

القسم الأول

تحليل المتجهات
VECTOR ANALYSIS

obeikandi.com

الباب الأول

جبر المتجهات Vector Algebra

تعريف أولية:

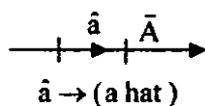
تعريف المتجه: هو كمية طبيعية تتحدد بالمقدار والاتجاه ويرمز له بالرمز \vec{A} ،
مثل : السرعة، القوة، كمية الحركة،

مقدار المتجه: هو قيمته العددية $A = |\vec{A}|$ ويقراً مقياس \vec{A} (mod).

متجه الوحدة (وحدة المتجهات):

هو متجه مقداره الوحدة وله اتجاه معين $|\hat{a}| = 1$.

المتجه \vec{A} يكتب بدلالة \hat{a} بالصورة:



$$\vec{A} = A \hat{a} \rightarrow \hat{a} = \frac{\vec{A}}{A}$$

متجهات الوحدة الأساسية:

في الفراغ الاقليدي (x,y,z)، تكون متجهات الوحدة:

\hat{i} في اتجاه x، \hat{j} في اتجاه y، \hat{k} في اتجاه z

هي متجهات الوحدة الأساسية، حيث:

$$|\hat{i}| = 1, \quad |\hat{j}| = 1, \quad |\hat{k}| = 1$$

مركبات متجه:

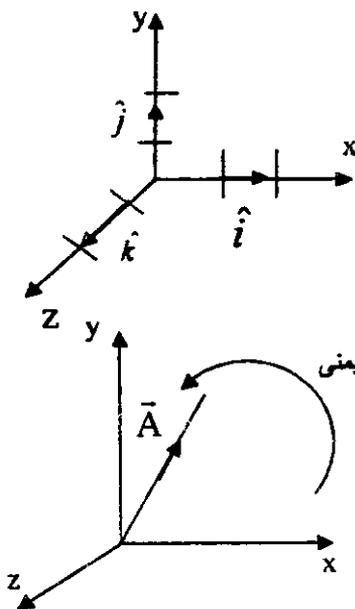
أي متجه \vec{A} له 3 مركبات

$$A_x, A_y, A_z$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$A_1, A_2, A_3$$

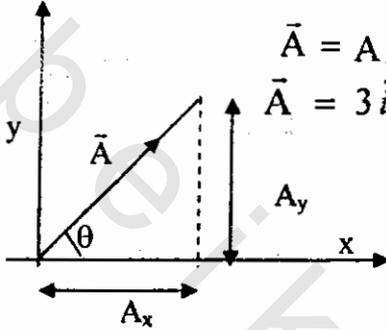
وهي كميات قياسية (أعداد).



أي متجه يكتب بدلالة مركباته بالصورة:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

مقدار واتجاه المتجه:



(i) في المستوى: $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = (A_x, A_y)$

فمثلاً: $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} = (3, 2)$

المقدار: $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

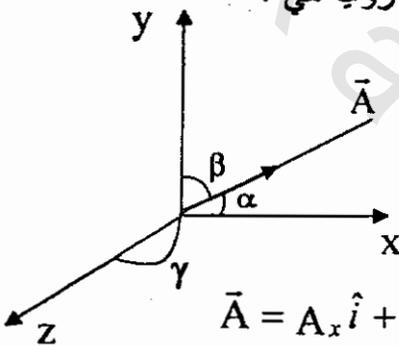
الاتجاه: $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$

(ii) في الفراغ: المتجه \vec{A} يصنع في الفراغ 3 زوايا هي:

α (مع محور x)

β (مع محور y)

γ (مع محور z).



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = (A_x, A_y, A_z)$$

فمثلاً: $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} = (3, 2, -4)$

المقدار: $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

الاتجاه: يحدد بالزوايا الثلاث α, β, γ ، حيث:

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A}, \cos \beta = \frac{A_y}{A}, \cos \gamma = \frac{A_z}{A}$$

وتسمى $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ جيوب تمام الاتجاه ويرمز لها أيضا بالرموز

l, m, n .

$$l = \cos \alpha, m = \cos \beta, n = \cos \gamma$$

حيث:

أمثلة محلولة

مثال (1): إذا كان l, m, n هي جيوب تمام الاتجاه للمتجه \vec{A} فأثبت أن:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (i)$$

(ii) متجه الوحدة \hat{a} في اتجاه \vec{A} يعطى بالعلاقة:

$$\hat{a} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$$

الحل:

أولاً: من تعريف l, m, n :

$$l^2 + m^2 + n^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

$$= \frac{A_x^2}{A^2} + \frac{A_y^2}{A^2} + \frac{A_z^2}{A^2}$$

$$= \frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2} = \frac{A^2}{A^2} = 1 \longrightarrow (i)$$

ثانياً: من تعريف متجه الوحدة:

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}}{A} = \frac{A_x}{A}\hat{i} + \frac{A_y}{A}\hat{j} + \frac{A_z}{A}\hat{k}$$

$$= \cos\alpha \hat{i} + \cos\beta \hat{j} + \cos\gamma \hat{k}$$

$$= l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k} \longrightarrow (ii)$$

وهو المطلوب.

مثال (2): أوجد متجه الوحدة \hat{c} في اتجاه محصلة المتجهين:

$$|\hat{c}| = 1 \text{ ، وتحقق من أن: } \vec{a} = (2, 4, -5) \text{ ، } \vec{b} = (1, 2, 3)$$

جبر المتجهات

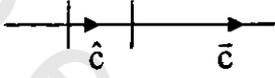
الحل: بكتابة \bar{a} ، \bar{b} بالصورة الإتجاهية :

$$\bar{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k} , \bar{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

محصلتهما (أي مجموعهما الإتجاهي):

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

متجه الوحدة في اتجاه \bar{c} :



$$\begin{aligned} \hat{c} &= \frac{\bar{c}}{c} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{9 + 36 + 4}} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}\hat{i} + \frac{6}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k} \end{aligned}$$

وللتحقق من أن: $|\hat{c}| = 1$

$$\begin{aligned} |\hat{c}| &= \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{-2}{7}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9 + 36 + 4}{49}} = \sqrt{\frac{49}{49}} = 1 \end{aligned}$$

المتجهات المتوازية:

يقال أن \bar{a} ، \bar{b} متوازيان إذا كانت تربطها علاقة خطية أي إذا كان $\bar{a} = \lambda \bar{b}$ حيث λ عدد قياسي.

| | |
|---|---|
| $\lambda > 0$ $\bar{a} = \lambda \bar{b}$ \bar{a}, \bar{b} في نفس الاتجاه | $\lambda < 0$ $\bar{a} = -\lambda \bar{b}$ \bar{a}, \bar{b} في اتجاهين متعاكسين |
|---|---|

جبر المتجهات

مثال: إذا كان لدينا المتجهات الثلاثة:

$$\vec{a} = (15, -6, 24)$$

$$\vec{b} = (5, -2, 8)$$

$$\vec{c} = \left(-\frac{15}{2}, 3, -12\right)$$

فأثبت أن المتجهات الثلاثة متوازية، وأن \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} لهما نفس الاتجاه، بينما \vec{a} ، \vec{c} في اتجاهين متضادين.

الحل: نكتب للمتجهات الثلاثة في الصورة الاتجاهية:

$$\vec{a} = 15\hat{i} - 6\hat{j} + 24\hat{k}$$

$$\vec{b} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 8\hat{k}$$

$$\vec{c} = -\frac{15}{2}\hat{i} + 3\hat{j} - 12\hat{k}$$

واضح أن هناك علاقات بين المتجهات الثلاثة:

(i) علاقة بين \vec{a} ، \vec{b} :

$$\vec{a} = 3(5\hat{i} - 2\hat{j} + 8\hat{k}) = 3\vec{b} = \lambda\vec{b}$$

وهذا يعني أن \vec{a} يوازي \vec{b} وفي نفس الاتجاه ($\lambda > 0$).

(ii) علاقة بين \vec{a} ، \vec{c} :

$$\vec{a} = -2\left(-\frac{15}{2}\hat{i} + 3\hat{j} - 12\hat{k}\right) = -2\vec{c} = \lambda\vec{c}$$

وهذا يعني أن \vec{a} يوازي \vec{c} وفي عكس الاتجاه ($\lambda > 0$).

وحيث أن \vec{a} يوازي \vec{b} ، \vec{a} يوازي \vec{c} فإن المتجهات الثلاثة تكون متوازية.

جبر المتجهات

نظرية (1):

أثبت أنه إذا كان المتجهان \bar{a} ، \bar{b} غير متوازيين فإن العلاقة: $x\bar{a} + y\bar{b} = 0$ تستلزم أن يكون $x=0, y=0$.

الإثبات:

معنى أن \bar{a} ، \bar{b} غير متوازيين هو:

$$\bar{a} \neq \lambda \bar{b}$$

في العلاقة المعطاة: $x\bar{a} + y\bar{b} = 0$ حيث \bar{a} ، \bar{b} غير متوازيين .
المطلوب: إثبات أن:

$$x=0, y=0$$

ولإثبات ذلك : نفرض عكس المطلوب: أي نفرض أن $x \neq 0$

$$\therefore x\bar{a} = -y\bar{b} \rightarrow \bar{a} = -\frac{y}{x}\bar{b} = \lambda\bar{b}$$

وهذا يعني أن \bar{a} ، \bar{b} متوازيان ، وهو عكس المعطى في رأس المسألة ، وإذن:
الفرض الذي فرضناه يكون خطأ ويكون الصح هو عكسه أي أن $x = 0$ ومن
تلك $y\bar{b} = 0 \leftarrow y = 0$.

وهو المطلوب.

نظرية (2):

إذا كان \bar{a} ، \bar{b} متجهان غير متوازيين، وكان :

$$x_1\bar{a} + y_1\bar{b} = x_2\bar{a} + y_2\bar{b}$$

فإن :

$$x_1 = x_2 , y_1 = y_2$$

الإثبات:

حيث أن :

$$x_1 \bar{a} + y_1 \bar{b} = x_2 \bar{a} + y_2 \bar{b}$$

$$\therefore (x_1 - x_2) \bar{a} + (y_1 - y_2) \bar{b} = 0$$

$$(x \bar{a} + y \bar{b}) = 0$$

ومن النظرية (١):

فإن $x=0$, $y=0$ (لأن \bar{a} , \bar{b} غير متوازيين)

$$x_1 - x_2 = 0 \quad , \quad y_1 - y_2$$

$$x_1 = x_2 \quad , \quad y_1 = y_2$$

وهو المطلوب .

الارتباط الخطي والاستقلال الخطي للمتجهات:

أولاً: الارتباط الخطي:

يقال أن مجموعة المتجهات $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ مرتبطة خطياً، إذا وجدت مجموعة أعداد قياسية a, b, c, \dots ليست كلها أصفاراً، وبحديث أن العلاقة:
 $a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + \dots = 0$ تكون محققة.

ثانياً: الاستقلال الخطي:

يقال أن مجموعة المتجهات $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ مستقلة (أو غير مرتبطة) خطياً، إذا وجدت مجموعة أعداد قياسية a, b, c, \dots كلها أصفاراً أي $a = b = c = \dots = 0$ مع تحقق العلاقة: $a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} = 0$.

مثال (1):

أثبت أن مجموعة للمتجهات :

$$\bar{r}_1 = (0, 1, -2), \quad \bar{r}_2 = (1, -1, 1), \quad \bar{r}_3 = (1, 2, 1)$$

تشكل مجموعة مستقلة خطياً.

الحل:

نكتب للمتجهات بالصورة الاتجاهية:

$$\bar{r}_1 = \hat{j} - 2\hat{k}, \quad \bar{r}_2 = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \quad \bar{r}_3 = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

هذه المتجهات تكون مستقلة خطياً، إذا وجدت مجموعة أعداد قياسية k_1, k_2, k_3 كلها تساوي أصفاراً، مع وجود العلاقة:

$$k_1\bar{r}_1 + k_2\bar{r}_2 + k_3\bar{r}_3 = 0 \quad \rightarrow (1)$$

بالتعويض عن $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ في (1) نحصل على:

$$k_1(\hat{j} - 2\hat{k}) + k_2(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + k_3(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$$

جبر المتجهات

$$\therefore (k_2 + k_3)\hat{i} + (k_1 - k_2 + 2k_3)\hat{j} + (-2k_1 + k_2 + k_3)\hat{k} = 0$$

ولكن من النظرية (١) إذا كان:

$$x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c} = 0$$

وكانت $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ غير متوازية فإن: $x=0, y=0, z=0$ ولما

كانت $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ هي متجهات غير متوازية، فإن:

$$k_2 + k_3 = 0 \quad \rightarrow (2)$$

$$k_1 - k_2 + 2k_3 = 0 \quad \rightarrow (3)$$

$$-2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \quad \rightarrow (4)$$

بحل هذه المعادلات نوجد k_1, k_2, k_3 كالآتي:

من (٢):

$$k_2 = -k_3 \quad \rightarrow (5)$$

بالتعويض في (٣):

$$k_1 + k_3 + 2k_3 = 0$$

$$k_1 + 3k_3 = 0 \rightarrow k_1 = -3k_3 \quad \rightarrow (6)$$

$$-2k_1 - k_3 + k_3 = 0 \quad \text{بالتعويض من (٥) في (٤):}$$

$$\therefore -2k_1 = 0 \rightarrow k_1 = 0 \quad \therefore -2k_1 = 0 \rightarrow k_1 = 0$$

$$-3k_3 = 0 \rightarrow k_3 = 0 \quad \text{ومن (٦):}$$

$$k_2 = 0 \quad \text{ومن (٥):}$$

$$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

\therefore مجموعة المتجهات المعطاة تكون مستقلة خطياً.

مثال (٢): أثبت أن مجموعة المتجهات :

$$\vec{A} = (2,1,-3) \quad , \quad \vec{B} = (1,0,-4) \quad , \quad \vec{C} = (4,3,-1)$$

تكون مترابطة خطياً .

الحل: بكتابة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ في صورة إتجاهية:

$$\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k} \quad , \quad \vec{B} = \hat{i} - 4\hat{k} \quad , \quad \vec{C} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$

المتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ تكون مترابطة خطياً ، إذا كان هناك مجموعة أعداد قياسية

a, b, c ليست كلها أصفاراً بحيث أن:

$$a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C} = 0 \quad \text{_____ (1)}$$

بتطبيق العلاقة (١) على المتجهات المعطاه:

$$\therefore a(2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) + b(\hat{i} - 4\hat{k}) + c(4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$$

$$\therefore (2a + b + 4c)\hat{i} + (a + 3c)\hat{j} + (-3a - 4b - c)\hat{k} = 0$$

وحيث أن $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ غير متوازية ، فمن نظرية (١):

$$2a + b + 4c = 0 \quad , \quad a + 3c = 0 \quad , \quad 3a + 4b + c = 0$$

وبحل هذه المعادلات الثلاث نجد أن :

$$a = -3 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad c = 1$$

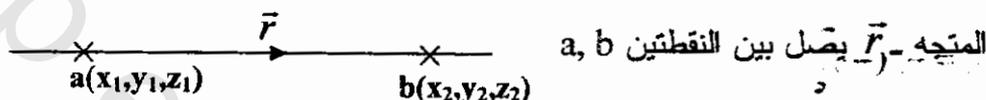
أي أن مجموعة الأعداد a, b, c ليست كلها أصفاراً وبالتالي فإن

المتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ المعطاه تكون مرتبطة خطياً .

وهو المطلوب .

تطبيقات هندسية

١- إيجاد المتجه الواصل بين نقطتين في الفراغ:



$$\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

وتكون المسافة بين النقطتين a, b هي:

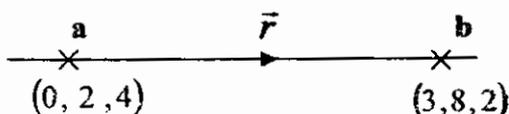
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

مثال عددي:

أوجد للمتجه الواصل بين النقطتين a, b اللتين إحداثياتهما هما:

$$a = (0, 2, 4), \quad b = (3, 8, 2)$$

الحل:



$$\vec{r} = \vec{ab}$$

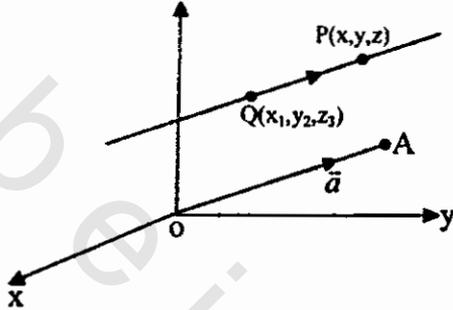
حيث:

$$\vec{r} = (3-0)\hat{i} + (8-2)\hat{j} + (2-4)\hat{k} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

المسافة بين a, b هي:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$$

٢- المعادلات البارامترية لمستقيم يمر بالنقطة $Q(x_1, y_1, z_1)$



ويوازي المتجه $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$:

نأخذ نقطة $p(x, y, z)$ على المستقيم

فحيث أن المستقيم مواز للمتجه \vec{a} فإن :

$$\overline{QP} = \lambda \overline{OA} \text{ حيث } \lambda \text{ عدد قياسي .}$$

وفي صورة إتجاهية :

$$(x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k} = \lambda (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$$

بمساواة معاملات $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$:

$$x - x_1 = \lambda a_1 \longrightarrow x = x_1 + \lambda a_1 \quad \text{_____ (1)}$$

$$y - y_1 = \lambda a_2 \longrightarrow y = y_1 + \lambda a_2 \quad \text{_____ (2)}$$

$$z - z_1 = \lambda a_3 \longrightarrow z = z_1 + \lambda a_3 \quad \text{_____ (3)}$$

المعادلات (1)، (2)، (3) هي المعادلات البارامترية المطلوبة .

مثال عددي:

أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطة $Q(5, -2, 4)$ ويوازي المتجه

$$\vec{a}(3, 12, -4)$$

الحل: المعادلات البارامترية هي :

$$x = x_1 + \lambda a_1, \quad y = y_1 + \lambda a_2, \quad z = z_1 + \lambda a_3$$

$$x = 5 + 3\lambda, \quad y = -2 + 12\lambda, \quad z = 4 - 4\lambda \quad \text{أي :}$$

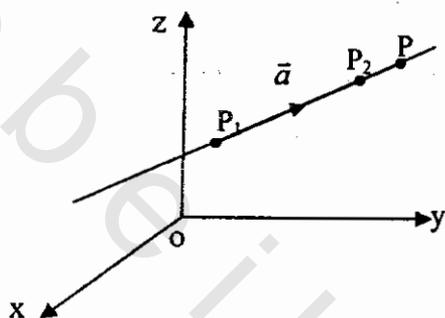
ملحوظة : يمكن كتابة هذه المعادلات بالصورة الآتية :

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{12} = -\frac{z-4}{4}$$

جبر المتجهات

٣- المعادلات البارامترية لمستقيم يمر بنقطتين اختياريتين P_1, P_2 :

نفرض النقطتين $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ولتكن $p(x, y, z)$



نقطة ما على المستقيم

$$\therefore \overline{P_1P} = \lambda \overline{P_1P_2}$$

وفي صورة إتجاهية :

$$(x-x_1)\hat{i} + (y-y_1)\hat{j} + (z-z_1)\hat{k}$$

$$= \lambda [(x_2-x_1)\hat{i} + (y_2-y_1)\hat{j} + (z_2-z_1)\hat{k}]$$

بمقارنة معاملات $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$:

$$\therefore x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \longrightarrow x = x_2 + \lambda(x_2 - x_1) \quad (1)$$

$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1) \longrightarrow y = y_2 + \lambda(y_2 - y_1) \quad (2)$$

$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) \longrightarrow z = z_2 + \lambda(z_2 - z_1) \quad (3)$$

المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) هي المعادلات البارامترية للمستقيم .

مثال عددي: أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطتين:

$$P_1(3,1,-2) , P_2(-2,7,-4)$$

الحل: نوجد المتجه :

$$\overline{P_1P_2} = (-2-3)\hat{i} + (7-1)\hat{j} + (-4+2)\hat{k} = -5\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

وبأخذ $p(x,y,z)$ نقطة ما على المستقيم فنكون المعادلات المطلوبة هي :

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \longrightarrow x = 3 + \lambda(-5) = 3 - 5\lambda$$

$$y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \longrightarrow y = 1 + \lambda(6) = 1 + 6\lambda$$

$$z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \longrightarrow z = -2 + \lambda(-2) = -2 - 2\lambda$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات بالصورة :

$$-\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{6} = -\frac{z-2}{2} \rightarrow \frac{x-3}{5} = -\frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{2}$$

٤- معادلة المستقيم الذي يمر بنقطتين معلوم متجهي موضعهما:

لإيجاد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين A, B اللذان متجهها موضعهما \vec{a}, \vec{b} وذلك بالصورة :

$$\vec{r} = \frac{m\vec{a} + n\vec{b}}{m+n}$$

حيث \vec{r} متجه موضع أي نقطة على المستقيم ، m, n عدنان قياسيان .

الإثبات: يعرف متجه الموضع لأي نقطة بأنه المتجه الواصل من نقطة الأصل إلى

النقطة ، فبأخذ المستقيم المار بالنقطتين A, B اللذان متجهها موضعهما \vec{a}, \vec{b} بالنسبة لنقطة الأصل O ، وأخذ المتجه \vec{r} هو متجه موضع أي نقطة C على المستقيم .

فمن المثلث OCA :

$$\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$$

$$\therefore \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{r} - \vec{a} \quad (1)$$

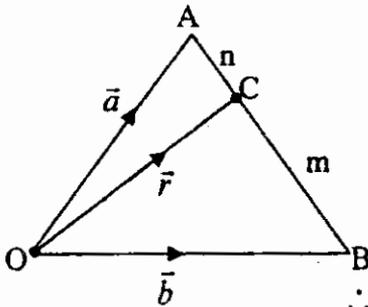
ومن المثلث OAB :

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

$$\therefore \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a} \quad (2)$$

$$\vec{OB} = \vec{r} + \vec{CB} \quad \text{ولكن}$$

$$\therefore \vec{CB} = \vec{OB} - \vec{r} = \vec{b} - \vec{r} \quad (3)$$



جبر المتجهات

نقنع على المستقيم AB فيكون لدينا علاقة خطية تربطهما $\overline{AC}, \overline{CB}$ ، وهذه العلاقة يمكن كتابتها بالصورة :

$$m\overline{AC} = n\overline{CB} \quad \text{--- (4)} \rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{n}{m}$$

حيث m, n عددين قياسيان .

بالتعويض من (1) ، (3) في (4) :

$$\therefore m(\vec{r} - \vec{a}) = n(\vec{b} - \vec{r})$$

$$\therefore (m+n)\vec{r} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

$$\therefore \vec{r} = \frac{m\vec{a} + n\vec{b}}{m+n} \quad \text{--- (I)}$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة بالصورة :

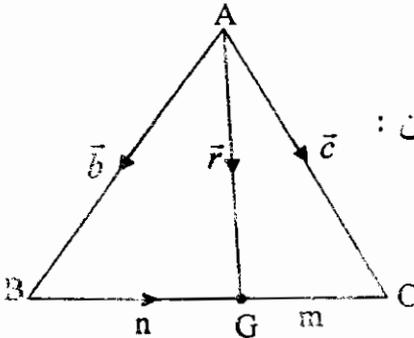
$$m\vec{a} + n\vec{b} = (m+n)\vec{r} \quad \text{--- (II)}$$

وهو المطلوب .

مثال: إذا كانت نقطة G الواقعة على قاعدة المثلث ABC تقسم تلك القاعدة بحيث

أن : $m BG = n GC$ ، فأثبت أن :

$$m(BG)^2 + n(CG)^2 + (m+n)(AG)^2 = m(AB)^2 + n(AC)^2$$



الحل: نأخذ A كنقطة أصل ، وبفرض أن \vec{b}, \vec{c} :

هما متجها موضع B, C على التوالي ، وحيث أن :

$m BG = n GC$ فإن :

$$\frac{BG}{GC} = \frac{n}{m} \rightarrow BG : GC = n : m$$

ومن العلاقة (I) : إذا كانت \vec{r} هي متجه موضع نقطة G فإن :

$$\frac{+n\vec{c}}{m+n} \quad \text{--- (1)}$$

ولنأخذ الطرف الأيسر من العلاقة المطلوب إثباتها :

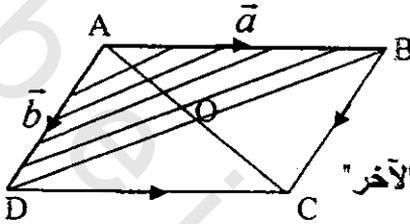
$$\begin{aligned} L.H.S. &= m(BG)^2 + n(CG)^2 + (m+n)(AG)^2 \\ &= m(\overline{BG})^2 + n(\overline{CG})^2 + (m+n)(\overline{AG})^2 \\ &= m(\overline{BA} + \overline{AG})^2 + n(\overline{CA} + \overline{AG})^2 + (m+n)(\overline{AG})^2 \\ &= m(-\vec{b} + \vec{r})^2 + n(-\vec{c} + \vec{r})^2 + (m+n)(\vec{r})^2 \\ &= m\left[-\vec{b} + \frac{m\vec{b} + n\vec{c}}{m+n}\right]^2 + n\left[-\vec{c} + \frac{m\vec{b} + n\vec{c}}{m+n}\right]^2 + (m+n)\left[\frac{m\vec{b} + n\vec{c}}{m+n}\right]^2 \\ &= m\left[\frac{-\vec{b}(m+n) + (m\vec{b} + n\vec{c})}{m+n}\right]^2 + n\left[\frac{-\vec{c}(m+n) + (m\vec{b} + n\vec{c})}{m+n}\right]^2 + (m+n)\left[\frac{m\vec{b} + n\vec{c}}{m+n}\right]^2 \\ &= \frac{1}{(m+n)^2} \left[mn^2(\vec{c} - \vec{b})^2 + nm^2(\vec{b} - \vec{c})^2 + (m+n)(m\vec{b} + n\vec{c})^2 \right] \\ &= \frac{1}{(m+n)^2} \left[mn(m+n)(\vec{b} - \vec{c})^2 + (m+n)(m\vec{b} + n\vec{c})^2 \right] \\ &= \frac{1}{m+n} \left[mn \left\{ \vec{b}^2 - 2(\vec{b} \cdot \vec{c}) + \vec{c}^2 \right\} + m^2\vec{b}^2 + 2mn(\vec{b} \cdot \vec{c}) + n^2\vec{c}^2 \right] \\ &= \frac{1}{m+n} \left[m(m+n)\vec{b}^2 + n(m+n)\vec{c}^2 \right] \\ &= m\vec{b}^2 + n\vec{c}^2 = m(b)^2 + n(c)^2 \\ &= m(AB)^2 + n(AC)^2 = R.H.S. \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

جبر المتجهات

٥- تطبيقات المتجهات في الهندسة الإقليدية:

يمكن استخدام المتجهات في إثبات بعض النظريات في الهندسة الإقليدية كما في الأمثلة الآتية:



مثال (١):

باستخدام المتجهات أثبت أن:

"قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر"

الإثبات:

نفرض أن القطرين AC, DB يتقاطعان عند O ، وأن:

$$\overline{AB} = \vec{a}, \overline{AD} = \vec{b}$$

القطر AC:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \vec{a} + \vec{b} \quad \rightarrow (1)$$

القطر DB:

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} - \overline{DB} \\ \therefore \overline{DB} &= \overline{AB} - \overline{AD} = \vec{a} - \vec{b} \quad \rightarrow (2) \end{aligned}$$

حيث: $\overline{BD} = -\overline{DB}$

أيضا: إذا كانت λ, μ أعدادا قياسية فإن:

$$\overline{AO} = \lambda(\overline{AC}) = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overline{DO} = \mu(\overline{DB}) = \mu(\vec{a} - \vec{b})$$

ومن ΔAOD نجد أن :

$$\overline{AO} = \overline{AD} + \overline{DO}$$

$$\therefore \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} + \mu(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\therefore (\lambda - \mu)\vec{a} = (1 - \mu - \lambda)\vec{b}$$

جبر المتجهات

ولكن \vec{a} ، \vec{b} متجهان غير متوازيان، فإن:

$$\lambda - \mu = 0$$

$$1 - \mu - \lambda = 0$$

بحل المعادلتين:

$$\lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \vec{AO} = \lambda(\vec{AC}) = \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$\vec{DO} = \mu(\vec{DB}) = \frac{1}{2}\vec{DB}$$

أي أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر، وهو المطلوب.

مثال (٢):

باستخدام المتجهات اثبت أن:

" المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي

نصفه "

الإثبات:

في المثلث ABC المستقيم DE يصل بين

منتصفي الضلعين AB, BC وبأخذ:

$$\vec{AC} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}, \vec{DE} = \vec{c}, \vec{BC} = \vec{d}$$

نكون العلاقات الاتجاهية الآتية:

من الشكل:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\therefore \vec{a} = \vec{b} + \vec{d} \quad \rightarrow (1)$$

جبر المتجهات

أيضاً:

$$\begin{aligned}\overline{DE} &= \overline{DB} + \overline{BE} \\ \therefore \vec{c} &= \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) \quad \rightarrow (2)\end{aligned}$$

حيث :

$$\begin{aligned}\overline{DB} &= \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overline{BE} &= \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}\vec{d}\end{aligned}$$

من (١) و (٢) نحصل على:

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} \quad \rightarrow (3)$$

$$|\vec{c}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AC \quad \rightarrow (4)$$

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} \quad \leftarrow (3)$$

$$\therefore \vec{c} \parallel \vec{a} \quad \rightarrow (5)$$

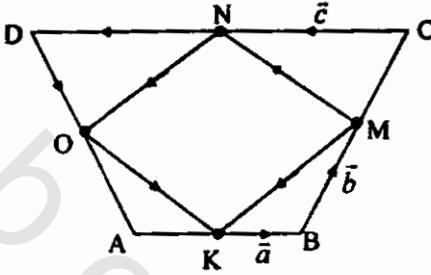
من (٤) و (٥) ينتج أن:

المستقيم DE الواصل بين منتصفي الضلعين AB, BC في المثلث ABC يوازي الضلع الثالث AC ويساوي نصفه في الطول ، وهو المطلوب .

مثال (٣): باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية :

" إذا وصلت منتصفات الأضلاع المتتالية لشكل رباعي بمستقيمات فإن الشكل الرباعي الناتج يكون متوازي الأضلاع " .

الإثبات:



إذا كان لدينا المتجهات الأربع

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ تشكل مضلعاً مقللاً فإن :

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0 \quad \text{_____ (1)}$$

وبفرض أن ABCD هو الشكل الرباعي المعطى ، وأن K, M, N, O هي منتصفات أضلاعه المتتالية ، فيتوصل هذه المنتصفات بالمستقيمات المبينة بالشكل ، وكتابة :

$$\overline{AB} = \vec{a}, \overline{BC} = \vec{b}, \overline{CD} = \vec{c}, \overline{DA} = \vec{d}$$

أيضاً فإن :

$$\overline{KB} = \frac{1}{2} \vec{a}, \quad \overline{BM} = \frac{1}{2} \vec{b}$$

ومن هندسة الشكل نجد أن :

$$\overline{KM} = \overline{KB} + \overline{BM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \text{_____ (2)}$$

$$\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CN} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{_____ (3)}$$

$$\overline{NO} = \overline{ND} + \overline{DO} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) \quad \text{_____ (4)}$$

$$\overline{OK} = \overline{OA} + \overline{AK} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a}) \quad \text{_____ (5)}$$

ومن (1) :

$$(\vec{a} + \vec{b}) = -(\vec{c} + \vec{d}) \quad \text{_____ (6)}$$

$$(\vec{b} + \vec{c}) = -(\vec{a} + \vec{d}) \quad \text{_____ (7)}$$

جبر المتجهات

بالتعويض من (٦) ، (٧) في (٢) ، (٣) واستخدام (٤) ، (٥) :

$$\therefore \overline{KM} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b}) = -\frac{1}{2}(\overline{c} + \overline{d}) = -\overline{NO} = \overline{ON} \quad \text{--- (8)}$$

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{b} + \overline{c}) = -\frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{d}) = -\overline{OK} = \overline{KO} \quad \text{--- (9)}$$

من (٨) ، (٩) نجد أن: $MN = KO$ (وبتوازيه) ، $KM = ON$ (وبتوازيه)
وهذا يعني أن الشكل $KMON$ هو متوازي أضلاع ، وهو المطلوب .

أمثلة متنوعة

قبل البدء في حل هذه الأمثلة نورد ما يلي:

من العلاقة (I) في للبند السابق وهي:

$$\overline{r} = \frac{m\overline{a} + n\overline{b}}{m+n}$$

$$\therefore m\overline{a} + n\overline{b} = (m+n)\overline{r}$$

وهذا يعني أنه إذا كانت d تقسم CB

$$\text{بنسبة } m:n \left(\frac{dC}{Bd} = \frac{m}{n} \right)$$

وكانت $\overline{AC} = \overline{b}$ ، $\overline{AB} = \overline{a}$ وكانت \overline{r} متجه موضع d فإن:

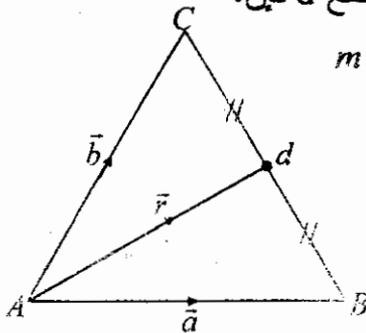
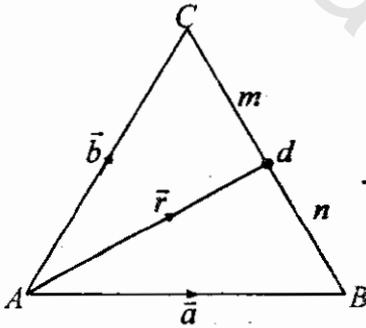
$$m\overline{a} + n\overline{b} = (m+n)\overline{r}$$

وكحالة خاصة:

إذا كانت d في منتصف CB فإن $m = n$

$$\therefore m\overline{a} + n\overline{b} = (n+n)\overline{r}$$

$$\therefore \overline{a} + \overline{b} = 2\overline{r} \rightarrow \overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{Ad}$$



جبر المتجهات

ونستخدم هذه العلاقة كثيراً في حل المسائل ويتضح ذلك في بعض الأمثلة التالية.

مثال (1): باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية:

" المستقيمان الواصلان من رأس متوازي الأضلاع إلى منتصف الضلعين المقابلين يقسمان القطر إلى ثلاثة أقسام متساوية " .

الحل:

نفرض أن $abcd$ متوازي أضلاع فيه e, f منتصفا الضلعين bc, cd وليكن

$$\vec{ab} = \vec{A}, \vec{ad} = \vec{B}$$

$$\text{والمطلوب إثبات أن: } \vec{hg} = \frac{1}{3}\vec{db}, \vec{dg} = \frac{1}{3}\vec{db}$$

أي أن $dg = gh = hb$

من المثلث abe :

$$\vec{ae} = \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B} \quad (1)$$

المتجه ah في إتجاه المتجه ae

ولذلك فإن:

$$\vec{ah} = \lambda \vec{ae} = \lambda \left(\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B} \right)$$

$$\quad (2)$$

حيث λ عدد قياسي .

بالمثل: فإن:

$$\vec{ab} = \vec{A} - \vec{B}$$

$$\quad (3)$$

$$\vec{hb} = \mu \vec{db} = \mu (\vec{A} - \vec{B})$$

$$\quad (4)$$

حيث μ عدد قياسي.

جبر المتجهات

من المثلث abh :

$$\vec{A} = \vec{ab} = \vec{ah} + \vec{hb} = \lambda(\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}) + \mu(\vec{A} - \vec{B})$$

$$\therefore (\lambda + \mu - 1)\vec{A} + (\frac{\lambda}{2} - \mu)\vec{B} = 0 \quad \text{_____ (5)}$$

وحيث أن \vec{A}, \vec{B} متجهان غير متوازيين فإن:

$$\lambda + \mu - 1 = 0 \quad \text{_____ (6)}$$

$$\frac{\lambda}{2} - \mu = 0 \quad \text{_____ (7)}$$

من (7):

$$\lambda = 2\mu \quad \text{_____ (8)}$$

بالتعويض في (6):

$$2\mu + \mu - 1 = 0 \rightarrow \mu = \frac{1}{3} \quad \text{_____ (9)}$$

$$\therefore \lambda = \frac{2}{3} \quad \text{وبالتعويض في (8):}$$

$$\therefore \vec{hb} = \mu \vec{db} = \frac{1}{3} \vec{db} \quad \text{_____ (10)}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\vec{dg} = \frac{1}{3} \vec{db} \quad \text{_____ (11)}$$

ومن (11)، (10) نجد أن:

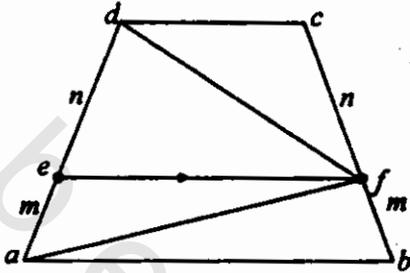
$$hb = dg = gh$$

أي أن المستقيمان الواصلان من رأس متوازي الأضلاع إلى منتصف الضلعين المقابلين يقسمان القطر إلى 3 أقسام متساوية. وهو المطلوب.

مثال (٢): $abcd$ شكل رباعي فيه e, f نقطتان على ad, bc على الترتيب بحيث

$$\text{أن: } \frac{ae}{ed} = \frac{bf}{fc} = \frac{m}{n} \text{، أثبت أن: } n\vec{ab} + m\vec{dc} = (n+m)\vec{ef}$$

الحل:



في الشكل الرباعي abcd نصل df , af

في المثلث afd:

$$n\overline{af} + m\overline{df} = (n+m)\overline{ef} \quad (1)$$

[نظرية]

في المثلث abf:

$$\overline{af} = \overline{ab} + \overline{bf} \quad (2)$$

في المثلث dcf:

$$\overline{df} = \overline{dc} + \overline{cf} \quad (3)$$

بالتعويض من (2) , (3) في (1):

$$n\overline{ab} + n\overline{bf} + m\overline{dc} + m\overline{cf} = (n+m)\overline{ef} \quad (4)$$

ولكن:

$$\frac{bf}{fc} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n\overline{bf} = m\overline{fc} = -m\overline{cf}$$

$$\therefore n\overline{bf} + m\overline{cf} = 0$$

$$\quad (5)$$

بالتعويض من (5) في (4):

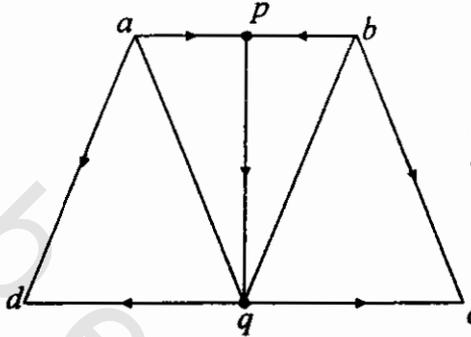
$$\therefore n\overline{ab} + m\overline{dc} = (n+m)\overline{ef}$$

وهو المطلوب.

مثال (٣): شكل رباعي فيه النقطة p منتصف الضلع ab والنقطة q منتصف

$$\overline{ad} + \overline{bc} = 2\overline{pq} \text{ ، أثبت أن : الضلع cd}$$

جبر المتجهات



الحل:

في الشكل apqd :

$$\vec{ad} = \vec{ap} + \vec{pq} + \vec{qd} \quad (1)$$

في الشكل pdcq :

$$\vec{bc} = \vec{bp} + \vec{pq} + \vec{qc} \quad (2)$$

وحيث أن p تقع في منتصف ab فإن:

$$\vec{ap} = -\vec{bp} \quad (3)$$

وحيث أن q تقع في منتصف cd فإن:

$$\vec{qd} = -\vec{qc} \quad (4)$$

بجمع (2) ، (1) واستخدام (4) ، (3) نجد أن:

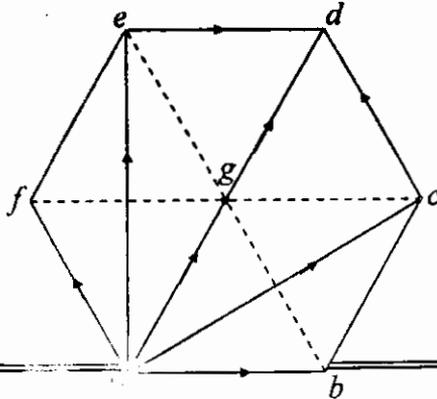
$$\begin{aligned} \vec{ad} + \vec{bc} &= \vec{ap} + \vec{bp} + 2\vec{pq} + \vec{qd} + \vec{qc} \\ &= -\vec{bp} + \vec{bp} + 2\vec{pq} - \vec{qc} + \vec{qc} = 2\vec{pq} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (٤): شكل سداسي منتظم مركزه g أثبت أن:

$$(i) \vec{ab} + \vec{ac} + \vec{ad} + \vec{ae} + \vec{af} = 3\vec{ag}$$

$$(ii) \vec{ab} + \vec{ac} + \vec{ae} + \vec{af} = 4\vec{ag}$$



الحل:

$$\vec{ad} = \vec{ae} + \vec{ed} \quad \text{في المثلث ade}$$

ولكن : $\vec{ed} = \vec{ab}$ (من خواص المسدس)

$$\therefore \vec{ad} = \vec{ae} + \vec{ab} \quad (1)$$

$$\vec{ad} = \vec{ac} + \vec{cd} \quad \text{في المثلث acd}$$

ولكن: $\overline{cd} = \overline{af}$ (من خواص المسدس).

$$\therefore \overline{ad} = \overline{ac} + \overline{af} \quad \text{_____ (2)}$$

بجمع (1), (2):

$$2\overline{ad} = \overline{ae} + \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{af}$$

وبإضافة \overline{ad} للطرفين نحصل على:

$$\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ad} + \overline{ae} + \overline{af} = 3\overline{ad} \quad \text{_____ (i)}$$

ثانياً: نصل cf, be فيتقابلان في g (مركز المسدس).

في المثلث abe :

$$[\text{حيث } eg = gb] \quad \overline{ab} + \overline{ae} = 2\overline{ag} \quad \text{_____ (3)}$$

في المثلث acf :

$$[\text{حيث } fg = gc] \quad \overline{ac} + \overline{af} = 2\overline{ag} \quad \text{_____ (4)}$$

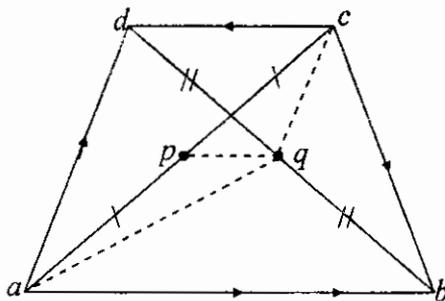
بجمع (3), (4) نجد أن:

$$\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ae} + \overline{af} = 4\overline{ag} \quad \text{_____ (ii)}$$

وهو المطلوب.

مثال (5): شكل رباعي فيه p, q منتصفا ac, bd على الترتيب ، أثبت أن :

$$\overline{ab} + \overline{ad} + \overline{cb} + \overline{cd} = 4\overline{pq}$$



الحل:

نصل aq, cq

$$\overline{ab} + \overline{ad} = 2\overline{aq} \quad \text{_____ (1)}$$

في المثلث cbd :

$$\overline{cb} + \overline{cd} = 2\overline{cq} \quad \text{_____ (2)}$$

جبر المتجهات

بجمع (1),(2)، نحصل على:

$$\overline{ab} + \overline{ad} + \overline{cb} + \overline{cd} = 2(\overline{aq} + \overline{cq}) \quad (3)$$

ومن المثلث acq:

$$\overline{aq} + \overline{cq} = 2\overline{pq} \quad (4)$$

وبالتعويض من (4) في (3):

$$\overline{ab} + \overline{ad} + \overline{cb} + \overline{cd} = 2(2\overline{pq}) = 4\overline{pq}$$

وهو المطلوب.

مثال (٦): إذا كانت a', b', c' هي منتصفات أضلاع المثلث abc وكانت o نقطة

إختيارية خارج المثلث، أثبت أن: $\overline{oa} + \overline{ob} + \overline{oc} = \overline{oa'} + \overline{ob'} + \overline{oc'}$

الحل:

نصل a, b, c وكذلك a', b', c' بالنقطة o .

في المثلث oab :

$$\overline{oa} + \overline{ob} = 2\overline{oc'} \quad (1)$$

في المثلث obc :

$$\overline{ob} + \overline{oc} = 2\overline{oa'} \quad (2)$$

في المثلث oca :

$$\overline{oc} + \overline{oa} = 2\overline{ob'} \quad (3)$$

بجمع (1),(2),(3):

$$2(\overline{oa} + \overline{ob} + \overline{oc}) = 2(\overline{oa'} + \overline{ob'} + \overline{oc'})$$

$$\therefore \overline{oa} + \overline{ob} + \overline{oc} = \overline{oa'} + \overline{ob'} + \overline{oc'}$$

وهو المطلوب.

ضرب المتجهات:

(١) ضرب كميته قياسية في متجه: إذا كانت λ كمية قياسية فإن حاصل الضرب

$$(\lambda \vec{A}) \text{ هو : متجه طوله } \lambda \text{ مره قدر } \vec{A} \text{ وفي اتجاه } \vec{A} .$$

(٢) ضرب متجه في متجه: يوجد لدينا حالتان :

[٢] حاصل الضرب كمية متجهه

$$(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

(حاصل ضرب اتجاهي)

[١] حاصل الضرب كمية قياسية

$$(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

(حاصل ضرب قياسي)

أولاً: حاصل الضرب القياسي :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 0 \text{ تعريف}$$

واضحاً من التعريف أن: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

أيضاً: الزاوية θ بين المتجهين:

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} \text{ من العلاقة السابقة:}$$

شرط تعامد متجهين: $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

ضرب متجه في نفسه قاسياً:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AA \cos 0 = A^2$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

جبر المتجهات

حاصل الضرب $\vec{A} \cdot \vec{B}$ بدلالة المركبات:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

مسقط متجه على متجه آخر:

مسقط \vec{A} على \vec{B} هو:

$$p = cd = ag = ab \cos \theta$$

$$= |\vec{A}| \cos \theta = |\vec{A}| \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \right)$$

$$\therefore P = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = \vec{A} \cdot \hat{b}$$

حيث: $\hat{b} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$ هو متجه وحده في اتجاه \vec{B} .

أي أن مسقط المتجه \vec{A} على المتجه \vec{B} يساوي حاصل الضرب القياسي

للمتجه \vec{A} في متجه الوحدة في اتجاه \vec{B} .

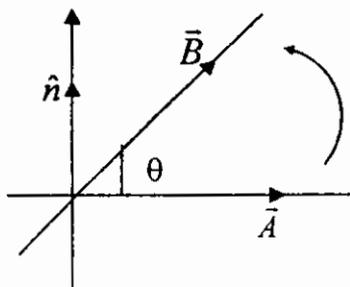
ثانياً: حاصل الضرب الاتجاهي:

تعريف:

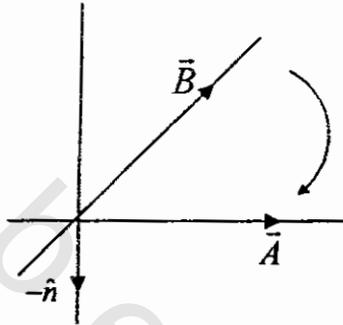
$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (AB \sin \theta) \hat{n}$$

وحده في اتجاه المتجه $\vec{A} \wedge \vec{B}$ الذي

هو الاتجاه العمودي على كل من \vec{A}, \vec{B} .



الاتجاه اليميني ضد عقارب الساعة



الاتجاه اليساري مع عقارب الساعة

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = AB \sin \theta \hat{n}$$

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = |AB \sin \theta \hat{n}| = AB \sin \theta$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{|\vec{A} \wedge \vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

$$|\hat{n}| = 1$$

$$\theta = 0, \pi$$

$$\sin \theta = 0 \rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = 0$$

$$\vec{A} \wedge \vec{A} = (AA \sin 0) \hat{n} = 0$$

$$\therefore \vec{A} \wedge \vec{A} = 0$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

أيضاً :

$$\begin{aligned} \vec{B} \wedge \vec{A} &= (AB \sin \theta)(-\hat{n}) \\ &= -AB \sin \theta \hat{n} = -\vec{A} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$$

الزاوية بين المتجهين:

من العلاقة:

فإن مقدار $(\vec{A} \wedge \vec{B})$ هو:

شروط توازي متجهين:

ضرب متجه في نفسه اتجاهياً:

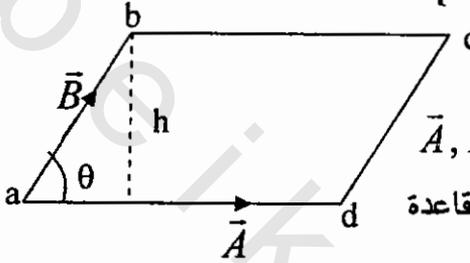
حاصل الضرب $\vec{A} \wedge \vec{B}$ بدلالة المركبات :

يكتب في صورة المحدد الآتي :

المعنى الهندسي لحاصل الضرب $\vec{A} \wedge \vec{B}$:

يمكن إثبات أن المقدار $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه \vec{A}, \vec{B} ضلعان متجاوران.

[ويعرف هذا بالمعنى الهندسي لـ $\vec{A} \wedge \vec{B}$]



الإثبات:

نرسم متوازي الأضلاع abcd الذي فيه \vec{A}, \vec{B} ضلعان متجاوران. ونسقط العمود h على القاعدة ad فيكون هو الارتفاع

$$h = ab \sin \theta = |\vec{B}| \sin \theta$$

مساحة متوازي الأضلاع: الارتفاع \times طول القاعدة = S

$$\therefore S = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \sin \theta = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta = |\vec{A} \wedge \vec{B}|$$

وهو المطلوب.

أمثلة محلولة

مثال (1):

أثبت أن المتجه \vec{a} يكون عموديا على المتجه \vec{b} إذا كان:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

الحل: حيث أن :

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

بتربيع الطرفين:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$$

$$\therefore (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b})$$

$$\therefore a^2 + \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{a} + b^2 = a^2 - \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{b} \cdot \bar{a} + b^2$$

$$\therefore a^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + b^2 = a^2 - 2\bar{a} \cdot \bar{b} + b^2$$

$$\therefore 4(\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0 \rightarrow (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0$$

وهذا يعني أن \bar{a}, \bar{b} يكونان متعامدين . وهو المطلوب.

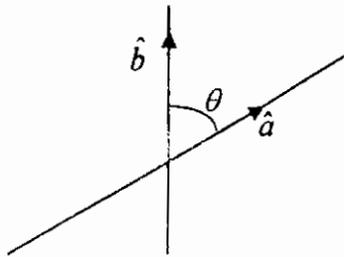
مثال (٢):

إذا كان \hat{a}, \hat{b} متجهي وحدة ، وكانت θ هي الزاوية بينهما، فاثبت أن:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\hat{a} - \hat{b}|$$

الحل:

$$\begin{aligned} |\hat{a} - \hat{b}|^2 &= (\hat{a} - \hat{b}) \cdot (\hat{a} - \hat{b}) \\ &= \hat{a} \cdot \hat{a} - \hat{a} \cdot \hat{b} - \hat{b} \cdot \hat{a} + \hat{b} \cdot \hat{b} \\ &= a^2 - 2(\hat{a} \cdot \hat{b}) + b^2 = 2 - 2(\hat{a} \cdot \hat{b}) \\ &= 2[1 - (\hat{a} \cdot \hat{b})] = 2[1 - \cos \theta] \\ &= 2[2 \sin^2 \frac{\theta}{2}] = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \therefore |\hat{a} - \hat{b}| &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{2} |\hat{a} - \hat{b}| \end{aligned}$$

جبر المتجهات

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = |\hat{a}| |\hat{b}| \cos \theta = \cos \theta$$

حيث :

$$|\hat{a}| = 1, |\hat{b}| = 1, a^2 = 1, b^2 = 1, \hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{b} \cdot \hat{a}$$

وهو المطلوب.

مثال (٣):

$$(i) \quad |\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = a^2 b^2$$

أثبت العلاقات الآتية:

$$(ii) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2$$

$$(iii) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \wedge (\vec{a} - \vec{b}) = 2(\vec{b} \wedge \vec{a})$$

$$(iv) \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

الحل:

$$(i) \quad |\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = (ab \sin \theta)^2 + (ab \cos \theta)^2$$

$$= a^2 b^2 \sin^2 \theta + a^2 b^2 \cos^2 \theta$$

$$= a^2 b^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = a^2 b^2$$

وتعرف هذه العلاقة بمتطابقة لاجرانج.

$$(ii) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= a^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(iii) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \wedge (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \wedge \vec{a} - \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{b} \wedge \vec{a} - \vec{b} \wedge \vec{b}$$

$$= -\vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{b} \wedge \vec{a}$$

$$= \vec{b} \wedge \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{a}$$

$$= 2(\vec{b} \wedge \vec{a})$$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{a} \wedge \vec{a} = 0 \\ \vec{b} \wedge \vec{b} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{a} \wedge \vec{a} = 0 \\ \vec{b} \wedge \vec{b} = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2 \\ &= a_x^2 + 2a_x b_x + b_x^2 + a_y^2 + 2a_y b_y + b_y^2 + a_z^2 \\ &\quad + 2a_z b_z + b_z^2 \end{aligned} \quad \text{_____ (1)}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2 \\ &= a_x^2 - 2a_x b_x + b_x^2 + a_y^2 - 2a_y b_y + b_y^2 + a_z^2 \\ &\quad - 2a_z b_z + b_z^2 \end{aligned} \quad \text{_____ (2)}$$

من (1) ، (2) بالطرح نحصل على :

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 4a_x b_x + 4a_y b_y + 4a_z b_z \\ &= 4(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (4):

$$\vec{A} = (2, 1, 1), \vec{B} = (1, 3, 5)$$

أوجد مسقط كل من المتجهين :

على الآخر، ثم أوجد الزاوية المحصورة بينهما .

الحل:

$$\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \quad , \quad \vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$w_1 = \vec{A} \cdot \hat{b}$$

مسقط \vec{A} على \vec{B} هو :

$$\hat{b} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2}} = \frac{\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{35}}$$

$$\therefore w_1 = (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot \left(\frac{\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{35}} \right) = \frac{2+3+5}{\sqrt{35}} = \frac{10}{\sqrt{35}}$$

جبر المتجهات

وبالمثل: مسقط \vec{B} على \vec{A} هو :

$$w_2 = \vec{B} \cdot \hat{a}$$

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore w_2 = (\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) \cdot \left(\frac{2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}} \right) = \frac{2+3+5}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

ولإيجاد الزاوية المحصورة بين \vec{A} و \vec{B} :

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{\vec{A}}{A} \cdot \frac{\vec{B}}{B} = \hat{a} \cdot \hat{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \left(\frac{2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}} \right) \cdot \left(\frac{\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{35}} \right) \\ &= \frac{2 + 3 + 5}{\sqrt{210}} = \frac{10}{\sqrt{210}} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (٥):

باستخدام المعنى الهندسي لحاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين، أوجد مساحة المتثل الذي رؤوسه النقاط الآتية:

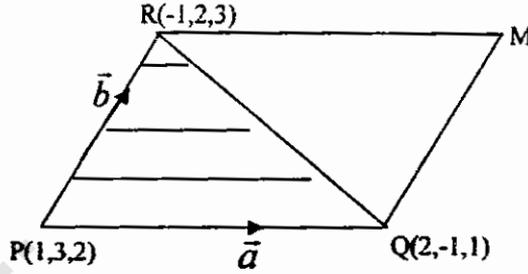
$$P(1,3,2) \quad , \quad Q(2,-1,1) \quad , \quad R(-1,2,3)$$

الحل:

من المعنى الهندسي لحاصل الضرب الاتجاهي :

إذا كان \vec{a}, \vec{b} ضلعان متجاوران في متوازي الأضلاع فإن $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع.

المثلث PRQ هو نصف متوازي الأضلاع PRQM



فإذا كان: $\overline{PQ} = \vec{a}$ ، $\overline{PR} = \vec{b}$ ضلعان متجاوران في متوازي الأضلاع
فإن مساحته هي: $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$ ، وتكون مساحة المثلث PRQ هي :

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \wedge \vec{b}|$$

والآن: نوجد \vec{a}, \vec{b} كمتجهين :

$$\vec{a} = (2-1)\hat{i} + (-1-3)\hat{j} + (1-2)\hat{k} = \hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{b} = (-1-1)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (3-2)\hat{k} = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5\hat{i} + \hat{j} - 9\hat{k}$$

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-9)^2} = \sqrt{107}$$

وتصبح مساحة المثلث المطلوبة :

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \wedge \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{107}$$

وهو المطلوب.

جبر المتجهات

مثال (٦): باستخدام المتجهات أوجد جيوب تمام الزوايا الداخلية للمثلث الذي رؤوسه هي:

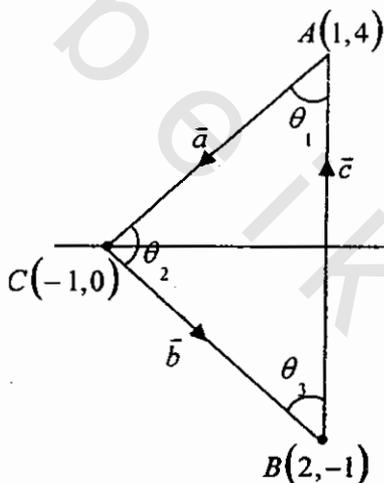
$$A(1,4), B(2,-1), C(-1,0)$$

الحل:

نفرض أن المتجهات الممثلة لأضلاع المثلث هي :

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA}$$

حيث :



$$\vec{a} = (-1-1)\hat{i} + (0-4)\hat{j} = 2\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$\vec{b} = [2 - (-1)]\hat{i} + [-1 - 0]\hat{j} = 3\hat{i} - \hat{j}$$

$$\vec{c} = [1 - 2]\hat{i} + [4 - (-1)]\hat{j} = -\hat{i} + 5\hat{j}$$

$$\therefore |\vec{a}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

وتكون جيوب تمام الزوايا الداخلية للمثلث هي:

$$\cos \theta_1 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|} = \frac{(-2)(-1) + (-4)(5)}{(2\sqrt{5})(\sqrt{26})} = \frac{2-20}{2\sqrt{130}} = -\frac{9}{\sqrt{130}}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{(-2)(3) + (-4)(-1)}{(2\sqrt{5})(\sqrt{10})} = \frac{-6+4}{2\sqrt{50}} = \frac{-1}{\sqrt{50}} = \frac{-1}{5\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| |\vec{c}|} = \frac{(3)(-1) + (-1)(5)}{(\sqrt{10})(\sqrt{26})} = \frac{-3-5}{\sqrt{260}} = \frac{-8}{\sqrt{4 \times 65}} = \frac{-4}{\sqrt{65}}$$

وهو المطلوب .

مثال (٧):

(أ) إذا كان $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ فأثبت أن: $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{c} \wedge \vec{a}$

(ب) إذا كان $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ وكانت: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 7$

فأثبت أن الزاوية θ بين \vec{a}, \vec{b} تساوي $\pi/3$.

الحل:

(أ) حيث أن: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ فإن:

$$\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \quad (1)$$

وبالضرب إتجاهياً في \vec{a} :

$$\vec{a} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} \wedge \vec{c}$$

$$\therefore \vec{a} \wedge \vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{a} \wedge \vec{c}$$

$$\therefore \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{a} \quad (2)$$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{a} \wedge \vec{a} = 0 \\ \vec{a} \wedge \vec{c} = -\vec{c} \wedge \vec{a} \end{array} \right.$$

أيضاً: من (١) بالضرب إتجاهياً في \vec{b} :

$$\vec{b} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{b} \wedge \vec{c}$$

$$\therefore \vec{b} \wedge \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{c}$$

$$\therefore -\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{c}$$

$$\therefore \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{b} \wedge \vec{c} \quad (3)$$

من (٢) ، (٣) نجد أن:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{c} \wedge \vec{a}$$

(ب) من (١) بالتربيع:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (-\vec{c})^2$$

جبر المتجهات

$$\therefore a^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2 = c^2$$

$$\therefore a^2 + 2ab\cos\theta + b^2 = c^2$$

$$\therefore 2ab\cos\theta = c^2 - a^2 - b^2 \quad \therefore \cos\theta = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$$

وبالتعويض عن $a=3, b=5, c=7$

$$\therefore \cos\theta = \frac{(7)^2 - (3)^2 - (5)^2}{2 \times 3 \times 5} = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

وهو المطلوب .

مثال (٨):

(أ) أثبت متطابقة كوشي - شوارز الآتية :

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq |\vec{A}| |\vec{B}|$$

(ب) إذا كان حاصل الضرب القياسي بين متجهين \vec{A}, \vec{B} مقداراً سالباً فسي أي ربع تقع الزاوية θ بين المتجهين .

(ج) أوجد الزاوية بين المتجه $\vec{A} = (-\sqrt{6}, 1, -1)$ وبين الإتجاه الموجب لمحور x .

الحل:

(أ) حيث أن :

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| |\cos\theta|$$

وحيث أن $|\cos\theta| \leq 1$ فإن :

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq |\vec{A}| |\vec{B}|$$

وهو المطلوب .

(ب) حيث أن حاصل الضرب $\vec{A} \cdot \vec{B}$ مقداراً سالباً فإن :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta < 0$$

وحيث أن $|\vec{A}| > 0, |\vec{B}| > 0$ [مقادير موجبة] فإن $\vec{A} \cdot \vec{B}$ يكون سالباً إذا كانت $\cos \theta < 0$ وجيب تمام الزاوية θ يكون سالباً في الربع الثاني ، وهذا يعني أن الزاوية θ تقع بين $\pi/2$ و π .

(ج) الزاوية بين \vec{A} والاتجاه الموجب لمحور x هي الزاوية بين \vec{A} و متجه الوحدة \hat{i} ، حيث :

$$\vec{A} \cdot \hat{i} = |\vec{A}| |\hat{i}| \cos \theta = A \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \hat{i}}{A} \quad \text{--- (1)}$$

$$\vec{A} = -\sqrt{6} \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \quad \text{ولكن :}$$

فبالضرب قياسياً في \hat{i} وإعتبار أن :

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1 , \hat{i} \cdot \hat{j} = 0 , \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \hat{i} = -\sqrt{6} (\hat{i} \cdot \hat{i}) + (\hat{i} \cdot \hat{j}) - (\hat{i} \cdot \hat{k}) = -\sqrt{6}$$

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{6+1+1} = \sqrt{8} \quad \text{أيضاً : مقدار } \vec{A} \text{ هو :}$$

بالتعويض في (1) :

$$\cos \theta = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{8}} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنها نجد أن الزاوية θ تعطي من : $\theta = 150^\circ$.

وهو المطلوب .

جبر المتجهات

مثال (٩):

أوجد المركبات الكرتيزية للمتجه \vec{C} العمودي على المتجهين :

$$\vec{A} = (2, -1, -4) \quad , \quad \vec{B} = (3, -1, -1)$$

الحل:

$$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k} \quad , \quad \vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

إذا كانت C_x, C_y, C_z هي المركبات الكرتيزية للمتجه \vec{C} أي أن :

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$$

وكانت \vec{C} عمودية على كل من \vec{A}, \vec{B} فإن :

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = 0 = (C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k})$$

$$\therefore 2C_x - C_y - 4C_z = 0 \quad \text{_____ (1)}$$

$$\vec{C} \cdot \vec{B} = 0 = (C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$$

$$\therefore 3C_x - C_y - C_z = 0 \quad \text{_____ (2)}$$

بضرب (١) $\times 3$ ، (٢) $\times 2$ والطرح:

$$C_y = -10C_z \quad \longrightarrow \quad \therefore C_z = \frac{-C_y}{10} \quad \text{_____ (3)}$$

بالتعويض في (١):

$$C_x = -3C_z \quad \longrightarrow \quad \therefore C_z = \frac{-C_x}{3} \quad \text{_____ (4)}$$

من (٣) ، (٤) نجد أن :

$$\frac{C_x}{-3} = \frac{C_y}{-10} = \frac{C_z}{1} = \lambda \quad (\text{مثلاً})$$

$$\therefore C_x = -3\lambda \quad , \quad C_y = -10\lambda \quad , \quad C_z = \lambda$$

وتكون النسبة بين C_x, C_y, C_z هي:

$$C_x : C_y : C_z = -3 : -10 : 1$$

ولإيجاد القيم الفعلية لكل من C_x, C_y, C_z نختار قيمة معينة لـ λ بحيث تحقق العلاقتين (١)، (٢).

فإذا أخذنا $\lambda = 1$ فإن: $C_x = -3$ ، $C_y = -10$ ، $C_z = 1$:
ومن (١) نجد أن (بالتعويض عن $\lambda = 1$):

$$-6 + 10 - 4 = 0$$

ومن (١) نجد أن (بالتعويض عن $\lambda = 1$):

$$-9 + 10 - 1 = 0$$

$$\therefore \vec{C} = -3\hat{i} - 10\hat{j} - \hat{k}$$

وهو المطلوب .

مثال (١٠):

أثبت المتطابقات الآتية :

$$(i) \quad |\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$$

$$(ii) \quad |\vec{A} - \vec{B}| \geq \left| |\vec{A}| - |\vec{B}| \right|$$

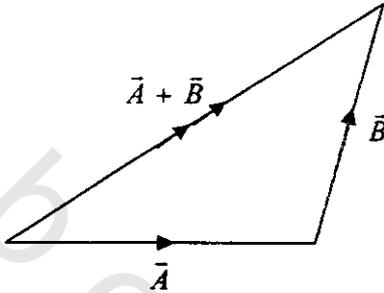
$$(iii) \quad |\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}| + |\vec{C}|$$

الحل:

لإثبات (i):

هندسياً: " حيث أن مجموع أي ضلعين في مثلث يكون أكبر من الضلع الثالث "

$$\therefore |\vec{A}| + |\vec{B}| \geq |\vec{A} + \vec{B}|$$



ومنها :

$$|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$$

ولذلك تسمى هذه العلاقة بالمتباينة المثلثية .

جبرياً :

$$\begin{aligned} |\vec{A} + \vec{B}|^2 &= (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) \\ &= \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} + 2(\vec{A} \cdot \vec{B}) \\ &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A} \cdot \vec{B}| \end{aligned}$$

ولكن : من متباينة كوشي - شولرز :

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq |\vec{A}| |\vec{B}|$$

$$\therefore |\vec{A} + \vec{B}|^2 \leq |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}| |\vec{B}| \leq (|\vec{A}| + |\vec{B}|)^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين :

$$|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}| \quad \text{_____ (1)}$$

لائحة (ii) :

$$\begin{aligned} |\vec{A}| &= |\vec{A} - \vec{B} + \vec{B}| \\ &= |\vec{D} + \vec{B}| \quad , \quad \vec{D} = \vec{A} - \vec{B} \end{aligned}$$

وباستخدام (1) :

$$|\vec{A}| \leq |\vec{D}| + |\vec{B}| \quad \therefore |\vec{D}| \geq |\vec{A}| - |\vec{B}|$$

$$\therefore |\vec{A} - \vec{B}| \geq |\vec{A}| - |\vec{B}| \quad \text{_____ (2)}$$

وليات (iii) : بوضع $\vec{B} + \vec{C} = \vec{D}$ وإستخدام العلاقة (1) :

$$|\vec{A} + \vec{D}| \leq |\vec{A}| + |\vec{D}|$$

ولكن :

$$|\vec{D}| = |\vec{B} + \vec{C}| \leq |\vec{B}| + |\vec{C}|$$

$$\therefore |\vec{A} + \vec{D}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}| + |\vec{C}| \quad \text{_____ (2)}$$

بالتعويض عن \vec{D} :

$$|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}| + |\vec{C}| \quad \text{_____ (3)}$$

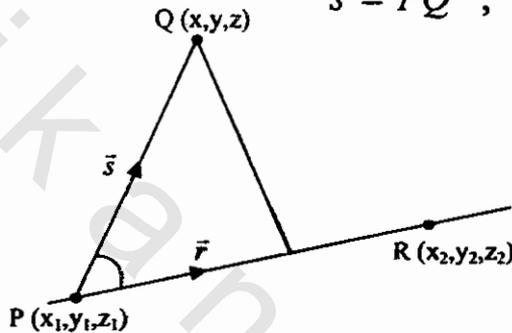
وهو المطلوب .

١- طول العمود النازل من نقطة على مستقيم مار بنقطتين معلومتين:

لإثبات أن طول العمود النازل من النقطة $Q(x,y,z)$ على المستقيم المار

$$L = \frac{|\vec{s} \wedge \vec{r}|}{|\vec{r}|} \quad \text{بالنقطتين } P(x_1, y_1, z_1), R(x_2, y_2, z_2) \text{ هو :}$$

حيث : $\vec{s} = \overline{PQ}$, $\vec{r} = \overline{PR}$



نعتبر المتجهات \vec{s}, \vec{r} ، حيث :

$$\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\vec{s} = (x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}$$

طول العمود النازل من Q على المستقيم المار بالنقطتين P, R هو :

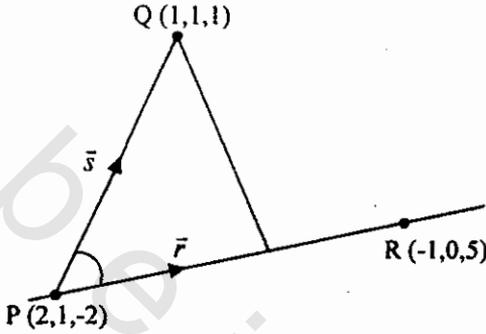
$$L = PQ \sin \theta = |\vec{s}| \sin \theta = \frac{|\vec{s}| |\vec{r}| \sin \theta}{|\vec{r}|} = \frac{|\vec{s} \wedge \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

وهو المطلوب .

مثال عددي : أوجد طول العمود النازل من النقطة $Q(1,1,1)$ على المستقيم المار

بالنقطتين $P(2,1,-2)$ و $R(-1,0,5)$.

الحل :



$$\vec{r} = \overrightarrow{PR} = -3\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\vec{s} = \overrightarrow{PQ} = -\hat{i} + 3\hat{k}$$

$$\therefore \vec{s} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore L = \frac{|\vec{s} \wedge \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 7^2}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{59}}$$

وهو المطلوب .

٢- معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $Q(x_1, y_1, z_1)$ بمعلومية المتجه العمودي

عليه $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$:

نأخذ نقطة $P(x, y, z)$ على امتداد النقطة $Q(x_1, y_1, z_1)$ ونأخذ نقطة

$R(x_2, y_2, z_2)$ بحيث أن \overrightarrow{QR} يكون المتجه \vec{a} العمودي على المستوى.

فمن شرط التعامد :

$$\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP} = 0 \quad (1)$$

فإذا كان :

$$\overrightarrow{QR} = \vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

$$\overrightarrow{QP} = (x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}$$

جبر المتجهات

فبالتعويض في (1) نحصل على معادلة المستوى المار بالنقطة $Q(x_1, y_1, z_1)$ بمعلومية إحداثيات أي نقطة فيه $P(x, y, z)$ والمتجه العمودي \vec{a} .

$$a_1(x - x_1) + a_2(y - y_1) + a_3(z - z_1) = 0 \quad (I)$$

مثال عددي:

أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $Q(5, -2, 4)$ بمعلومية المتجه العمودي عليه والذي مركباته $\vec{a} = (1, 2, 3)$.

الحل:

نأخذ نقطة $P(x, y, z)$ على امتداد Q فتكون معادلة المستوى [العلاقة (I)]:

$$a_1(x - x_1) + a_2(y - y_1) + a_3(z - z_1) = 0$$

$$\therefore 1 \cdot (x - 5) + 2(y - 2) + 3(z - 4) = 0$$

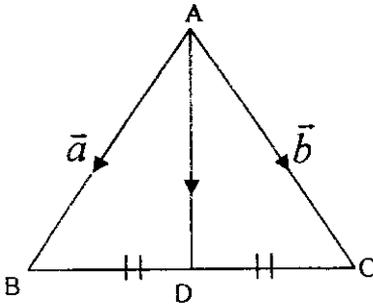
$$\therefore x + 2y + 3z = 13$$

وهي معادلة المستوى المطلوبة.

٣- استخدام الضرب القياسي في إثبات بعض النظريات في الهندسة الإقليدية

مثال (1): باستخدام خواص حاصل الضرب القياسي

أثبت أن: المستقيم المتصّف لقاعدة المثلث المتساوي الساقين يكون عمودياً على القاعدة.



الإثبات:

المثلث ABC فيه $AB = AC$

المستقيم AD ينصف القاعدة BC

المطلوب: إثبات أن $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

أي أن: $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$

وليات ذلك:

نأخذ: $\overline{AC} = \overline{b}$ ، $\overline{AB} = \overline{a}$ بحيث أن: $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ أي أن: $a = b$

من الرسم:

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{a} + \frac{1}{2}\overline{BC} \rightarrow (1)$$

أيضا:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{b} - \overline{a} \rightarrow (2)$$

بالتعويض من (٢) في (١):

$$\overline{AD} = \overline{a} + \frac{1}{2}(\overline{b} - \overline{a}) = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b}) \rightarrow (3)$$

بضرب (٣)، (٢) قياسيا نحصل على:

$$\begin{aligned} \overline{AD} \cdot \overline{BC} &= \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{b} - \overline{a}) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{a} \cdot \overline{a} + \overline{b} \cdot \overline{b} - \overline{b} \cdot \overline{a}) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

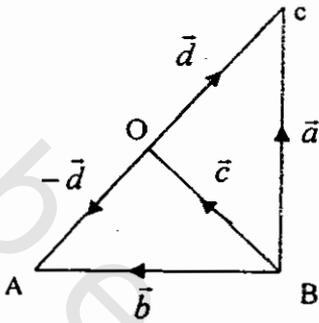
ولكن $a = b$

$$\therefore \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): باستخدام خواص حاصل الضرب القياسي، أثبت أن:

المستقيم الواصل من رأس القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف الوتر.



الحل:

نأخذ المثلث قائم الزاوية في B

المطلوب:

إثبات أن المستقيم BO الواصل

من B إلى O (منتصف الوتر AC)

يساوي نصف الوتر أي : $BO = OC$

الإثبات:

نأخذ: $\overline{BA} = \vec{b}$ ، $\overline{BC} = \vec{a}$ ، $\overline{BO} = \vec{c}$ ، وليكن $\overline{OC} = \vec{d}$ ← $\overline{OA} = -\vec{d}$

من الشكل:

$$\vec{a} = \vec{c} + \vec{d} \quad \rightarrow (1)$$

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{d} \quad \rightarrow (2)$$

وحيث أن المثلث قائم لزاوية في B فإن:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \rightarrow (3)$$

بالتعويض من (٢) ، (١) في (٣) نحصل على:

$$(\vec{c} + \vec{d}) \cdot (\vec{c} - \vec{d}) = 0$$

$$c^2 - \vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{d} \cdot \vec{c} - d^2 = 0$$

$$\therefore c^2 - d^2 = 0$$

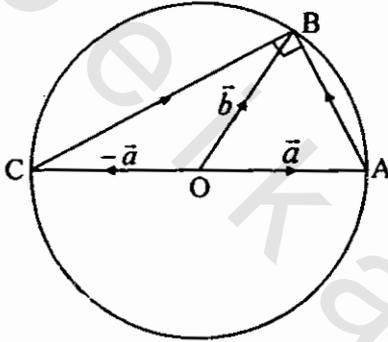
$$\therefore c^2 = d^2 \rightarrow |\vec{c}| = |\vec{d}|$$

$$\therefore BO = OC$$

وهو المطلوب.

مثال (٣): باستخدام المتجهات، اثبت النظرية الهندسية الآتية:
"الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة".

الإثبات: نأخذ B أي نقطة على المحيط والمطلوب إثبات أن :
لزاوية المحيطية \widehat{ABC} هي زاوية قائمة ولإثبات ذلك : نفرض أن:



$$\overrightarrow{OA} = a$$

$$\overrightarrow{OC} = -a, \overrightarrow{OB} = b$$

ومن خواص الدائرة: نصف القطر: $r = a = b$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \quad \text{ومن الرسم :}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = b - a \quad \rightarrow (1)$$

أيضاً:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\therefore \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = b - (-a) = b + a \quad \rightarrow (2)$$

بضرب (٢)، (١) قياسياً:

$$(\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{CB}) = (b - a) \cdot (b + a)$$

$$= b^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - a^2 = b^2 - a^2$$

ولكن $a = b$:

$$\therefore (\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{CB}) = 0$$

أي أن AB , CB يكونان متعامدين، أي أن الزاوية بينهما تكون قائمة .
وهو المطلوب.

جبر المتجهات

تطبيق خواص ضرب للمتجهات في حساب المثلثات:

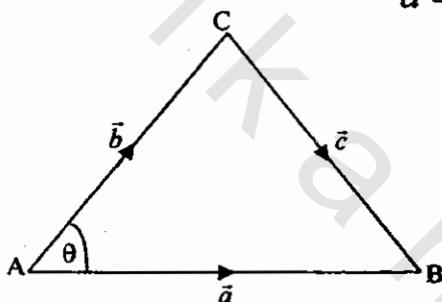
تطبق خواص ضرب للمتجهات في حساب المثلثات المستوية كما يتضح من الأمثلة الآتية:

مثال (1):

أثبت قانون جيب التمام للمثلث المستوي بالصورة:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

حيث: $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$, $c = |\vec{c}|$



الحل:

نرسم المثلث ABC وفيه:

$$\overline{AB} = \vec{a} , \overline{AC} = \vec{b} , \overline{CB} = \vec{c}$$

ولكن θ هي الزاوية بين \vec{a}, \vec{b} .

من الشكل: $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

$$\therefore \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

(1)

بضرب \vec{c} في نفسه قياسياً [باستخدام (1)]:

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\therefore c^2 = a^2 - 2ab \cos \theta + b^2$$

$$\therefore \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = b^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = c^2$$

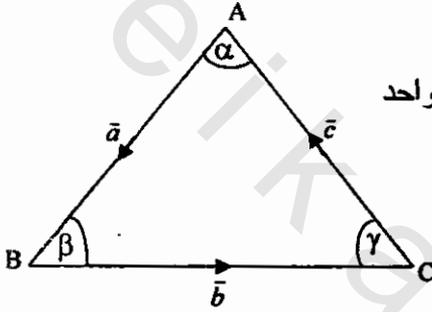
وهو قانون جيب التمام في حساب المثلثات المستوية.

مثال (٢) : أثبت قانون الجيب للمثلث المستوي بالصورة [قانون لامي] :

$$\frac{\sin \alpha}{b} = \frac{\sin \beta}{c} = \frac{\sin \gamma}{a}$$

حيث:

$$a = |\vec{a}| = AB, \quad b = |\vec{b}| = BC, \quad c = |\vec{c}| = CA$$



الحل:

إذا كانت المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ في إتجاه دوري واحد
[بدأنا بنقطة A وإنتهينا بها]

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \quad (1)$$

من (١) بالضرب إتجاهياً في \vec{a} :

$$\vec{a} \wedge \vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} = 0$$

$$\therefore \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{a}$$

(2)

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$$

$$\vec{a} \wedge \vec{c} = -\vec{c} \wedge \vec{a}$$

من (١) أيضاً بالضرب إتجاهاً في \vec{c} :

$$\vec{c} \wedge \vec{a} + \vec{c} \wedge \vec{b} + \vec{c} \wedge \vec{c} = 0$$

$$\therefore \vec{c} \wedge \vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{c}$$

(3)

$$\vec{c} \wedge \vec{c} = 0$$

$$\vec{c} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{c}$$

من (٢) ، (٣) :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{c} \wedge \vec{a}$$

(4)

بأخذ المقياس :

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{b} \wedge \vec{c}| = |\vec{c} \wedge \vec{a}|$$

$$\therefore a b \sin \beta = b c \sin \gamma = c a \sin \alpha$$

جبر المتجهات

$$\frac{\sin \beta}{c} = \frac{\sin \gamma}{a} = \frac{\sin \alpha}{b}$$

بالقسمة على abc :

$$\therefore \frac{\sin \alpha}{b} = \frac{\sin \beta}{c} = \frac{\sin \gamma}{a}$$

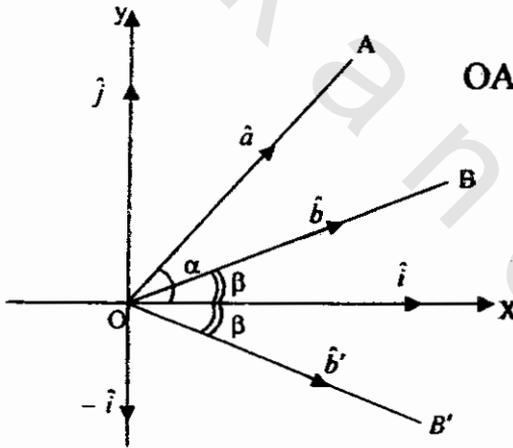
وهو المطلوب .

مثال (٣): باستخدام حواصل الضرب القياسية والإتجاهية لمتجهين ، أوجد قوانين جيب وجيب تمام مجموع والفرق بين زاويتين بالصورة :

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

الحل :



\hat{a}, \hat{b} متجهاً وحدة في إتجاهي OA, OB

\hat{b}' متجه وحدة في إتجاه OB'

الذي يصنع نفس الزاوية β

مع OX في الإتجاه المعاكس

$$\therefore \hat{a} = \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j} \quad \text{_____ (1)}$$

$$\hat{b} = \cos \beta \hat{i} + \sin \beta \hat{j} \quad \text{_____ (2)}$$

$$\hat{b}' = \cos \beta \hat{i} - \sin \beta \hat{j} \quad \text{_____ (3)}$$

وإذا كان \hat{k} هو متجه الوحدة العمودي على مستوى \hat{i}, \hat{j} فإن :

$$\hat{b}' \wedge \hat{a} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(\alpha + \beta) \hat{k} \quad \text{_____ (4)}$$

بالتعويض من (١) ، (٣) :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta)\hat{k} &= (\cos\beta\hat{i} - \sin\beta\hat{j}) \wedge (\cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}) \\ &= (\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta) \hat{k}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}$$

أيضاً :

$$\hat{b} \wedge \hat{a} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(\alpha - \beta)\hat{k} \quad \text{--- (5)}$$

بالتعويض من (١) ، (٢) :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta)\hat{k} &= (\cos\beta\hat{i} + \sin\beta\hat{j}) \wedge (\cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}) \\ &= (\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta) \hat{k}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}$$

أيضاً :

$$\hat{b}' \cdot \hat{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha + \beta) \quad \text{--- (6)}$$

بالتعويض من (١) ، (٣) :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= (\cos\beta\hat{i} - \sin\beta\hat{j}) \cdot (\cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}) \\ &= (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta)\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$

$$\hat{b} \cdot \hat{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

أيضاً :

بالتعويض من (١) ، (٢) :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= (\cos\beta\hat{i} + \sin\beta\hat{j}) \cdot (\cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}) \\ &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta}$$

جبر المتجهات

حواصل الضرب الثلاثية:

إذا كان لدينا ثلاثة متجهات \vec{A} ، \vec{B} ، \vec{C} فيكون لدينا نوعان من حواصل الضرب الثلاثية:

حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$$

تعريف:

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \\ &= \lambda\vec{B} - \mu\vec{C} \end{aligned}$$

حاصل الضرب الثلاثي القياسي

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$$

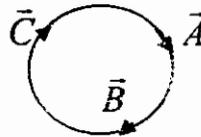
تعريف:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

أمثلة:

مثال (1): أثبت الخاصية الدورية لحاصل الضرب الثلاثي القياسي وهي :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$



ومن ذلك استنتج خاصية تبادل موضعي \cdot ، \wedge في حاصل الضرب الثلاثي القياسي ، أي:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

الحل:

أولاً: من تعريف حاصل الضرب الثلاثي القياسي واستخدام خواص المحددات:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \longrightarrow (1)$$

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) &= \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \longrightarrow (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \longrightarrow (3) \end{aligned}$$

من (1) و (2) و (3) ينتج المطلوب:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

جبر المتجهات

ثانياً: لإثبات خاصية تبادل موضعي \wedge ، من الخاصية الدورية لحاصل الضرب القياسي:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢):

أثبت الخاصية الدورية لحاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي وهي:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) + \vec{B} \wedge (\vec{C} \wedge \vec{A}) + \vec{C} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0$$

الحل:

من تعريف حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي فإن الطرف الأيسر يساوي:

$$\begin{aligned} L.H.S &= (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \\ &+ (\vec{B} \cdot \vec{A})\vec{C} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \\ &+ (\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} = 0 \end{aligned}$$

وذلك لان:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{C} &= \vec{C} \cdot \vec{A} \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= \vec{B} \cdot \vec{A} \\ \vec{B} \cdot \vec{C} &= \vec{C} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (٣):

أثبت صحة العلاقة الآتية:

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) \wedge (\vec{C} \wedge \vec{A}) = (\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C})^2$$

الحل:

$$(\bar{B} \wedge \bar{C}) \wedge (\bar{C} \wedge \bar{A})$$

نعتبر الجزء:

$$(\bar{B} \wedge \bar{C}) = \bar{D}$$

ونضع:

$$\therefore \bar{D} \wedge (\bar{C} \wedge \bar{A}) = (\bar{D} \cdot \bar{A})\bar{C} - (\bar{D} \cdot \bar{C})\bar{A} = (\bar{B} \wedge \bar{C} \cdot \bar{A})\bar{C} - (\bar{B} \wedge \bar{C} \cdot \bar{C})\bar{A}$$

ولكن:

$$\bar{B} \wedge \bar{C} \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C}$$

$$\bar{B} \wedge \bar{C} \cdot \bar{C} = \bar{B} \cdot \bar{C} \wedge \bar{C} = 0$$

$$\therefore \bar{D} \wedge (\bar{C} \wedge \bar{A}) = (\bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C})\bar{C}$$

$$\therefore (\bar{B} \wedge \bar{C}) \wedge (\bar{C} \wedge \bar{A}) = (\bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C})\bar{C} \rightarrow (1)$$

بضرب (1) قياسيا في $(\bar{A} \wedge \bar{B})$:

$$\therefore (\bar{A} \wedge \bar{B}) \cdot (\bar{B} \wedge \bar{C}) \wedge (\bar{C} \wedge \bar{A})$$

$$= (\bar{A} \wedge \bar{B}) \cdot [(\bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C})\bar{C}] = (\bar{A} \wedge \bar{B}) \cdot [\lambda \bar{C}]$$

$$= \lambda (\bar{A} \wedge \bar{B} \cdot \bar{C}) = \lambda (\bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C}) = (\bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C})(\bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C})$$

$$= (\bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C})^2$$

وهو المطلوب.

مثال (4):

(أ) أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المتجهات الثلاثة $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$

واقعة في نفس المستوى هو أن يكون:

$$\bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{C}) = 0$$

(ب) أوجد قيمة λ التي تجعل المتجهات الثلاثة:

$$\bar{A} = (1, 1, 1) , \bar{B} = (2, 0, -4) , \bar{C} = (1, \lambda, 3)$$

تقع في مستوى واحد .

الحل:

(أ) لإيجاد الشرط اللازم :

نفرض أن المتجهات تقع في نفس المستوى والمطلوب إثبات صحة العلاقة

$$\bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{C}) = 0$$

فمن تعريف حاصل الضرب الإتجاهي أن المتجه $(\bar{B} \wedge \bar{C})$ يكون عمودياً على المستوى الذي يحتوي المتجهين \bar{B}, \bar{C} ، وحيث أن المتجه \bar{A} يقع في نفس المستوى فإن المتجه $(\bar{B} \wedge \bar{C})$ يكون عمودياً عليه أيضاً ، ومن شرط التعامد فإن : $\bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{C}) = 0$

ولإيجاد الشرط الكافي :

بالعكس نفرض أن $\bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{C}) = 0$ والمطلوب إثبات أن $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ تقع في نفس المستوى فحيث أن العلاقة المفروضة تعني أن المتجهين $\bar{A}, (\bar{B} \wedge \bar{C})$ متعامدان ، ولكن المتجه $(\bar{B} \wedge \bar{C})$ هو متجه عمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهين \bar{B}, \bar{C} والذي يقع فيه للمتجه \bar{A} ، وهذا يعني أن المتجهات $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ تقع في نفس المستوى .

حل الجزء (ب):

الشرط اللازم والكافي لكي تقع المتجهات الثلاثة المعطاه في نفس المستوى

هو : $\bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{C}) = 0$ أي :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (1)(0 + 4\lambda) - (1)(6 + 4) + (1)(2\lambda - 0) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{5}{3}$$

وهو المطلوب .

حواصل ضرب الرباعية:

إذا كان لدينا 4 متجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ فيكون لدينا نوعان من حواصل الضرب:

| | |
|---|---|
| حاصل ضرب رباعي اتجاهي $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge (\vec{C} \wedge \vec{D})$ | حاصل ضرب رباعي قياسي $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D})$ |
|---|---|

تعريف حاصل الضرب الرباعي القياسي:

يعرف بالعلاقة:

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D})$$

الإثبات: نفرض أن:

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{G}$$

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = \vec{G} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D})$$

$$= (\vec{G} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{D} = [(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}] \cdot \vec{D}$$

$$= -[\vec{C} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B})] \cdot \vec{D}$$

$$= -[(\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B}] \cdot \vec{D}$$

$$= [(\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A}] \cdot \vec{D}$$

$$= (\vec{C} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{C} \cdot \vec{B})(\vec{A} \cdot \vec{D})$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D})$$

وهو المطلوب.

جبر المتجهات

تعريف حاصل الضرب الرباعي الاتجاهي:

$$\begin{aligned}(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge (\bar{C} \wedge \bar{D}) &= [(\bar{A} \wedge \bar{B}) \cdot \bar{D}] \bar{C} - [(\bar{A} \wedge \bar{B}) \cdot \bar{C}] \bar{D} \\ &= \lambda \bar{C} - \mu \bar{D}\end{aligned}$$

الإثبات: نفرض أن:

$$\begin{aligned}(\bar{A} \wedge \bar{B}) &= \bar{G} \\ (\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge (\bar{C} \wedge \bar{D}) &= \bar{G} \wedge (\bar{C} \wedge \bar{D}) = (\bar{G} \cdot \bar{D}) \bar{C} - (\bar{G} \cdot \bar{C}) \bar{D} \\ &= [(\bar{A} \wedge \bar{B}) \cdot \bar{D}] \bar{C} - [(\bar{A} \wedge \bar{B}) \cdot \bar{C}] \bar{D}\end{aligned}$$

أمثلة:

مثال (1): باستخدام قانون حاصل الضرب القياسي الرباعي:

$$(\bar{a} \wedge \bar{b}) \cdot (\bar{c} \wedge \bar{d}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})(\bar{b} \cdot \bar{d}) - (\bar{b} \cdot \bar{c})(\bar{a} \cdot \bar{d})$$

أثبت صحة الخاصية الدورية الآتية لحاصل الضرب القياسي الرباعي:

$$(\bar{a} \wedge \bar{b}) \cdot (\bar{c} \wedge \bar{d}) + (\bar{b} \wedge \bar{c}) \cdot (\bar{a} \wedge \bar{d}) + (\bar{c} \wedge \bar{a}) \cdot (\bar{b} \wedge \bar{d}) = 0$$

الحل:

$$\begin{aligned}L.H.S &= (\bar{a} \cdot \bar{c})(\bar{b} \cdot \bar{d}) - (\bar{b} \cdot \bar{c})(\bar{a} \cdot \bar{d}) \\ &+ (\bar{b} \cdot \bar{a})(\bar{c} \cdot \bar{d}) - (\bar{c} \cdot \bar{a})(\bar{b} \cdot \bar{d}) + (\bar{c} \cdot \bar{b})(\bar{a} \cdot \bar{d}) - (\bar{a} \cdot \bar{b})(\bar{c} \cdot \bar{d}) = 0\end{aligned}$$

حيث أن:

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{c} \cdot \bar{a}$$

$$\bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{c} \cdot \bar{b}$$

$$\bar{b} \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

مثال (2): أثبت صحة العلاقة الآتية:

$$\bar{A} \cdot [\bar{B} \wedge \{\bar{C} \wedge (\bar{D} \wedge \bar{A})\}] = (\bar{A} \cdot \bar{C}) [\bar{B} \cdot (\bar{D} \wedge \bar{A})]$$

الإثبات:

$$\begin{aligned}
 L.H.S &= \bar{A} \cdot [B \wedge \{\bar{C} \wedge (\bar{D} \wedge \bar{A})\}] \\
 &= \bar{A} \cdot [\bar{B} \wedge \{(\bar{C} \cdot \bar{A})\bar{D} - (\bar{C} \cdot \bar{D})\bar{A}\}] \\
 &= \bar{A} \cdot [B \wedge \{\lambda \bar{D} - \mu \bar{A}\}] \\
 &= \bar{A} \cdot [\lambda (\bar{B} \wedge \bar{D}) - \mu (\bar{B} \wedge \bar{A})] \\
 &= \lambda [\bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{D})] - \mu [\bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{A})]
 \end{aligned}$$

ولكن:

$$\bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{D}) = \bar{B} \cdot (\bar{D} \wedge \bar{A})$$

$$\bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{A}) = \bar{B} \cdot (\bar{A} \wedge \bar{A}) = 0$$

حيث: $\bar{A} \wedge \bar{A} = 0$

$$\begin{aligned}
 \therefore L.H.S &= \lambda [\bar{B} \cdot (\bar{D} \wedge \bar{A})] \\
 &= (\bar{A} \cdot \bar{C}) [\bar{B} \cdot (\bar{D} \wedge \bar{A})]
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

تطبيقات هندسية ومثلثية :

تطبيق (1): معادلة المستوى الذي يمر بثلاث نقاط معلومة متجهات مواضعها:

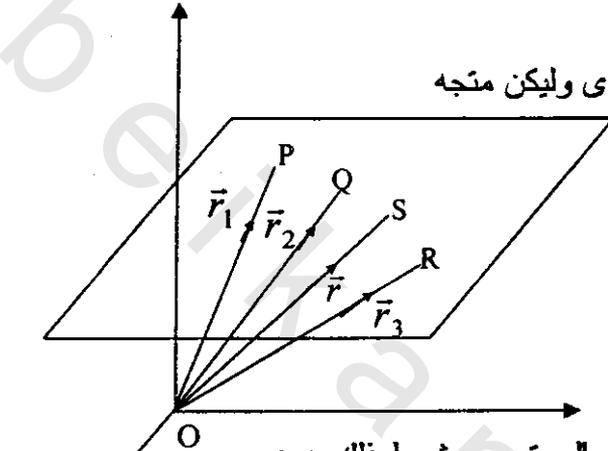
نفرض أن $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ هي متجهات مواضع النقاط الثلاث P, Q, R التي يمر بها المستوى .

نأخذ S أي نقطة عامة في المستوى وليكن متجه موضعها \vec{r} نعتبر المتجهات:

$$\overline{PS} = \vec{r} - \vec{r}_1 = \vec{A}$$

$$\overline{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{B}$$

$$\overline{PR} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \vec{C}$$



هذه المتجهات الثلاثة تقع في نفس المستوى، وشرط ذلك هو:

$$\overline{PS} \cdot \overline{PQ} \wedge \overline{PR} = 0 \quad [\text{مثال سابق}]$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0 \quad \text{أي :}$$

وهي معادلة المستوى المطلوبة، ويمكن كتابتها بالصورة: $\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C} = 0$

مثال عددي:

أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقاط الثلاثة:

$$P(2,-1,1), Q(3,2,-1), R(-1,3,2)$$

الحل: إذا كانت $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ هي متجهات مواضع P, Q, R على الترتيب،

$$\vec{r}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{r}_2 = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}, \vec{r}_3 = -\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k} \quad \text{فإن:}$$

معادلة المستوى المطلوبة هي:

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0 \quad \rightarrow (1)$$

حيث \vec{r} هو متجه موضع أي نقطة S على المستوى :

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = (x-2)\hat{i} + (y+1)\hat{j} + (z-1)\hat{k} = \vec{A}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 - \vec{r}_1 &= (3-2)\hat{i} + (2+1)\hat{j} + (-1-1)\hat{k} \\ &= \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} = \vec{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_3 - \vec{r}_1 &= (-1-2)\hat{i} + (3+1)\hat{j} + (2-1)\hat{k} \\ &= -3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} = \vec{C} \end{aligned}$$

وتصبح معادلة المستوى:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (x-2)(11) + (y+1)(5) + (z-1)(13) = 0$$

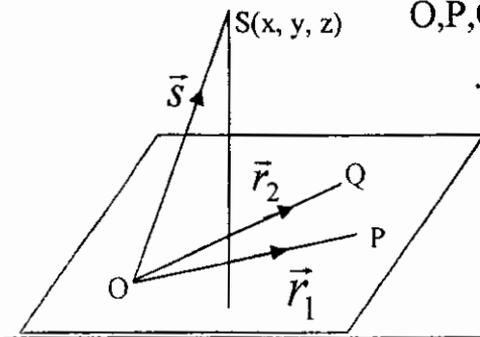
$$\therefore 11x + 5y + 13z = 30$$

وهي معادلة المستوى المطلوبة.

تطبيق (٢): طول العمود النازل من نقطة ما على مستوى

نفرض أن المستوى يمر بالنقاط الثلاث O, P, Q وبأخذ O كنقطة أصل (أو نقطة مرجعية).

\vec{r}_1, \vec{r}_2 هما متجهي موضع P, Q بالنسبة إلى O.



جبر المتجهات

لإيجاد طول العمود النازل من نقطة S على المستوى:

ليكن \vec{s} هو متجه موضع S بالنسبة إلى O فيكون العمودي على المستوى هو العمودي على كل من \vec{r}_1, \vec{r}_2 أي العمودي على $(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$.
متجه الوحدة في اتجاه العمودي على المستوى:

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2|}$$

طول العمود (l) هو مركبة \vec{s} في اتجاه \hat{n} أي:

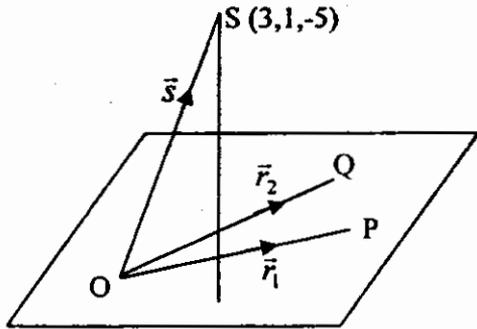
$$l = \vec{s} \cdot \hat{n} = \frac{\vec{s} \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2|} \rightarrow (1)$$

مثال عددي: مستوى يمر بالنقاط الثلاثة:

O(1,1,1) , P(-1,2,3) , Q(4,5,13)

أوجد طول العمود النازل من النقطة S(3, 1, -5) على المستوى.

الحل:



طول العمود هو:

$$l = \frac{\vec{s} \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2|} \rightarrow (1)$$

$$\vec{s} = 2\hat{i} - 6\hat{k}, \vec{r}_1 = -2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}, \vec{r}_2 = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}$$

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 4\hat{i} + 30\hat{j} - 12\hat{k}$$

$$|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2| = \sqrt{(4)^2 + (30)^2 + (-12)^2} = \sqrt{1060}$$

أيضاً:

$$\vec{s} \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 74$$

$$l = \frac{74}{\sqrt{1060}} = 2.27$$

بالتعويض في (١):

وهو طول العمود المطلوب.

تطبيق (٣): إثبات العلاقة المثلثية:

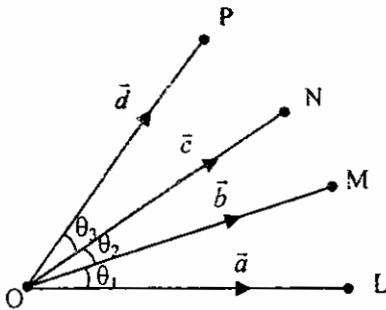
$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$$

المثال: باستخدام الخاصية الدورية لحاصل الضرب الرباعي وصورتها:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) + (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot (\vec{a} \wedge \vec{d}) + (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot (\vec{b} \wedge \vec{d}) = 0$$

أثبت العلاقة المثلثية الآتية:

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$$



الحل:

نأخذ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ أربع متجهات في المستوى

(متجهات مستوية).

ونفرض أن \hat{e} هي متجه وحدة

عمودي على هذا المستوى.

ونفرض أن الزوايا بين الإتجاهات $\vec{a}, \vec{b}; \vec{b}, \vec{c}; \vec{c}, \vec{d}$ هي $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ على

التوالي.

جبر المتجهات

$$\therefore \vec{a} \wedge \vec{b} = ab \sin \theta_1 \hat{e}, \vec{b} \wedge \vec{c} = bc \sin \theta_2 \hat{e}, \vec{c} \wedge \vec{d} = cd \sin \theta_3 \hat{e}$$

وبالتعويض في الخاصية الدورية لحاصل الضرب الرباعي القياسي :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) + (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot (\vec{a} \wedge \vec{d}) + (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot (\vec{b} \wedge \vec{d}) = 0$$

نحصل على :

$$(ab \sin \theta_1 \hat{e}) \cdot (cd \sin \theta_3 \hat{e}) + (bc \sin \theta_2 \hat{e}) \cdot [ad \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \hat{e}] \\ + [-ac \sin(\theta_1 + \theta_2) \hat{e}] \cdot [-bd \sin(\theta_2 + \theta_3) \hat{e}] = 0$$

وبالقسمة على $abcd$ وإعتبار أن $\hat{e} \cdot \hat{e} = 1$:

$$\sin \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_2 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ - \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) = 0$$

وبوضع : $\theta_1 = \beta, \theta_2 = \alpha, \theta_3 = -\beta$

نحصل على :

$$-\sin^2 \beta + \sin^2 \alpha - \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = 0$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

وهو المطلوب الأول.

وحيث أن :

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta) \\ = \frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$$

وهو المطلوب الثاني.

المعادلات الاتجاهية

تحتوى المعادلات الاتجاهية عادة على متجه مجهول وليكن \vec{x} وحل المعادلة الاتجاهية هو إيجاد هذا المتجه .

وتشمل المعادلات الاتجاهية على حواصل ضرب قياسية أو اتجاهية لهذا المتجه مع متجهات أخرى معلومة ، وتستخدم خواص حواصل الضرب الثلاثية عادة للحصول على المتجه \vec{x} منفردا ، ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية :

مثال (١): أوجد المتجه \vec{x} الذي يحقق المعادلتين:

$$\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b} \rightarrow (1) , \quad \vec{a} \cdot \vec{x} = b \rightarrow (2)$$

$$\text{حيث : } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

الحل: بضرب (١) قياسيا في \vec{a} نحصل على:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \therefore 0 = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

وهذا يحقق الشرط المعطى.

وبضرب (١) اتجاهيا في \vec{a} نحصل على:

$$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b} \quad \therefore b\vec{a} - a^2\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

(بالتعويض عن $\vec{a} \cdot \vec{x} = b$ من (٢))

$$\therefore a^2\vec{x} = b\vec{a} - \vec{a} \wedge \vec{b} \quad \therefore \vec{x} = \frac{1}{a^2} [b\vec{a} - \vec{a} \wedge \vec{b}]$$

وهو المطلوب .

مثال (٢): حل المعادلة الاتجاهية :

$$\vec{x} \wedge \vec{a} + \vec{x} = \vec{a} \rightarrow (1)$$

الحل:

$$\bar{a} \cdot (\bar{x} \wedge \bar{a}) + \bar{a} \cdot \bar{x} = \bar{a} \cdot \bar{a} \quad \therefore \bar{a} \cdot \bar{x} = a^2 \quad \text{بضرب (1) قياسيا في } \bar{a}$$

$$\therefore \bar{a} \cdot \bar{x} = a^2 \quad \rightarrow (2)$$

بضرب طرفي (1) اتجاهيا في \bar{a} نحصل على:

$$\bar{a} \wedge (\bar{x} \wedge \bar{a}) + \bar{a} \wedge \bar{x} = \bar{a} \wedge \bar{a} \quad , \quad \therefore (\bar{a} \cdot \bar{a})\bar{x} - (\bar{a} \cdot \bar{x})\bar{a} + \bar{a} \wedge \bar{x} = 0$$

$$\therefore a^2 \bar{x} - a^2 \bar{a} + (\bar{x} - \bar{a}) = 0$$

وتلك حيث أن: $\bar{a} \cdot \bar{x} = a^2$ (من (2)) ، $\bar{a} \wedge \bar{x} = \bar{x} - \bar{a}$ (من (1)) وأيضا حيث أن:

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = a^2 \quad , \quad \bar{a} \wedge \bar{a} = 0 \quad , \quad \therefore \bar{x}(a^2 + 1) = \bar{a}(a^2 + 1)$$

ومن هذا يتضح أن: $\bar{x} = \bar{a}$. وهو حل للمعادلة المطلوب .

مثال (3): حل للمعادلة الاتجاهية:

$$\bar{b}(\bar{x} \cdot \bar{a}) - \alpha \bar{x} = \bar{c} \quad \rightarrow (1)$$

حيث α عدد قياسي ، $\bar{a} \cdot \bar{b} \neq \alpha$

الحل: بضرب طرفي (1) في \bar{a} قياسيا نحصل على:

$$(\bar{a} \cdot \bar{b})(\bar{x} \cdot \bar{a}) - \alpha(\bar{a} \cdot \bar{x}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})$$

$$\therefore [(\bar{a} \cdot \bar{b}) - \alpha](\bar{a} \cdot \bar{x}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})$$

$$\therefore \bar{a} \cdot \bar{x} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{(\bar{a} \cdot \bar{b}) - \alpha} \quad \rightarrow (2)$$

وبالتعويض في (1) عن $(\bar{a} \cdot \bar{x})$ من (2) نحصل على:

$$\frac{\bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c})}{(\bar{a} \cdot \bar{b}) - \alpha} - \alpha \bar{x} = \bar{c} \quad \therefore \bar{x} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{(\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b}}{(\bar{a} \cdot \bar{b}) - \alpha} - \bar{c} \right]$$

وهو المطلوب .

مثال (٤): حل المعادلتين الإتجاهيتين : $\vec{x} \cdot \vec{c} = 0$ ، $\vec{x} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

حيث: $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$

الحل: حيث أن:

$$\vec{x} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} \quad \rightarrow (1) \quad , \quad \vec{x} \cdot \vec{c} = 0 \quad \rightarrow (2)$$

فيوضع (١) في الصورة:

$$(\vec{x} - \vec{a}) \wedge \vec{b} = 0$$

وهذا يعني أن المتجهين: \vec{b} ، $(\vec{x} - \vec{a})$ متوازيان أي أن:

$$(\vec{x} - \vec{a}) = \lambda \vec{b}$$

حيث λ عدد قياسي. ومن ذلك نجد أن:

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad \rightarrow (3)$$

وبالتعويض عن قيمة \vec{x} من (٣) في (٢) نحصل على :

$$(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{c} = -\lambda (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$\therefore \lambda = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\vec{b} \cdot \vec{c}}$$

حيث $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$ وبوضع قيمة λ في (٣) نحصل على :

$$\vec{x} = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\vec{b} \cdot \vec{c}} \vec{b}$$

وهو المطلوب .

جبر المتجهات

مثال (5): إذا أعطيت المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ فأوجد حل المعادلة الاتجاهية:

$$\vec{x} \wedge \vec{a} + (\vec{x} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{d}$$

حيث: $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$

الحل:

بضرب طرفي المعادلة المعطاة قياسيا في \vec{a} :

$$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{a}) + (\vec{x} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{d}$$

$$\therefore (\vec{x} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{d} \quad \therefore \vec{x} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{\vec{a} \cdot \vec{c}} \quad \rightarrow (1)$$

وبضرب طرفي المعادلة المعطاة اتجاهيا في \vec{b} :

$$\therefore \vec{b} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{a}) + (\vec{x} \cdot \vec{b})(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \wedge \vec{d}$$

$$\therefore (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{x} - (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{a} + (\vec{x} \cdot \vec{b})(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \wedge \vec{d}$$

$$\therefore (\vec{x} \cdot \vec{b})[(\vec{b} \wedge \vec{c}) - \vec{a}] + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{x} = \vec{b} \wedge \vec{d}$$

وبالتعويض $(\vec{x} \cdot \vec{b})$ من (1) نحصل على الآتي:

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{\vec{a} \cdot \vec{c}} [(\vec{b} \wedge \vec{c}) - \vec{a}] + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{x} = \vec{b} \wedge \vec{d}$$

$$\therefore \vec{x}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{b} \wedge \vec{d} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{\vec{a} \cdot \vec{c}} [(\vec{b} \wedge \vec{c}) - \vec{a}]$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \left[(\vec{b} \wedge \vec{d}) - \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{\vec{a} \cdot \vec{c}} (\vec{b} \wedge \vec{c} - \vec{a}) \right]$$

وهو المطلوب .

مثال (6): حل المعادلتين الاتجاهيتين الآتيتين في المتجهين المجهولين \vec{x}, \vec{y} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad , \quad \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \vec{a} \quad , \quad \vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{b}$$

الحل: المعادلتين المعطيتين هما :

$$\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} = \bar{a} \quad \rightarrow (1)$$

$$\bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{b} \quad \rightarrow (2)$$

بضرب (1) اتجاهياً في \bar{x} :

$$\therefore \bar{x} \wedge (\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) = \bar{x} \wedge \bar{a}$$

$$\therefore \beta (\bar{x} \wedge \bar{y}) = \bar{x} \wedge \bar{a} \quad \rightarrow (3)$$

حيث: $\alpha (\bar{x} \wedge \bar{x}) = 0$.

ومن (3), (2) نحصل على:

$$\therefore \bar{x} \wedge \bar{a} = \beta \bar{b} \quad \rightarrow (4)$$

بضرب (4) اتجاهياً في \bar{a} :

$$\bar{a} \wedge (\bar{x} \wedge \bar{a}) = \beta (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

$$\therefore (\bar{a} \cdot \bar{a}) \bar{x} - (\bar{a} \cdot \bar{x}) \bar{a} = \beta (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

$$\therefore a^2 \bar{x} = (\bar{a} \cdot \bar{x}) \bar{a} + \beta (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{x}}{a^2} \bar{a} + \frac{\beta}{a^2} (\bar{a} \wedge \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \frac{\beta}{a^2} (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

وهو الحل العام بالنسبة للمتجه \bar{x} ، حيث λ بارامتر قياسي $= \frac{\bar{a} \cdot \bar{x}}{a^2}$.

وبنفس الخطوات يمكن إيجاد الحل العام بالنسبة للمتجه \bar{y} بالصورة :

$$\bar{y} = \mu \bar{a} - \frac{\alpha}{a^2} (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

$$\mu = \frac{\bar{a} \cdot \bar{y}}{a^2}$$

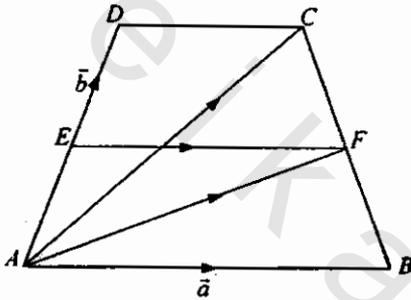
حيث μ بارامتر قياسي يعطي من:

وهو المطلوب.

أمثلة محلولة عامة على جبر المتجهات

مثال (1): باستخدام المتجهات أثبت أن:

"المستقيم الواصل بين منتصفي الضلعين غير المتوازيين في شبه منحرف يوازي الضلعين المتوازيين وطوله يساوي نصف مجموع طوليهما"



الحل: نفرض أن E, F هما منتصفا

الضلعين غير المتوازيين AD, BC وباعتبار

في شبه المنحرف $ABCD$ أن A هي نقطة أصل وبأخذ

فحيث أن $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$

فإن $DC \parallel AB$

$$DC = \lambda AB$$

(1)

حيث λ ثابت، وهذا يعني أن

$$\overline{DC} = \lambda \overline{AB}$$

(2)

ومن هندسة الشكل:

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AD} + \lambda \overline{AB} = \vec{b} + \lambda \vec{a}$$

(3)

وحيث أن E, F هما منتصفا الضلعين AD, BC فإن

$$\overline{AE} = \frac{1}{2} \vec{b} , \overline{AF} = \frac{1}{2} (\overline{AC} + \overline{AB}) = \frac{1}{2} (\vec{b} + \lambda \vec{a} + \vec{a}) = \frac{1}{2} (1 + \lambda) \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\therefore \overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} (1 + \lambda) \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \lambda) \vec{a} = \frac{1}{2} (1 + \lambda) \overline{AB}$$

(4)

$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{EF}$$

وحيث أن $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ فإن المستقيمتان الثلاثة AB, EF, DC تكون متوازية وهو المطلوب الأول.

ولإيجاد طول \overline{EF} : نأخذ مقياس الطرفين للمعادلة (4):

$$\therefore |\overline{EF}| = \left| \frac{1}{2}(1+\lambda)\overline{AB} \right|$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}(1+\lambda)AB = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}\lambda AB$$

$$EF = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}(AB+DC) \quad \text{ومن (1) } DC = \lambda AB \text{ فإن:}$$

وهو المطلوب ثانياً.

مثال (٢): باستخدام خواص حاصل الضرب القياسي أثبت النظرية الهندسية الآتية:

" ارتفاعات المثلث تتلاقى في نقطة واحدة "

الحل: ارتفاعات المثلث هي الأعمدة النازلة

من الرأس إلى الضلع المقابل .

في ΔABC : نأخذ

$$\overline{AB} = \vec{a}, \quad \overline{AC} = \vec{b}, \quad \overline{BC} = \vec{c}$$

ونأخذ الارتفاعين BE, CD

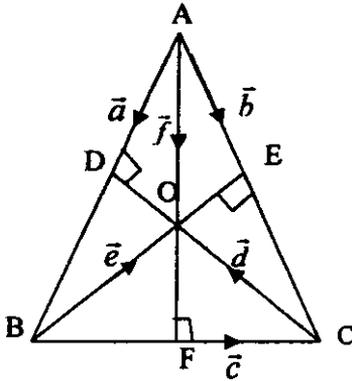
يتلاقيان في نقطة O

فإذا أثبتنا أن المستقيم AF المار بنفس النقطة O يمثل الارتفاع الثالث

للمثلث أي العمود النازل من الرأس A إلى الضلع المقابل BC عند نقطة F

نكون قد أثبتنا النظرية.

رياضياً: حيث أن BE, CD يلتقيان في O ومن خواص الارتفاعات:



جبر المتجهات

$$\overline{CO} \cdot \overline{AB} = 0 \rightarrow \vec{d} \cdot \vec{a} = 0 \quad \rightarrow (1)$$

$$\overline{BO} \cdot \overline{AC} = 0 \rightarrow \vec{e} \cdot \vec{b} = 0 \quad \rightarrow (2)$$

المطلوب: إثبات أن $\vec{f} \cdot \vec{c} = 0$ أي $A\vec{F} \cdot B\vec{C} = 0 \leftarrow$

الإثبات: من الشكل:

$$\overline{AO} = \overline{AB} + \overline{BO} \rightarrow \overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} \rightarrow \vec{a} = \vec{f} - \vec{e} \quad \rightarrow (3)$$

$$\overline{AO} = \overline{AC} + \overline{CO} \rightarrow \overline{AC} = \overline{AO} - \overline{CO} \rightarrow \vec{b} = \vec{f} - \vec{d} \quad \rightarrow (4)$$

بالتعويض في (١) و (٢):

$$\vec{d} \cdot (\vec{f} - \vec{e}) = 0 \rightarrow \vec{d} \cdot \vec{f} - \vec{d} \cdot \vec{e} = 0 \quad \rightarrow (5)$$

$$\vec{e} \cdot (\vec{f} - \vec{d}) = 0 \rightarrow \vec{e} \cdot \vec{f} - \vec{e} \cdot \vec{d} = 0 \quad \rightarrow (6)$$

من (٥) و (٦) بالطرح:

$$\vec{e} \cdot \vec{f} - \vec{d} \cdot \vec{f} = 0 \rightarrow \vec{f} \cdot (\vec{e} - \vec{d}) = 0 \quad \rightarrow (7)$$

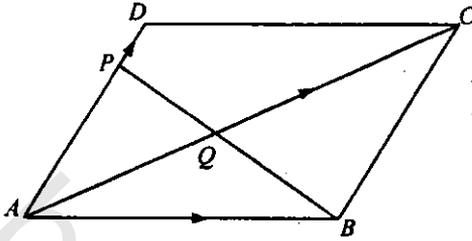
$$\vec{e} = \vec{c} + \vec{d} \rightarrow \vec{c} = \vec{e} - \vec{d} \quad \text{ولكن من الشكل:}$$

$$\vec{f} \cdot \vec{c} = 0 \quad \text{وتصبح (٧):}$$

وهو المطلوب.

مثال (٣): $ABCD$ متوازي أضلاع فيه نقطة P تقع على الضلع AD بحيث أن $AD = \lambda AP$ ، فإذا كان الخط PB يقطع القطر AC في نقطة Q فأثبت أن

$$AC = (1 + \lambda) aQ$$



الحل: من هندسة الشكل نجد أن:

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AD} = 0 \\ \therefore \overline{AB} + \overline{AD} - \overline{AC} &= 0 \end{aligned} \quad \text{---(1)}$$

ومن الشكل يتضح أن \overline{AQ} يقع على استقامة \overline{AC}

$$\therefore \overline{AQ} = \mu \overline{AC} \quad \text{---(2)}$$

حيث μ كمية قياسية، وحيث أن $AD = \lambda AP$ فإن:

$$\overline{AD} = \lambda \overline{AP} \quad \text{---(3)}$$

وبالتعويض من (2)، (3) في (1):

$$\overline{AB} + \lambda \overline{AP} - \frac{1}{\mu} \overline{AQ} = 0 \quad \text{---(4)}$$

ومن الشكل نجد أن النقاط الثلاثة P, Q, B تقع على استقامة واحدة وأن المستقيمات $\overline{AB}, \overline{AP}, \overline{AQ}$ غير متوازية فمن (4) يجب أن يكون المجموع الجبري للمعاملات يساوي صفرًا.

$$\therefore 1 + \lambda - \frac{1}{\mu} = 0 \rightarrow \frac{1}{\mu} = 1 + \lambda \rightarrow \mu = \frac{1}{1 + \lambda} \quad \text{---(5)}$$

$$\therefore \overline{AQ} = \frac{1}{1 + \lambda} \overline{AC} \rightarrow \overline{AC} = (1 + \lambda) \overline{AQ} \quad \text{---(2)}$$

وهو المطلوب.

مثال (4): إذا كانت المتجهات الثلاثة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ متجهات متعامدة متنى متنى وذات مقادير متساوية فاثبت أن المتجه الممثل لمجموع المتجهات الثلاثة أي المتجه $(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$ يميل بالتساوي على كل من المتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.

جبر المتجهات

الحل: من رأس المسألة فإن المتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ متعامدة متتى متتى وذات مقادير متساوية أي أن:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} = \vec{C} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{---(1)}$$

$$|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| \quad \text{---(2)}$$

ولإيجاد طول المتجه $(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$:

$$\begin{aligned} \therefore |(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})|^2 &= (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \cdot (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \\ &= \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{B} + \vec{C} \cdot \vec{C} \end{aligned}$$

وباستخدام (1):

$$\therefore |(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} + \vec{C} \cdot \vec{C} = A^2 + B^2 + C^2 = 3A^2 = 3|\vec{A}|^2$$

$$\therefore |\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| = \sqrt{3} |\vec{A}| \quad \text{---(3)}$$

وبفرض أن α, β, γ هي الزوايا المحصورة بين المتجه $(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$ والمتجهات الثلاثة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ على الترتيب فإن:

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \cdot \vec{A}}{|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| |\vec{A}|} = \frac{(\vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{A})}{(\sqrt{3} |\vec{A}|) (|\vec{A}|)} = \frac{|\vec{A}|^2}{\sqrt{3} |\vec{A}|^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

وهذا يثبت أن المتجه $(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$ يعمل زوايا متساوية مع المتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ على التوالي وهو المطلوب.

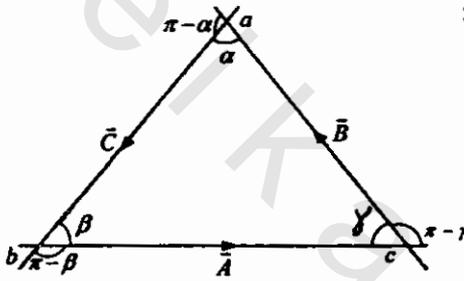
مثال (5): في أي مثلث abc وباستخدام المتجهات، أثبت العلاقات الآتية

(i) $A = B \cos \gamma + C \cos \beta$

(ii) $A^2 - B^2 = C A \cos \beta - C B \cos \alpha$

(iii) $A^2 + B^2 + C^2 = 2(AB \cos \gamma + BC \cos \alpha + CA \cos \beta)$

حيث: $A = |\vec{A}| = |bc|, B = |\vec{B}| = |ca|, C = |\vec{C}| = |ab|$



الحل: أولاً: من الشكل يمكن إثبات العلاقة:

$$\vec{bc} + \vec{ca} + \vec{ab} = 0$$

$$\therefore \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

ومن (1) فإن:

$$-\vec{A} = \vec{B} + \vec{C} \quad \text{--- (2)}$$

وبضرب (2) قياسياً في \vec{A} :

$$(\vec{A}) \cdot (-\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$\therefore -|\vec{A}|^2 = AB \cos(\pi - \gamma) + AC \cos(\pi - \beta) = -AB \cos \gamma - AC \cos \beta$$

$$\therefore A^2 = AB \cos \gamma + AC \cos \beta$$

وبالقسمة على A :

$$\therefore A = B \cos \gamma + C \cos \beta \quad \text{--- (3)}$$

وهو المطلوب أولاً.

ثانياً: حيث أن:

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = CA \cos(\pi - \beta) = -CA \cos \beta \quad \text{--- (4)}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\pi - \gamma) = -AB \cos \gamma \quad \text{--- (5)}$$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = BC \cos(\pi - \alpha) = -BC \cos \alpha \quad \text{--- (6)}$$

جبر المتجهات

$$\therefore \vec{B} \cdot \vec{C} - \vec{C} \cdot \vec{A} = -BC \cos \alpha + CA \cos \beta \quad \text{___ (7)}$$

$$\therefore \vec{C} \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = CA \cos \beta - BC \cos \alpha \quad \text{___ (8)}$$

ولكن

$$-(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = -(B^2 - A^2) \quad \text{___ (9)}$$

ومن (1):

$$-(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{B} - \vec{A}) \quad \text{___ (10)}$$

فمن (8), (9), (10):

$$-(B^2 - A^2) = \vec{C} \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = CA \cos \beta - BC \cos \alpha$$

$$\therefore A^2 - B^2 = CA \cos \beta - CB \cos \alpha \quad \text{___ (11)}$$

وهو المطلوب ثانياً.

$$A^2 + B^2 + C^2 = 2(AB \cos \gamma + BC \cos \alpha + CA \cos \beta) \quad \text{ثالثاً: لإثبات أن}$$

نأخذ الطرف الأيمن:

$$\text{الطرف الأيمن} = 2(AB \cos \gamma + BC \cos \alpha + CA \cos \beta)$$

$$= -[2\vec{A} \cdot \vec{B} + 2\vec{B} \cdot \vec{C} + 2\vec{C} \cdot \vec{A}]$$

$$= -[(\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{C}) + (\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{C} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \vec{A})]$$

$$= -[\vec{B} \cdot (\vec{A} + \vec{C}) + \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) + \vec{C} \cdot (\vec{A} + \vec{B})] \quad \text{___ (12)}$$

ومن العلاقة (1): $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$ فإن:

$$\vec{A} + \vec{C} = -\vec{B}, \quad \vec{B} + \vec{C} = -\vec{A}, \quad \vec{A} + \vec{B} = -\vec{C}$$

فبالتعويض في (12):

$$2(AB \cos \gamma + BC \cos \alpha + CA \cos \beta) = -[-\vec{B} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{A} - \vec{C} \cdot \vec{C}]$$

$$= B^2 + A^2 + C^2 = A^2 + B^2 + C^2 = \text{الطرف الأيسر}$$

وهو المطلوب ثالثاً.

مثال (٦):

- (أ) إذا كان لدينا المتجهات الثلاثة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ وكان $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$, $\vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{A}$ فأنبت أن المتجهات الثلاثة تكون متعامدة متتى متتى وأن: $|\vec{A}| = |\vec{C}|$, $|\vec{B}| = 1$
- (ب) إذا كان لدينا المتجهات الأربع $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ وكان $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C} \wedge \vec{D}$, $\vec{A} \wedge \vec{C} = \vec{B} \wedge \vec{D}$ فأنبت أن المتجهين: $(\vec{A} - \vec{D})$, $(\vec{B} - \vec{C})$ يكونان متوازيان.

الحل: أولاً: من المعطيات:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C} \quad , \quad \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{A}$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = \vec{B} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 0 \quad \text{--- (3)}$$

ومن ذلك يتضح أن: \vec{A} متعامد على \vec{C} وأن \vec{B} متعامد على \vec{C} وأن \vec{A} متعامد مع \vec{B} ، أي أن المتجهات الثلاثة تكون متعامدة متتى متتى.
ليضاً فإن:

$$|\vec{A}| = |\vec{B} \wedge \vec{C}| = |\vec{B}| |\vec{C}| \sin 90 = |\vec{B}| |\vec{C}| \quad \text{--- (4)}$$

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \wedge \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin 90 = |\vec{A}| |\vec{B}| \quad \text{--- (5)}$$

ومن (5) , (4) بالضرب:

$$|\vec{A}| |\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}|^2 |\vec{C}|$$

$$\therefore |\vec{B}|^2 = 1 \quad \therefore |\vec{B}| = 1 \quad \text{--- (6)}$$

ومن (6) , (4) نجد أن:

جبر المتجهات

$$|\vec{A}| = |\vec{C}|(1) = |\vec{C}| \quad \underline{\quad (7)}$$

وهو المطلوب.

ثانياً: من رأس المسألة:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C} \wedge \vec{B} \quad \underline{\quad (1)}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{C} = \vec{B} \wedge \vec{D} \quad \underline{\quad (2)}$$

حاصل ضرب المتجهين $(\vec{B} - \vec{C})$, $(\vec{A} - \vec{D})$ إتجاهياً:

$$\begin{aligned} (\vec{A} - \vec{D}) \wedge (\vec{B} - \vec{C}) &= (\vec{A} \wedge \vec{B}) - (\vec{A} \wedge \vec{C}) - (\vec{D} \wedge \vec{B}) + (\vec{D} \wedge \vec{C}) \\ &= (\vec{A} \wedge \vec{B}) - (\vec{A} \wedge \vec{C}) + (\vec{B} \wedge \vec{D}) - (\vec{C} \wedge \vec{D}) = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن المتجهين $(\vec{B} - \vec{C})$, $(\vec{A} - \vec{D})$ يكونان متوازيين (لأن حاصل ضربهما الإتجاهي يساوي صفراً).

مثال (٧): أثبت أن مركبة للمتجه $\vec{D} = \vec{A} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B})$ في اتجاه المتجه \vec{B} لا يمكن أن تكون موجبه، ومن ثم أثبت أن $(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \leq A^2 B^2$.

الحل: بكتابة

$$\vec{D} \cdot \vec{B} = \vec{C} \cdot \vec{B} \quad \text{فإن } \vec{D} = \vec{A} \wedge \vec{C} \text{، وتكون مركبة } \vec{D} \text{ في اتجاه } \vec{B} \text{ هي: } \vec{D} \cdot \vec{B} \quad (1)$$

فباستخدام خواص حاصل الضرب الثلاثي للقياسي:

$$\begin{aligned} \vec{D} \cdot \vec{B} &= (\vec{A} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{C}) = -\vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = -\vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) \\ &= -(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = -(\vec{A} \wedge \vec{B})^2 \quad \underline{\quad (2)} \end{aligned}$$

وحيث أن أي كمية مربعة تكون موجبة دائماً فإن $\vec{D} \cdot \vec{B}$ تكون سالبة أي أن:

$$\vec{D} \cdot \vec{B} \leq 0 \quad \text{وهو المطلوب أولاً.}$$

ولإثبات الجزء الثاني: بالتعويض عن قيمة \bar{D} :

$$\therefore \bar{B} \cdot [\bar{A} \wedge (\bar{A} \wedge \bar{B})] \leq 0$$

$$\therefore \bar{B} \cdot [(\bar{A} \cdot \bar{B}) \bar{A} - (\bar{A} \cdot \bar{A}) \bar{B}] \leq 0$$

$$\therefore (\bar{A} \cdot \bar{B})(\bar{B} \cdot \bar{A}) - (\bar{A} \cdot \bar{A})(\bar{B} \cdot \bar{B}) \leq 0$$

$$\therefore (\bar{A} \cdot \bar{B})^2 - A^2 B^2 \leq 0$$

$$\therefore (\bar{A} \cdot \bar{B})^2 \leq A^2 B^2$$

وهو المطلوب ثانياً.

مثال (٨): باستخدام خواص حاصل الضرب الرباعي الإتجاهي للمتجهات الأربع

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ بالصورة:

$$(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge (\bar{C} \wedge \bar{D}) = [\bar{A}\bar{C}\bar{D}]\bar{B} - [\bar{B}\bar{C}\bar{D}]\bar{A} \quad \text{---(1)}$$

$$(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge (\bar{C} \wedge \bar{D}) = [\bar{A}\bar{B}\bar{D}]\bar{C} - [\bar{A}\bar{B}\bar{C}]\bar{D} \quad \text{---(2)}$$

حيث $[\bar{A}\bar{B}\bar{C}], \dots$ تمثل حواصل الضرب الثلاثية القياسية

$$[\bar{A}\bar{B}\bar{C}] = \bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}, \dots$$

أثبت أن:

$$2(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge (\bar{C} \wedge \bar{D}) = \begin{vmatrix} -\bar{A} & -\bar{B} & \bar{C} & \bar{D} \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

الحل: من (1), (2) بالجمع:

جبر المتجهات

$$\begin{aligned}
 2(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge (\bar{C} \wedge \bar{D}) &= [\bar{A}\bar{C}\bar{D}]\bar{B} - [\bar{B}\bar{C}\bar{D}]\bar{A} + [\bar{A}\bar{B}\bar{D}]\bar{C} - [\bar{A}\bar{B}\bar{C}]\bar{D} \\
 &= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} \bar{B} - \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} \bar{A} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} \bar{C} \\
 &\quad - \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \bar{D}
 \end{aligned}$$

بتغيير مواضع الصفوف والأعمدة واستخدام خواص المحددات نحصل على:

$$\begin{aligned}
 2(\bar{A} \wedge \bar{B})(\bar{C} \wedge \bar{D}) &= \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} \bar{B} - \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} \bar{A} \\
 &\quad + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} \bar{C} - \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \bar{D} \\
 &= \begin{vmatrix} -\bar{A} & -\bar{B} & \bar{C} & \bar{D} \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

حيث:

$$\bar{A} = (A_1, A_2, A_3), \quad \bar{B} = (B_1, B_2, B_3)$$

$$\bar{C} = (C_1, C_2, C_3), \quad \bar{D} = (D_1, D_2, D_3)$$

مثال (٩): إذا كان لدينا المتجهات الأربع $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ وكان:

$$\bar{A}' = \frac{\bar{B} \wedge \bar{C}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]}, \bar{B}' = \frac{\bar{C} \wedge \bar{A}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]}, \bar{C}' = \frac{\bar{A} \wedge \bar{B}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]}$$

فأثبت أن $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ ترتبط مع بعضها ارتباطاً خطياً بالعلاقة:

$$\bar{D} = \alpha \bar{A} + \beta \bar{B} + \gamma \bar{C}$$

$$\alpha = \bar{D} \cdot \bar{A}', \beta = \bar{D} \cdot \bar{B}', \gamma = \bar{D} \cdot \bar{C}' \quad \text{حيث}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{A}' = \bar{B} \cdot \bar{B}' = \bar{C} \cdot \bar{C}' = 1 \quad \text{وبشرط أن:}$$

الحل: من تعريف حاصل الضرب الرباعي الإتجاهي للمتجهات الأربع

$$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$$

$$(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge (\bar{C} \wedge \bar{D}) = [\bar{A} \bar{C} \bar{D}] \bar{B} - [\bar{B} \bar{C} \bar{D}] \bar{A} \quad \text{--- (1)}$$

$$(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge (\bar{C} \wedge \bar{D}) = [\bar{A} \bar{B} \bar{D}] \bar{C} - [\bar{A} \bar{B} \bar{C}] \bar{D} \quad \text{--- (2)}$$

فبالطرح:

$$\therefore 0 = [\bar{A} \bar{C} \bar{D}] \bar{B} - [\bar{B} \bar{C} \bar{D}] \bar{A} - [\bar{A} \bar{B} \bar{D}] \bar{C} + [\bar{A} \bar{B} \bar{C}] \bar{D}$$

$$\therefore [\bar{A} \bar{B} \bar{C}] \bar{D} = [\bar{B} \bar{C} \bar{D}] \bar{A} - [\bar{A} \bar{C} \bar{D}] \bar{B} + [\bar{A} \bar{B} \bar{D}] \bar{C} \quad \text{--- (3)}$$

ولكن:

$$[\bar{B} \bar{C} \bar{D}] = [\bar{D} \bar{B} \bar{C}], [\bar{A} \bar{B} \bar{D}] = [\bar{D} \bar{A} \bar{B}]$$

$$[\bar{A} \bar{C} \bar{D}] = [\bar{D} \bar{A} \bar{C}] = -[\bar{D} \bar{C} \bar{A}]$$

(من خواص حاصل الضرب القياسي الثلاثي)

بالتعويض في (3):

$$[\bar{A} \bar{B} \bar{C}] \bar{D} = [\bar{D} \bar{B} \bar{C}] \bar{A} + [\bar{D} \bar{C} \bar{A}] \bar{B} + [\bar{D} \bar{A} \bar{B}] \bar{C}$$

$$\therefore \bar{D} = \frac{[\bar{D} \bar{B} \bar{C}] \bar{A} + [\bar{D} \bar{C} \bar{A}] \bar{B} + [\bar{D} \bar{A} \bar{B}] \bar{C}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]}$$

جبر المتجهات

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\bar{D} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C})\bar{A} + (\bar{D} \cdot \bar{C} \wedge \bar{A})\bar{B} + (\bar{D} \cdot \bar{A} \wedge \bar{B})\bar{C}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]} \\
 &= (\bar{D} \cdot \frac{\bar{B} \wedge \bar{C}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]})\bar{A} + (\bar{D} \cdot \frac{\bar{C} \wedge \bar{A}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]})\bar{B} + (\bar{D} \cdot \frac{\bar{A} \wedge \bar{B}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]})\bar{C} \\
 &= (\bar{D} \cdot \bar{A}')\bar{A} + (\bar{D} \cdot \bar{B}')\bar{B} + (\bar{D} \cdot \bar{C}')\bar{C} \\
 &= \alpha \bar{A} + \beta \bar{B} + \gamma \bar{C} \quad \text{_____ (4)}
 \end{aligned}$$

حيث:

$$\bar{A}' = \frac{\bar{B} \wedge \bar{C}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]}, \quad \bar{B}' = \frac{\bar{C} \wedge \bar{A}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]}, \quad \bar{C}' = \frac{\bar{A} \wedge \bar{B}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]}$$

$$\alpha = \bar{D} \cdot \bar{A}', \quad \beta = \bar{D} \cdot \bar{B}', \quad \gamma = \bar{D} \cdot \bar{C}'$$

$$\bar{A} \cdot \bar{A}' = \frac{\bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]} = \frac{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]} = 1$$

أيضاً:

$$\bar{B} \cdot \bar{B}' = \frac{\bar{B} \cdot (\bar{C} \wedge \bar{A})}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]} = \frac{\bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]} = \frac{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]} = 1$$

$$\bar{C} \cdot \bar{C}' = \frac{\bar{C} \cdot (\bar{A} \wedge \bar{B})}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]} = \frac{\bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C}}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]} = \frac{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]}{[\bar{A} \bar{B} \bar{C}]} = 1$$

وهو المطلوب.

مثال (١٠): حل المعادلات الإتجاهية الآتية:

(i) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{a}$, $\bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{b}$, $\bar{x} \cdot \bar{a} = 1$

(ii) $(\bar{x} \wedge \bar{a}) + 4\bar{a} = 3\bar{x}$

الحل: أولاً: المطلوب إيجاد المتجهين \bar{x} , \bar{y} فمن المعطيات:

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{a}$$

_____ (1)

$$\bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{b} \quad \text{---(2)}$$

$$\bar{x} \cdot \bar{a} = 1 \quad \text{---(3)}$$

فمن (1):

$$\bar{y} = \bar{a} - \bar{x} \quad \text{---(4)}$$

$$\bar{x} \wedge (\bar{a} - \bar{x}) = \bar{b} \quad \text{بالتعويض من (4) في (2):}$$

$$\therefore \bar{x} \wedge \bar{a} - \bar{x} \wedge \bar{x} = \bar{b} \quad \therefore \bar{x} \wedge \bar{a} = \bar{b} \quad \text{---(5)}$$

$$\bar{x} \wedge \bar{x} = 0 \quad \text{حيث}$$

وبضرب (5) اتجاهياً في \bar{a} نحصل على:

$$\bar{a} \wedge (\bar{x} \wedge \bar{a}) = \bar{a} \wedge \bar{b}$$

$$\therefore (\bar{a} \cdot \bar{a}) \bar{x} - (\bar{a} \cdot \bar{x}) \bar{a} = \bar{a} \wedge \bar{b}$$

$$\therefore a^2 \bar{x} - \bar{a} = \bar{a} \wedge \bar{b}$$

(حيث استخدمنا العلاقة (3): $\bar{a} \cdot \bar{x} = 1$)

$$\therefore a^2 \bar{x} = (\bar{a} \wedge \bar{b}) + \bar{a}$$

$$\therefore \bar{x}^2 = \frac{1}{a^2} [(\bar{a} \wedge \bar{b}) + \bar{a}] \quad \text{---(6)}$$

ولإيجاد \bar{y} : بالتعويض عن \bar{x} من (6) في (4) نحصل على:

$$\bar{y} = \bar{a} - \bar{x} = \bar{a} - \frac{1}{a^2} [(\bar{a} \wedge \bar{b}) + \bar{a}] \quad \text{---(7)}$$

وهو المطلوب.

ثانياً: حيث أن:

$$(\bar{x} \wedge \bar{b}) + 4\bar{b} = 3\bar{x} \quad \text{---(8)}$$

فبالضرب قياسياً في $(\bar{x} \wedge \bar{b})$ نحصل على:

$$(\bar{x} \wedge \bar{b})^2 + 4\bar{b} \cdot (\bar{x} \wedge \bar{b}) = 3\bar{x} \cdot (\bar{x} \wedge \bar{b}) \quad \text{---(9)}$$

جبر المتجهات

وباستخدام خواص حاصل الضرب الثلاثي القياسي فإن

$$\bar{b} \cdot (\bar{x} \wedge \bar{b}) = \bar{x} \cdot (\bar{b} \wedge \bar{b}) = 0$$

$$\bar{x} \cdot (\bar{x} \wedge \bar{b}) = \bar{b} \cdot (\bar{x} \wedge \bar{x}) = 0$$

$$(\bar{x} \wedge \bar{b})^2 = 0$$

وتصبح (9):

$$\bar{x} \wedge \bar{b} = 0$$

(10)

من (10) يتضح أن المتجهين \bar{x}, \bar{b} يكونان متوازيان بمعنى أن:

$$\bar{x} = \lambda \bar{b}$$

(11)

ولتعيين الثابت λ : نعوض عن قيمة \bar{x} من (11) في (8):

$$\therefore (\lambda \bar{b} \wedge \bar{b}) + 4\bar{b} = 3\lambda \bar{b}$$

$$\therefore 4\bar{b} = 3\lambda \bar{b} \rightarrow \therefore 4 = 3\lambda \rightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

وبالتعويض عن قيمة λ في (11) نحصل على حل المعادلة (8) بالصورة:

$$\bar{x} = \frac{4}{3} \bar{b}$$

وهو المطلوب.

مسائل على الباب الأول

جبر المتجهات

(١) احسب أطوال واتجاهات المتجهين المستويين:

$$\vec{a} = (2, 2), \vec{b} = (2, 2\sqrt{3})$$

$$\vec{a} = (1,3), \vec{b} = (-2,4), \vec{c} = (-1,-5) \quad (٢) \text{ إذا كانت:}$$

ثلاث متجهات مستوية ، فأوجد كل من المتجهين الآتيين مقداراً واتجاهاً:

$$(i) \vec{D} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$(ii) \vec{G} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$$

(٣) ما هو المتجه الذي يجب إضافته إلى المتجهين:

$$\vec{a} = (1, -2.2), \vec{b} = (2, 1, -1)$$

بحيث أن حاصلتهم تكون متجه وحده في اتجاه محور y .

$$\vec{r}_1 = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$$

(٤) أثبت أن مجموعة المتجهات:

$$\vec{r}_2 = 3\vec{a} - 5\vec{b} + 2\vec{c}$$

$$\vec{r}_3 = 4\vec{a} - 5\vec{b} + 2\vec{c}$$

حيث $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متجهات غير متوازية، تكون مرتبطة خطياً.

(٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين Q, R اللذان متجهي موضعيهما \vec{a}, \vec{b}

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

وذلك بالصورة:

حيث \vec{r} متجه موضع أي نقطة على المستقيم ، λ بارامتر.

(٦) إذا كانت $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ثلاث متجهات لا تقع في نفس المستوى فإن العلاقة

$$x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$$

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2$$

تستلزم أن يكون:

والمطلوب: إثبات هذه النظرية.

(٧) (أ) إذا كان \vec{A} متجهاً ما فاثبت أنه يمكن كتابته بالصورة:

$$\vec{A} = (\vec{A} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{A} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{A} \cdot \hat{k})\hat{k}$$

(ب) أوجد قيمة λ التي تجعل المتجهين:

$$\vec{a} = (4, -2, -2), \vec{b} = (2, \lambda, 1)$$

(٨) أثبت أن المتجهات الثلاثة

$$\vec{a} = (3, -2, 1), \vec{b} = (1, -3, 5), \vec{c} = (2, 1, -4)$$

تكون أضلاع مثلث قائم الزاوية.

$$(٩) \text{ أوجد مسقط كل من للمتجهين: } \vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}, \vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

على الآخر، وكذلك الزاوية المحصورة بينهما.

(١٠) باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية: "محصول

المتجهات الممثلة بواسطة المستقيمات المتوسطة للمثلث تساوي صفراً".

(١١) باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية: "المستقيمات

المتوسطة في مثلث تتلاقى في نقطة واحدة تقسم هذه المستقيمات بنسبة ١:٢ من جهة القاعدة".

(١٢) باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية: "متوازي الأضلاع

المرسومان على نفس القاعدة وبين نفس الخطين المتوازيين يكونان متساويان في المساحة".

(١٣) (أ) أثبت أن المتجه $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ يكون عموديا على المستوى الذي يحتوي كل من \vec{A}, \vec{B} .

(ب) أوجد متجه الوحدة العمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهين:

$$\vec{A} = (2, -6, -3), \quad \vec{B} = (4, 3, -1)$$

(١٤) باستخدام خواص حاصل الضرب القياسي أثبت النظرية الهندسية الآتية:
"أقطار المعين تكون متعامدة".

(١٥) باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية: "مجموع مساحتي المربعين المنشأين على قطري متوازي الأضلاع تساوي مجموع مساحات المربعات المنشأة على أضلاعه".

(١٦) باستخدام خواص حاصل الضرب القياسي والاتجاهي، أثبت العلاقتين
المثلثتين الآتيتين:

$$(i) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$(ii) \sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

(١٧) (أ) أثبت أن حاصل الضرب القياسي الثلاثي $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ يمثل هندسيا بحجم متوازي المستطيلات الذي تمثل جوانبه بالمتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.

(ب) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أضلاع متجاورة تمثلها
المتجهات:

$$\vec{A} = (5, -2, 0), \quad \vec{B} = (1, 1, -1), \quad \vec{C} = (3, 0, 2)$$

ملحوظة: الحلول الكاملة لهذه المسائل ملحقه بنهاية هذا القسم الأول من الكتاب
(تحليل المتجهات).