

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

الباب الثاني

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

الدالة الاتجاهية:

هي دالة تسلك سلوك المتجهات ، وتعتمد على متغير قياسي t وتكتب

بالصورة $\vec{F} = \vec{F}(t)$ ، مثل الدالة: $\vec{F}(t) = (\sin t)\hat{i} + (\cos t)\hat{j}$.

وتطبق على تلك الدالة جميع القوانين التي درسناها في جبر المتجهات.

مثال (1):

إذا كانت:

$$\vec{F}(t) = t\hat{i} + \cos t\hat{k}$$

$$\vec{G}(t) = \sin t\hat{i} + \ln t\hat{j} + t^2\hat{k}$$

دالتان اتجاهيتان ، فاوجد:

$$(1) \vec{F}(t) + \vec{G}(t)$$

$$(2) \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$$

$$(3) \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t)$$

الحل:

$$\vec{F}(t) + \vec{G}(t) = (t + \sin t)\hat{i} + \ln t\hat{j} + (t^2 + \cos t)\hat{k}$$

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = (t)(\sin t) + (0)(\ln t) + (\cos t)(t^2) = t(\sin t + t \cos t)$$

$$\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t & 0 & \cos t \\ \sin t & \ln t & t^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(\cos t)(\ln t)\hat{i} - (t^3 - \cos t \sin t)\hat{j} + (t \ln t)\hat{k}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

مثال (٢): أثبت أن الدالتين الاتجاهيتين:

$$\vec{F}(t) = a(\cos t \hat{i} + \sin t \hat{j}), \vec{G}(t) = b(\sin t \hat{i} - \cos t \hat{j})$$

حيث a, b ثابتان ، متعامدتان لجميع قيم t في الفترة $[0, 2\pi]$.

الحل:

شرط التعامد أن يكون حاصل الضرب القياسي مساويا للصفر أي أن:

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = 0$$

في المسألة:

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = ab(\cos t \sin t - \sin t \cos t) = 0$$

لجميع قيم t في الفترة المعطاة وهو المطلوب.

مشتقة الدوال الاتجاهية:

(١) إذا كانت $\vec{F}(t)$ دالة اتجاهية للمتغير القياسي t في الفترة $[a, b]$ فإن

مشتقة $\vec{F}(t)$ تعرف كالآتي:

$$\vec{F}'(t) = \frac{d\vec{F}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t}$$

(٢) إذا كانت:

$$\vec{F}(t) = f_1(t)\hat{i} + f_2(t)\hat{j} + f_3(t)\hat{k}$$

حيث: f_1, f_2, f_3 هي مركبات $\vec{F}(t)$ ، فإن $\vec{F}(t)$ تكون قابلة للتفاضل في الفترة

$[a, b]$ ، أي يكون لها مشتقة تفاضلية في تلك الفترة إذا كانت مركباتها أيضا قابلة

للتفاضل في نفس الفترة ، وبحيث أن:

$$\vec{F}'(t) = f_1'(t)\hat{i} + f_2'(t)\hat{j} + f_3'(t)\hat{k}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

(٣) تطبق قوانين المشتقات العادية على الدوال الاتجاهية مع مراعاة الترتيب،
فمثلاً:

$$(i) \quad [\vec{F} + \vec{G}]' = \vec{F}' + \vec{G}'$$

$$(ii) \quad [\vec{F} \cdot \vec{G}]' = \vec{F}' \cdot \vec{G}' + \vec{F} \cdot \vec{G}'$$

$$(iii) \quad [\vec{F} \wedge \vec{G}]' = \vec{F}' \wedge \vec{G}' + \vec{F} \wedge \vec{G}'$$

$$(iv) \quad [\vec{F} \cdot \vec{G} \wedge \vec{H}]' = \vec{F}' \cdot \vec{G} \wedge \vec{H} + \vec{F} \cdot \vec{G}' \wedge \vec{H} + \vec{F} \cdot \vec{G} \wedge \vec{H}'$$

$$(V) \quad [\vec{F} \wedge \vec{G} \wedge \vec{H}]' = \vec{F}' \wedge (\vec{G} \wedge \vec{H}) + \vec{F} \wedge (\vec{G}' \wedge \vec{H}) + \vec{F} \wedge (\vec{G} \wedge \vec{H}')$$

أمثلة محلولة:

مثال (١): إذا كانت $\vec{F}(t)$ و $\vec{G}(t)$ دالتان لتجهيتان في المتغير القياسي t ، فاثبت
أن:

$$[\vec{F} \wedge \vec{G}' - \vec{F}' \wedge \vec{G}] = \vec{F} \wedge \vec{G}'' - \vec{F}'' \wedge \vec{G}$$

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{F}}{dt}, \vec{F}'' = \frac{d^2\vec{F}}{dt^2}, \dots$$

حيث:

الحل:

$$\begin{aligned} [\vec{F} \wedge \vec{G}' - \vec{F}' \wedge \vec{G}]' &= [\vec{F} \wedge \vec{G}']' - [\vec{F}' \wedge \vec{G}]' \\ &= [\vec{F} \wedge \vec{G}'' + \vec{F}' \wedge \vec{G}'] - [\vec{F}' \wedge \vec{G}' + \vec{F}'' \wedge \vec{G}] \\ &= \vec{F} \wedge \vec{G}'' - \vec{F}'' \wedge \vec{G} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): إذا كانت $\vec{F}(t)$ دالة اتجاهية، وكان:

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{F}}{dt}, \vec{F}'' = \frac{d^2\vec{F}}{dt^2}, \vec{F}''' = \frac{d^3\vec{F}}{dt^3}$$

$$[\vec{F} \cdot \vec{F}' \wedge \vec{F}'']' = \vec{F} \cdot \vec{F}' \wedge \vec{F}'''$$

فاثبت أن:

الحل:

بتطبيق قانون مشتقة حاصل الضرب الثلاثي القياسي للدوال الثلاثة $\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''$

[القانون رقم iV]

$$[\vec{F} \cdot \vec{G} \wedge \vec{H}]' = \vec{F}' \cdot \vec{G} \wedge \vec{H} + \vec{F} \cdot \vec{G}' \wedge \vec{H} + \vec{F} \cdot \vec{G} \wedge \vec{H}'$$

$$\therefore [\vec{F} \cdot \vec{F}' \wedge \vec{F}'']' = \vec{F}' \cdot \vec{F}' \wedge \vec{F}'' + \vec{F} \cdot \vec{F}'' \wedge \vec{F}'' + \vec{F} \cdot \vec{F}' \wedge \vec{F}'''$$

ولكن:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} \wedge \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{F}' \cdot \vec{F}' \wedge \vec{F}'' = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{F} \cdot \vec{F}'' \wedge \vec{F}'' = 0$$

$$\therefore [\vec{F} \cdot \vec{F}' \wedge \vec{F}'']' = \vec{F} \cdot \vec{F}' \wedge \vec{F}'''$$

وهو المطلوب .

المجالات القياسية والاتجاهية:

(١) يقال أن الدالة القياسية $\phi(x, y, z)$ تشكل مجالا قياسيا، إذا كان لكل نقطة في

الفراغ يوجد عدد قياسي وحيد عبارة عن قيمة لدالة ϕ عند هذه النقطة.

∴ المجال للقياسي يمكن وصفه بالدالة القياسية ϕ .

(٢) يقال أن الدالة الاتجاهية $\vec{F}(x, y, z)$ تشكل مجالا اتجاهيا، إذا كان لكل نقطة

في الفراغ يوجد متجه وحيد عبارة عن المتجه \vec{F} عند هذه النقطة.

∴ المجال الاتجاوي يمكن وصفه بالدالة الاتجاهية \vec{F} .

(٣) تطبق القوانين الخاصة بالدوال الاتجاهية على المجالات الاتجاهية الموصوفة

بتلك الدوال.

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

المشتقات الجزئية للمجالات القياسية والاتجاهية:

إذا كانت: $\vec{F}(x, y, z)$ و $\phi(x, y, z)$ تشكل مجالين قياسي واتجاهي، يعتمدان على أكثر من متغير، فإنه يكون لدينا المشتقات الجزئية الآتية:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \dots$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{F}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}, \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y}, \dots$$

حيث:

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \right]$$

وفي حالة المجالات التي تصفها دوال متصلة فإن:

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y \partial x}$$

وتخضع هذه المشتقات لقوانين التفاضل الجزئي المعروفة:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{F} + \vec{G}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \cdot \vec{G}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{F} \wedge \vec{G}) = \vec{F} \wedge \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \wedge \vec{G}, \dots$$

تفاضلة دالة اتجاهية:

إذا كانت $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ دالة اتجاهية تصف مجالاً اتجاهياً، فإن تفاضلة \vec{F}

تعرف بالعلاقة:

$$d\vec{F} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} dz$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

وبدلالة المركبات: إذا كانت:

$$\vec{F} = f_1 \hat{i} + f_2 \hat{j} + f_3 \hat{k} = (f_1, f_2, f_3)$$

حيث:

$$f_1 = f_1(x, y, z)$$

$$f_2 = f_2(x, y, z)$$

$$f_3 = f_3(x, y, z)$$

فإن:

$$d\vec{F} = df_1 \hat{i} + df_2 \hat{j} + df_3 \hat{k}$$

حيث:

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz, \dots\dots\dots$$

أمثلة محلولة:

مثال (1): إذا كانت:

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2 yz \hat{i} - 2xz^3 \hat{j} + xz^2 \hat{k}$$

$$\vec{G}(x, y, z) = 2z \hat{i} + y \hat{j} - x^2 \hat{k}$$

دالتان تصفان مجالين اتجاهيين، فأوجد:

$$\frac{\partial^2 (\vec{F} \wedge \vec{G})}{\partial x \partial y}$$

عند النقطة (1, 0, -2).

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

الحل:

$$\vec{F} \wedge \vec{G} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x^2 y z & -2 x z^3 & x z^2 \\ 2 z & y & -x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(2 x^3 z^3 - x y z^2) - \hat{j}(-x^4 y z - 2 x z^3) + \hat{k}(x^2 y^2 z + 4 x z^4) \rightarrow (1)$$

$$\frac{\partial^2 (\vec{F} \wedge \vec{G})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial (\vec{F} \wedge \vec{G})}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial (\vec{F} \wedge \vec{G})}{\partial y} = \hat{i}(-x z^2) + \hat{j}(x^4 z) + \hat{k}(2 x^2 y z) \quad \text{ومن (1):}$$

$$\frac{\partial^2 (\vec{F} \wedge \vec{G})}{\partial x \partial y} = -z^2 \hat{i} + 4 x^3 z \hat{j} + 4 x y z \hat{k}$$

وعند النقطة (1, 0, -2)

$$\frac{\partial^2 (\vec{F} \wedge \vec{G})}{\partial x \partial y} = -4 \hat{i} - 8 \hat{j} = -4(\hat{i} + 2 \hat{j})$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): إذا كانت: $\phi = \phi(x, y, z) = x y^2 z$ دالة قياسية تصف مجالا قياسيا

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = x z \hat{i} - x y^2 \hat{j} + y z^2 \hat{k} \quad \text{وكانت:}$$

دالة اتجاهية تصف مجالا اتجاهيا فأوجد: $\frac{\partial^3 (\phi \vec{F})}{\partial x^2 \partial z}$ عند النقطة (2, -1, 1).

الحل: حاصل الضرب $(\phi \vec{F})$ عبارة عن دالة اتجاهية صورتها:

$$\begin{aligned} \phi \vec{F} &= (x y^2 z)(x z \hat{i} - x y^2 \hat{j} + y z^2 \hat{k}) \\ &= x^2 y^2 z^2 \hat{i} - x^2 y^4 z \hat{j} + x y^3 z^3 \hat{k} \end{aligned} \rightarrow (1)$$

المطلوب:

$$\frac{\partial^3 (\phi \vec{F})}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 (\phi \vec{F})}{\partial x \partial z} \right]$$

$$\frac{\partial^2 (\phi \vec{F})}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial (\phi \vec{F})}{\partial z} \right]$$

ومن (1):

$$\frac{\partial (\phi \vec{F})}{\partial z} = 2x^2 y^2 z \hat{i} - x^2 y^4 \hat{j} + 3xy^3 z^2 \hat{k}$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x:

$$\frac{\partial^2 (\phi \vec{F})}{\partial x \partial z} = 4xy^2 z \hat{i} - 2xy^4 \hat{j} + 3y^3 z^2 \hat{k}$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x مرة ثانية:

$$\frac{\partial^3 (\phi \vec{F})}{\partial x^2 \partial z} = 4y^2 z \hat{i} - 2y^4 \hat{j} = 2y^2 (2z \hat{i} - y^2 \hat{j})$$

$$\frac{\partial^3 (\phi \vec{F})}{\partial x^2 \partial z} = 2(2 \hat{i} - \hat{j})$$

وعند النقطة (2, -1, 1):

وهو المطلوب.

مثال (3):

إذا كانت الدالة الاتجاهية $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$ نصف مجالا اتجاهيا، وكانت

x, y, z تعتمد على t فاثبت أن:

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

حيث $\frac{d\vec{F}}{dt}$ المشتقة الكلية، $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$ المشتقة الجزئية للدالة \vec{F} بالنسبة إلى t وتحدد

الاعتماد الصريح للدالة \vec{F} على t.

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

الحل: نفرض أن:

$$\vec{F} = f_1(x, y, z, t)\hat{i} + f_2(x, y, z, t)\hat{j} + f_3(x, y, z, t)\hat{k}$$

$$\therefore d\vec{F} = df_1\hat{i} + df_2\hat{j} + df_3\hat{k}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz + \frac{\partial f_1}{\partial t} dt \right) \hat{i} \\ &+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz + \frac{\partial f_2}{\partial t} dt \right) \hat{j} \\ &+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} dy + \frac{\partial f_3}{\partial z} dz + \frac{\partial f_3}{\partial t} dt \right) \hat{k} \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial f_2}{\partial t} \hat{j} + \frac{\partial f_3}{\partial t} \hat{k} \right) dt \\ &+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \hat{j} + \frac{\partial f_3}{\partial x} \hat{k} \right) dx \\ &+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \hat{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f_3}{\partial y} \hat{k} \right) dy \\ &+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \hat{j} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \hat{k} \right) dz \\ &= \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} dz \end{aligned}$$

بقسمة الطرفين على dt:

$$\therefore \frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \rightarrow (1)$$

وهي العلاقة المطلوبة.

ملحوظة: بأخذ: $\frac{d\vec{F}}{dt} = \dot{\vec{F}}$, $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$,; $\frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{F}_t$, $\frac{d\vec{F}}{dx} = \vec{F}_x$,

تأخذ الصورة: $\dot{\vec{F}} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \dot{z} = \vec{F}_t + \vec{F}_x \dot{x} + \vec{F}_y \dot{y} + \vec{F}_z \dot{z}$

خواص المجالات القياسية

الخاصية الأولى:

(Directional Derivative) المشتقة الاتجاهية للمجال القياسي

هي كمية قياسية تعرف كالآتي:

المشتقة الاتجاهية للمجال القياسي ϕ عند النقطة $P(x, y, z)$ في اتجاه تزايد المتجه \vec{a} هي:

$$D_{\vec{a}}\phi = l \frac{\partial \phi}{\partial x} + m \frac{\partial \phi}{\partial y} + n \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

حيث l, m, n هي مركبات متجه الوحدة في اتجاه المتجه \vec{a} أي أن:

$$\hat{a} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$$

مثال:

إذا كانت الدالة $\phi(x, y) = x^3 y^2$ تشكل مجالاً قيسياً، فأوجد المشتقة الاتجاهية لـ ϕ عند النقطة $P(-1, 2)$ في اتجاه تزايد المتجه:

$$\hat{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$$

الحل:

حيث أن الدالة $\phi = \phi(x, y)$ ، ففي المستوى (x, y) تكون المشتقة الاتجاهية لـ ϕ هي:

$$D_{\vec{a}}\phi = l \frac{\partial \phi}{\partial x} + m \frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow (1)$$

حيث l, m هما مركبتا متجه الوحدة \hat{a} في اتجاه المتجه \vec{a}

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{4\hat{i} - 3\hat{j}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5}\hat{i} - \frac{3}{5}\hat{j} = l\hat{i} + m\hat{j}$$

$$\therefore l = \frac{4}{5}, \quad m = -\frac{3}{5}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

$$\phi = x^3 y^2 \quad \text{أيضا:}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^3 y$$

بالتعويض في (1):

$$D_a \phi = \frac{4}{5}(3x^2 y^2) - \frac{3}{5}(2x^3 y) = \frac{12}{5}x^2 y^2 - \frac{6}{5}x^3 y$$

عند النقطة $P(-1, 2)$:

$$D_a \phi = \frac{12}{5}(4) - \frac{6}{5}(-2) = \frac{12}{5}(4+1) = 12$$

وهو المطلوب. ويلاحظ أن المشتقة الاتجاهية $D_a \phi$ لدالة قياسية هي كمية قياسية (عدديه).

الخاصة الثانية:

تدرج المجال القياسي:

يعرف تدرج (gradient) المجال القياسي ϕ بالعلاقة الآتية:

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}$$

وهو كمية اتجاهية.

المؤثر التفاضلي الاتجاهي نيلبا ($\bar{\nabla}$):

يعرف هذا المؤثر بالعلاقة الآتية:

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\therefore \bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \phi = \bar{\nabla} \phi$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

يلاحظ أن المتجه $\bar{\nabla}$ ليس كمية مضروبة في ϕ ولكنه مؤثر اتجاهي يؤثر على ϕ .

$$\therefore \text{grad } \phi = \bar{\nabla} \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \phi \text{ تدرج}$$

أمثلة محلولة:

مثال (1): إذا كانت $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ فأوجد تدرج $|\bar{r}|$.

الحل: المطلوب هو: $\text{grad}|\bar{r}| = \bar{\nabla}|\bar{r}| = \bar{\nabla}(r)$

$$r = |\bar{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{حيث:}$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{\nabla}(r) &= \bar{\nabla}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \hat{i} \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) \right] \\ &\quad + \hat{j} \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2y) \right] \\ &\quad + \hat{k} \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2z) \right] \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} [x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}] = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} = \hat{r} \end{aligned}$$

حيث $\hat{r} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$ هو متجه الوحدة في اتجاه \bar{r} . وهو المطلوب.

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

مثال (٢): إذا كانت $\phi = \phi(r)$ فاثبت أن: $\nabla\phi = \frac{d\phi}{dr} \hat{r}$

الحل:

من المعلوم أنه إذا كانت $\phi = \phi(x, y, z)$ فإن:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{k}$$

وكحالة خاصة: إذا كانت ϕ دالة في x فقط أي $\phi = \phi(x)$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{i} = \frac{d\phi}{dx} \hat{i}$$

وإذا كانت ϕ دالة في r فقط أي $\phi = \phi(r)$ فإن:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{r} = \frac{d\phi}{dr} \hat{r}$$

وهو المطلوب .

وكأمثلة على تطبيق هذه العلاقة:

$$(i) \phi = \frac{1}{r} \rightarrow \nabla\phi = \frac{d\phi}{dr} \hat{r} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \hat{r} = \left(-\frac{1}{r^2} \right) \hat{r} = \left(-\frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\therefore \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$(ii) \phi = \ln r \rightarrow \nabla\phi = \frac{d\phi}{dr} \hat{r} = \frac{d}{dr} (\ln r) \hat{r}$$

$$= \left(\frac{1}{r} \right) \hat{r} = \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\vec{r}}{r^2} \quad \therefore \nabla (\ln r) = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

مثال (٣): إذا كانت \vec{a} متجه ثابت فاثبت أن:

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$$

$$\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}, \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

حيث:

الحل :

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{r} = \phi &= (a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}) \cdot (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \\ &= a_1 x + a_2 y + a_3 z\end{aligned}\quad \text{_____ (1)}$$

ومن تعريف $\bar{\nabla} \phi$:

$$\bar{\nabla} \phi = \hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}\quad \text{_____ (2)}$$

ولكن : من (1) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (a_1 x) = a_1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (a_2 y) = a_2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (a_3 z) = a_3$$

بالتعويض في (2) :

$$\therefore \bar{\nabla} (\bar{a} \cdot \bar{r}) = \hat{i} a_1 + \hat{j} a_2 + \hat{k} a_3 = \bar{a}$$

وهو المطلوب .

مثال (٤) :

إذا كان :

$$\bar{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}, \quad \bar{a} = \alpha x \hat{i} + \beta y \hat{j} + \gamma z \hat{k}$$

حيث : α, β, γ ثوابت ، فأثبت أن : $\bar{\nabla} (\bar{a} \cdot \bar{r}) = 2\bar{a}$

الحل :

نوجد أولاً : $\bar{a} \cdot \bar{r} = \phi$

$$\begin{aligned}\phi &= (\alpha x \hat{i} + \beta y \hat{j} + \gamma z \hat{k}) \cdot (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \\ &= \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2\end{aligned}\quad \text{_____ (1)}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

ومن تعريف $\bar{\nabla} \phi$:

$$\bar{\nabla} \phi = \hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{_____ (2)}$$

ولكن من (١) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2\alpha x, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2\beta y, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2\gamma z$$

بالتعويض في (٢) :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}(\bar{a} \cdot \bar{r}) &= 2\alpha x \hat{i} + 2\beta y \hat{j} + 2\gamma z \hat{k} \\ &= 2(\alpha x \hat{i} + \beta y \hat{j} + \gamma z \hat{k}) = 2\bar{a} \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (٥):

أثبت أن:

$$(i) \quad \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\bar{r}}{r^3}$$

$$(ii) \quad \text{grad}(\ln r) = \bar{\nabla}(\ln r) = \frac{\bar{r}}{r^2}$$

حيث:

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

الحل:

$$(i) \quad \bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \bar{\nabla}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \bar{\nabla}\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

ومن تعريف $\bar{\nabla} \phi$ حيث:

$$\phi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla} \phi &= \bar{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = \hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\
 &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \hat{i} \left[-\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (2x) \right] + \hat{j} \left[-\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (2y) \right] \\
 &\quad + \hat{k} \left[-\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (2z) \right] \\
 &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} [\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z] = -\frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\bar{r}}{r^3}
 \end{aligned}$$

حيث :

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow r^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

ملحوظة: إذا كان $\hat{r} = \frac{\bar{r}}{r}$ هو متجه الوحدة في اتجاه \bar{r}

$$\therefore \bar{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = \left(-\frac{1}{r^2} \right) \hat{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2} \quad [\text{مثال (٢)}]$$

$$\bar{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \hat{r} \rightarrow \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r}$$

$$(ii) \bar{\nabla} (\ln r) = \bar{\nabla} [\ln(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2} \bar{\nabla} [\ln(x^2 + y^2 + z^2)]$$

ومن تعريف $\bar{\nabla} \phi \leftarrow$ حيث $\phi = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\begin{aligned}
 \therefore \bar{\nabla} (\ln r) &= \frac{1}{2} \left[\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} \ln(x^2 + y^2 + z^2) \right. \\
 &\quad \left. + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} [\ln(x^2 + y^2 + z^2)] + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \ln(x^2 + y^2 + z^2) \right]
 \end{aligned}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

$$= \frac{1}{2} \left[\hat{i} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (2x) + \hat{j} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (2y) + \hat{k} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (2z) \right]$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

حيث :

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$$

ملحوظة: بدلالة متجه الوحدة $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$

$$\therefore \bar{\nabla}(\ln r) = \frac{\hat{r}}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)\hat{r} = \frac{\partial}{\partial r}(\ln r)\hat{r} \quad \left| \quad \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} \right.$$

مثال (٦):

أثبت أن العلاقة بين المشتقة الاتجاهية للمجال القياسي $(D_a\phi)$ والتدرج $(\bar{\nabla}\phi)$ هي:

$$D_a\phi = (\bar{\nabla}\phi) \cdot \hat{a}$$

الحل:

المشتقة الاتجاهية للمجال القياسي ϕ في اتجاه تزايد المتجه \bar{a} هي:

$$D_a\phi = l \frac{\partial \phi}{\partial x} + m \frac{\partial \phi}{\partial y} + n \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \rightarrow (1)$$

حيث l, m, n هي مركبات متجه الوحدة \hat{a} في اتجاه \bar{a}

$$\hat{a} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k} \quad \rightarrow (2)$$

أيضا: تدرج ϕ هو:

$$\bar{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k} \quad \rightarrow (3)$$

من (٢) و(٣):

$$(\nabla\phi) \cdot \hat{a} = \frac{\partial\phi}{\partial x} l + \frac{\partial\phi}{\partial y} m + \frac{\partial\phi}{\partial z} n \quad \rightarrow (4)$$

بمقارنة (١) و(٤):

$$D_a\phi = (\nabla\phi) \cdot \hat{a}$$

وهو المطلوب.

مثال (٧): إذا كانت f, g تشكلان مجالين قياسيين، فاثبت أن :

$$(i) \quad \nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

$$(ii) \quad \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$(iii) \quad \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

الحل: من تعريف التدرج:

$$\begin{aligned} (i) \quad \nabla(f+g) &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x}(f+g) + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}(f+g) + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}(f+g) \\ &= \hat{i} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} \right) \\ &= \left(\hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \left(\hat{i} \frac{\partial g}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial g}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial g}{\partial z} \right) = \nabla f + \nabla g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \nabla(fg) &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x}(fg) + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}(fg) + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}(fg) \\ &= \hat{i} \left(f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \hat{j} \left(f \frac{\partial g}{\partial y} + g \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \hat{k} \left(f \frac{\partial g}{\partial z} + g \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= f \left(\hat{i} \frac{\partial g}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial g}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial g}{\partial z} \right) + g \left(\hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) = f\nabla g + g\nabla f \end{aligned}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \bar{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right) + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right) \\ &= \hat{i}\left(\frac{g \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}\right) + \hat{j}\left(\frac{g \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}\right) + \hat{k}\left(\frac{g \frac{\partial f}{\partial z} - f \frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}\right) \\ &= \frac{1}{g^2} \left[g \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right) - f \left(\frac{\partial g}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \hat{k} \right) \right] \\ &= \frac{1}{g^2} [g \bar{\nabla} f - f \bar{\nabla} g] = \frac{g \bar{\nabla} f - f \bar{\nabla} g}{g^2} \end{aligned}$$

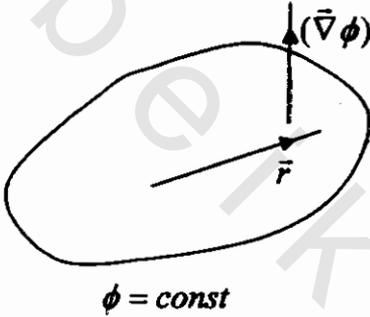
وهو المطلوب.

نظريات التدرج

نظرية (١): المتجه $(\nabla\phi)$ يكون عموديا على السطح الذي معادلته

$$\phi(x, y, z) = \text{const}.$$

البرهان:



نفرض أن: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

هو متجه موضع أي نقطة

على السطح $\phi = \text{const}$.

$$\therefore d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \rightarrow (1)$$

هو عنصر طول يقع في المستوى المماس للسطح

ومن معادلة السطح: $\phi = \text{const}$

$$\therefore d\phi = 0 \rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0 \rightarrow (2)$$

ولكن:

$$\nabla\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \rightarrow (3)$$

من (١) و (٣):

$$(\nabla\phi) \cdot (d\vec{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \rightarrow (4)$$

من (٢) و (٤) نجد أن:

$$(\nabla\phi) \cdot (d\vec{r}) = 0$$

وهذا يعني أن المتجه $(\nabla\phi)$ يكون عموديا على $(d\vec{r})$ وبالتالي على السطح وهو المطلوب.

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

مثال:

أوجد متجه الوحدة العمودي على السطح الذي معادلته: $x^2 y + 2xz = 4$ عند النقطة $P(2, -2, 3)$.

الحل:

معادلة السطح:

$$\phi(x, y, z) = x^2 y + 2xz = 4$$

العمودي على هذا السطح هو المتجه: $(\nabla \phi)$ (نظرية 1)

$$\nabla \phi = \hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$= \hat{i}(2xy + 2z) + \hat{j}(x^2) + \hat{k}(2x)$$

وعند النقطة $P(2, -2, 3)$ فإن:

$$(\nabla \phi)_P = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$$

وهو يمثل المتجه العمودي على السطح عند النقطة P ويكون متجه الوحدة العمودي على السطح عند P هو:

$$\hat{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{-2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{-1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

نظرية (٢): (بدون برهان)

إذا كانت ϕ تشكل مجالا قياسيا قابلا للاشتقاق فإن:

(i) - أكبر قيمة للمشتقة الاتجاهية (أو أكبر معدل زيادة للمجال ϕ) تكون في اتجاه $\bar{\nabla} \phi$.

(ii) - القيمة العظمى (أكبر قيمة) للمشتقة الاتجاهية هي $|\bar{\nabla} \phi|$.

مثال: أوجد المشتقة الاتجاهية للمجال القياسي:

$\phi(x, y, z) = x^2 yz + 4xz^2$ عند النقطة $p(1, -2, -1)$ في اتجاه تزايد المتجه $\bar{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ ، ثم أوجد الاتجاه الذي تكون فيه هذه المشتقة أكبر ما يمكن (أي الاتجاه الذي تتزايد فيه ϕ بمعدل أكبر) وكذلك مقدار هذه القيمة الكبرى (العظمى).

الحل: لإيجاد المشتقة الاتجاهية:

من التعريف:

$$D_a \phi = (\bar{\nabla} \phi) \cdot \hat{a} \quad \rightarrow (1)$$

$$\phi = x^2 yz + 4xz^2, \quad \bar{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\bar{\nabla} \phi = \hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$= \hat{i}(2xyz + 4z^2) + \hat{j}(x^2 z) + \hat{k}(x^2 y + 8xz)$$

وعند النقطة $p(1, -2, -1)$

$$(\bar{\nabla} \phi)_p = 8\hat{i} - \hat{j} - 10\hat{k} \quad \rightarrow (2)$$

أيضا:

$$\hat{a} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k} \quad \rightarrow (3)$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

بالتعويض من (2)، (3) في (1):

$$\begin{aligned} D_a \phi &= (8)\left(\frac{2}{3}\right) + (-1)\left(\frac{-1}{3}\right) + (-10)\left(\frac{-2}{3}\right) \\ &= \frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3} = 12.33 \end{aligned}$$

ومن نظرية (٢):

الاتجاه الذي تكون فيه $D_a \phi$ أكبر ما يمكن أي الاتجاه الذي تتزايد فيه ϕ يعادل أكبر هو اتجاه المتجه $(\nabla \phi)$ أي الاتجاه $\nabla \phi = 8\hat{i} - \hat{j} - 10\hat{k}$ ومقدار أكبر معدل للتزايد يكون:

$$|\nabla \phi| = \sqrt{8^2 + 1^2 + 10^2} = \sqrt{165} = 12.84$$

وهو المطلوب.

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

خواص المجالات الاتجاهية :

عند تأثير المؤثر الاتجاهي $\vec{\nabla}$ على دالة اتجاهية \vec{A} تمثل مجالا اتجاهيا معيناً، فإننا نحصل على الحالتين الآتيتين:-

$\vec{\nabla}$ تؤثر اتجاهياً على \vec{A}

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

حيث $(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$ تشكل مجالا اتجاهياً
يسمى التفاف \vec{A} (Curling)

ويكتب:

$$\text{Curl } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\text{Curl} \equiv \vec{\nabla} \wedge$$

$\vec{\nabla}$ تؤثر قياسياً على \vec{A}

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

حيث $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ تشكل مجالا قياسياً
يسمى تباعد \vec{A} (Divergence)

ويكتب:

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\therefore \text{div} \equiv \vec{\nabla} \cdot$$

أولاً:- تباعد (Divergence) المجال الاتجاهي :

يعرف التباعد للمجال الاتجاهي \vec{A} بالعلاقة:

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ويخضع التباعد للعلاقات الآتية:

$$(i) \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$$[\text{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{div} \vec{A} + \text{div} \vec{B}]$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

$$(ii) \quad \bar{\nabla} \cdot (\phi \bar{A}) = \phi (\bar{\nabla} \cdot \bar{A}) + \bar{A} \cdot (\bar{\nabla} \phi)$$

$$[\text{div}(\phi \bar{A}) = \phi \text{div} \bar{A} + \bar{A} \cdot \text{grad} \phi]$$

يلاحظ أن:

ϕ دالة قياسية ، $\text{grad} \phi = \bar{\nabla} \phi$ دالة اتجاهية.

\bar{A} دالة اتجاهية ، $\text{div} \bar{A} = \bar{\nabla} \cdot \bar{A}$ دالة قياسية.

برهان العلاقة (i) :

من تعريف التباعد:

$$\begin{aligned} \text{div} (\bar{A} + \bar{B}) &= \bar{\nabla} \cdot (\bar{A} + \bar{B}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (A_x + B_x) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y + B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z + B_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \\ &= \bar{\nabla} \cdot \bar{A} + \bar{\nabla} \cdot \bar{B} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

برهان العلاقة (ii) :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot (\phi \bar{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\phi A_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\phi A_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\phi A_z) \\ &= \phi \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi \frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &= \phi \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \left(A_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

ولكن:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$A_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \phi)$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{A}) = \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \phi)$$

وهو المطلوب .

أمثلة محلولة :

مثال (1) :

أوجد $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ للدوال الإتجاهية الآتية :

$$(i) \quad \vec{A} = x^2 z \hat{i} - 2y^3 z^2 \hat{j} + x y^2 z \hat{k}$$

$$(ii) \quad \vec{A} = x \cos z \hat{i} + y \ln x \hat{k} - z^3 \hat{k}$$

الحل :

$$\begin{aligned} (i) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 z) + \frac{\partial}{\partial y} (-2y^3 z^2) + \frac{\partial}{\partial z} (x y^2 z) \\ &= 2xz - 6y^2 z^2 + x y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x \cos z) + \frac{\partial}{\partial y} (y \ln x) + \frac{\partial}{\partial z} (-z^3) \\ &= \cos z + \ln x - 3z^2 \end{aligned}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

مثال (٢):

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{A} = \frac{1}{x+y} \quad \text{إذا كانت } \bar{A} = \bar{A} \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x+y} \quad \text{فأثبت أن :} \quad (أ)$$

(ب) إذا كانت $\bar{A} = \bar{A}(x, y, z, t)$ وكانت

$$d\bar{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

فأوجد تفاضله \bar{A} بالصورة :

$$d\bar{A} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} dt + (\bar{\nabla} \cdot d\bar{r}) \bar{A}$$

الحل :

الجزء الأول (أ) :

$$\bar{A} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x+y} = \frac{x}{x+y}\hat{i} + \frac{y}{x+y}\hat{j}$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \bar{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x+y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x+y} \right) \\ &= \frac{(x+y) - x}{(x+y)^2} + \frac{(x+y) - y}{(x+y)^2} = \frac{x+y}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y} \end{aligned}$$

الجزء الثاني (ب) :

حيث أن : $\bar{A} = \bar{A}(x, y, z, t)$ فتكون تفاضله \bar{A} :

$$\begin{aligned} d\bar{A} &= \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{A}}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} dt + \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right) \bar{A} \quad \text{_____ (1)} \end{aligned}$$

ولكن :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = \bar{\nabla} \cdot d\bar{r}$$

بالتعويض في (١) نحصل على :

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dt + (\vec{\nabla} \cdot d\vec{r}) \vec{A}$$

وهو المطلوب .

مثال (٣) : أثبت أن :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$$

حيث :

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} , \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

الحل:

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

ومن تعريف التباعد:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}] + \frac{\partial}{\partial y} [y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} [z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}]$$

$$= x \cdot \left(\frac{-3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (2x) + (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+ y \cdot \left(\frac{-3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (2y) + (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+ z \cdot \left(\frac{-3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (2z) + (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

$$\begin{aligned}
 &= -3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} + (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\
 &\quad - 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} + (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\
 &\quad - 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} + (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\
 &= -3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\
 &= -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = 0 \\
 \therefore \bar{\nabla} \cdot \left(\frac{\bar{r}}{r^3} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

ثانياً: التفاضل للمجال الاتجاهي:

يعرف التفاضل (curl) للمجال الاتجاهي \bar{A} بالعلاقة:

$$\begin{aligned}
 \text{curl } \bar{A} = \bar{\nabla} \wedge \bar{A} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
 &= \hat{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\
 &= \hat{i} (\bar{\nabla} \wedge \bar{A})_x + \hat{j} (\bar{\nabla} \wedge \bar{A})_y + \hat{k} (\bar{\nabla} \wedge \bar{A})_z
 \end{aligned}$$

ملحوظة: يعرف الالتفاف أحياناً بالدوران (rotation) ويرمز له $\text{rot } \bar{A}$.

$$\therefore \text{rot } \bar{A} = \bar{\nabla} \wedge \bar{A}$$

ويخضع الالتفاف للعلاقات الآتية:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \bar{\nabla} \wedge (\bar{A} + \bar{B}) &= \bar{\nabla} \wedge \bar{A} + \bar{\nabla} \wedge \bar{B} \\
 [\text{curl } (\bar{A} + \bar{B}) &= \text{curl } \bar{A} + \text{curl } \bar{B}]
 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{A}) = \phi (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \wedge (\vec{\nabla} \phi)$$

$$[\text{curl}(\phi \vec{A}) = \phi \text{curl} \vec{A} - \vec{A} \wedge \text{grad} \phi]$$

اثبات (i): من تعريف الالتفاف:

$$\text{curl}(\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} + \vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x + B_x & A_y + B_y & A_z + B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} (A_z + B_z) - \frac{\partial}{\partial z} (A_y + B_y) \right]$$

$$- \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial x} (A_z + B_z) - \frac{\partial}{\partial z} (A_x + B_x) \right] + \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} (A_y + B_y) - \frac{\partial}{\partial y} (A_x + B_x) \right]$$

$$= \hat{i} \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right] - \hat{j} \left[\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right]$$

$$+ \hat{k} \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right]$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$+ \hat{i} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

اثبات (ii):

$$\vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{A}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_x & \phi A_y & \phi A_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\phi A_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\phi A_y) \right] + \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\phi A_x) - \frac{\partial}{\partial x} (\phi A_z) \right]$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

$$\begin{aligned}
 & + \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\phi A_y) - \frac{\partial}{\partial y} (\phi A_x) \right] = \hat{i} \left[\phi \frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_z - \phi \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} A_y \right] \\
 & + \hat{j} \left[\phi \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_x - \phi \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_z \right] \\
 & + \hat{k} \left[\phi \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} A_y - \phi \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} A_x \right] \\
 & = \phi \left[\hat{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \\
 & - \left[\hat{i} \left(A_y \frac{\partial \phi}{\partial z} - A_z \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \hat{j} \left(A_z \frac{\partial \phi}{\partial x} - A_x \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(A_x \frac{\partial \phi}{\partial y} - A_y \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] \\
 & = \phi (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \wedge (\vec{\nabla} \phi)
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

أمثلة محلولة :

مثال (1) : إذا كان $\vec{A}(x, y, z) = x \cos z \hat{i} + y \ln x \hat{j} - z^2 \hat{k}$ فأوجد $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

الحل :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x \cos z & y \ln x & -z^2 \end{vmatrix} \\
 &= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} (-z^2) - \frac{\partial}{\partial z} (y \ln x) \right] + \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial z} (x \cos z) - \frac{\partial}{\partial x} (-z^2) \right] \\
 &+ \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} (y \ln x) - \frac{\partial}{\partial y} (x \cos z) \right] \\
 &= \hat{i} [0 - 0] + \hat{j} [-x \sin z - 0] + \hat{k} \left[\frac{y}{x} - 0 \right] = -x \sin z \hat{j} + \frac{y}{x} \hat{k}
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

مثال (٢) :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{x-y}{(x+y)^2} \hat{k} \quad \text{فأثبت أن:} \quad \vec{A} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x+y} \quad \text{إذا كان}$$

الحل:

نكتب \vec{A} في الصورة الاتجاهية الآتية :

$$\vec{A} = \left(\frac{x}{x+y} \right) \hat{i} + \left(\frac{y}{x+y} \right) \hat{j} + (0) \hat{k}$$

ومن تعريف $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{x+y} & \frac{y}{x+y} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} (0) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{x+y} \right) \right] + \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{x+y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (0) \right] \\ &\quad + \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x+y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x+y} \right) \right] \\ &= \hat{i}(0) + \hat{j}(0) + \hat{k} \left[\frac{-y}{(x+y)^2} + \frac{x}{(x+y)^2} \right] = \frac{x-y}{(x+y)^2} \hat{k} \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (٣) :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{r}) = 2\vec{a} \quad \text{إذا كان } \vec{a} \text{ متجه ثابت ، فأثبت أن :}$$

$$\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k} \quad , \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad \text{حيث :}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

الحل :

$$\vec{a} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2z - a_3y) + \hat{j}(a_3x - a_1z) + \hat{k}(a_1y - a_2x)$$

ثم نوجد إلتفاف (curl) هذا المتجه :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{r}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_2z - a_3y & a_3x - a_1z & a_1y - a_2x \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} (a_1y - a_2x) - \frac{\partial}{\partial z} (a_3x - a_1z) \right] \\ &\quad + \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial z} (a_2z - a_3y) - \frac{\partial}{\partial x} (a_1y - a_2x) \right] \\ &\quad + \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} (a_3x - a_1z) - \frac{\partial}{\partial y} (a_2z - a_3y) \right] \\ &= \hat{i}[a_1 + a_1] + \hat{j}[a_2 + a_2] + \hat{k}[a_3 + a_3] \\ &= 2a_1\hat{i} + 2a_2\hat{j} + 2a_3\hat{k} = 2(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) = 2\vec{a} \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (٤) :

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 \quad , \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{r} = 0$$

إذا كان :

فأثبت أن :

الحل :

$$\begin{aligned} (i) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{r} &= \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x) + \frac{\partial}{\partial y} (y) + \frac{\partial}{\partial z} (z) = 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$(ii) \bar{\nabla} \wedge \bar{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{i}(0-0) + \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 0$$

وهو المطلوب .

مثال (٥) : إذا كانت:

$$\bar{A} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$$

$$\bar{B} = x^2z\hat{i} + y^2x\hat{j} + z^2y\hat{k}$$

دالتان اتجاهيتان فأوجد:

$$(\bar{\nabla} \wedge \bar{A}) \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{B})$$

الحل:

نوجد $(\bar{\nabla} \wedge \bar{A})$ ثم $(\bar{\nabla} \wedge \bar{B})$ ثم نضربهما اتجاهيا.

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \wedge \bar{A} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = \hat{i}(0-1) - \hat{j}(1-0) + \hat{k}(0-1) \\ &= -\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} \end{aligned} \quad \rightarrow (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \wedge \bar{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z & y^2x & z^2y \end{vmatrix} = \hat{i}(z^2-0) - \hat{j}(0-x^2) + \hat{k}(y^2-0) \\ &= z^2\hat{i} + x^2\hat{j} + y^2\hat{k} \end{aligned} \quad \rightarrow (2)$$

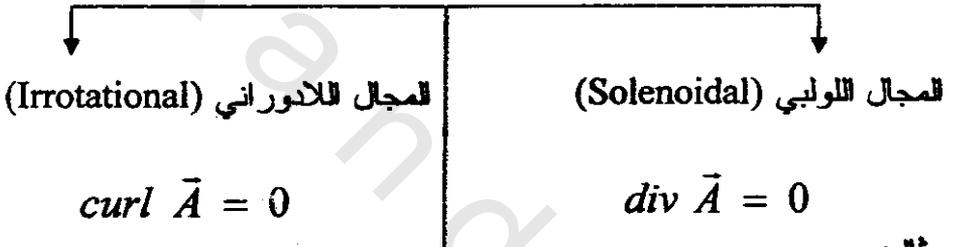
حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

بضرب (1) في (2) اتجاهياً:

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} \\
 &= \hat{i}(-y^2 + x^2) - \hat{j}(-y^2 + z^2) + \hat{k}(-x^2 + z^2) \\
 &= \hat{i}(x^2 - y^2) + \hat{j}(y^2 - z^2) + \hat{k}(z^2 - x^2)
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

المجال اللولبي والمجال اللانوراني:



مثال:

أوجد الثوابت a, b, c التي تجعل المجال الآتي مجالاً لانورانياً:

$$\vec{A} = (x + 2y + az)\hat{i} + (bx - 3y - z)\hat{j} + (4x + cy + 2z)\hat{k}$$

الحل:

$$\text{curl } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0$$

يكون المجال \vec{A} لا دورانياً إذا كان:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y + az & bx - 3y - z & 4x + cy + 2z \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \hat{i}(c+1) + \hat{j}(a-4) + \hat{k}(b-2) = 0$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

وحيث أن i, j, k منجهات غير متوازية، فإن هذه العلاقة تتحقق بشرط أن:

$$c + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad c = -1$$

$$a - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 4$$

$$b - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad b = 2$$

وهي قيمة الثوابت المطلوبة والتي تجعل المجال \vec{A} لا دورانيا. وهو المطلوب.

التطبيقات المتتالية للمؤثر ∇ :

معنى التطبيقات المتتالية هو ظهور ∇ أكثر من مرة في نفس التعبير الرياضي ويوجد لدينا 4 حالات هي:

(1) بالتأثير بالمؤثر ∇ على المتجه $\nabla \phi$ قياسيا :

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \text{div grad } \phi \text{ هو كمية قياسية} = \nabla^2 \phi$$

$$\boxed{\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi}$$

حيث $\nabla^2 \phi$ هو مؤثر لابلاس للدالة ϕ .

الإثبات:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \phi$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = \nabla^2 \phi$$

حيث : $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ هو مؤثر لابلاس.

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

(٢) بالتأثير بالمؤثر $\bar{\nabla}$ على المتجه $\bar{\nabla} \phi$ اتجاهيا :

$$\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \phi) = \text{Curl grad } \phi = \text{الناتج هو كمية متجهة} = 0$$

$$\boxed{\text{Curl grad } \phi = \bar{0}}$$

الإثبات:

$$\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \phi) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

(٣) بالتأثير بالمؤثر $\bar{\nabla}$ على المتجه $(\bar{\nabla} \wedge \bar{F})$ قياسيا:

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \wedge \bar{F}) = \text{div curl } \bar{F} = \text{الناتج هو كمية قياسية} = 0$$

$$\boxed{\text{div curl } \bar{F} = 0}$$

الإثبات:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \wedge \bar{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

(٤) بالتأثير بالمؤثر $\bar{\nabla}$ على المتجه $(\bar{\nabla} \wedge \bar{F})$ اتجاهيا :

$$\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{F}) = \text{curl curl } \bar{F} = \text{الناتج هو كمية متجهة} = \text{grad div } \bar{F} - \nabla^2 \bar{F}$$

$$\boxed{\text{curl curl } \bar{F} = \text{grad div } \bar{F} - \nabla^2 \bar{F}}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

والتي يمكن كتابتها بالصورة:

$$\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{F}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{F}) - \nabla^2 \bar{F}$$

الإثبات:

باستخدام علاقة حاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي :

$$\bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C}) = (\bar{A} \cdot \bar{C})\bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C} = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) - (\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C}$$

$$\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{F}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{F}) - (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla})\bar{F} = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{F}) - \nabla^2 \bar{F}$$

$$\therefore \text{Curl curl } \bar{F} = \text{grad div } \bar{F} - \nabla^2 \bar{F}$$

أمثلة مطولة:

مثال (1):

إذا كان $\bar{\nabla} \wedge \bar{A} = 0$ فاثبت أن:

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{A} \wedge \bar{r}) = 0$$

حيث:

$$\bar{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad , \quad \bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

الحل: لإثبات العلاقة : $\bar{\nabla} \cdot (\bar{A} \wedge \bar{r}) = 0$ ، نوجد أولاً :

$$\bar{A} \wedge \bar{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{i}(zA_y - yA_z) + \hat{j}(xA_z - zA_x) + \hat{k}(yA_x - xA_y)$$

ومن تعريف التباعد (div):

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot (\bar{A} \wedge \bar{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(zA_y - yA_z) + \frac{\partial}{\partial y}(xA_z - zA_x) + \frac{\partial}{\partial z}(yA_x - xA_y) \\ &= z \frac{\partial A_y}{\partial x} - y \frac{\partial A_z}{\partial x} + x \frac{\partial A_z}{\partial y} - z \frac{\partial A_x}{\partial y} + y \frac{\partial A_x}{\partial z} - x \frac{\partial A_y}{\partial z} \end{aligned}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

$$= x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= x(\bar{\nabla} \wedge \bar{A})_x + y(\bar{\nabla} \wedge \bar{A})_y + z(\bar{\nabla} \wedge \bar{A})_z = \bar{r} \cdot (\bar{\nabla} \wedge \bar{A})$$

ولكن من رأس المسألة:

$$\bar{\nabla} \wedge \bar{A} = 0 \quad \therefore \bar{\nabla} \cdot (\bar{A} \wedge \bar{r}) = 0$$

وهو المطلوب.

مثال (٢):

أثبت العلاقات الاتجاهية الآتية :

$$(i) \quad \bar{\nabla} \cdot (\phi \bar{\nabla} \psi) = \phi \bar{\nabla}^2 \psi + (\bar{\nabla} \phi) \cdot (\bar{\nabla} \psi)$$

$$(ii) \quad \bar{\nabla} \wedge (\phi \bar{\nabla} \psi) = (\bar{\nabla} \phi) \wedge (\bar{\nabla} \psi)$$

حيث ϕ, ψ دالتان تمثلان مجالان قيسيان .

الحل:

$$(i) \quad \bar{\nabla} \cdot (\phi \bar{A}) = \phi (\bar{\nabla} \cdot \bar{A}) + \bar{A} \cdot \bar{\nabla} \phi \quad \text{باستخدام العلاقة الاتجاهية :}$$

ولخذ $\bar{\nabla} \psi = \bar{A}$ فإننا نحصل على:

$$\bar{\nabla} \cdot (\phi \bar{\nabla} \psi) = \phi [\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \psi] + (\bar{\nabla} \psi) \cdot (\bar{\nabla} \phi) = \phi \bar{\nabla}^2 \psi + (\bar{\nabla} \phi) \cdot (\bar{\nabla} \psi)$$

والتي يمكن كتابتها بالصورة:

$$\text{div}(\phi \text{grad } \psi) = \phi \bar{\nabla}^2 \psi + (\text{grad } \phi) \cdot (\text{grad } \psi)$$

(ii) باستخدام العلاقة الاتجاهية:

$$\bar{\nabla} \wedge (\phi \bar{A}) = \phi (\bar{\nabla} \wedge \bar{A}) - \bar{A} \wedge \bar{\nabla} \phi$$

وأخذ $\bar{\nabla} \psi = \bar{A}$ فإننا نحصل على:

$$\bar{\nabla} \wedge (\phi \bar{\nabla} \psi) = \phi [\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \psi)] - (\bar{\nabla} \psi) \wedge (\bar{\nabla} \phi)$$

$$\bar{\nabla} \wedge \bar{\nabla} \psi = \text{curl grad } \psi = 0 \quad \text{ولكن}$$

$$\therefore \bar{\nabla} \wedge (\phi \bar{\nabla} \psi) = -(\bar{\nabla} \psi) \wedge (\bar{\nabla} \phi) = (\bar{\nabla} \phi) \wedge (\bar{\nabla} \psi)$$

والتي يمكن كتابتها بالصورة: $\text{curl } (\phi \text{ grad } \psi) = (\text{grad } \phi) \wedge (\text{grad } \psi)$ وهو المطلوب .

مثال (٣): أثبت العلاقات الإتجاهية الآتية :

$$(i) \quad \text{div}(\bar{A} \wedge \bar{B}) = \bar{B} \cdot \text{curl } \bar{A} - \bar{A} \cdot \text{curl } \bar{B}$$

$$(ii) \quad \text{div}(\bar{\nabla} \phi \wedge \bar{\nabla} \psi) = 0$$

الحل : لإثبات (i)

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot (\bar{A} \wedge \bar{B}) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (A_y B_z - A_z B_y) - \frac{\partial}{\partial y} (A_x B_z - A_z B_x) + \frac{\partial}{\partial z} (A_x B_y - A_y B_x) \\ &= A_y \frac{\partial A_z}{\partial x} + B_z \frac{\partial A_y}{\partial x} - A_z \frac{\partial B_y}{\partial x} - B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} - A_x \frac{\partial B_z}{\partial y} - B_z \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ &\quad + A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_x \frac{\partial A_z}{\partial y} + A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial z} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ &= B_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + B_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &\quad - \left[A_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + A_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + A_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \right] \\ &= \bar{B} \cdot \text{curl } \bar{A} - \bar{A} \cdot \text{curl } \bar{B} \end{aligned}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

حيث :

$$\text{curl } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

وكذلك بالنسبة لـ $\text{curl } \vec{B}$

وهو المطلوب الأول .

إثبات (ii): باستخدام (i) وكتابة $\vec{A} = \vec{\nabla} \phi$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \psi$

$$\therefore \text{div}(\vec{\nabla} \phi \wedge \vec{\nabla} \psi) = \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{curl } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{curl } \vec{B}$$

$$= (\vec{\nabla} \psi) \cdot \text{curl}(\text{grad } \phi) - (\vec{\nabla} \phi) \cdot \text{curl}(\text{grad } \psi) = 0$$

حيث :

$$\text{curl grad } \phi = 0 \quad , \quad \text{curl grad } \psi = 0$$

مثال (4): أثبت للعلاقتين الإتجاهيتين الآتيتين:

$$(i) \quad \text{curl}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \text{div } \vec{B} - \vec{B} \text{div } \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

$$(ii) \quad \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \text{curl } \vec{B} + \vec{B} \wedge \text{curl } \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

وإذا كان المتجه \vec{B} متجهاً ثابتاً فأكتب هاتين العلاقتين في تلك الحالة الخاصة .

الحل:

إثبات (i):

$$\text{curl}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \vec{\nabla} \wedge [\hat{i}(A_2B_3 - A_3B_2) + \hat{j}(A_3B_1 - A_1B_3) + \hat{k}(A_1B_2 - A_2B_1)] \\
 &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2B_3 - A_3B_2 & A_3B_1 - A_1B_3 & A_1B_2 - A_2B_1 \end{vmatrix} \\
 &= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y}(A_1B_2 - A_2B_1) - \frac{\partial}{\partial z}(A_3B_1 - A_1B_3) \right] \\
 &+ \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial z}(A_2B_3 - A_3B_2) - \frac{\partial}{\partial x}(A_1B_2 - A_2B_1) \right] \\
 &+ \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x}(A_3B_1 - A_1B_3) - \frac{\partial}{\partial y}(A_2B_3 - A_3B_2) \right] \\
 &= \hat{i} \left[A_1 \frac{\partial B_2}{\partial y} + B_2 \frac{\partial A_1}{\partial y} - A_2 \frac{\partial B_1}{\partial y} - B_1 \frac{\partial A_2}{\partial y} - A_3 \frac{\partial B_1}{\partial z} - B_1 \frac{\partial A_3}{\partial z} + A_1 \frac{\partial B_3}{\partial z} + B_3 \frac{\partial A_1}{\partial z} \right] \\
 &+ \hat{j} \left[A_2 \frac{\partial B_3}{\partial z} + B_3 \frac{\partial A_2}{\partial z} - A_3 \frac{\partial B_2}{\partial z} - B_2 \frac{\partial A_3}{\partial z} - A_1 \frac{\partial B_2}{\partial x} - B_2 \frac{\partial A_1}{\partial x} - A_2 \frac{\partial B_1}{\partial x} + B_1 \frac{\partial A_2}{\partial x} \right] \\
 &+ \hat{k} \left[A_3 \frac{\partial B_1}{\partial x} + B_1 \frac{\partial A_3}{\partial x} - A_1 \frac{\partial B_3}{\partial x} - B_3 \frac{\partial A_1}{\partial x} - A_2 \frac{\partial B_3}{\partial y} - B_3 \frac{\partial A_2}{\partial y} + A_3 \frac{\partial B_2}{\partial y} + B_2 \frac{\partial A_3}{\partial y} \right] \\
 &= (A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}) \left[\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}) \right] \\
 &- (B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}) \left[\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}) \right] \\
 &+ \left[(B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] (A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}) \\
 &- \left[(A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] (B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k})
 \end{aligned}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

$$\begin{aligned}
 &= (A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}) \left[\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \right] \\
 &- (B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}) \left[\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right] \\
 &+ [(B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}) \cdot \vec{\nabla}] (A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}) \\
 &- [(A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}) \cdot \vec{\nabla}] (B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}) \\
 &= \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

لائحات (ii) : تترك كواجب للطالب .

حالة خاصة : " إذا كان المتجه \vec{B} متجهاً ثابتاً فإن العلاقتين (i)، (ii) تأخذان

للصورتين الآتيتين " .

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) &= 0 - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} - 0 + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \\
 &= (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} \quad \text{_____ (iii)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) &= 0 + \vec{B} \wedge \operatorname{curl} \vec{A} + 0 + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \\
 &= (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{B} \wedge \operatorname{curl} \vec{A} \quad \text{_____ (iv)}
 \end{aligned}$$

مثال (٥) : إذا كان \hat{a} متجه وحدة ثابت فأثبت العلاقة الإتجاهية الآتية :

$$\hat{a} \cdot [\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \hat{a}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \hat{a})] = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

الحل :

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \hat{a}), \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \hat{a})$$

وذلك بإعتبار أن \hat{a} متجه وحدة ثابت ، وبإستخدام العلاقتين (iii) ، (iv) في

المثال السابق [الحالة الخاصة] :

$$\bar{\nabla} \wedge (\bar{A} \wedge \hat{a}) = (\hat{a} \cdot \bar{\nabla}) \bar{A} - \hat{a} \operatorname{div} \bar{A}$$

$$\bar{\nabla} (\bar{A} \cdot \hat{a}) = (\hat{a} \cdot \bar{\nabla}) \bar{A} + \hat{a} \wedge \operatorname{curl} \bar{A}$$

$$\begin{aligned} \therefore \hat{a} \cdot [\bar{\nabla} (\bar{A} \cdot \hat{a}) - \bar{\nabla} \wedge (\bar{A} \wedge \hat{a})] \\ = \hat{a} \cdot [(\hat{a} \cdot \bar{\nabla}) \bar{A} + \hat{a} \wedge \operatorname{curl} \bar{A} - (\hat{a} \cdot \bar{\nabla}) \bar{A} + \hat{a} \operatorname{div} \bar{A}] \\ = \hat{a} \cdot (\hat{a} \wedge \operatorname{curl} \bar{A}) + \hat{a} \cdot (\hat{a} \operatorname{div} \bar{A}) \end{aligned}$$

ولكن:

$$\hat{a} \cdot \hat{a} \wedge \bar{b} = 0 \rightarrow \hat{a} \cdot \bar{a} \wedge \operatorname{curl} \bar{A} = 0$$

$$\hat{a} \cdot (\hat{a} \operatorname{div} \bar{A}) = (\hat{a} \cdot \hat{a}) \operatorname{div} \bar{A} = \operatorname{div} \bar{A} = \bar{\nabla} \cdot \bar{A}$$

$$\therefore \hat{a} \cdot [\bar{\nabla} (\bar{A} \cdot \hat{a}) - \bar{\nabla} \wedge (\bar{A} \wedge \hat{a})] = \bar{\nabla} \cdot \bar{A}$$

وهو المطلوب .

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

أمثلة عامة محلولة على تفاضل الدوال الاتجاهية

مثال (1):

$$(أ) \text{ إذا كان } \vec{a} \text{ متجه ثابت وكان } \vec{u} = \frac{\vec{r} \wedge \vec{a}}{\vec{r} \cdot \vec{a}}, \text{ فأوجد } \frac{d\vec{u}}{dt}$$

(ب) أوجد التفاضل الزمني للمتجه $(\vec{r} \wedge \vec{s})$ ومن ذلك أثبت أن:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}) = \vec{r} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

الحل: الجزء (أ):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r} \wedge \vec{a}}{\vec{r} \cdot \vec{a}} \right) = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{a})(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{a}) - (\vec{r} \wedge \vec{a})(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{a})}{(\vec{r} \cdot \vec{a})^2} \\ &= \frac{(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{a})}{(\vec{r} \cdot \vec{a})} - (\vec{r} \cdot \vec{a}) \frac{(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{a})}{(\vec{r} \cdot \vec{a})^2} \end{aligned}$$

(مع ملاحظة أن $\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$)

الجزء (ب): بتطبيق قاعدة تفاضل حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \vec{s}) = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{s}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{s} \quad (1)$$

ولإثبات الجزء الثاني بوضع $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ في (1)

$$\therefore \frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}) = \vec{r} \wedge \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) + \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

وذلك لأن $(\vec{A} \wedge \vec{A}) = 0$ $\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$

مثال (2): أوجد $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x \partial y}$ للدالتين الآتيتين:

$$(i) \vec{r} = x \cos y \hat{i} + x \sin y \hat{j} + c e^{\alpha y} \hat{k}$$

$$(ii) \vec{r} = \frac{1}{2} \alpha (x+y) \hat{i} + \frac{1}{2} \beta (x-y) \hat{j} + \gamma \ln [x + \sqrt{x^2 - \gamma^2}] \hat{k}$$

الحل:

$$(i) \vec{r} = x \cos y \hat{i} + x \sin y \hat{j} + c e^{\alpha y} \hat{k}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \cos y \hat{i} + \sin y \hat{j}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = -x \sin y \hat{i} + x \cos y \hat{j} + c \alpha e^{\alpha y} \hat{k}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2} = -x \cos y \hat{i} - x \sin y \hat{j} + c \alpha^2 e^{\alpha y} \hat{k}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) = -\sin y \hat{i} + \cos y \hat{j}$$

$$(ii) \vec{r} = \frac{1}{2} \alpha (x+y) \hat{i} + \frac{1}{2} \beta (x-y) \hat{j} + \gamma \ln [x + \sqrt{x^2 - \gamma^2}] \hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \frac{1}{2} \alpha \hat{i} + \frac{1}{2} \beta \hat{j} + \gamma \left[\frac{[1 + \frac{1}{2}(x^2 - \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)]}{x + \sqrt{x^2 - \gamma^2}} \hat{k} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (\alpha \hat{i} + \beta \hat{j}) + \frac{\gamma}{\sqrt{x^2 - \gamma^2}} \hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \frac{1}{2} \alpha \hat{i} + \frac{1}{2} \beta \hat{j} + 0 = \frac{1}{2} (\alpha \hat{i} + \beta \hat{j})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} = 0 - \frac{1}{2} \gamma \frac{2x}{(x^2 - \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} = -\frac{\gamma x}{(x^2 - \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \right) = 0$$

مثال (٣): أثبت أن الدالة $\bar{F} = \frac{e^{iw(t-r/c)}}{r} \bar{a}$ تحقق المعادلة الدالة

$$\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{F}}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2}$$

حيث \bar{a} متجه ثابت، w, c ثابتان قياسيان، $i = \sqrt{-1}$

الحل: من رأس المسألة: $\bar{F} = \frac{e^{iw(t-r/c)}}{r} \bar{a}$

$$\therefore \frac{\partial \bar{F}}{\partial r} = \frac{r \cdot \left(-\frac{iw}{c}\right) e^{iw(t-r/c)} - e^{iw(t-r/c)}}{r^2} \bar{a}$$

$$= -\frac{iw}{rc} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} - \frac{e^{iw(t-r/c)}}{r^2} \bar{a} \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial r^2} = \frac{iw}{c} \frac{r \left(-\frac{iw}{c}\right) e^{iw(t-r/c)} - e^{iw(t-r/c)}}{r^2} \bar{a}$$

$$\frac{r^2 \left(-\frac{iw}{c}\right) e^{iw(t-r/c)} - 2re^{iw(t-r/c)}}{r^4} \bar{a}$$

$$= -\frac{w^2}{c^2} \frac{1}{r} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} + \frac{iw}{cr^2} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} + \frac{iw}{cr^2} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} + \frac{2}{r^3} e^{iw(t-r/c)} \bar{a}$$

$$= -\frac{w^2}{c^2} \frac{1}{r} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} + \frac{2iw}{cr^2} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} + \frac{2}{r^3} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \frac{iw}{r} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} \rightarrow \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2} = \frac{i^2 w^2}{r} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} = -\frac{w^2}{r} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} \quad \text{--- (3)}$$

من (1):

$$\frac{2}{r} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \right) = -\frac{2iw}{cr^2} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} - \frac{2}{r^3} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} \quad \text{---(4)}$$

ومن (3):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2} = -\frac{w^2}{rc^2} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} \quad \text{---(5)}$$

من (3), (4), (5) نجد أن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{F}}{\partial r} &= -\frac{w^2}{c^2 r} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} + \frac{2iw}{cr^2} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} \\ &+ \frac{2}{r^3} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} - \frac{2iw}{cr^2} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} - \frac{2}{r^3} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} \\ &= -\frac{w^2}{rc^2} e^{iw(t-r/c)} \bar{a} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (4):

(أ) إذا كان $\phi = x^2 z + e^{y/x}$, $\psi = 2z^2 y - xy^2$ فأوجد

$\bar{\nabla}(\phi + \psi)$, $\bar{\nabla}(\phi\psi)$ عند النقطة $(1, 0, -2)$

(ب) إذا كان $\phi = 2z - x^3 y$, $\bar{A} = 2x^2 \hat{i} - 3yz \hat{j} + xz^2 \hat{k}$ فأوجد

$\bar{A} \cdot \bar{\nabla} \phi$, $\bar{A} \wedge \bar{\nabla} \phi$ عند النقطة $(1, -1, 1)$

الحل: الجزء الأول (أ): نستخدم العلاقتين:

$$\bar{\nabla}(\phi + \psi) = \bar{\nabla} \phi + \bar{\nabla} \psi \quad \text{---(1)}$$

$$\bar{\nabla}(\phi\psi) = \phi \bar{\nabla} \psi + \psi \bar{\nabla} \phi \quad \text{---(2)}$$

حساب التفاضل للذوالالاتجاهية

وحيث أن: $\phi = x^2 z + e^{y/x}$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{\nabla} \phi &= (\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z})(x^2 z + e^{y/x}) \\ &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 z + e^{y/x}) + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}(x^2 z + e^{y/x}) + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}(x^2 z + e^{y/x}) \\ &= \hat{i} [2xz + e^{y/x} \cdot (-\frac{y}{x^2})] + \hat{j} [e^{y/x} \cdot (\frac{1}{x})] + \hat{k} [x^2] \end{aligned} \quad \text{---(3)}$$

وعند النقطة $(1, 0, -2)$ فبالتعويض عن $x=1, y=0, z=-2$ في (3):

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \phi &= \hat{i} [2(1)(-2) + e^0 \cdot (-\frac{0}{1})] + \hat{j} [e^0 \cdot (\frac{1}{1})] \\ &\quad + \hat{k} (1^2) = -4\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \end{aligned} \quad \text{---(4)}$$

أيضاً فإن:

$$\psi = 2z^2 y - xy^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{\nabla} \psi &= (\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z})(2z^2 y - xy^2) \\ &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x}(2z^2 y - xy^2) + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}(2z^2 y - xy^2) + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}(2z^2 y - xy^2) \\ &= \hat{i} [-y^2] + \hat{j} [2z^2 - 2xy] + \hat{k} [4zy] \end{aligned} \quad \text{---(5)}$$

وعند النقطة $(1, 0, -2)$ فبالتعويض في (5):

$$\bar{\nabla} \psi = \hat{i} [0] + \hat{j} [2(-2)^2] + \hat{k} [0] = 8\hat{j} \quad \text{---(6)}$$

وبالتعويض عن قيم $\bar{\nabla} \phi, \bar{\nabla} \psi$ من (4), (6) في (1), (2) نحصل على:

$$(i) \bar{\nabla} (\phi + \psi) = \bar{\nabla} \phi + \bar{\nabla} \psi = (-4\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + 8\hat{j} = -4\hat{i} + 9\hat{j} + \hat{k}$$

$$(ii) \bar{\nabla} (\phi \psi) = \phi \bar{\nabla} \psi + \psi \bar{\nabla} \phi$$

$$= (x^2 z + e^{y/x})(8\hat{j}) + 2z^2 y - y^2 x (-4\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

وعند النقطة $(1, 0, -2)$ فإن:

$$\bar{\nabla}(\phi\psi) = (-1)(8\hat{j}) + (0)(-4\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = -8\hat{j}$$

وهو المطلوب.

الجزء الثاني:

$$\phi = 2z - x^3 y$$

$$\bar{\nabla}\phi = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(2z - x^3 y)$$

$$= \hat{i}(-3x^2 y) + \hat{j}(-x^3) + \hat{k}(2)$$

$$\bar{\nabla}\phi = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

وعند النقطة $(1, -1, 1)$ فإن:

$$\bar{A} = 2x^2\hat{i} - 3yz\hat{j} + xz^2\hat{k}$$

أيضاً فإن:

$$\bar{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

وعند النقطة $(1, -1, 1)$ فإن

$$\therefore \bar{A} \cdot \bar{\nabla}\phi = (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) \cdot (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = (6) + (-3) + (2) = 5$$

$$\bar{A} \wedge \bar{\nabla}\phi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(6+1) - \hat{j}(4-3) + \hat{k}(-2-9)$$

$$= 7\hat{i} - \hat{j} - 11\hat{k}$$

وهو المطلوب.

مثال (٥): إذا كان:

$$\bar{A} = yz^2\hat{i} - 3xz^2\hat{j} + 2xyz\hat{k}, \quad \bar{B} = 3x\hat{i} + 4z\hat{j} - xy\hat{k}, \quad \phi = xyz$$

فأوجد:

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

$$(i) \bar{A} \wedge (\bar{\nabla} \phi) \quad (ii) (\bar{\nabla} \wedge \bar{A}) \wedge \bar{B}$$

$$(iii) \bar{B} \cdot (\bar{\nabla} \wedge \phi) \quad (iv) (\bar{A} \wedge \bar{\nabla}) \phi$$

الحل: أولاً: لإيجاد $\bar{A} \wedge (\bar{\nabla} \phi)$

$$\phi = xyz$$

$$\bar{\nabla} \phi = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (xyz) = yz \hat{i} + zx \hat{j} + xy \hat{k}$$

$$\therefore \bar{A} \wedge \bar{\nabla} \phi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ yz^2 & -3xz^2 & 2xyz \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$$

$$= (-3x^2 yz^2 - 2x^2 yz^2) \hat{i} + (2xy^2 z^2 - xy^2 z^2) \hat{j}$$

$$+ (xyz^3 + 3xyz^3) \hat{k}$$

$$= -5x^2 yz^2 \hat{i} + xy^2 z^2 \hat{j} + 4xyz^3 \hat{k}$$

ثانياً: لإيجاد $(\bar{\nabla} \wedge \bar{A}) \wedge \bar{B}$

$$\bar{A} \wedge \bar{\nabla} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 & -3xz^2 & 2xyz \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} (2xyz) - \frac{\partial}{\partial z} (-3xz^2) \right]$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z} (yz^2) - \frac{\partial}{\partial x} (2xyz) \right] \hat{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x} (-3xz^2) - \frac{\partial}{\partial y} (yz^2) \right] \hat{k}$$

$$= (2xz + 6xz) \hat{i} + (2yz - 2yz) \hat{j} + (-3z^2 - z^2) \hat{k}$$

$$= (8xz) \hat{i} + (0) \hat{j} + (4z^2) \hat{k}$$

وحيث أن $\bar{B} = 3xi + 4zj - xyk$ فإن:

$$\therefore (\bar{\nabla} \wedge \bar{A}) \wedge \bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 8xz & 0 & -4z^2 \\ 3x & 4z & -xy \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(16z^3) + \hat{j}(-12xz^2 + 8x^2yz) + \hat{k}(32xz^2) \\ = 16z^3\hat{i} + (8x^2yz - 12xz^2)\hat{j} + 32xz^2\hat{k}$$

ثلاثاً: لإيجاد $\bar{B} \cdot (\bar{\nabla} \wedge \bar{A})$

$$\bar{B} = 3x\hat{i} + 4z\hat{j} - xy\hat{k}$$

حيث أن:

$$\bar{\nabla} \wedge \bar{A} = (8xz)\hat{i} + (0)\hat{j} - (4z^2)\hat{k}$$

فإن:

$$\bar{B} \cdot (\bar{\nabla} \wedge \bar{A}) = (3x)(8xz) + 4z(0) + (-xy)(-4z^2) \\ = 24x^2z + 4xyz^2$$

رابعاً: لإيجاد $(\bar{A} \wedge \bar{\nabla})\phi$

$$(\bar{A} \wedge \bar{\nabla}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ yz^2 & -3xz^2 & 2xyz \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-3xz^2 \frac{\partial}{\partial z} - 2zy \frac{\partial}{\partial y}) + \hat{j}(2xyz \frac{\partial}{\partial x} - yz^2 \frac{\partial}{\partial z}) \\ + \hat{k}(yz^2 \frac{\partial}{\partial y} + 3xz^2 \frac{\partial}{\partial x})$$

وحيث أن $\phi = xyz$ فإن:

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

$$\begin{aligned}
 (\vec{A} \wedge \vec{\nabla}) \phi &= [\hat{i}(-3xz^2 \frac{\partial}{\partial z} - 2xyz \frac{\partial}{\partial y}) + \hat{j}(2xyz \frac{\partial}{\partial x} - yz^2 \frac{\partial}{\partial z}) \\
 &\quad + \hat{k}(yz^2 \frac{\partial}{\partial y} + 3xz^2 \frac{\partial}{\partial x})](xyz) \\
 &= \hat{i}[-3xz^2(xy) - 2xyz(xz)] + \hat{j}[2xyz(yz) - yz^2(xy)] \\
 &\quad + \hat{k}[yz^2(xz) + 3xz^2(yz)] \\
 &= \hat{i}[-3x^2yz^2 - 2x^2yz^2] + \hat{j}[2xy^2z^2 - xy^2z^2] \\
 &\quad + \hat{k}[xyz^3\hat{i} + 3xyz^3] \\
 &= -5x^2yz^2\hat{i} + xy^2z^2\hat{j} + 4xyz^3\hat{k}
 \end{aligned}$$

مثال (٦): (أ) إذا كان $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ، $\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$

فأثبت أن: $\text{curl}[(\vec{A} \cdot \vec{r})\vec{A}] = 0$

(ب) إذا كانت $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + 3\hat{k}$ وكان \vec{a} متجه ثابت، فأثبت أن

$$\text{curl}\left[\frac{\vec{a} \wedge \vec{r}}{r^3}\right] = \frac{3\vec{r}}{r^5}(\vec{a} \cdot \vec{r}) - \frac{\vec{a}}{r^3}$$

الحل: الجزء الأول:

$$(\vec{A} \cdot \vec{r}) = (A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = A_1x + A_2y + A_3z$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{r})\vec{A} = (A_1x + A_2y + A_3z)(A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k})$$

$$= A_1(A_1x + A_2y + A_3z)\hat{i} + A_2(A_1x + A_2y + A_3z)\hat{j}$$

$$+ A_3(A_1x + A_2y + A_3z)\hat{k}$$

$$\therefore \text{curl}[(\vec{A} \cdot \vec{r})\vec{A}] = \vec{\nabla} \wedge [(\vec{A} \cdot \vec{r})\vec{A}]$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1(A_1x + A_2y + A_3z) & A_2(A_1x + A_2y + A_3z) & A_3(A_1x + A_2y + A_3z) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \hat{i} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [A_3 (A_1 x + A_2 y + A_3 z)] - \frac{\partial}{\partial z} [A_2 (A_1 x + A_2 y + A_3 z)] \right\} \\
 &\quad - \hat{j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [A_3 (A_1 x + A_2 y + A_3 z)] - \frac{\partial}{\partial z} [A_1 (A_1 x + A_2 y + A_3 z)] \right\} \\
 &\quad + \hat{k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [A_2 (A_1 x + A_2 y + A_3 z)] - \frac{\partial}{\partial y} [A_1 (A_1 x + A_2 y + A_3 z)] \right\} \\
 &= \hat{i} \{A_3 A_2 - A_2 A_3\} - \hat{j} \{A_3 A_1 - A_1 A_3\} + \hat{k} \{A_2 A_1 - A_1 A_2\} = 0
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

الجزء الثاني: $\vec{r} = xi + yj + 3k$

$$\begin{aligned}
 \text{curl} \frac{\vec{a} \wedge \vec{r}}{r^3} &= \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{a} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \wedge \left(\frac{\vec{a} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) \\
 &= \hat{i} \wedge \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vec{a} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) + \hat{j} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\vec{a} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) + \hat{k} \wedge \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\vec{a} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) \quad \text{--- (1)}
 \end{aligned}$$

ولكن:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vec{a} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r^3} (\vec{a} \wedge \vec{r}) \right] \\
 &= \frac{1}{r^3} (\vec{a} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}) + \left(-\frac{3}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \right) (\vec{a} \wedge \vec{r}) \\
 &= \frac{1}{r^3} (\vec{a} \wedge \hat{i}) - \frac{3}{r^4} \left(\frac{x}{r} \right) (\vec{a} \wedge \vec{r})
 \end{aligned}$$

وذلك لأن

$$\vec{r} = xi + yj + zk \rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \hat{i}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\bar{a} \wedge \bar{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} (\bar{a} \wedge \hat{i}) - \frac{3x}{r^5} (\bar{a} \wedge \bar{r}) \quad \text{--- (2)}$$

وبالضرب إتجاهياً في \hat{i} :

$$\begin{aligned} \hat{i} \wedge \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{a} \wedge \bar{r}}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} \hat{i} \wedge (\bar{a} \wedge \hat{i}) - \frac{3x}{r^5} \hat{i} \wedge (\bar{a} \wedge \bar{r}) \\ &= \frac{1}{r^3} [(\hat{i} \cdot \hat{i}) \bar{a} - (\hat{i} \cdot \bar{a}) \hat{i}] - \frac{3x}{r^5} [(\hat{i} \cdot \bar{r}) \bar{a} - (\hat{i} \cdot \bar{a}) \bar{r}] \\ &= \frac{1}{r^3} [\bar{a} - (\hat{i} \cdot \bar{a}) \hat{i}] - \frac{3x}{r^5} [x \bar{a} - (\hat{i} \cdot \bar{a}) \bar{r}] \\ &= \frac{\bar{a}}{r^3} - \frac{(\hat{i} \cdot \bar{a}) \hat{i}}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \bar{a} + \frac{3\bar{r}}{r^5} (\hat{i} x \cdot \bar{a}) \end{aligned} \quad \text{--- (3)}$$

وبالمثل فإن

$$\hat{j} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{a} \wedge \bar{r}}{r^3} \right) = \frac{\bar{a}}{r^3} - \frac{(\hat{j} \cdot \bar{a}) \hat{j}}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \bar{a} + \frac{3\bar{r}}{r^5} (\hat{j} y \cdot \bar{a}) \quad \text{--- (4)}$$

$$\hat{k} \wedge \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{a} \wedge \bar{r}}{r^3} \right) = \frac{\bar{a}}{r^3} - \frac{(\hat{k} \cdot \bar{a}) \hat{k}}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \bar{a} + \frac{3\bar{r}}{r^5} (\hat{k} z \cdot \bar{a}) \quad \text{--- (5)}$$

بجمع (3)، (4)، (5)

$$\begin{aligned} \therefore \hat{i} \wedge \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{a} \wedge \bar{r}}{r^3} \right) + \hat{j} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{a} \wedge \bar{r}}{r^3} \right) + \hat{k} \wedge \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{a} \wedge \bar{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{3\bar{a}}{r^3} - \frac{1}{r^3} [(\hat{i} \cdot \bar{a}) \hat{i} + (\hat{j} \cdot \bar{a}) \hat{j} + (\hat{k} \cdot \bar{a}) \hat{k}] \\ &\quad - \frac{3}{r^5} (x^2 + y^2 + z^2) \bar{a} + \frac{3\bar{r}}{r^5} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot \bar{a} \\ &= \frac{3\bar{a}}{r^3} - \frac{1}{r^3} [a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}] - \frac{3}{r^5} r^2 \bar{a} + \frac{3\bar{r}}{r^5} (\bar{r} \cdot \bar{a}) \\ &= \frac{3\bar{a}}{r^3} - \frac{\bar{a}}{r^3} - \frac{3\bar{a}}{r^3} + \frac{3\bar{r}}{r^5} (\bar{r} \cdot \bar{a}) = -\frac{\bar{a}}{r^3} + \frac{3\bar{r}}{r^5} (\bar{r} \cdot \bar{a}) \end{aligned}$$

[وذلك لأن: $\hat{i} \cdot \vec{a} = a_1$, $\hat{j} \cdot \vec{a} = a_2$, $\hat{k} \cdot \vec{a} = a_3$ حيث $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$

وأيضاً لأن: $((\hat{i} \cdot \vec{a})\hat{i} + (\hat{j} \cdot \vec{a})\hat{j} + (\hat{k} \cdot \vec{a})\hat{k}) = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k} = \vec{a}$

$$\therefore \text{curl} \left[\frac{\vec{a} \wedge \vec{r}}{r^3} \right] = \frac{3\vec{r}}{r^5} (\vec{a} \cdot \vec{r}) - \frac{\vec{a}}{r^3}$$

وهو المطلوب.

مثال (٧): (أ) إذا كان

$$\vec{A} = A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k}, \quad \vec{B} = B_1 \hat{i} + B_2 \hat{j} + B_3 \hat{k}, \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

وكان $\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = 0$ فاثبت أن

$$\text{grad}[(\vec{r} \wedge \vec{A}) \cdot (\vec{r} \wedge \vec{B})] = (\vec{A} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{B} + (\vec{B} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{A}$$

(ب) إذا كان ϕ, ψ دالتان قياسيتان فاثبت أن:

$$\text{curl}(\phi \text{grad} \psi) = (\text{grad} \phi) \wedge (\text{grad} \psi) = -\text{curl}(\psi \text{grad} \phi)$$

$$(ج) \text{ اثبت أنه لأي متجه } \vec{V} \text{ فإن: } (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (V^2) - \vec{V} \wedge \text{curl} \vec{V}$$

الحل: الجزء الأول: باستخدام قانون حاصل الضرب للرباعي القياسي:

$$(\vec{r} \wedge \vec{A}) \cdot (\vec{r} \wedge \vec{B}) = r^2 (\vec{A} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{r})(\vec{B} \cdot \vec{r})$$

$$\therefore \text{grad} [(\vec{r} \wedge \vec{A}) \cdot (\vec{r} \wedge \vec{B})] = \text{grad} [r^2 (\vec{A} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{r})(\vec{B} \cdot \vec{r})]$$

$$= \text{grad} [r^2 (\vec{A} \cdot \vec{B})] - \text{grad} [(\vec{A} \cdot \vec{r})(\vec{B} \cdot \vec{r})]$$

$$= r^2 \text{grad} (\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{B}) \text{grad} r^2 - (\vec{A} \cdot \vec{r}) \text{grad} (\vec{B} \cdot \vec{r})$$

$$- (\vec{B} \cdot \vec{r}) \text{grad} (\vec{A} \cdot \vec{r})$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{B})(2\vec{r}) - (\vec{A} \cdot \vec{r})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{r})\vec{A}$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{r} - (\vec{A} \cdot \vec{r})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{A})\vec{r} - (\vec{B} \cdot \vec{r})\vec{A}$$

$$= -[\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{r})] - [\vec{B} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{r})]$$

$$= (\vec{A} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{B} + (\vec{B} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{A}$$

$$\text{grad} (\vec{A} \cdot \vec{r}) = \vec{A}$$

$$\text{grad} (\vec{B} \cdot \vec{r}) = \vec{B}$$

$$\text{grad} r^2 = 2\vec{r}$$

$$\text{grad} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = 0$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

الجزء الثاني: نفرض أن $\text{grad } \psi = \vec{A}$

$$\begin{aligned} \therefore \text{curl}(\phi \text{grad } \psi) &= \text{curl}(\phi \vec{A}) \\ &= \phi \text{curl } \vec{A} - \vec{A} \wedge \text{grad } \phi \\ &= \phi \text{curl}(\text{grad } \psi) - \text{grad } \psi \wedge \text{grad } \phi \\ &= 0 - \text{grad } \psi \wedge \text{grad } \phi \end{aligned}$$

حيث $\text{curl } \text{grad } \psi = 0$

$$\text{curl}(\phi \text{grad } \psi) = (\text{grad } \phi) \wedge \text{grad } \psi \quad \text{--- (1)}$$

أيضاً $\text{curl}(\psi \text{grad } \phi) = \text{curl}(\psi \vec{B})$ ، حيث $\vec{B} = \text{grad } \phi$

$$\begin{aligned} \text{curl } \psi \text{grad } \phi &= \text{curl}(\psi \vec{B}) = \psi \text{curl } \vec{B} - \vec{B} \wedge \text{grad } \psi \\ &= \psi \text{curl}(\text{grad } \phi) - \text{grad } \phi \wedge \text{grad } \psi \\ &= -(\text{grad } \phi) \wedge (\text{grad } \psi) \quad \text{--- (2)} \end{aligned}$$

من (1), (2) نجد أن:

$$\text{curl}(\phi \text{grad } \psi) = -\text{curl}(\psi \text{grad } \phi)$$

وهو المطلوب.

الجزء (ج): حيث أن:

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \text{curl } \vec{B} + \vec{B} \wedge \text{curl } \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

فبوضع $\vec{A} = \vec{B} = \vec{V}$

$$\therefore \text{grad}(V^2) = \vec{V} \wedge \text{curl } \vec{V} + V \wedge \text{curl } \vec{V} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$$

$$\therefore \vec{\nabla}(V^2) = 2\vec{V} \wedge \text{curl } \vec{V} + 2(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$$

$$\therefore (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(V^2) - \vec{V} \wedge \text{curl } \vec{V}$$

وهو المطلوب.

مثال (٨): (أ) أثبت أن المتجه: $\vec{u} = (x+3y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x+az)\hat{k}$

يشكل متجهاً لوليباً إذا كان $a = -2$.

(ب) إذا كان \vec{A}, \vec{B} متجهان لا دورانيين، فأثبت أن حاصل ضربيهما الاتجاهي $(\vec{A} \wedge \vec{B})$ يشكل متجهاً لوليباً.

(ج) أثبت أن $(r^n \vec{r})$ يشكل متجهاً لا دورانياً لأي قيمة من قيم n ولكنه يكون متجهاً لوليباً فقط عندما $n = -3$ (أستخدم العلاقة $\text{grad}(r^n) = nr^{n-2}\vec{r}$).

الحل: الجزء (أ): يكون المتجه \vec{u} لوليباً إذا كان $\text{div } \vec{u} = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \text{div } \vec{u} = 0 &= \frac{\partial}{\partial x}(x+3y) + \frac{\partial}{\partial x}(y-2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+az) \\ &= 1+1+a=2+a \quad \rightarrow a = -2 \end{aligned}$$

الجزء (ب): حيث أن \vec{A}, \vec{B} لا دورانيين:

$$\therefore \text{curl } \vec{A} = 0, \text{ curl } \vec{B} = 0$$

ولكي يكون حاصل ضربيهما الاتجاهي $(\vec{A} \wedge \vec{B})$ متجهاً لوليباً يجب أن يكون

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0 \text{ أي } \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0$$

ومن العلاقة:

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{curl } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{curl } \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0 - 0 = 0$$

وهو المطلوب.

الجزء (ج): من العلاقة:

$$\begin{aligned} \text{curl}(\phi \vec{A}) &= \phi \text{curl } \vec{A} - \vec{A} \wedge \text{grad } \phi \\ \therefore \text{curl}(r^n \vec{r}) &= r^n \text{curl } \vec{r} - \vec{r} \wedge \text{grad } r^n \end{aligned} \quad \text{---(1)}$$

وحيث أن: $\text{grad } r^n = nr^{n-2}\vec{r}$ ، $\text{curl } \vec{r} = 0$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

فمن (1) نجد أن:

$$\text{curl } r^n \vec{r} = -\vec{r} \wedge \text{grad } r^n = -\vec{r} \wedge [nr^{n-1} \vec{r}] = -nr^{n-2} (\vec{r} \wedge \vec{r}) = 0$$

ومن هذا نجد أن المتجه $r^n \vec{r}$ هو متجه لا دوراني لأي قيمة من قيم n .

والآن: من العلاقة

$$\text{div}(\phi \vec{A}) = \phi \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad} \phi$$

$$\therefore \text{div}(r^n \vec{r}) = r^n \text{div} \vec{r} + \vec{r} \cdot \text{grad} r^n$$

$$= r^n (3) + \vec{r} \cdot (nr^{n-2} \vec{r}) = 3r^n + nr^{n-2} (r^2)$$

$$= 3r^n + nr^n = (3+n)r^n$$

وهذا يساوي صفراً (إذا كان المتجه $r^n \vec{r}$ لوليبياً) بشرط أن $3+n=0$ أي $n=-3$

ومن هذا نجد أن للمتجه $r^n \vec{r}$ يكون لوليبياً فقط إذا كانت $n=-3$.

مثال (9): باستخدام العلاقة $\text{grad } r^n = nr^{n-2} \vec{r}$ حيث

$$r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

أثبت أن: $\text{div grad } r^n = n(n+1)r^{n-2}$ ومن ذلك حقق العلاقة:

$$\text{curl grad } r^n = 0$$

الحل: حيث أن: $\text{grad } r^n = nr^{n-2} \vec{r}$

$$\therefore \text{div grad } r^n = \vec{\nabla} \cdot (nr^{n-2} \vec{r}) = n \vec{\nabla} \cdot (r^{n-2} \vec{r})$$

$$= n[r^{n-2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} (r^{n-2})]$$

$$= n[r^{n-2} (3) + \vec{r} \cdot (n-2)r^{n-4} \vec{r}]$$

$$= 3nr^{n-2} + n(n-2)r^{n-4} (r^2)$$

$$= 3nr^{n-2} + n(n-2)r^{n-2}$$

$$= n(3+n-2)r^{n-2} = n(n+1)r^{n-2}$$

وهو المطلوب أولاً.

ثانياً: لإثبات أن $\text{curl grad } r^n = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{curl grad } r^n &= \vec{\nabla} \wedge (nr^{n-2} \vec{r}) \\
 &= \vec{\nabla} \wedge [nr^{n-2} x\hat{i} + nr^{n-2} y\hat{j} + nr^{n-2} z\hat{k}] \\
 &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ nr^{n-2}x & nr^{n-2}y & nr^{n-2}z \end{vmatrix} \\
 &= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} (nr^{n-2}z) - \frac{\partial}{\partial z} (nr^{n-2}y) \right] + \dots \\
 &= \hat{i} [n(n-2)r^{n-3} \frac{\partial r}{\partial y} \cdot (z) - n(n-2)r^{n-3} \frac{\partial r}{\partial z} \cdot (y)] + \dots \\
 &= \hat{i} [n(n-2)r^{n-3} \left(\frac{y}{r}\right)(z) - n(n-2)r^{n-3} \left(\frac{z}{r}\right)(y)] + \dots \\
 &= \hat{i}[0] + \hat{j}[0] + \hat{k}[0] = 0
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

$$\left(\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \text{ حيث استخدمنا} \right)$$

مثال (١٠): (أ) أثبت أن المتجه $\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r^2}$ هو متجه لا توراني، حيث

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

(ب) إذا كان $\text{div } \vec{E} = 0, \text{div } \vec{H} = 0$ وكان:

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \text{curl } \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{U} = \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \text{ فأثبت أن المتجهين } \vec{E}, \vec{H} = \vec{U} \text{ يحققان العلاقة:}$$

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

الحل: الجزء الأول (أ): لإثبات أن $\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r^2}$ بشكل متجهاً لا دورانياً يجب أن نثبت

$$\text{أن } \text{curl } \vec{E} = 0 \text{ أي } \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{r}}{r^2} = \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \right]$$

$$+ \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \right]$$

$$+ \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \right]$$

$$= \hat{i} \left[\frac{-2zy}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{2zy}{x^2 + y^2 + z^2} \right] + \dots$$

$$= \hat{i}[0] + \hat{j}[0] + \hat{k}[0] = 0$$

وهو المطلوب.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

الجزء الثاني (ب):

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{E}) &= \bar{\nabla} \wedge \left(-\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\nabla} \wedge \bar{H}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad \text{---(1)}$$

ولكن حيث أن:

$$\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{A}) = \bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \cdot \hat{A}) - \nabla^2 \bar{A} \quad \text{---(2)}$$

$$\therefore \bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{E}) = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} = 0 - \nabla^2 \bar{E} = -\nabla^2 \bar{E} \quad \text{---(3)}$$

$$\text{من (1), (3) نجد أن: } -\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = -\nabla^2 \bar{E}$$

$$\therefore \nabla^2 \bar{E} = \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \quad \text{---(4)}$$

أيضاً وبالمثل فإن:

$$\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{H}) = \bar{\nabla} \wedge \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\nabla} \wedge \bar{E}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} \quad \text{---(5)}$$

ومن العلاقة (2):

$$\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{H}) = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{H}) - \nabla^2 \bar{H} = 0 - \nabla^2 \bar{H} = -\nabla^2 \bar{H} \quad \text{---(6)}$$

$$\text{من (5), (6) نجد أن: } -\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = -\nabla^2 \bar{H}$$

$$\therefore \nabla^2 \bar{H} = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} \quad \text{---(7)}$$

من العلاقتين (4), (7) وبوضع $\bar{U} = \bar{E}, \bar{H}$ نجد أن:

$$\nabla^2 \bar{U} = \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}$$

وهو المطلوب.

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

مسائل على الباب الثاني

تفاضل الدوال الاتجاهية

١- إذا كانت $\vec{F}(t) = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ هي دالة اتجاهية في المتغير t

$$\dot{\vec{F}} = \frac{d\vec{F}}{dt} \quad \text{أوجد } \left| \dot{\vec{F}} \right|, \left| \ddot{\vec{F}} \right| \text{ عند } t=0, \text{ حيث } \dots\dots\dots$$

٢- إذا كانت $\vec{G}(t) = (2t-3)\hat{i} + \hat{j} - t\hat{k}$ ، $\vec{F}(t) = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ دالتان

تصفان مجالين اتجاهين ، فأوجد $[\vec{F} \cdot \vec{G}]'$ ، $[\vec{F} \wedge \vec{G}]'$ ، $[\vec{F} + \vec{G}]'$ عند $t=1$ حيث الشرطه تنل على التفاضل بالنسبة إلى t .

٣- (أ) إذا كانت $\vec{A}(t)$ دالة اتجاهية فاثبت أن:

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} \quad \text{حيث} \quad \vec{A} \cdot \dot{\vec{A}} = A\dot{A}$$

(ب) إذا كانت $\vec{A}(t)$ دالة اتجاهية ثابت للمقدار ، فاثبت أن

للدالتين $\vec{A}(t)$ ، $\dot{\vec{A}}(t)$ تكونان متعامدتين.

٤- إذا كانت $\vec{r}(t) = \vec{a} \cos wt + \vec{b} \sin wt$ دالة اتجاهية حيث \vec{a}, \vec{b} متجهان

ثابتان ، w ثابت أيضاً، فاثبت أن:

$$(i) \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = w(\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad (ii) \ddot{\vec{r}} = -w^2\vec{r}$$

٥- إذا كان:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y) = (2x^2y - x^4)\hat{i} + (e^{xy} - y \sin x)\hat{j} + x^2 \cos y \hat{k}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y \partial x}$$

فاثبت أن:

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

٦- (أ) إذا كانت $u = u(x, y, z)$, $\vec{r} = (x, y, z)$ فاثبت أن:

$$du = (\vec{\nabla} u) \cdot (d\vec{r})$$

(ب) أثبت أن: $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$ حيث: $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$

٧- أثبت العلاقات الاتجاهية الآتية:

$$(i) \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi$$

$$(ii) \nabla^2 (\phi \psi) = \phi \nabla^2 \psi + 2(\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \psi) + \psi \nabla^2 \phi$$

حيث ϕ, ψ دالتان قياسيتان .

٨- إذا كانت $\psi = xy - 3z^2$ ، $\phi = x^2 yz$ ، فأوجد:

$$(i) \vec{\nabla} \cdot [(\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \psi)] \quad , \quad (ii) \vec{\nabla} \cdot [(\vec{\nabla} \phi) \wedge (\vec{\nabla} \psi)]$$

$$(iii) \vec{\nabla} \wedge [(\vec{\nabla} \phi) \wedge (\vec{\nabla} \psi)]$$

٩- إذا كانت: $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ ، $\vec{r} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ ، متجه

الوحدة في اتجاه \vec{r} : $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ فاثبت للعلاقات الآتية:

$$(i) \text{grad}(r^n) = nr^{n-1} \hat{r} \quad , \quad (ii) \text{div}(r^n \vec{r}) = (n+3)r^n$$

$$(iii) \text{curl}(r^n \vec{r}) = 0$$

١٠- إذا كان \hat{a} متجه وحدة وكانت $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ فاثبت أن:

$$(i) \vec{\nabla} \cdot [(\hat{a} \cdot \vec{r}) \hat{a}] = 1 \quad , \quad (ii) \vec{\nabla} \wedge [(\hat{a} \cdot \vec{r}) \hat{a}] = 0$$

$$(iii) \vec{\nabla} \cdot [(\hat{a} \wedge \vec{r}) \wedge \hat{a}] = 2 \quad , \quad (iv) \vec{\nabla} \wedge [(\hat{a} \wedge \vec{r}) \wedge \hat{a}] = 0$$

ملحوظة:

الحلول الكاملة لهذه المسائل ملحقة بآخر القسم الأول من الكتاب

[تحليل المتجهات].