستوفل و الجيوديسيات

مثال(١):

إذا كانت معادلة سطح كرة في فضاء ريمان ذي البعدين تعطى بالعلاقة:
$dS^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 d\phi^2$ حيث a هو نصف القطر الثابت للكرة، وخط الاستواء يعطى من $\theta = \frac{\pi}{2}$ والقطب الشمالي $\theta = 0$ والقطب الجنوبي $\theta = \pi$.

المطلوب: حساب الممتد المتري $g_{\mu\nu}$ ومرافقه $g^{\mu\nu}$ لسطح الكرة.

الحل: نفرض: $x^1 = \theta, x^2 = \phi$

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2$$
$$= a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$
$$\therefore g_{11} = a^2 \ , g_{22} = a^2 \sin^2 \theta , \ g_{12} = g_{21} = 0$$
$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = a^4 \sin^2 \theta$$

ويصبح الممتد المتري: $g = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$

مركبات الممتد المرافق:

$$g^{11} = \frac{G(1,1)}{g} = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^4 \sin^2 \theta} = \frac{1}{a^2}$$

$$g^{22} = \frac{G(2,2)}{g} = \frac{a^2}{a^4 \sin^2 \theta} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta}$$

$$g^{12} = g^{21} = 0$$

$$\therefore g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

مثال(٢):

احسب الممتد المتري $g_{\mu\nu}$ ومرافقه $g^{\mu\nu}$ المناظر للمتري الدال على مربـــع عنصر الطول في الإحداثيات القطبية الكروية.

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

الحل: نفرض: $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$

$$dS^2 = (dx^1)^2 + r^2 (dx^2)^2 + r^2 \sin^2 \theta (dx^3)^2$$
$$= g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2$$

$$\therefore g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2 \sin\theta^2$$

$$g_{12} = g_{21} = 0, g_{23} = g_{32} = 0, g_{31} = g_{13} = 0$$

ويصبح الممتد المتري :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

ولحساب مركبات الممتد $g^{\mu\nu}$:

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin\theta^2 \end{vmatrix} = r^4 \sin^2 \theta$$

المتعاملات $G(\mu,\nu)$ للممتد $g_{\mu\nu}$ هي:

$$G(1,1)=\begin{vmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix}=r^4\sin^2\theta$$

$$G(2,2)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix}=r^2\sin^2\theta$$

$$G(3,3)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix}=r^2$$

$$G(1,2)=G(2,1)=0\ ,\ G(2,3)=G(3,2)=0\ ,\ G(1,3)=G(3,1)=0$$

وتصبح مركبات الممتد المرافق:

$$g^{11}=\frac{G(1,1)}{g}=1\ ,\ g^{22}=\frac{G(2,2)}{g}=\frac{1}{r^2}$$

$$g^{33}=\frac{G(3,3)}{g}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$

$$g^{12}=g^{21}=0\quad ,\ g^{23}=g^{32}=0, g^{13}=g^{31}=0$$

وتصبح الصورة المصفوفية للممتد المتري المرافق في الإحداثيات القطبية الكروية هي:

$$g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

مثال(٣):

احسب رموز كريستوفل المناظرة للمتريين الآتيتين:

$$(i)\ dS^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

$$(ii) dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

الحل:

أولا: من مثال(١) وجدنا أنه للمتري

$$dS^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

فان:

$$g_{11} = a^2, g_{22} = a^2 \sin^2\theta, g_{12} = g_{21} = 0$$

$$g^{11} = \frac{1}{a^2}, g^{22} = \frac{1}{a^2 \sin^2\theta}, g^{12} = g^{21} = 0$$

وتكون رموز كريستوفل من النوع الأول:

$$[\mu\nu, \alpha] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)$$

$$\therefore [22,1] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)$$

حيث: $x^1 = \theta, x^2 = \phi$

$$\therefore [22,1] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}(0) + \frac{\partial}{\partial\phi}(0) - \frac{\partial}{\partial\theta}(a^2 \sin^2\theta)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-2a^2 \sin\theta\cos\theta) = -a^2 \sin\theta\cos\theta$$

وبالمثل:

$$[12,1] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(a^2 \sin^2\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}(0) - \frac{\partial}{\partial \phi}(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(2a^2 \sin\theta\cos\theta) = a^2 \sin\theta\cos\theta = [21,2]$$

أما باقي الرموز فتساوي أصفارا.

<u>رموز كريستوفل من النوع الثاني:</u>

$$\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix} = g^{\alpha\sigma}[\mu\nu,\sigma]$$

$$\begin{Bmatrix}1\\ 22\end{Bmatrix} = g^{1\sigma}[22,\sigma] = g^{11}[22,1] + g^{12}[22,2]$$

$$= \frac{1}{a^2}(-a^2 \sin\theta\cos\theta) + 0 = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{Bmatrix}2\\ 12\end{Bmatrix} = g^{2\sigma}[12,\sigma] = g^{21}[12,1] + g^{22}[12,2]$$

$$= 0 + \frac{1}{a^2\sin^2\theta}(a^2 \sin\theta\cos\theta) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta = \begin{Bmatrix}2\\ 21\end{Bmatrix}$$

أما باقي الرموز فتساوي أصفارا .

<u>ثانيا: بالنسبة للمتري</u> $dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2$

من مثال (٢) وجدنا أن:

$$g_{11}=1, g_{22}=r^2, g_{33}=r^2\sin^2\theta$$
$$g_{12}=g_{21}=0, g_{23}=g_{32}=0, g_{31}=g_{13}=0$$

$$g^{11}=1, g^{22}=\frac{1}{r^2}, g^{33}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$
$$g^{12}=g^{21}=0, g^{23}=g^{32}=0, g^{13}=g^{31}=0$$

ولحساب رموز كريستوفل من النوع الأول:

باعتبار أن: $x^1=r, x^2=\theta, x^3=\phi$

$$[11,1]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)=0$$

وبالمثل فان: $[11,2]=0\ ,\ [11,3]=0$

أيضا:

$$[22,1]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2)=-r \qquad \to (1)$$

وبالمثل فان: $[22,2]=0\ ,\ [22,3]=0$

$$[33,1]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin^2\theta)=-r\sin^2\theta \qquad \to (2)$$

$$[33,2]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin^2\theta)=-r^2\sin\theta\cos\theta \qquad \to (3)$$

وبالمثل: $[33,3]=0\ ,\ [12,1]=0=[21,1]$

$$[12,2]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2)=r=[21,2] \qquad \to (4)$$

$$[12,3]=0=[21,3]\ ,\ [13,1]=0=[31,1]\ ,\ [13,2]=0=[31,2]$$

$$[13,3]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin^2\theta)=r\sin^2\theta=[31,3] \qquad \to (5)$$

$$[23,1]=0=[32,1]\ ,\ [23,2]=0=[32,2]$$

$$[23,3]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin^2\theta)=-r^2\sin\theta\cos\theta=[32,3] \qquad \to (6)$$

<u>ولحساب رموز كريستوفل من النوع الثاني:</u>

$$\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}=g^{1\sigma}[22,\sigma]=g^{11}[22,1]+g^{12}[22,2]+g^{13}[22,3]$$

$$=-r+0+0=r \qquad \to (7)$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 33 \end{Bmatrix} = g^{1\sigma}[33,\sigma] = g^{11}[33,1] + g^{12}[33,2] + g^{13}[33,3]$$

$$= -r\sin^2\theta + 0 + 0 = -r\sin^2\theta \qquad \rightarrow (8)$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 33 \end{Bmatrix} = g^{2\sigma}[33,\sigma] = g^{21}[33,1] + g^{22}[33,2] + g^{23}[33,3]$$

$$= 0 + \frac{1}{r^2}(-r^2\sin\theta\cos\theta) + 0 = -\sin\theta\cos\theta \qquad \rightarrow (9)$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = g^{2\sigma}[12,\sigma] = g^{21}[12,1] + g^{22}[12,2] + g^{23}[12,3]$$

$$= 0 + \frac{1}{r^2}(r) + 0 = \frac{1}{r} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} \qquad \rightarrow (10)$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 13 \end{Bmatrix} = g^{3\sigma}[13,\sigma] = g^{31}[13,1] + g^{32}[13,2] + g^{33}[13,3]$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(r\sin^2\theta) = \frac{1}{r} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 31 \end{Bmatrix} \qquad \rightarrow (11)$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 23 \end{Bmatrix} = g^{3\sigma}[23,\sigma] = g^{31}[23,1] + g^{32}[23,2] + g^{33}[23,3]$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{r^2\sin\theta}(r^2\sin\theta\cos\theta) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta = \begin{Bmatrix} 3 \\ 32 \end{Bmatrix} \rightarrow (12)$$

أما باقي الرموز فتساوي أصفارا.

مثال(٤):

إذا كان الفراغ الريماني ذو البعدين له المتري:

$$dS^2 = \frac{1}{r^2 - a^2}\left[dr^2 + r^2 d\theta^2 - \frac{r^2 dr^2}{r^2 - a^2}\right], r > a$$

(أ) احسب رموز كريستوفل المناظرة لهذا المتري.

(ب) اثبت أن المعادلة التفاضلية للجيوديسي هي بالصورة:

$$a^2\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] = k^2 r^4 \quad , \quad k \text{ ثابت}$$

الحل: مترية الفضاء الريماني المعطاه :

$$dS^2 = \frac{1}{r^2 - a^2}\left[dr^2 + r^2 d\theta^2 - \frac{r^2 dr^2}{r^2 - a^2}\right]$$

يمكن كتابتها بالصورة:

$$dS^2 = -\frac{a^2}{\left(r^2 - a^2\right)^2} dr^2 + \frac{r^2}{r^2 - a^2} d\theta^2 \qquad \rightarrow (1)$$

وبكتابة $x^1 = r \, , x^2 = \theta$

$$\therefore dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 \qquad \rightarrow (2)$$

بمقارنة (٢)، (١):

$$g_{11} = -\frac{a^2}{(r^2 - a^2)^2} \; , \; g_{22} = \frac{r^2}{r^2 - a^2} \; , g_{12} = 0 = g_{21}$$

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} = -\frac{(r^2 - a^2)^2}{a^2} \; , \; g^{22} = \frac{1}{g_{22}} = \frac{r^2 - a^2}{r^2} \; , g^{12} = 0 = g^{21}$$

ولحساب رموز كريستوفل:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix} = g^{1\alpha}[11,\alpha] = g^{11}[11,1] = g^{11}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{(r^2-a^2)^2}{a^2}\right]\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{a^2}{(r^2-a^2)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{(r^2-a^2)^2}{a^2}\right]\cdot(-a^2)\left[-\frac{2}{(r^2-a^2)^3}(2r)\right] = -\frac{2r}{r^2-a^2} \qquad \rightarrow (3)$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = g^{1\alpha}[22,\alpha] = g^{11}[22,1] = g^{11}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{(r^2-a^2)^2}{a^2}\right]\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r^2}{r^2-a^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(r^2-a^2)^2}{a^2}\right]\cdot\left[\frac{(r^2-a^2)\cdot(2r)-r^2(2r)}{(r^2-a^2)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(r^2-a^2)^2}{a^2}\right]\cdot\left[\frac{-2ra^2}{(r^2-a^2)^2}\right] = -r \qquad \rightarrow (4)$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = g^{2\alpha}[12,\alpha] = g^{22}[12,2] = g^{22}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(r^2-a^2)}{r^2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{(r^2-a^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(r^2-a^2)}{r^2}\right)\cdot\left[\frac{-2ra^2}{(r^2-a^2)^2}\right] = \frac{-a^2}{r\left(r^2-a^2\right)} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} \qquad \rightarrow (5)$$

وباقي رموز كريستوفل من النوع الثاني تساوي أصفارا.

<u>لإثبات أن</u> $a^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + a^2r^2 = k^2r^4$

<u>هي المعادلة التفاضلية للجيوديسي ، حيث k ثابت:</u>

معادلة الجيوديسي:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

<u>عندما $\mu = 1$</u>

$$\therefore \frac{d^2r}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2r}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 0 \qquad \left| \begin{matrix} x^1 = r \\ x^2 = \theta \end{matrix} \right.$$

$$\therefore \frac{d^2r}{ds^2} - \frac{2r}{r^2 - a^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 0$$

<u>عندما $\mu = 2$</u> :

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 2 \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} \frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} \frac{d\theta}{ds}\frac{dr}{ds} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{-2a^2}{r(r^2 - a^2)} \frac{d\theta}{ds}\frac{dr}{ds} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{ds^2} = 2\left(\frac{r}{r^2-a^2} - \frac{1}{r}\right)\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{ds^2}\Big/\frac{d\theta}{ds} = 2\left(\frac{r}{r^2-a^2} - \frac{1}{r}\right)\frac{dr}{ds}$$

بالتكامل:

$$\ln\frac{d\theta}{dS} = \ln(r^2 - a^2) - 2\ln r + \ln c$$

حيث c ثابت التكامل:

$$\therefore \frac{d\theta}{dS} = \frac{c(r^2-a^2)}{r^2} \qquad \rightarrow (6)$$

أيضا: من المعادلة (١) بالقسمة على $(dS)^2$ ، واستخدام (٦):-

$$\therefore 1 = -\frac{a^2}{(r^2-a^2)^2}\left(\frac{dr}{dS}\right)^2 + \frac{r^2}{r^2-a^2}\left(\frac{d\theta}{dS}\right)^2$$

$$\therefore \frac{a^2}{(r^2-a^2)^2}\left(\frac{dr}{dS}\right)^2 = \frac{r^2}{r^2-a^2}\,\frac{c^2(r^2-a^2)^2}{r^4} - 1$$

$$= \frac{c^2(r^2-a^2)}{r^2} - 1 = \frac{r^2(c^2-1) - c^2a^2}{r^2}$$

$$\therefore \left(\frac{dr}{dS}\right)^2 = \frac{r^2(c^2-1) - c^2a^2}{r^2}\cdot\frac{(r^2-a^2)^2}{a^2}$$

$$\therefore \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\left(\frac{d\theta}{dS}\right)^2 = \frac{r^2(c^2-1) - c^2a^2}{r^2a^2}(r^2-a^2)^2$$

$$\therefore \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^2(c^2-1)-c^2a^2}{r^2a^2}(r^2-a^2)^2 \cdot \frac{r^4}{c^2(r^2-a^2)^2}$$

$$= \frac{[r^2(c^2-1)-c^2a^2]r^2}{c^2a^2} = \frac{r^2}{a^2}\left[\frac{r^2(c^2-1)}{c^2} - a^2\right]$$

$$= \frac{r^2}{a^2}(k^2r^2-a^2) \quad , \quad k^2 = \frac{c^2-1}{c^2}$$

$$\therefore a^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2a^2 = k^2r^4$$

وهو المطلوب .

مثال (٥):

احسب رموز كريستوفل غير المتلاشية للمتري

$$ds^2 = f(x,y,z)\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ومن ثم أوجد معادلة الجيوديسي المناظر لهذا المتري

الحل:

الجزء الأول:

$$ds^2 = -(dx^2+dy^2+dz^2)+fdt^2$$

$$\therefore g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, g_{44} = f, g_{ij} = 0 (i \neq j)$$

$$g^{ij} = \frac{1}{g_{ij}} : g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1, g^{44} = \frac{1}{f}, g^{ij} = 0 (i \neq j)$$

لحساب رموز كريستوفل غير المتلاشية:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 44 \end{Bmatrix} = g^{14}[44,\alpha] = g^{11}[44,1] = (-1)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}$$

وبالمثل فان:

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 44 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}, \begin{Bmatrix} 3 \\ 44 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 14 \end{Bmatrix} = g^{4\alpha}[14,\alpha] = g^{44}[14,1] = \frac{1}{f}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2f}\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 41 \end{Bmatrix}$$

وبالمثل فان:

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 24 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2f}\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 42 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 4 \\ 34 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2f}\frac{\partial f}{\partial z} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 43 \end{Bmatrix}$$

الجزء الثاني:

معادلة الجيوديسي:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

عندما $\mu = 1$:

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 x}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 44 \end{Bmatrix} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

عندما $\mu = 2$:

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 44 \end{Bmatrix} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0 \qquad \rightarrow (2)$$

عندما $\mu = 3$:

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 44 \end{Bmatrix}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0 \qquad \rightarrow (3)$$

عندما $\mu = 4$:

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 14 \end{Bmatrix}\frac{dx}{ds}\frac{dt}{ds} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 41 \end{Bmatrix}\frac{dt}{ds}\frac{dx}{ds} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 24 \end{Bmatrix}\frac{dy}{ds}\frac{dt}{ds} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 42 \end{Bmatrix}\frac{dt}{ds}\frac{dy}{ds} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 34 \end{Bmatrix}\frac{dz}{ds}\frac{dt}{ds} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 43 \end{Bmatrix}\frac{dt}{ds}\frac{dz}{ds} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 t}{ds^2} + 2\frac{dt}{ds}\left[\begin{Bmatrix} 4 \\ 14 \end{Bmatrix}\frac{dx}{ds} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 24 \end{Bmatrix}\frac{dy}{ds} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 34 \end{Bmatrix}\frac{dz}{ds}\right] = 0$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + 2 \cdot \frac{1}{2f}\frac{dt}{ds}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right] = 0$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{f}\frac{dt}{ds}\left[\frac{df}{ds}\right] = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 t}{ds^2} \bigg/ \frac{dt}{ds} = -\frac{1}{f}\left[\frac{df}{ds}\right] = -\frac{d}{ds}(\ln f)$$

بالتكامل:

$$\ln\left(\frac{dt}{ds}\right) = -\ln f + const. = -\ln f + \ln a$$

$$= \ln\frac{a}{f} \rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{a}{f} \qquad \rightarrow (4)$$

وبالتعويض في (٣)، (٢)، (١) عن $\frac{dt}{ds}$ نحصل علـــى معـــادلات الجيوديـــسي المناظر للمتري المعطى وذلك بالصورة:

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{a^2}{2f^2}\frac{\partial f}{\partial x} = 0\ ,\ \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{a^2}{2f^2}\frac{\partial f}{\partial y} = 0\ ,\ \frac{d^2z}{ds^2} + \frac{a^2}{2f^2}\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

وهو المطلوب.

مثال(٦): احسب رموز كريستوفل غير المتلاشية للمتري

$$ds^2 = -e^{2kt}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2$$

ومن ثم أوجد معادلة الجيوديسي المناظر لهذا المتري .

الحل:

الجزء الأول:

$$ds^2 = -e^{2kt}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2$$

$$\therefore g_{11} = g_{22} = -e^{2kt}, g_{44} = 1, g_{ij} = 0 (i \neq j)$$

$$g^{ij} = \frac{g(i,i)}{g} = \frac{1}{g_{ii}} : g^{11} = g^{22} = g^{33} = \frac{-1}{e^{2kt}}, g^{44} = 1$$

لحساب رموز كريستوفل غير المتلاشية:

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 11 \end{Bmatrix} = g^{4\alpha}[11,\alpha] = g^{44}[11,4] = [11,4] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial t}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-2ke^{2kt}\right) = ke^{2kt}$$

وبالمثل فان:

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 22 \end{Bmatrix} = ke^{2kt}, \begin{Bmatrix} 4 \\ 33 \end{Bmatrix} = ke^{2kt}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 14 \end{Bmatrix} = g^{1\alpha}[14,\alpha] = g^{11}[14,1] = \frac{-1}{e^{2kt}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}\right)$$

$$= \frac{-1}{e^{2kt}} \cdot \frac{1}{2}\left(-2ke^{2kt}\right) = k = \begin{Bmatrix} 1 \\ 41 \end{Bmatrix}$$

وبالمثل فان:

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 24 \end{Bmatrix} = k = \begin{Bmatrix} 2 \\ 42 \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 34 \end{Bmatrix} = k = \begin{Bmatrix} 3 \\ 43 \end{Bmatrix}$$

<u>الجزء الثاني</u>: معادلة الجيوديسي:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{Bmatrix}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

<u>عندما $\mu = 1$</u> :

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha\beta \end{Bmatrix}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2x}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 14 \end{Bmatrix}\frac{dx}{ds}\frac{dt}{ds} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 41 \end{Bmatrix}\frac{dt}{ds}\frac{dx}{ds} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2x}{ds^2} + 2k\frac{dx}{ds}\frac{dt}{ds} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2x}{ds^2} \Big/ \frac{dx}{ds} = -2k\frac{dt}{ds}$$

بالتكامل:

$$\ln\frac{dx}{ds} = -2kt + \ln a$$

ثابت a ,

$$\therefore \ln\left(\frac{1}{a}\frac{dx}{ds}\right) = \ln e^{-2kt} \qquad \rightarrow (1)$$

عندما $\mu = 2$:

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\begin{Bmatrix}2\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0$$

$$\therefore \frac{d^2y}{ds^2}+\begin{Bmatrix}2\\ 24\end{Bmatrix}\frac{dy}{ds}\frac{dt}{ds}+\begin{Bmatrix}2\\ 24\end{Bmatrix}\frac{dt}{ds}\frac{dy}{ds}=0$$

$$\therefore \frac{d^2y}{ds^2}+2\begin{Bmatrix}2\\ 24\end{Bmatrix}\frac{dy}{ds}\frac{dt}{ds}=0$$

$$\therefore \frac{d^2y}{ds^2}+2k\frac{dy}{ds}\frac{dt}{ds}=0$$

$$\therefore \frac{d^2y}{ds^2}\Big/\frac{dy}{ds}=-2k\frac{dt}{ds}$$

بالتكامل:

$$\therefore \ln\frac{dy}{ds}=-2kt+\ln b$$ ثابت b ,

$$\therefore \ln\left(\frac{1}{b}\frac{dy}{ds}\right)=\ln\left(e^{-2kt}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{ds}=be^{-2kt} \qquad \rightarrow (2)$$

عندما $\mu = 3$:

$$\frac{d^2z}{ds^2}+\begin{Bmatrix}3\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0$$

$$\therefore \frac{d^2z}{ds^2}+2\begin{Bmatrix}3\\ 34\end{Bmatrix}\frac{dz}{ds}\frac{dt}{ds}=0$$

$$\therefore \frac{d^2 z}{ds^2} + 2k \frac{dz}{ds}\frac{dt}{ds} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{ds^2} \Big/ \frac{dz}{ds} = -2k \frac{dt}{ds}$$

بالتكامل

ثابت c ,

$$\ln \frac{dz}{ds} = -2kt + \ln c$$

$$\therefore \ln\left(\frac{1}{c}\frac{dz}{ds}\right) = \ln\left(e^{-2kt}\right)$$

$$\therefore \frac{dz}{ds} = ce^{-2kt} \qquad \rightarrow (3)$$

عندما $\mu=4$:

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \left\{\begin{matrix}4\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2t}{ds^2} + \left\{\begin{matrix}4\\ 11\end{matrix}\right\}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left\{\begin{matrix}4\\ 22\end{matrix}\right\}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left\{\begin{matrix}4\\ 33\end{matrix}\right\}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\therefore \frac{d^2t}{ds^2} + ke^{2kt}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] = 0$$

$$\therefore \frac{d^2t}{ds^2} + ke^{2kt}\left[(a^2+b^2+c^2)e^{-4kt}\right] = 0$$

[باستخدام (٣)، (٢)، (١)]

وبكتابة $a^2+b^2+c^2 = p^2$

$$\therefore \frac{d^2t}{ds^2} + kp^2 e^{-2kt} = 0 \qquad \rightarrow (4)$$

المعادلات (٤)، (٣)، (٢)، (١) تمثل معادلات الجيوديسي المطلوبة.

معادلات التحويل لرموز كريستوفل:

تخضع رموز كريستوفل من النوع الأول:

$$\Gamma_{\mu\nu.\alpha}=[\mu\nu,\alpha]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right) \quad \text{\_\_\_\_}(1)$$

ومن النوع الثاني:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=g^{\sigma\alpha}[\mu\nu,\alpha]=\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right) \text{\_\_}(2)$$

لمعادلات تحويل خاصة بها هي:

$$[jk,m]'=[\mu\nu,\alpha]\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{j}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{k}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{m}}+g_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{m}}\frac{\partial^{2}x^{\mu}}{\partial x'^{j}\partial x'^{k}} \text{\_\_}(3)$$

$$\begin{Bmatrix}n\\ jk\end{Bmatrix}'=g'^{nm}[jk,m]'$$

$$=\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{j}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{k}}+\frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial^{2}x^{\mu}}{\partial x'^{j}\partial x'^{k}} \quad \text{\_\_\_\_}(4)$$

ومنها يتضح أن رموز كريستوفل لا تسلك سلوك الممتدات، ولكي تكون كميات ممتدة، يجب أن يكون:

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{m}}\frac{\partial^{2}x^{\mu}}{\partial x'^{j}\partial x'^{k}}=0 \quad , \quad \frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial^{2}x^{\mu}}{\partial x'^{j}\partial x'^{k}}=0$$

<u>مثال(1):</u> استنتج معادلات التحويل لرموز كريستوفل من النوع الأول (المعادلة (3)) ومن النوع الثاني (المعادلة (4)).

<u>الحل:</u> <u>أولاً: معادلات التحويل لرموز كريستوفل من النوع الأول</u>

حيث أن:

$$g'_{jk}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{j}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{k}}g_{\mu\nu} \qquad \text{\_\_\_(5)}$$

فبالتفاضل بالنسبة إلى x'_m نحصل على:

$$\therefore\ \frac{\partial g'_{jk}}{\partial x'^{m}}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{j}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{k}}[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{m}}]$$

$$+g_{\mu\nu}[\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{j}}\cdot\frac{\partial^{2}x^{\nu}}{\partial x'^{m}\partial x'^{k}}+\frac{\partial^{2}x^{\nu}}{\partial x'^{m}\partial x'^{j}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{k}}] \qquad \text{\_\_\_(6)}$$

ومن هذه العلاقة وبالتبديل الدوري للرموز μ,ν,α وكـذلك للرمـوز j,k,m نحصل على العلاقتين الآتيتين:

$$\frac{\partial g'_{km}}{\partial x'^{j}}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{k}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{m}}[\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{j}}]$$

$$+g_{\nu\alpha}[\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{k}}\cdot\frac{\partial^{2}x^{\alpha}}{\partial x'^{j}\partial x'^{m}}+\frac{\partial^{2}x^{\nu}}{\partial x'^{j}\partial x'^{k}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{m}}] \qquad \text{\_\_\_(7)}$$

$$\frac{\partial g'_{mj}}{\partial x'^{k}}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{m}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{j}}[\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{k}}]$$

$$+g_{\alpha\mu}[\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{m}}\cdot\frac{\partial^{2}x^{\mu}}{\partial x'^{k}\partial x'^{j}}+\frac{\partial^{2}x^{\alpha}}{\partial x'^{k}\partial x'^{m}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{j}}] \qquad \text{\_\_\_(8)}$$

بجمع (8) ,(7) وطرح (1) من الناتج نحصل على:

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial g'_{km}}{\partial x'^{j}}+\frac{\partial g'_{mj}}{\partial x'^{k}}-\frac{\partial g'_{jk}}{\partial x'^{m}})=[jk\ ,m]'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{k}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{m}}\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{j}}+\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{k}}\frac{\partial^{2}x^{\alpha}}{\partial x'^{j}\partial x'^{m}}g_{\nu\alpha}$$

$$+\frac{\partial^{2}x^{\nu}}{\partial x'^{j}\partial x'^{k}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{m}}g_{\nu\alpha}+\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{m}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{j}}\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{k}}+\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{m}}\frac{\partial^{2}x^{\mu}}{\partial x'^{k}\partial x'^{j}}g_{\alpha\mu}$$

$$+\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^k \partial x'^m}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}g_{\alpha\mu}-\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^m}$$

$$-\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^m \partial x'^k}g_{\mu\nu}-\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^m \partial x'^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}g_{\mu\nu}]$$

$$=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^m}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}[\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha})]$$

$$+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^m}+\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^m}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^j \partial x'^k}+\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^m}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^k \partial x'^j}$$

$$+\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^k \partial x'^m}-\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^m \partial x'^k}-\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^m \partial x'^j}]$$

حيث أننا في الطرف الأيمن قمنا بتبديل الرموز المتحركة (الدمية) عند الضرورة فاستبدلنا $\alpha \to \mu$ وكذلك $\alpha \to \nu$ مرة ثانية.

وبالتعويض عن:

$$\frac{1}{2}[\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}]=[\mu\nu,\alpha]$$

والإختصار نحصل على:

$$[jk,m]'=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^m}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}[\mu\nu,\alpha]$$

$$+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^m}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^j \partial x'^k}+\frac{\partial x^\nu}{\partial^2 x'^m}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^k \partial x'^j}]$$

$$[jk,m]'=[\mu\nu,\alpha]\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^m}+g_{\mu\nu}(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^m}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^k}) \quad \_\_(9)$$

وهي معادلة التحويل لرموز كريستوفل من النوع الأول.

ثانياً: معادلات التحويل لرموز كريستوفل من النوع الثاني:

بضرب (9) في

$$g'^{nm} = \frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x'^m}{\partial x^\gamma} g^{\sigma\gamma}$$

$$\therefore g'^{nm}[jk,m]' = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x'^m}{\partial x^\gamma} g^{\sigma\gamma}[\mu\nu,\alpha] + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^k}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x'^m}{\partial x^\gamma} g^{\sigma\gamma} g_{\mu\nu}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}' = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^m}{\partial x'^\gamma}\right) g^{\sigma\gamma}[\mu\nu,\alpha] + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^k}\frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^m}{\partial x'^\gamma}\right) g^{\sigma\gamma} g_{\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma}\delta^\alpha_\gamma g^{\sigma\gamma}[\mu\nu,\alpha] + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^k}\frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma}\delta^\nu_\gamma (g^{\sigma\gamma} g_{\mu\nu})$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma} g^{\sigma\alpha}[\mu\nu,\alpha] + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^k}\frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma}(g^{\sigma\gamma} g_{\mu\nu})$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma}\begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^k}\frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma}\delta^\sigma_\mu$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma}\begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^k}\frac{\partial x'^n}{\partial x^\mu}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{\partial x'^n}{\partial x^\mu} \qquad \text{\_\_\_\_}(10)$$

وهي معادلات التحويل لرموز كريستوفل من النوع الثاني.

<u>ملحوظة</u>: في الفراغ الإقليدي (للإحداثيات الكرتيزية المتعامدة) $g_{\sigma\alpha} = 0$، أي أن

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} = 0$$

ومن المعادلة (10) نجد أن:

$$\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}' = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{\partial x'^n}{\partial x^\mu}$$

وإذا كانت هذه المنظومة الجديدة S' أيضاً كرتيزية أي أن

$$\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}' = 0$$

أي أن:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^k} = 0$$

فبتكامل هذه العلاقة نحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial x'^j}\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^k}\right] = 0 \rightarrow \therefore \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^k} = a^\mu$$

وبالتكامل مرة ثانية:

$$\therefore x^\mu = a^\mu x'^k + b^\mu$$

حيث a^μ, b^μ ثوابت التكامل.

وهذا يعني أن تحويل الإحداثيات بين منظومتين كرتيزيتين للإحـــداثيات يكـــون تحويلاً خطياً.

مثال(٢): إستخدم تحويل كريستوفل من النوع الثاني:

$$\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma} \qquad \_\_\_(1)$$

لإثبات أن:

$$\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^j \partial x'^k} = \begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}' \frac{\partial x^m}{\partial x'^n} - \begin{Bmatrix} m \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k} \qquad \_\_\_(2)$$

الحل: بضرب (1) في $\frac{\partial x^m}{\partial x'^n}$ نحصل على:

$$\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}' \frac{\partial x^m}{\partial x'^n} = \left(\frac{\partial x^m}{\partial x'^n} \frac{\partial x'^n}{\partial x^\sigma}\right) \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^k} \left(\frac{\partial x^m}{\partial x'^n} \frac{\partial x'^n}{\partial x^\mu}\right)$$

$$= \delta^m_\sigma \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k} + \delta^m_\mu \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^j \partial x'^k}$$

$$= \begin{Bmatrix} m \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^j \partial x'^k}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^j \partial x'^k} = \begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}' \frac{\partial x^m}{\partial x'^n} - \begin{Bmatrix} m \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}$$

وهو المطلوب.