

الباب الثالث

التفاضل المتغاير Covariant Differentiation

(١) التفاضل المتغاير للمتجه A_μ بالنسبة لـ x^ν يعرف بالعلاقة :

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} A_\alpha \quad \rightarrow (1)$$

وهو ممتد متغاير من المرتبة الثانية.

(٢) للتفاضل المتغاير للمتجه مضاد للتغاير A^μ بالنسبة لـ x^ν يعرف بالعلاقة:

$$A_{,\nu}^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} A^\alpha \quad \rightarrow (2)$$

وهو ممتد مختلط من المرتبة الثانية.

(٣) التفاضل المتغاير للممتد المتغاير $T_{\mu\nu}$ (نو المرتبة الثانية) يعرف بالعلاقة :

$$T_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} T_{\alpha\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} T_{\mu\alpha} \quad \rightarrow (3)$$

(٤) التفاضل المتغاير للممتد مضاد للتغاير $T^{\mu\nu}$ (نو المرتبة الثانية) يعرف بالعلاقة:

$$T_{,\sigma}^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\alpha \end{matrix} \right\} T^{\alpha\nu} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\alpha \end{matrix} \right\} T^{\mu\alpha} \quad \rightarrow (4)$$

(٥) التفاضل المتغاير للممتد المختلط من المرتبة الثانية T_μ^ν يعرف بالعلاقة:

$$T_{\mu,\sigma}^\nu = \frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x^\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} T_\alpha^\nu + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\alpha \end{matrix} \right\} T_\mu^\alpha \quad \rightarrow (5)$$

التفاضل المتغاير

أمثلة محلولة :

مثال (1)

أثبت أن التفاضل المتغاير للممتد A_μ ذي المرتبة الأولى هو ممتد متغاير من المرتبة الثانية.

الحل : المطلوب إثبات أن $A_{\mu,\nu}$ هو ممتد متغاير من المرتبة الثانية ، ولإثبات ذلك :

حيث أن $d\chi^\mu$ هو متجه مضاد للتغاير فإن $\frac{d\chi^\nu}{ds}$ هو أيضا متجه مضاد المتغاير (حيث أن ds كمية لا متغيرة)، وحيث أن A_μ هو متجه متغاير فإن:

$$A_\mu \frac{d\chi^\mu}{ds} = Inv. \quad \text{كمية لا متغيرة} \quad [\text{مثال سابق}]$$

أيضا : فإن معدل تغير هذه للكمية على أي منحنى هو كمية لا متغيرة :

$$\therefore \frac{d}{ds} \left(A_\mu \frac{d\chi^\mu}{ds} \right) = Inv .$$

$$\therefore A_\mu \frac{d^2\chi^\mu}{ds^2} + \left(\frac{dA_\mu}{ds} \right) \frac{d\chi^\mu}{ds} = Inv .$$

$$\therefore A_\mu \frac{d^2\chi^\mu}{ds^2} + \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial \chi^\nu} \frac{d\chi^\nu}{ds} \right) \frac{d\chi^\mu}{ds} = Inv . \quad \rightarrow (1)$$

وبأخذ معدل التغير هذا على طول المنحنى الجيوديسي

$$\frac{d^2\chi^\sigma}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{d\chi^\mu}{ds} \frac{d\chi^\nu}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2 \chi^\sigma}{ds^2} = - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{d\chi^\mu}{ds} \frac{d\chi^\nu}{ds}$$

وبالضرب في A_σ :

$$\therefore A_\sigma \frac{d^2 \chi^\sigma}{ds^2} = - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{d\chi^\mu}{ds} \frac{d\chi^\nu}{ds} A_\sigma$$

وحيث أن σ رمز نمية فيمكن كتابة $\sigma = \mu$ في الطرف الأيسر، ونحصل على:

$$\therefore A_\mu \frac{d^2 \chi^\mu}{ds^2} = - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} A_\sigma \frac{d\chi^\mu}{ds} \frac{d\chi^\nu}{ds} \rightarrow (2)$$

بالتعويض من (٢) في (١):

$$- \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} A_\sigma \frac{d\chi^\mu}{ds} \frac{d\chi^\nu}{ds} + \frac{\partial A_\mu}{\partial \chi^\nu} \frac{d\chi^\nu}{ds} \frac{d\chi^\mu}{ds} = Inv .$$

$$\therefore \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial \chi^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} A_\sigma \right] \frac{d\chi^\mu}{ds} \frac{d\chi^\nu}{ds} = Inv .$$

ولكن:

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial \chi^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} A_\sigma \therefore A_{\mu,\nu} \frac{d\chi^\mu}{ds} \frac{d\chi^\nu}{ds} = Inv .$$

ومن نظرية خرج القسمة:

فحيث أن: $\frac{d\chi^\nu}{ds}$ يمثل متجه مضاد التغاير (ممتد من المرتبة الأولى) وحيث أن

الكمية اللا متغيرة (Inv) هي ممتد من المرتبة صفر فإن الكمية $\left(A_{\mu,\nu} \frac{d\chi^\mu}{ds} \right)$

التفاضل المتغايري

تمثل ممتدا ، وبتطبيق نظرية خارج القسمة مرة ثانية : حيث أن $\frac{dx^\mu}{ds}$ هو متجه مضاد المتغاير (ممتد من المرتبة الأولى) فإن $A_{\mu,\nu}$ يجب أن يكون ممتدا ، وهو ممتد متغاير من المرتبة الثانية ، وهو المطلوب .

مثال (٢):

كيف تحصل على تعريف التفاضل المتغاير للمتجه مضاد المتغاير

$$A_{,\nu}^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} A^\alpha \quad \rightarrow (1)$$

من تعريف التفاضل للمتغاير للمتجه المتغاير:

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} A_\alpha \quad \rightarrow (2)$$

الحل:

من (٢) بأخذ: $A_\mu = g_{\mu\alpha} A^\alpha$ حيث $g_{\mu\alpha}$ هو الممتد المترى

$$\begin{aligned} \therefore A_{\mu,\nu} &= g_{\mu\alpha} A_{,\nu}^\alpha \\ &= \frac{\partial (g_{\mu\alpha} A^\alpha)}{\partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} (g_{\beta\alpha} A^\alpha) \\ &= A^\alpha \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + g_{\mu\alpha} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} g_{\beta\alpha} A^\alpha \\ &= A^\alpha \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + g_{\mu\alpha} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\nu} - [\mu\nu, \alpha] A^\alpha \\ &= A^\alpha ([\alpha\nu, \mu] + [\mu\nu, \alpha]) + g_{\mu\alpha} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\nu} - [\mu\nu, \alpha] A^\alpha \\ &= g_{\mu\alpha} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\nu} + [\alpha\nu, \mu] A^\alpha \end{aligned}$$

وبالضرب في $g^{\mu\sigma}$:

$$\therefore g^{\mu\sigma} g_{\mu\alpha} A_{,\nu}^{\alpha} = g^{\mu\sigma} g_{\mu\alpha} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + g^{\mu\sigma} [\alpha\nu, \mu] A^{\alpha}$$

$$\therefore \delta_{\alpha}^{\sigma} A_{,\nu}^{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\sigma} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} A^{\alpha}$$

$$\therefore A_{,\nu}^{\sigma} = \frac{\partial A^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} A^{\alpha}$$

وهي المعادلة (١) المطلوبة (بوضع $\sigma = \mu$).

مثال (٣): أثبت أن المشتقة المتغايرة لكل من الممتدات الآتية تساوي صفراً.

(i) الممتد المترى $g_{\mu\nu}$

(ii) الممتد المترى المرافق $g^{\mu\nu}$

(iii) دلتا كرونكير δ_{μ}^{ν}

الحل:

(i) للممتد $g_{\mu\nu}$ من التعريف:

$$g_{\mu\nu, \alpha} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} g_{\sigma\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\} g_{\mu\sigma}$$

$$= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - [\mu\alpha, \nu] - [\nu\alpha, \mu]$$

$$= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - ([\mu\alpha, \nu] - [\nu\alpha, \mu])$$

$$= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right) = 0$$

$$[\mu\alpha, \nu] + [\nu\alpha, \mu] = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \quad \text{وذلك حيث أن:}$$

التفاضل المتغاير

(ii) للممتد $g^{\mu\nu}$ من التعريف:

$$\begin{aligned} g_{,\alpha}^{\mu\nu} &= \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} g^{\sigma\nu} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} g^{\mu\sigma} \\ &= \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + (g^{\sigma\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} + g^{\mu\sigma} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\}) \end{aligned} \quad \rightarrow (1)$$

ويمكن إثبات العلاقة الآتية:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = - (g^{\mu\sigma} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} + g^{\nu\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\}) \quad \rightarrow (2)$$

فبالتعويض من (٢) في (١) :

$$\therefore g_{,\alpha}^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 0$$

وهو المطلوب.

إثبات العلاقة (٢):

حيث أن

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (g^{ik} g_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\delta_j^k) = 0$$

$$\therefore g^{ik} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} + g_{ij} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^\alpha} = 0$$

$$\therefore g_{ij} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^\alpha} = -g^{ik} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}$$

بالضرب في g^{lj} :

$$\therefore g^{lj} g_{ij} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^\alpha} = -g^{lj} g^{ik} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}$$

$$\therefore \delta_i^l \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^\alpha} = -g^{lj} g^{ik} ([i\alpha, j] + [j\alpha, i])$$

$$\therefore \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^\alpha} = -g^{lj} g^{ik} [i\alpha, j] - g^{lj} g^{ik} [j\alpha, i]$$

$$= -g^{ik} \left\{ \begin{matrix} l \\ i\alpha \end{matrix} \right\} - g^{lj} \left\{ \begin{matrix} k \\ j\alpha \end{matrix} \right\}$$

$$= -g^{lj} \left\{ \begin{matrix} k \\ j\alpha \end{matrix} \right\} - g^{ik} \left\{ \begin{matrix} l \\ i\alpha \end{matrix} \right\}$$

وحيث أن i, j, σ هي رموز دمية فإنه يمكننا أخذ $i = j = \sigma$

$$\therefore \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^\alpha} = -g^{l\sigma} \left\{ \begin{matrix} k \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} - g^{k\sigma} \left\{ \begin{matrix} l \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\}$$

$$= - \left(g^{l\sigma} \left\{ \begin{matrix} k \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} + g^{k\sigma} \left\{ \begin{matrix} l \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} \right)$$

وهي العلاقة (٢) المطلوبة (بأخذ $l = \mu, k = \nu$).

(iii) دلتا كرونكر δ_μ^ν : من التعريف:

$$\delta_{\mu,\alpha}^\nu = \frac{\partial \delta_\mu^\nu}{\partial x^\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} \delta_\sigma^\nu + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} \delta_\mu^\sigma \quad \rightarrow (3)$$

$$\frac{\partial \delta_\mu^\nu}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{فإن} \quad \delta_\mu^\nu = 1, 0$$

أيضا:

$$\delta_\sigma^\nu \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\}$$

$$\delta_\mu^\sigma \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\}$$

بالتعويض في (٣):

$$\therefore \delta_{\mu, \alpha}^{\nu} = 0 - \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} = 0 - \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} = 0$$

وهو المطلوب.

مثال (٤): أثبت أن التفاضل المتغاير لمجموع والفرق بين ممتدين تخضع لنفس قاعدة التفاضل العادي.

الحل: بفرض أن $A_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ ممتدان بحيث أن مجموعهما هو:

$$C_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}$$

فيكون المطلوب إثبات أن:

$$(A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu})_{, \alpha} = C_{\mu\nu, \alpha} = A_{\mu\nu, \alpha} + B_{\mu\nu, \alpha}$$

ولإثبات ذلك: من التعريف:

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu, \alpha} &= \frac{\partial C_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} C_{\sigma\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\} C_{\mu\sigma} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}) - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} (A_{\sigma\nu} + B_{\sigma\nu}) - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\} (A_{\mu\sigma} + B_{\mu\sigma}) \\ &= \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} A_{\sigma\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} B_{\sigma\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\} A_{\mu\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\} B_{\mu\sigma} \\ &= \left(\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} A_{\sigma\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\} A_{\mu\sigma} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} B_{\sigma\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\} B_{\mu\sigma} \right) = A_{\mu\nu, \alpha} + B_{\mu\nu, \alpha} \end{aligned}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$(A_{\mu\nu} - B_{\mu\nu})_{, \alpha} = A_{\mu\nu, \alpha} - B_{\mu\nu, \alpha}$$

مثال (٥):

أثبت أن المشتقة المتغايرة لحاصل ضرب ممتدين تخضع لنفس قاعدة التفاضل العادي

الحل: للتبسيط نأخذ ممتدين من المرتبة الأولى A_μ , B^ν فإن حاصل ضربهما هو $C_\mu^\nu = A_\mu B^\nu$ ، فيكون المطلوب إثبات أن:

$$C_{\mu,\alpha}^\nu = (A_\mu B^\nu)_{,\alpha} = A_\mu B_{,\alpha}^\nu + B^\nu A_{\mu,\alpha}$$

ولإثبات ذلك: - من التعريف

$$\begin{aligned} C_{\mu,\alpha}^\nu &= \frac{\partial C_\mu^\nu}{\partial x^\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} C_\sigma^\nu + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} C_\mu^\sigma \\ &= \frac{\partial (A_\mu B^\nu)}{\partial x^\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} A_\sigma B^\nu + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} A_\mu B^\sigma \\ &= A_\mu \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + B^\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} A_\sigma B^\nu + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} A_\mu B^\sigma \\ &= A_\mu \left(\frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} B^\sigma \right) + B^\nu \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} A_\sigma \right) \\ &= A_\mu B_{,\alpha}^\nu + B^\nu A_{\mu,\alpha} \end{aligned}$$

حيث:

$$B_{,\alpha}^\nu = \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} B^\sigma$$

$$A_{\mu,\alpha} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} A_\sigma$$

التفاضل المتغاير

وبالمثل: يمكن تطبيق هذه القاعدة على الممتدات الأخرى

(i) ففي حالة الممتد من المرتبة صفر (الكمية القياسية I):

$$(IA_\mu)_{,\alpha} = IA_{\mu,\alpha} + A_\mu I_{,\alpha}$$

$$I_{,\alpha} = \frac{\partial I}{\partial x^\alpha} \quad \text{حيث}$$

(ii) وفي حالة ضرب الممتدين $A^\sigma, B_{\mu\nu}$ ، حيث $C_{\mu\nu}^\sigma = A^\sigma B_{\mu\nu}$

$$\therefore C_{\mu\nu,\alpha}^\sigma = (A^\sigma B_{\mu\nu})_{,\alpha}$$

$$= A^\sigma B_{\mu\nu,\alpha} + B_{\mu\nu} A_{,\alpha}^\sigma$$

(iii) وفي حالة ضرب الممتدين A_k^j, B_n^{lm} حيث $C_{kn}^{jlm} = A_k^j B_n^{lm}$

$$\therefore C_{kn,\alpha}^{jlm} = (A_k^j B_n^{lm})_{,\alpha}$$

$$= A_k^j B_{n,\alpha}^{lm} + B_n^{lm} A_{k,\alpha}^j$$

مثال (٦): أثبت أن:

$$(g_{\mu\nu} A_\beta^{\nu\sigma})_{,\alpha} = g_{\mu\nu} A_{\beta,\alpha}^{\nu\sigma}$$

الحل: بتطبيق قاعدة التفاضل العادي على التفاضل المتغاير

$$\therefore (g_{\mu\nu} A_\beta^{\nu\sigma})_{,\alpha} = g_{\mu\nu} A_{\beta,\alpha}^{\nu\sigma} + A_\beta^{\nu\sigma} g_{\mu\nu,\alpha}$$

ومن المثال رقم (٣) $g_{\mu\nu,\alpha} = 0 \leftarrow$

$$\therefore (g_{\mu\nu} A_\beta^{\nu\sigma})_{,\alpha} = g_{\mu\nu} A_{\beta,\alpha}^{\nu\sigma}$$

وهو المطلوب.

التدرج (grad) والتباعد (div) والانتفاف (curl) في الصورة الممتدة:

(١) التدرج (grad):

يعرف التدرج لكمية قياسية (لا متغيرة) I بالعلاقة:-

$$\text{grad } I = \frac{\partial I}{\partial x^\alpha} = I_{,\alpha} \quad \rightarrow (1)$$

(٢) التباعد (div):

يعرف التباعد لمتجه A^μ بالعلاقة:- $\text{div } A^\mu = A^\mu_{,\mu}$

$$\mathcal{A}^\mu = \sqrt{-g} A^\mu \quad \text{وإذا كان}$$

ويعرف بالكثافة الممتدة (Tensor density) للمتجه A^μ ، فيمكن إثبات أن

$$\mathcal{A}^\mu_{,\mu} = \frac{\partial \mathcal{A}^\mu}{\partial x^\mu} \quad \rightarrow (2)$$

$$\therefore A^\mu_{,\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^\mu)}{\partial x^\mu} \quad \rightarrow (3)$$

(٣) الانتفاف (curl):

يعرف الانتفاف للمتجه A_μ بالعلاقة:

$$\text{curl } A_\mu = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \quad \rightarrow (4)$$

وهي عبارة عن ممتد متغاير من المرتبة الثانية.

أمثلة محلولة:

مثال (1): أثبت أن:

(i) تدرج كمية قياسية I :

$$\text{grad } I = \frac{\partial I}{\partial x^\alpha} = I_{,\alpha}$$

(ii) تباعد متجه A^μ :

$$\text{div } A^\mu = A^\mu_{,\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} A^\mu)}{\partial x^\mu}$$

(iii) التفاف متجه A_μ :

$$\text{curl } A_\mu = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$$

وهو عبارة عن ممتد متغاير من المرتبة الثانية.

الحل:

(i) إذا كان I كمية لا متغيرة (قياسية) وكان A_μ متجه متغاير فان حاصل

ضربهما (IA_μ) يكون متجها متغايرا ، وتكون مشتقته المتغايرة :

$$\begin{aligned} (IA_\mu)_{,\alpha} &= \frac{\partial(IA_\mu)}{\partial x^\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} (IA_\sigma) \\ &= I \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} + A_\mu \frac{\partial I}{\partial x^\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} (IA_\sigma) \\ &= I \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} A_\sigma \right) + A_\mu \frac{\partial I}{\partial x^\alpha} \\ &= IA_{\mu\alpha} + A_\mu \frac{\partial I}{\partial x^\alpha} \quad \rightarrow (1) \end{aligned}$$

ولكن من تطابق المشتقة المتغايرة لحاصل الضرب مع المشتقة العادية:

$$\therefore (IA_{\mu})_{,\alpha} = IA_{\mu,\alpha} + A_{\mu} I_{,\alpha} \quad \rightarrow (2)$$

من (٢) و(١) نجد أن $I_{,\alpha} = \frac{\partial I}{\partial x^{\alpha}}$ وهو المطلوب.

(ii) من التعريف:

$$A_{,\alpha}^{\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\alpha \end{matrix} \right\} A^{\sigma}$$

بوضع $\alpha = \mu$:

$$\begin{aligned} A_{,\mu}^{\mu} &= \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\mu \end{matrix} \right\} A^{\sigma} \\ &= \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma} \end{aligned} \quad \left| \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\mu \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^{\sigma}} \end{matrix} \right.$$

وباستبدال σ بـ μ في الحد الثاني:

$$\begin{aligned} A_{,\mu}^{\mu} &= \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} \\ &= \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + A^{\mu} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial \sqrt{-g} A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \right] \quad \rightarrow (3) \end{aligned}$$

وبوضع $\mathcal{A}^\mu = \sqrt{-g} A^\mu$ فان :

$$\sqrt{-g} \mathcal{A}_{,\mu}^\mu = \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{A}^\mu)}{\partial x^\mu}$$

$$\therefore \mathcal{A}_{,\mu}^\mu = \frac{\partial \mathcal{A}^\mu}{\partial x^\mu} \rightarrow (4)$$

تسمى الكمية $\mathcal{A}^\mu = \sqrt{-g} A^\mu$ بالكثافة الممتدة (Tensor density) للمتجه A^μ .

(iii) حيث أن:

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} A_\sigma$$

$$A_{\nu,\mu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} A_\sigma$$

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} \text{ وبالطرح واعتبار}$$

$$\therefore A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \rightarrow (5)$$

ولإثبات أن هذه الكمية تشكل ممثدا متغايرا من المرتبة الثانية:

نكتب معادلات التحويل للمتجهين A_μ, A_ν :

$$A'_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A_\mu, \quad A'_\beta = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} A_\nu$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial A_\mu}{\partial x'^\beta} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} A_\mu \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} A_\mu \end{aligned}$$

أيضا:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'_\beta}{\partial x'^\alpha} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial A_\nu}{\partial x'^\alpha} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} A_\nu \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} A_\nu \end{aligned}$$

بالطرح:

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} - \frac{\partial A'_\beta}{\partial x'^\alpha} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) \\ \therefore C'_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\beta} C_{\mu\nu} \end{aligned}$$

ومن هذا يتضح أن:

$$C_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$$

هو ممتد متغاير من المرتبة الثانية.

وهو المطلوب.

مثال (٢): إذا كان $A_{\mu\nu}$ هو ممتد مضاد التماثل من المرتبة الثانية فاثبت أن:

$$A_{\mu\nu,\sigma} + A_{\nu\sigma,\mu} + A_{\sigma\mu,\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}$$

وأن هذه الكمية تمثل ممتدا.

التفاضل المتغاير

الحل: حيث أن $A_{\mu\nu}$ ممتدا مضاد التماثل:

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} \rightarrow \therefore A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu} = 0 \quad \rightarrow (1)$$

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu,\sigma} + A_{\nu\sigma,\mu} + A_{\sigma\mu,\nu} &= \left(\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} A_{\alpha\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} A_{\mu\alpha} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} A_{\alpha\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \sigma\mu \end{matrix} \right\} A_{\nu\alpha} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \sigma\nu \end{matrix} \right\} A_{\alpha\mu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} A_{\sigma\alpha} \right) \\ &= \left(\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right) - (A_{\alpha\nu} + A_{\nu\alpha}) \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \\ &- (A_{\mu\alpha} + A_{\alpha\mu}) \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} - (A_{\alpha\sigma} + A_{\sigma\alpha}) \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \quad \rightarrow (2) \end{aligned}$$

وذلك باستخدام العلاقة (1).

وحيث أن للطرف الأيسر من (2) هو مجموع ممتدات كل منهما من المرتبة

الثالثة فإن للطرف الأيمن أي الكمية $\left(\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right)$ تمثل

ممتدا من المرتبة الثالثة .

وهو المطلوب.

مثال (3): إذا كان $A_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ ممتدا مضاد التماثل، فاثبت أن:

$$A_{\mu\nu,\sigma} + A_{\nu\sigma,\mu} + A_{\sigma\mu,\nu} = 0$$

الحل: حيث أن:

$$A_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$$

$$\therefore A_{\nu\mu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

$$\therefore A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu} = (A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) + (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}) = 0$$

وهي من صفات الممتد مضاد التماثل حيث: $A_{\nu\mu} = -A_{\mu\nu}$

أيضا حيث أن:

$$A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

$$\therefore A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x^{σ} :

$$\therefore \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial^2 A_{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 A_{\nu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\mu}}$$

ومن المثال (٢) واستخدام هذه العلاقة:

$$\begin{aligned} \therefore A_{\mu\nu,\sigma} + A_{\nu\sigma,\mu} + A_{\sigma\mu,\nu} &= \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 A_{\nu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\mu}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 A_{\nu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 A_{\sigma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 A_{\sigma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 A_{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\sigma}} \right) = 0 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

Curvature Tensor (Riemann - Christoffel Tensor)

إذا كان A_μ ممتد متغاير اختياري فيمكن إثبات أن:

$$A_{\mu,\nu\sigma} - A_{\mu,\sigma\nu} = A_\alpha B_{\mu\nu\sigma}^\alpha$$

حيث A_α متجه اختياري ، $B_{\mu\nu\sigma}^\alpha$ تشكل ممتد (مختلط من المرتبة ٤) ويعرف بممتد الإحناء (أو ممتد ريمان - كريستوفل) .

الإثبات: إذا كان A_μ ممتد متغاير اختياري من المرتبة الأولى (أي متجه)

$$\therefore A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} A_\alpha$$

$$\therefore A_{\mu,\nu\sigma} = (A_{\mu,\nu})_{,\sigma}$$

$$= \frac{\partial (A_{\mu,\nu})}{\partial x^\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} A_{\alpha,\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} A_{\mu,\alpha}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} A_\alpha \right) - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} A_\beta \right)$$

$$- \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} A_\gamma \right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\sigma} - A_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu}$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} A_\beta - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} A_\gamma \quad \rightarrow (1)$$

بتبديل مواقع ν, σ نحصل على:

$$\begin{aligned}
 A_{\mu, \sigma\nu} &= \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu} - A_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \\
 &\quad - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\sigma} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} A_\beta \\
 &\quad - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \sigma\nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \sigma\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} A_\gamma \quad \rightarrow (2)
 \end{aligned}$$

ب طرح (1) من (2) نحصل على:

$$\begin{aligned}
 A_{\mu, \nu\sigma} - A_{\mu, \sigma\nu} &= \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} A_\beta - A_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \\
 &\quad - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} A_\beta + A_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \\
 &= A_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \right] \\
 &\quad + A_\beta \left[\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

بتبديل β بـ α في الحد الثاني نحصل على:

$$\begin{aligned}
 A_{\mu, \nu\sigma} - A_{\mu, \sigma\nu} &= A_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \right] \\
 &\quad + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\} \right] = A_\alpha B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha} \quad \rightarrow (3)
 \end{aligned}$$

حيث:

$$B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\} \quad \text{--- (I)}$$

هو ممتد الانحناء أو ممتد ريمان - كريستوفل.

$$A_{\mu,\nu\sigma} \neq A_{\mu,\sigma\nu} \leftarrow A_{\mu,\nu\sigma} - A_{\mu,\sigma\nu} \neq 0 \quad \text{من (٣) نلاحظ أن:}$$

مثال:

(أ) باستخدام نظرية خارج القسمة، اثبت أن $B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha}$ يشكل ممتدا.

(ب) اثبت أن الممتد $B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha}$ مضاد التماثل في ν, σ

$$B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha} = -B_{\mu\sigma\nu}^{\alpha}$$

(ج) الممتد $B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha}$ يخضع للعلاقة الدورية:

$$B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha} + B_{\nu\sigma\mu}^{\alpha} + B_{\sigma\mu\nu}^{\alpha} = 0$$

الحل:

(أ) حيث أن

$$A_{\mu,\nu\sigma} - A_{\mu,\sigma\nu} = A_{\alpha} B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha}$$

فان: الطرف اليسر يشكل الفرق بين ممتدين من المرتبة ٣ فهذا الطرف يكون ممتدا من نفس المرتبة (٣).

وحيث أن A_{α} هو ممتد متغاير اختياري فمن نظرية خارج القسمة نجد أن الكمية $B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha}$ لابد أن تشكل ممتدا.

(ب) من العلاقة (I) بتبديل ν, σ نحصل على :

$$B_{\mu\sigma\nu}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \\ + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} \\ \therefore -B_{\mu\sigma\nu}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} \\ - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\} = B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha} \\ \therefore B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha} = -B_{\mu\sigma\nu}^{\alpha}$$

(ج) من العلاقة (I) :

$$B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \\ + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\} \rightarrow (1)$$

بتغيير $\sigma \rightarrow \mu$, $\nu \rightarrow \sigma$, $\mu \rightarrow \nu$

نحصل على:

$$B_{\nu\sigma\mu}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\} \\ - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\mu \end{matrix} \right\} \quad \text{_____} (2)$$

أيضا بتغيير $\sigma \rightarrow \nu$, $\nu \rightarrow \mu$, $\mu \rightarrow \sigma$

نحصل على:

$$B_{\sigma\mu\nu}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \sigma\nu \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \sigma\mu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \sigma\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\mu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \sigma\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} \quad (3)$$

بجمع (١)، (٢)، (٣) نحصل على:

$$B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha} + B_{\nu\sigma\mu}^{\alpha} + B_{\sigma\mu\nu}^{\alpha} = 0$$

وهو المطلوب.

ممتد الانحناء المتغاير (Covariant Curvature Tensor):

بإنزال (خفض) التليل α في ممتد الانحناء $B_{\mu\nu\sigma}^\alpha$ نحصل على الممتد المتشارك لـ $B_{\mu\nu\sigma}^\alpha$ بالصورة: $B_{\rho\mu\nu\sigma} = g_{\rho\alpha} B_{\mu\nu\sigma}^\alpha$ ويسمى بالممتد المتغاير للانحناء (أو ممتد الانحناء المتغاير).

مثال: أثبت أن العلاقة لممتد الانحناء المتغاير :

$$B_{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \right) + g_{\alpha\beta} \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} \right)$$

الحل: حيث أن:

$$B_{\mu\nu\sigma}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \therefore B_{\rho\mu\nu\sigma} &= g_{\rho\alpha} B_{\mu\nu\sigma}^\alpha \\ &= g_{\rho\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\rho\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\rho\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\sigma} \\ &\quad + g_{\rho\alpha} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} - g_{\rho\alpha} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

$$[\mu\sigma, \rho] = g_{\rho\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \text{ ولكن}$$

التفاضل المتغاير

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = [\mu\sigma, \nu] + [\nu\sigma, \mu]$$

$$\begin{aligned} \therefore B_{\rho\mu\nu\sigma} &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\mu\sigma, \rho] - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} ([\rho\nu, \alpha] + [\alpha\nu, \rho]) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} [\mu\nu, \rho] + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} ([\rho\sigma, \alpha] + [\alpha\sigma, \rho]) + [\beta\nu, \rho] \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} - [\beta\sigma, \rho] \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

وبتبادل $\beta \rightarrow \alpha$ في الحدين الآخرين، نحصل على:

$$B_{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\mu\sigma, \rho] - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} [\mu\nu, \rho] + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} [\rho\sigma, \alpha] - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} [\rho\nu, \alpha]$$

وحيث أن:

$$[\mu\nu, \alpha] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right), \quad [\mu\nu, \alpha] = g_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \therefore B_{\rho\mu\nu\sigma} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) \\ &\quad + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} g_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} g_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \right) \\ &\quad + g_{\alpha\beta} \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} \right) \quad \rightarrow (II) \end{aligned}$$

وهي العلاقة المطلوبة.

ملحوظة:

يتمتع الممتد $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ بالخواص التماثلية ومضادة التماثل الآتية:

(1) $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ مضاد التماثل في الدليلين الأولين (ρ, μ) وفي الدليلين الأخيرين (ν, σ) :

$$\therefore B_{\rho\mu\nu\sigma} = -B_{\mu\rho\nu\sigma}$$

$$B_{\rho\mu\nu\sigma} = -B_{\rho\mu\sigma\nu}$$

(2) $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ متماثل في زوجين من الأئلة $(\rho\mu, \nu\sigma)$: $B_{\rho\mu\nu\sigma} = B_{\nu\sigma\rho\mu}$ ويمكن إثبات ذلك بسهولة.

الخاصة الدورية للممتد $B_{\rho\mu\nu\sigma}$:

يمكن إثبات الخاصية الدورية الآتية لممتد الانحناء المتغاير

$$B_{\rho\mu\nu\sigma} + B_{\rho\nu\sigma\mu} + B_{\rho\sigma\mu\nu} = 0$$

الإثبات: -- من (II):

$$B_{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \right) + g_{\alpha\beta} \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} \right) \rightarrow (1)$$

بإجراء التغيير: $\mu \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \mu$

$$\therefore B_{\rho\nu\sigma\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^\rho \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \right) + g_{\alpha\beta} \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \rho\mu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} \right) \rightarrow (2)$$

التفاضل المتغاير

وبإجراء التغيير $\mu \rightarrow \sigma, \nu \rightarrow \mu, \sigma \rightarrow \nu$

$$\therefore B_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\sigma\mu}}{\partial x^\rho \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\mu} \right) + g_{\alpha\beta} \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \sigma\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \sigma\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \rho\mu \end{matrix} \right\} \right) \rightarrow (3)$$

بجمع (١)، (٢)، (٣) نحصل على:

$$B_{\rho\mu\nu\sigma} + B_{\rho\nu\sigma\mu} + B_{\rho\sigma\mu\nu} = 0$$

وهي الخاصية الدورية للممتد $B_{\rho\sigma\mu\nu}$

ملاحظة:

في الفراغ ذو الأربعة أبعاد (فراغ منكوفسكي) فإن ممتد الانحناء المتغاير $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ يكون له ٢٠ مركبة فقط.

الإثبات:

من الخواص التماثلية ومضادة للتماثل للممتد $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ نجد أن $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ له

أ ٢١ مركبة الآتية:

$$B_{1212}, B_{1223}, B_{1313}, B_{1324}, B_{1423}, B_{2323}, B_{2424}, B_{1213}, B_{1224}, B_{1314}, B_{1334}, B_{1424}, B_{2324}, B_{2434}, B_{1214}, B_{1234}, B_{1323}, B_{1414}, B_{1434}, B_{2334}, B_{3434},$$

$$B_{1234} + B_{1342} + B_{1423} = 0$$

ويقلل استخدام العلاقة الدورية

هذا العدد بواحد فيصبح عدد المركبات المستقلة للممتد $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ في فراغ

منكوفسكي هو ٢٠ مركبة.

الفضاء المسطح (Flate Space):

يعرف الفضاء المسطح بأنه تلك المنطقة من الفضاء التي تخلو من المادة أو الطاقة.

رياضياً: يعرف الفضاء المسطح بأنه الفضاء الذي له مركبات الممتد المتري

$$g_{\mu\nu} = \text{const} \text{ أي ثابتة،}$$

$$\therefore \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = 0 \rightarrow [\mu\nu, \sigma] = 0, \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = 0$$

وحيث أن الممتد $B_{\mu\nu\sigma}^\alpha$ يحتوي على حواصل ضرب ومشتقات

$$\therefore B_{\mu\nu\sigma}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\} = 0$$

مثال: أثبت أن الفراغ الاقليدي ذو الثلاثة أبعاد هو فضاء مسطح.

الحل: بأخذ مترية الفراغ الاقليدي بالصورة:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

$$\therefore g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1,$$

$$g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)$$

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} = 1, g^{22} = \frac{1}{g_{22}} = 1, g^{33} = \frac{1}{g_{33}} = 1$$

ويمكن حساب رموز كريستوفل لهذا الفراغ من العلاقة:

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

التفاضل المتغاير

ثم نقوم بحساب الممتد $B_{\mu\nu\sigma}^\alpha$ فإذا كان $B_{\mu\nu\sigma}^\alpha = 0$ فهذا يعني أن الفراغ الاقليدي هو فضاء مسطح (اثبت ذلك).

تقليص ممتد الانحناء-ممتد ريشي (Ricci Tensor)

يعرف ممتد الانحناء $B_{\mu\nu\sigma}^\alpha$ بالعلاقة:

$$B_{\mu\nu\sigma}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\}$$

ويمكن تقليص هذا الممتد بأخذ $\sigma = \alpha$ فنحصل على الممتد $R_{\mu\nu}$ الذي يعرف بممتد ريشي.

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu\alpha}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\alpha \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\beta} \\ \therefore R_{\mu\nu} &= \frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\beta} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

مثال: أثبت أن ممتد ريشي $R_{\mu\nu}$ هو ممتد متماثل .

الحل:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\beta} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} \end{aligned} \rightarrow (1)$$

بتبديل ν, μ نحصل على:

$$\begin{aligned}
 R_{\nu\mu} &= \frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\beta} \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\mu \end{matrix} \right\} \\
 &= \frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\beta} \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} \\
 &= \frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\beta} \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} \quad \rightarrow (2)
 \end{aligned}$$

بمقارنة (1) , (2) نجد أن: $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ أي أن $R_{\mu\nu}$ هو ممتد متماثل.

الانحناء القياسي (Scalar Curvature):

يعرف الانحناء القياسي لأي فضاء بالعلاقة:

$$R = R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad \rightarrow (1)$$

وإذا كان $R_{\mu\nu} = kg_{\mu\nu}$ فيمكن إثبات أن: $R = k$ وذلك لأن:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} (kg_{\mu\nu}) = k(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = k$$

حيث:

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 1$$

مثال:

أحسب ممتد ريشي والانحناء القياسي للفضاء المعرف بالعلاقة:

$$dS^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

الحل: سبق إيجاد رموز كريستوفل لهذا المترى، حيث $x^1 = \theta, x^2 = \phi$

$$g_{11} = a^2, g_{22} = a^2 \sin^2 \theta, g_{12} = g_{21} = 0$$

$$g = a^4 \sin^2 \theta$$

$$g^{11} = \frac{1}{a^2}, g^{22} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta}, g^{12} = g^{21} = 0$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\sin \theta \cos \theta, \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \cot \phi$$

وعلى هذا فيوجد فقط مركبة متغايرة واحدة لممتد الانحناء $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ هي:

$$B_{1221} = -a^2 \sin^2 \theta \text{ ويكون لممتد ريشي } R_{\mu\nu} \text{ مركبتان غير صفريتان}$$

فقط $R_{11} = -1, R_{22} = -\sin^2 \theta$ ويصبح الانحناء القياسي:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22}$$

$$= \frac{-1}{a^2} + \frac{(-\sin^2 \theta)}{a^2 \sin^2 \theta} = \frac{-2}{a^2}$$

متطابقة بيانكي (الخاصية التفاضلية لممتد الانحناء) Bianchi identity

في أي فراغ ريماني، من الممكن دائما إيجاد منظومة إحداثيات عند نقطة الأصل بحيث تكون المشتقة الأولى للممتد المترى $(g_{\mu\nu})$ متلاشية بينما المشتقة الثانية تكون غير متلاشية.

مثل هذه الإحداثيات تسمى الإحداثيات الريمانية (Riemannian Coordinates) أو الإحداثيات الجيوديسية (Geodesic Coordinates).

ولذلك فإن الشروط اللازمة لتلك الإحداثيات هي:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 0, [\mu\nu, \alpha] = 0, \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = 0$$

عند نقطة الأصل

وبذلك تؤول المشتقة المتغايرية إلى المشتقة الجزئية العادية، ويؤول ممتد ريمان - كريستوفل $B_{\mu\nu\sigma}^\alpha$ إلى:

$$B_{\mu\nu\sigma}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$$

وذلك عند نقطة الأصل 0 للإحداثيات الجيوديسية.

أيضا عند 0: فإن المشتقة المتغايرة سوف تؤول إلى المشتقة العادية

$$\therefore B_{\mu\nu\sigma, \rho}^\alpha = \frac{\partial^2 \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \rightarrow (1)$$

وبالمثل يمكننا كتابة:

$$B_{\mu\sigma\rho, \nu}^\alpha = \frac{\partial^2 \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\rho \end{matrix} \right\}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \rightarrow (2)$$

$$B_{\mu\rho\nu, \sigma}^\alpha = \frac{\partial^2 \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\rho \end{matrix} \right\}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} \rightarrow (3)$$

بجمع (١)، (٢)، (٣) نحصل على:

$$B_{\mu\nu\sigma, \rho}^{\alpha} + B_{\mu\sigma\rho, \nu}^{\alpha} + B_{\mu\rho\nu, \sigma}^{\alpha} = 0 \quad \rightarrow (4)$$

وحيث أن كل حد من هذه المتطابقة يشكل ممثدا فهي معادلة ممثدات (Tensorial Equation)، وهذا يعني أنه إذا كانت متحققة في منظومة الإحداثيات الجيوديسية (أو الريمانية) فهي متحققة في كل أنظمة الإحداثيات الأخرى، وتعرف العلاقة (٤) بمتطابقة بيانكي (Bianchi Identity).

ملحوظة:

يمكن كتابة علاقة بيانكي (٤) في صورة أخرى كالآتي:

$$\therefore g_{\beta\alpha} B_{\mu\nu\sigma, \rho}^{\alpha} = (g_{\beta\alpha} B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha})_{, \rho} = B_{\beta\mu\nu\sigma, \rho}$$

ونلك بضرب (٤) في $g_{\beta\alpha}$ وملاحظة أن $g_{\beta\alpha}$ يكون ثابتاً في عملية التفاضل المتغير.

وتصبح متطابقة بيانكي بالصورة:

$$B_{\beta\mu\nu\sigma, \rho} + B_{\beta\mu\sigma\rho, \nu} + B_{\beta\mu\rho\nu, \sigma} = 0 \quad \rightarrow (5)$$

مثال:

$$B_{\mu\nu\sigma, \rho}^{\alpha} + B_{\mu\sigma\rho, \nu}^{\alpha} + B_{\mu\rho\nu, \sigma}^{\alpha} = 0 \quad \text{من متطابقة بيانكي:}$$

استنتج المتطابقة الرباعية (Four Identity) بالصورة:

$$\left(R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} R \right)_{, \nu} = 0$$

الحل: حيث أن $B_{\mu\sigma\rho, \nu}^{\alpha}$ هو ممثد مضاد التماثل في σ, ρ

$$\therefore B_{\mu\sigma\rho, \nu}^{\alpha} = -B_{\mu\rho\sigma, \nu}^{\alpha}$$

$$B_{\mu\nu\sigma,\rho}^{\alpha} - B_{\mu\rho\sigma,\nu}^{\alpha} + B_{\mu\rho\nu,\sigma}^{\alpha} = 0 \quad \text{وتصبح متطابقة بيانكي:}$$

وبتقليص تلك المتطابقة بوضع $\alpha = \sigma$:

$$\therefore B_{\mu\nu\sigma,\rho}^{\alpha} - B_{\mu\rho\alpha,\nu}^{\alpha} + B_{\mu\rho\nu,\alpha}^{\alpha} = 0$$

ومن تعريف ممثد ريشي:

$$B_{\mu\nu\alpha}^{\alpha} = R_{\mu\nu}$$

$$\therefore R_{\mu\nu,\rho} - R_{\mu\rho,\nu} + B_{\mu\rho\nu,\alpha}^{\alpha} = 0$$

بالضرب في $g^{\mu\rho}$ وملاحظة أن: $g_{,\sigma}^{\mu\rho} = 0$

$$\therefore (g^{\mu\rho} R_{\mu\nu}),_{\rho} - (g^{\mu\rho} R_{\mu\rho}),_{\nu} + (g^{\mu\rho} B_{\mu\rho\nu}^{\alpha}),_{\alpha} = 0$$

$$\therefore R_{\nu,\rho}^{\rho} - R_{,\nu} + R_{\nu,\alpha}^{\alpha} = 0$$

وبتغيير ρ ب α في الحد الأول واعتبار أن $R_{,\nu} = g_{\nu}^{\alpha} R_{,\alpha}$

$$\therefore R_{\nu,\alpha}^{\alpha} - g_{\nu}^{\alpha} R_{,\alpha} + R_{\nu,\alpha}^{\alpha} = 0$$

$$\therefore 2R_{\nu,\alpha}^{\alpha} - g_{\nu}^{\alpha} R_{,\alpha} = 0$$

$$\therefore R_{\nu,\alpha}^{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\nu}^{\alpha} R_{,\alpha} = 0$$

$$\therefore (R_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\nu}^{\alpha} R),_{\alpha} = 0$$

وهي المتطابقة الرباعية والتي يمكن كتابتها أيضاً بالصورة:

$$(R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} R),_{\nu} = 0 \quad \rightarrow (1)$$

[وذلك بوضع $\nu = \mu$, $\alpha = \nu$]

ممتد الطاقة المادية Material Energy Tensor

بضرب المتطابقة الرباعية (1) في $g^{\mu\sigma}$ وملاحظة أن $g_{,\nu}^{\mu\sigma} = 0$

$$(g^{\mu\sigma} R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} g_{\mu}^{\nu} R)_{,\nu} = 0 \quad \text{نحصل على:}$$

$$\therefore (R^{\sigma\nu} - \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} R)_{,\nu} = 0$$

والتي يمكن كتابتها بالصورة:

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R)_{,\nu} = 0$$

[باستبدال $\mu \leftarrow \sigma$]

ويكتابة $T^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$ والذي يسمى بممتد الطاقة المادية فإن

$$T_{,\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{المتطابقة السابقة تأخذ الصورة:}$$

ويعني هذا أن تباعد (div) ممتد الطاقة يكون متلاشياً.

ممتد أينشتاين (أو ممتد الكون) Einstein (or World) Tensor

يعرف ممتد أينشتاين أو ممتد الكون بالعلاقة:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

حيث R هي الاتحناء القياسي المناظر لممتد ريشي $R_{\mu\nu}$

$$R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

مثال: أثبت أن تباعد ممتد أينشتاين يكون متلاشياً

الحل: حيث أن المتطابقة الرباعية يمكن كتابتها بالصورة:

$$(R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} R)_{,\nu} = 0$$

أو بالصورة:

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{,\nu} = 0$$

وحيث أن تباعد ممتد هو مشتقته المتغايرة المتقلصة، فإن تباعد الممتد

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

. تباعد ممتد آينشتاين يساوي صفرأ أي أن : $G_{\mu\nu, \nu} = 0$.

ويقال أنه حر التباعد (divergence free).

ملحوظة:

تستخدم هذه الخاصية كثيرا في النظرية النسبية العامة لآينشتاين كأحد أهم

العلاقات في تلك النظرية.