

حساب التكامل للدوال الإتجاهية

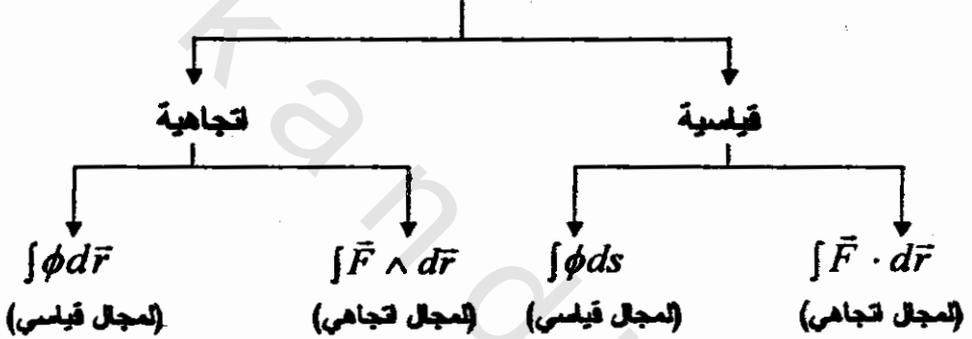
الباب الثالث

حساب التكامل للدوال الإتجاهية

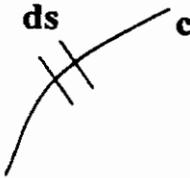
أولاً: تكاملات الدوال القياسية والإتجاهية:

نصف الدوال القياسية مجالاً قياسياً ϕ بينما نصف الدوال الإتجاهية \vec{F} مجالاً إتجاهياً ، ويوجد لدينا ٣ أنواع من التكاملات:

(١) تكاملات خطية



حيث ds هي طول قوس من المنحنى c .



(i) في الإحداثيات الكرتيزية: $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$

حيث: $y' = \frac{dy}{dx}$ ومعادلة المنحنى: $y = f(x)$.

(ii) في الإحداثيات البارامترية: $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

حيث: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$

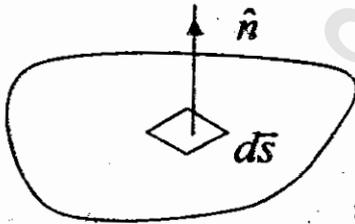
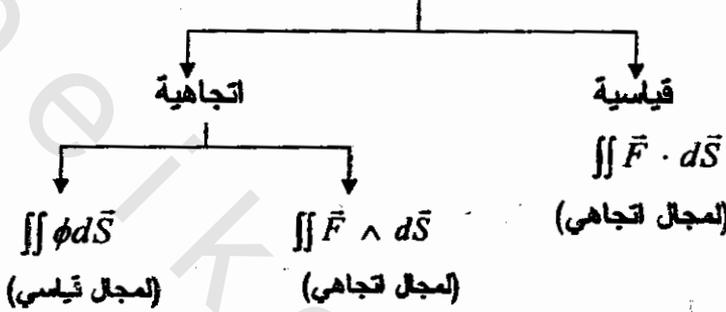
ومعادلات المنحنى هي المعادلات البارامترية: $x = f(t)$, $y = g(t)$

حساب التكامل للدوال الإتجاهية

(iii) في الإحداثيات القطبية: $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$

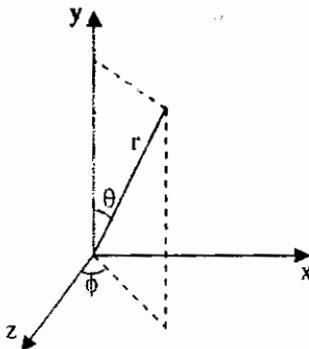
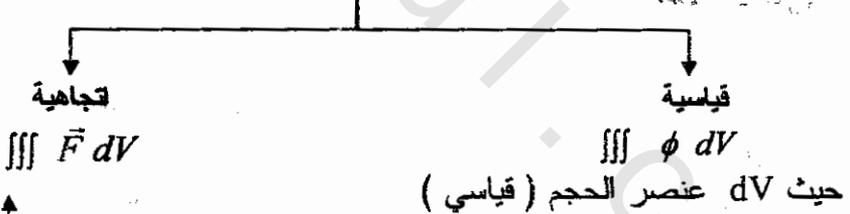
حيث: $r = f(\theta)$ ومعادلة المحنى $r' = \frac{dr}{d\theta}$

(٢) التكاملات السطحية:



حيث $d\vec{S} = ds \cdot \hat{n}$ عنصر متجه المساحة: \hat{n} متجه وحدة عمودي على المساحة إلى الخارج.

(٣) التكاملات الحجمية:



(i) في الإحداثيات الكرتيزية:

$$dV = dx dy dz$$

(ii) في الإحداثيات القطبية الكروية:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

أمثلة محلولة:

مثال (1):

احسب التكامل الخطي القياسي $\int_c xy^2 ds$ على المنحنى c الذي معادلاته

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

البارامترية هي:

$$\text{حيث: } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

الحل:

نوجد طول القوس ds من المنحنى c

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$x = \cos t \rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$y = \sin t \rightarrow \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\therefore ds = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = (1) dt = dt$$

ويصبح التكامل المطلوب:

$$\int_c xy^2 ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)(\sin t)^2 (dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot d(\sin t) = \left. \frac{\sin^3 t}{3} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$d(\sin t) = \cos t dt$$

وهو المطلوب.

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

مثال (٢):

أحسب التكامل الخطي القياسي $\int_C (xydx + x^2 dy)$ في الحالتين:

(i) إذا كانت المعادلات البارامترية للمنحنى C هي:

$$x = 3t - 1, y = 3t^2 - 2t$$

$$\text{حيث: } 1 \leq t \leq \frac{4}{3}$$

(ii) إذا كان المنحنى C يتألف من القطع المستقيمة من $(1,2)$ إلى $(4,1)$ ومن $(4,1)$ إلى $(4,5)$.

الحل:

الحالة الأولى:

نعوض بدلا من x, y, dx, dy بدلالة المتغير t ، وبذلك من المعادلات البارامترية :

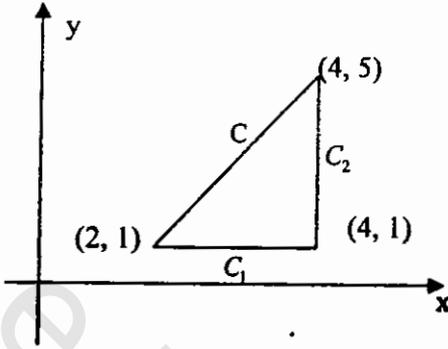
$$x = 3t - 1 \quad \rightarrow \quad dx = 3 dt$$

$$y = 3t^2 - 2t \quad \rightarrow \quad dy = (6t - 2) dt$$

ويصبح التكامل:

$$\begin{aligned} I &= \int_C (xydx + x^2 dy) \\ &= \int_1^{\frac{4}{3}} [(3t - 1)(3t^2 - 2t)(3 dt) + (3t - 1)^2 (6t - 2) dt] \\ &= \int_1^{\frac{4}{3}} [81t^3 - 81t^2 + 24t - 2] dt = 58 \end{aligned}$$

حساب التكامل للدوال الإتجاهية



الحالة الثانية:

المنحنى C يتكون من جزئين C_1, C_2

المعادلات البارامترية للجزئين (أو المنحنين) C_1, C_2 :

$$C_1: x = t, y = 1 \quad (2 \leq t \leq 4)$$

$$dx = dt, \quad dy = 0$$

$$C_2: x = 4, y = t \quad (1 \leq t \leq 5)$$

$$dx = 0, \quad dy = dt$$

التكامل على C_1 :

$$I_1 = \int_{C_1} (xy dx + x^2 dy) = \int_2^4 t dt = 6$$

التكامل على C_2 :

$$I_2 = \int_{C_2} (xy dx + x^2 dy) = \int_1^5 16 dt = 64$$

$$I = I_1 + I_2 = 6 + 64 = 70$$

ويصبح التكامل الكلي على C هو:

وهو المطلوب.

مثال (3):

أوجد التكامل الخطي القياسي للمجال الإتجاهي:

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 + 6y)\hat{i} - 14yz\hat{j} + 20xz^2\hat{k}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

من النقطة (0, 0, 0) إلى النقطة (1, 1, 1) على المسارات الآتية:

(i) المسار c الذي معادلاته البارامترية هي $x = t, y = t^2, z = t^3$.

(ii) المستقيم الواصل بين النقطتين (0, 0, 0), (1, 1, 1).

(iii) المسار c المكون من المستقيمتين الواصلة من (0,0,0) إلى (1,0,0) ثم إلى

(1,1,0) ثم إلى (1,1,1)

الحل:

(i) يسمى المسار c الذي معادلاته البارامترية هي: $x=t, y=t^2, z=t^3$

بالمنحنى الفراغي وتكون المعادلة الاتجاهية لهذا المنحنى:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k} \quad \rightarrow (1)$$

$$\therefore d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$= dt\hat{i} + 2t dy\hat{j} + 3t^2 dt\hat{k}$$

$$= (\hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k})dt \quad \rightarrow (2)$$

أيضا: نوجد \vec{F} بدلالة t :

$$\therefore \vec{F} = (3t^2 + 6t^2)\hat{i} - 14(t^2)(t^3)\hat{j} + 20(t)(t^3)^2\hat{k}$$

$$= 9t^2\hat{i} - 14t^5\hat{j} + 20t^7\hat{k} \quad \rightarrow (3)$$

ويكون التكامل الخطي القياسي للمجال \vec{F} هو:

$$I = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 [9t^2 - 28t^6 + 60t^9] dt$$

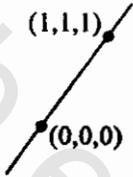
$$= [3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}]_0^1 = 5$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

(ii) المستقيم الواصل بين النقطتين (0, 0, 0) و (1, 1, 1) :

المعادلات البارامترية لهذا المستقيم هي: $x = t, y = t, z = t$

حيث: $0 \leq t \leq 1$



وتصبح المعادلة الاتجاهية لهذا المستقيم هي:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = t\hat{i} + t\hat{j} + t\hat{k} \\ &= (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})t \quad \rightarrow (4)\end{aligned}$$

$$\therefore d\bar{r} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \quad \rightarrow (5)$$

أيضا: نوجد \bar{F} بدلالة t

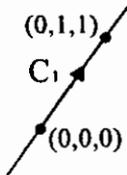
$$\bar{F} = (3t^2 + 6t)\hat{i} - 14t^2\hat{j} + 20t^3\hat{k} \quad \rightarrow (6)$$

ويصبح التكامل المطلوب:

$$\begin{aligned}I &= \int \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_0^1 [(3t^2 + 6t) - 14t^2 + 20t^3] dt \\ &= \int_0^1 [20t^3 - 11t^2 + 6t] dt = \frac{13}{3}\end{aligned}$$

(iii) المسار c يتكون من 3 مستقيمات معادلاتها البارامترية هي :

(1) المستقيم C_1 :



$$x = t, y = 0, z = 3$$

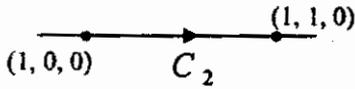
$$(0 \leq t \leq 1)$$

$$\bar{r} = x\hat{i} = t\hat{i} \rightarrow d\bar{r} = dt \hat{i}$$

$$\bar{F} = 3x^2\hat{i} = 3t^2\hat{i} \quad \text{أيضا:}$$

$$\therefore I_1 = \int \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_0^1 3t^2 dt = 1 \quad \rightarrow (7)$$

(٢) المستقيم C_2 :



$$x=1, \quad y=t, \quad z=0$$

$$(0 \leq t \leq 1)$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = \hat{i} + x\hat{j}$$

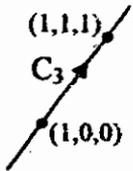
$$\therefore d\vec{r} = dt\hat{j}$$

$$\vec{F} = (3x^2 + 6y)\hat{i} = (3 + 6t)\hat{i} \quad \text{أيضاً:}$$

$$\therefore I_2 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int [(3 + 6t)\hat{i}] \cdot (dt\hat{j}) = 0 \quad \rightarrow (8)$$

(٣) المستقيم C_3 :



$$x=1, \quad y=1, \quad z=t$$

$$(0 \leq t \leq 1)$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \hat{i} + \hat{j} + t\hat{k}$$

$$\therefore d\vec{r} = dt\hat{k}$$

$$\vec{F} = 9\hat{i} - 14t\hat{j} + 20t^2\hat{k} \quad \text{أيضاً:}$$

$$\therefore I_3 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^1 20t^2 dt = 20 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{20}{3} \quad \rightarrow (9)$$

ويصبح التكامل المطلوب:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 1 + 0 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

وهو المطلوب.

حساب التكامل للدوال الإتجاهية

مثال (٤):

إذا كانت $\phi = 2xyz^2$ تمثل مجالا قياسيا ، وكانت $\vec{F} = xy\hat{i} - z\hat{j} + x^2\hat{k}$ تمثل مجالا اتجاها، فاحسب التكاملين الخطيين الإتجاهيين $\int_C \phi d\vec{r}$ ، $\int_C \vec{F} \wedge d\vec{r}$ على طول المنحنى C الذي معادلاته البارامترية هي :

$$x = t^2, \quad y = 2t, \quad z = t^3 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

الحل : المعادلات البارامترية للمنحنى C :

$$x = t^2, \quad y = 2t, \quad z = t^3$$

المعادلة الإتجاهية (الفراغية) للمنحنى C:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} + t^3\hat{k}$$

$$\therefore d\vec{r} = (2t\hat{i} + 2\hat{j} + 3t^2\hat{k})dt \quad \rightarrow (1)$$

المجال ϕ بدلالة t:

$$\phi = 2xyz^2 = 2(t^2)(2t)(t^3)^2 = 4t^9 \quad \rightarrow (2)$$

المجال \vec{F} بدلالة t:

$$\vec{F} = xy\hat{i} - z\hat{j} + x^2\hat{k} = 2t^3\hat{i} - t^3\hat{j} + t^4\hat{k} \quad \rightarrow (3)$$

التكاملات المطلوبة:

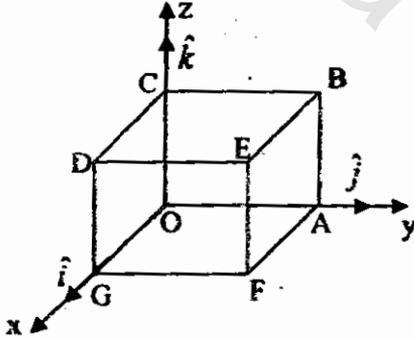
$$(1) \quad \int_C \phi d\vec{r} = \int_0^1 (4t^9)(2t\hat{i} + 2\hat{j} + 3t^2\hat{k}) dt$$

$$= \int_0^1 (8t^{10}\hat{i} + 8t^9\hat{j} + 12t^{11}\hat{k}) dt = \frac{8}{11}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j} + \hat{k}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_C \vec{F} \wedge d\vec{r} &= \int_0^1 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2t^3 & -t^3 & t^4 \\ 2t & 2 & 3t^2 \end{vmatrix} dt \\
 &= \int_0^1 [(-3t^5 - 2t^4)\hat{i} - 4t^5\hat{j} + (4t^3 + 2t^4)\hat{k}] dt \\
 &= -\frac{9}{10}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{7}{5}\hat{k}
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (5): إذا كانت $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ دالة تمثل مجالاً اتجاهياً، فاحسب التكامل السطحي $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ حيث S هي مساحة المكعب



المحدد بالمستويات.

$$\begin{aligned}
 x=0 & , & x=1 \\
 y=0 & , & y=1 \\
 z=0 & , & z=1
 \end{aligned}$$

الحل:

التكامل السطحي $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$ حيث:

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS \leftarrow d\vec{s} = \hat{n} dS$$

نوجد التكاملات السطحية على الأوجه الستة للمكعب كمساحات اتجاهية، وذلك باعتبار أن \hat{n} هو متجه الوحدة العمودي على أي وجه إلى الخارج،

وتمثله هنا المتجهات \hat{i} ، \hat{j} ، \hat{k}

(1) الوجه الأول $[DEFG]$

$$x=1, \hat{n} = \hat{i}, dS = dy dz$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

ويكون التكامل على هذا الوجه:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iint \vec{F} \cdot \hat{n} dS \\
 &= \iint (4z\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}) \cdot (\hat{i})(dydz) \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 (4z)(dydz) = 4 \int_0^1 z dz \int_0^1 dy \\
 &= 4 \int_0^1 z dz = 4 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 = 2 \quad \rightarrow (1)
 \end{aligned}$$

(٢) الوجه الثاني: [CBAO]

$$\begin{aligned}
 x=0, \quad \hat{n} = -\hat{i}, \quad dS = dydz \\
 \therefore I_2 = \iint \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint (-y^2\hat{j} + yz\hat{k}) \cdot (-\hat{i})(dydz) = 0 \quad \rightarrow (2)
 \end{aligned}$$

(٣) الوجه الثالث: [EBAF]

$$\begin{aligned}
 y=1, \quad \hat{n} = \hat{j}, \quad dS = dx dz \\
 \therefore I_3 = \iint \vec{F} \cdot \hat{n} dS \\
 = \iint (4xz\hat{i} - \hat{j} + z\hat{k}) \cdot (\hat{j})(dx dz) \\
 = \int_0^1 \int_0^1 (-1) dx dz = - \int_0^1 dx \int_0^1 dz = -1 \quad \rightarrow (3)
 \end{aligned}$$

(٤) الوجه الرابع: [DCOG]

$$\begin{aligned}
 y=0, \quad \hat{n} = -\hat{j}, \quad dS = dx dz \\
 \therefore I_4 = \iint \vec{F} \cdot \hat{n} dS \\
 = \iint (4xz\hat{i}) \cdot (-\hat{j})(dx dz) = 0 \quad \rightarrow (4)
 \end{aligned}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

(٥) الوجه الخامس: [CBED] $z=1, \hat{n}=\hat{k}, ds=dx dy$

$$\begin{aligned} \therefore I_5 &= \iint \vec{F} \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint (4x\hat{i} - y^2\hat{j} + y\hat{k}) \cdot (\hat{k})(dxdy) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (y) dxdy = \int_0^1 y dy \int_0^1 dx = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \rightarrow (5) \end{aligned}$$

(٦) الوجه السادس: [OAFG]

$z=0, \hat{n}=-\hat{k}, dS=dx dy$

$$\begin{aligned} \therefore I_6 &= \iint \vec{F} \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint (-y^2\hat{j}) \cdot (-\hat{k})(dxdy) = 0 \rightarrow (6) \end{aligned}$$

∴ التكامل على جميع أوجه المكعب:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 \\ &= 2 + 0 + (-1) + 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

أمثلة عامة على تكاملات الدوال القياسية والاتجاهية:

مثال (١):

أوجد التكامل الخطي القياسي $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ للدالة الاتجاهية

$\vec{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ على المنحنى C الذي معادلته الاتجاهية

هي: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ومعادلته البارامترية هي:

(حيث $-1 \leq t \leq 1$) $x=t, y=t^2, z=t^3$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

الحل :

نوجد \vec{F} ، $d\vec{r}$ بدلالة البارامتر t .

فحيث أن : $x=t, y=t^2, z=t^3$ ، $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\therefore \vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$$

$$\therefore d\vec{r} = (\hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k}) dt \quad \text{_____ (1)}$$

$$\vec{F} = (t)(t^2)\hat{i} + (t^2)(t^3)\hat{j} + (t^3)(t)\hat{k}$$

$$= t^3\hat{i} + t^5\hat{j} + t^4\hat{k} \quad \text{_____ (2)}$$

من (1) ، (2) :

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (t^3 + 2t^6 + 3t^6) dt = (t^3 + 5t^6) dt$$

ويصبح التكامل المطلوب :

$$\begin{aligned} I &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 (t^3 + 5t^6) dt \\ &= \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7} \right]_{-1}^1 = \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{5}{7} - \left(-\frac{5}{7} \right) \right) \right] = \frac{10}{7} \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (٢) :

أوجد التكامل $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ للدالة الاتجاهية $\vec{F} = 3xy\hat{i} - y^2\hat{j}$ على المنحنى

c الذي هو عبارة عن المنحنى المستوى $y = 2x^2$ من $(0,0)$ إلى $(1,2)$.

الحل :

نكتب المعادلات البارامترية للمنحنى c ($y = 2x^2$) ، فحيث أن المنحنى يقع

على المستوى فإن معادلته الاتجاهية تكون : $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ ، وبأخذ $x = t$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

حيث $0 \leq t \leq 1$

فإن :

$$\therefore \vec{r} = t\hat{i} + 2t^2\hat{j} \quad \leftarrow \quad y = 2t^2$$

ولإيجاد \vec{F} , $d\vec{r}$ بدلالة t :

$$d\vec{r} = dt\hat{i} + 4t dt\hat{j} = (\hat{i} + 4t\hat{j})dt \quad \text{_____ (1)}$$

$$\vec{F} = 3(t)(2t^2)\hat{i} - (2t^2)^2\hat{j} = 6t^3\hat{i} - 4t^4\hat{j} \quad \text{_____ (2)}$$

$$\therefore \vec{F} \cdot d\vec{r} = (6t^3 - 16t^5)dt$$

ويصبح التكامل المطلوب :

$$I = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (6t^3 - 16t^5)dt = -\frac{7}{6}$$

وهو المطلوب .

مثال (٣) :

أوجد $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ للدالة الاتجاهية \vec{F} التي تمثل مجالا مستويا حيث :

$\vec{F} = (5xy - 6x^2)\hat{i} + (2y - 4x)\hat{j}$ والمنحنى c الذي هو المنحنى الذي معادلته $y = x^3$ والتكامل من النقطة $(1,1)$ إلى النقطة $(2,8)$ على المنحنى المذكور .

الحل :

نأخذ $x = t$ حيث $1 \leq t \leq 2$ فنكون $y = t^3$ وتصبح المعادلة الاتجاهية

للمنحنى c هي :

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = t\hat{i} + t^3\hat{j}$$

$$d\vec{r} = (\hat{i} + 3t^2\hat{j})dt \quad \text{_____ (1)}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

أيضاً فإن :

$$\vec{F} = (5t^4 - 6t^2)\hat{i} + (2t^3 - 4t)\hat{j} \quad \text{_____ (2)}$$

من (١) ، (٢) :

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= [(5t^4 - 6t^2) + 3t^2(2t^3 - 4t)] dt \\ &= [6t^5 + 5t^4 - 12t^3 - 6t^2] dt \end{aligned}$$

ويصبح التكامل المطلوب :

$$\begin{aligned} I &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 [6t^5 + 5t^4 - 12t^3 - 6t^2] dt \\ &= \left[t^6 + t^5 - 3t^4 - 2t^3 \right]_1^2 \\ &= (64 - 1) + (32 - 2) - 3(16 - 1) - 2(8 - 1) = 35 \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (٤) :

إذ كانت $\vec{F} = 4y\hat{i} + x\hat{j} + 2z\hat{k}$ دالة اتجاهية ، أوجد التكامل السطحي

$\iiint (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ مأخوذاً على نصف الكرة $(x^2 + y^2 + z^2)$ حيث $z \geq 0$.

الحل :

نحسب أولاً $(\vec{\nabla} \wedge \vec{F})$:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4y & x & 2z \end{vmatrix} = (1 - 4)\hat{k} = -3\hat{k} \quad \text{_____ (1)}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

إذا كان $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ متجه موضع أي نقطة في الفراغ فإن سطح النصف كرة (التي مركزها عند نقطة الأصل) يكون عمودياً على \vec{r} ولذلك يكون متجه الوحدة العمودي على السطح هو :

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{a} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{a} \quad (2)$$

حيث $r = a$ نصف قطر السطح الكروي .

ويكون التكامل المطلوب:

$$I = \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \hat{n} dS \quad (3)$$

ومن (٢) ، (١) :

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \hat{n} = (-3\hat{k}) \cdot \left(\frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{a} \right) = -3z/a \quad (4)$$

ويصبح التكامل في (٣) بالصورة:

$$I = \frac{-3}{a} \iint z dS \quad (5)$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية الكروية : حيث عنصر المساحة هو :

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$[r = a , \theta = 0 \rightarrow \pi/2 \text{ (لنصف الكرة) } , \phi = 0 \rightarrow 2\pi]$$

$$z = r \cos \theta$$

أيضاً فإن:

$$\therefore I = -\frac{3}{a} \iint (a \cos \theta) (a^2 \sin \theta d\theta d\phi) = -3a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi$$

$$= -3a^2 (2\pi) \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = -3a^2 (2\pi) \left(\frac{1}{2} \right) = -3\pi a^2$$

وهو المطلوب .

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

مثال (٥) :

إذا كانت $\vec{F} = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k}$ دالة اتجاهية ، فأحسب التكامل السطحي $\iint \vec{F} \cdot d\vec{S}$ على أوجه المكعب $0 \leq x, y, z \leq 1$.

الحل :

نتبع نفس خطوات حل المثال رقم (٥) ، حيث التكامل المطلوب يتكون من ٦ تكاملات على أسطح المكعب الستة وهذه التكاملات هي :

$$I_1 = \iint_{DEFG} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dy \, dz = 1 \quad (\hat{n} = \hat{i} , x = 1)$$

$$I_2 = \iint_{CBAO} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dy \, dz = 0 \quad (\hat{n} = -\hat{i} , x = 0)$$

$$I_3 = \iint_{EBAF} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dx \, dz = 1 \quad (\hat{n} = \hat{j} , y = 1)$$

$$I_4 = \iint_{DCOG} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dx \, dz = 0 \quad (\hat{n} = -\hat{j} , y = 0)$$

$$I_5 = \iint_{CBED} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dx \, dy = 1 \quad (\hat{n} = \hat{k} , z = 1)$$

$$I_6 = \iint_{OAFG} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dx \, dy = 0 \quad (\hat{n} = -\hat{k} , z = 0)$$

$$\therefore I = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3$$

وهو المطلوب .

حساب التكامل للدوال الإتجاهية

مثال (٦): إذا كانت $\vec{F} = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2}$ فأوجد $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$ في الحالتين:

(i) إذا كان المنحنى c هو منحنى بسيط مغلق في المستوى (x, y) ولا يشتمل على نقطة الأصل.

(ii) إذا كان المنحنى c هو للدائرة $x^2 + y^2 = 1$ في المستوى (xy) واتجاه المنحنى هو الإتجاهي اليميني (عكس عقارب الساعة).

الحل:

$$\vec{F} = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{j}$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} \quad (\text{حيث } \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j})$$

$$\therefore \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c \left[-\frac{y}{x^2 + y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{j} \right] \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j}]$$

$$= \int_c \left[-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right]$$

$$= \int_c \left[\frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} \right] = \int_c \left[\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \right] \quad \text{---(1)}$$

ولإيجاد هذا التكامل نتحول إلى الإحداثيات القطبية وذلك بوضع:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$\therefore x^2 + y^2 = r^2, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$d\theta = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left[\frac{x dy - y dx}{x^2} \right] = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c d\theta \quad \text{---(2)}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

الحالة الأولى (i): حيث أن المنحنى مغلق فإنه إذا كان لدينا نقطة p على المنحنى بحيث أن الحد السفلي للزاوية θ عند p هو ϕ (مثلاً) فإن الحد العلوي سيكون أيضاً ϕ :

$$\therefore \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\phi}^{\phi} d\theta = [\theta]_{\phi}^{\phi} = \phi - \phi = 0$$

الحالة الثانية (ii): المنحنى c هو الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ في المستوى (xy)

وتكون الزاوية θ متغيرة من 0 إلى 2π (في الإتجاهي اليميني)

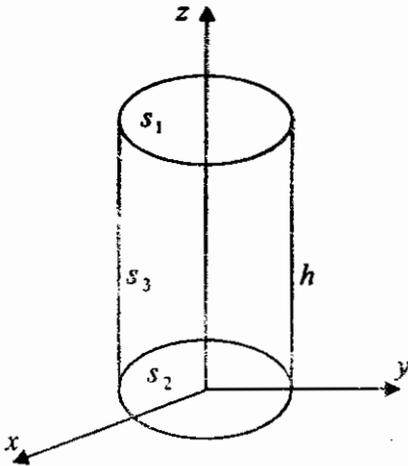
$$\therefore \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

وهو المطلوب.

مثال (v): أحسب التكامل السطحي $\iint \vec{A} \cdot d\vec{s}$ للمتجه $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ على

السطح المغلق لأسطوانة ذات قاعدة دائرية نصف قطرها a وتقع في

المستوى (xy) وارتفاعها h في اتجاه محور z .



الحل: لحساب التكامل السطحي

$$\iint (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot d\vec{s}$$

$$= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \hat{n} ds$$

لدينا ثلاثة تكاملات: تكامل على قمة سطح

الاسطوانة وآخر على القاع وثالث على

السطح المنحني للأسطوانة فبأخذ \hat{n} هو

متجه الوحدة العمودي على سطح الاسطوانة.

∴ على قمة سطح الأسطوانة: نجد أن:

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

$$\hat{n} = \hat{k}, \quad \vec{A} \cdot \hat{n} = \vec{A} \cdot \hat{k} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot \hat{k} = z = h$$

$$\therefore \iint \vec{A} \cdot d\vec{s}_1 = \iint \vec{A} \cdot \hat{n} ds_1 = \int h ds_1 = h \int ds_1 = h(\pi a^2) = h\pi a^2 \quad \text{--- (1)}$$

وعلى قاع سطح الاسطوانة: نجد أن

$$\hat{n} = -\hat{k}, \quad \vec{A} \cdot \hat{n} = -\vec{A} \cdot \hat{k} = -z = 0$$

(حيث أنه عند قاع الاسطوانة فإن $z=0$)

$$\therefore \iint \vec{A} \cdot d\vec{s}_2 = \iint \vec{A} \cdot \hat{n} ds_2 = 0 \quad \text{--- (2)}$$

على السطح المنحني للاسطوانة: المتجه $(x\hat{i} + y\hat{j})$ عمودي على السطح المنحني للاسطوانة ولذلك فإن متجه للوحدة العمودي على ذلك السطح:

$$\hat{n} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{a}$$

$$\vec{A} \cdot \hat{n} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot \left(\frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{a} \right) = \frac{x^2 + y^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a$$

$$\therefore \iint \vec{A} \cdot \hat{n} ds_3 = a \iint ds_3 = a(2\pi ah) = 2\pi a^2 h \quad \text{--- (3)}$$

حيث مساحة السطح المنحني للاسطوانة = محيط القاعدة \times الارتفاع

$$s_3 = (2\pi a)(h) = 2\pi ah$$

ويصبح التكامل السطحي على سطح الاسطوانة [بجمع (1), (2), (3)]:

$$\iint \vec{A} \cdot \hat{n} ds = \pi a^2 h + 0 + 2\pi a^2 h = 3\pi a^2 h$$

وهو المطلوب.

مثال (٨): أوجد قيمة التكامل السطحي

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S [\vec{F}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \vec{F}_3 \cdot d\vec{s}_3]$$

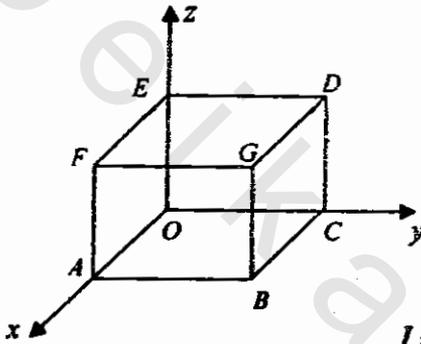
حساب التكامل للدوال الاتجاهية

$$\vec{F}_1 = (x^3 - yz)\hat{i}, \quad \vec{F}_2 = -2x^2 y\hat{j}, \quad \vec{F}_3 = z\hat{k} \quad \text{حيث:}$$

$$ds_1 = dy dz, \quad ds_2 = dz dx, \quad ds_3 = dx dy$$

وذلك على سطح المكعب المحدود بمستويات الإحداثيات والمستويات

$$x = y = z = a$$



الحل: التكامل هنا على سطح المكعب المبين

ولإيجاد هذا التكامل نسقط السطح على

مستويات الإحداثيات الثلاثة:

ونكتب التكامل بالصورة:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

حيث:

$$I_1 = \iiint_S \vec{F}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \iiint_S (x^3 - yz)\hat{i} \cdot d\vec{s}_1$$

$$I_2 = \iiint_S \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}_2 = \iiint_S (-2x^2 y)\hat{j} \cdot d\vec{s}_2$$

$$I_3 = \iiint_S \vec{F}_3 \cdot d\vec{s}_3 = \iiint_S (z)\hat{k} \cdot d\vec{s}_3$$

ولإيجاد I_1 : المساحة $ds_1 = dy dz$ والتكامل يكون على السطحين $ABGF$, $OCDE$

حيث متجه الوحدة العمودي عليها هما: $\hat{n} = +\hat{i} (x=a)$, $\hat{n} = -\hat{i} (x=0)$

$$\therefore d\vec{s}_1 (x=a) = \hat{i} dy dz, \quad d\vec{s}_1 (x=0) = -\hat{i} dy dz$$

$$I_1 = \iiint_{x=a} (a^3 - yz)\hat{i} \cdot \hat{i} dy dz + \iiint_{x=0} (0 - yz)(-\hat{i} \cdot \hat{i}) dy dz$$

$$= \int_{y=0}^a \int_{z=0}^a (a^3 - yz) dy dz + \int_{y=0}^a \int_{z=0}^a (yz) dy dz = \int_{0,0}^{a,a} a^3 dy dz = a^5 \quad (1)$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

ولإيجاد I_2 : المساحة $ds_2 = dz dx$ والتكامل على السطحين $BCGD, AOEf$

حيث متجه الوحدة العمودي عليها: $\hat{n} = +\hat{j} (y=a), \hat{n} = -\hat{j} (y=0)$

$$\therefore d\vec{s}_2 (y=a) = \hat{j} dz dx, \quad d\vec{s}_2 (y=0) = -\hat{j} dz dx$$

$$I_2 = -2 \left[\iint_{y=a} (x^3 y) \hat{j} \cdot \hat{j} dz dx + \iint_{y=0} (x^2 y) (-\hat{j} \cdot \hat{j}) dz dx \right]$$

$$= -2 \int_0^a \int_0^a a x^2 dz dx = -\frac{2}{3} a^5 \quad \text{_____ (2)}$$

ولإيجاد I_3 : المساحة $ds_3 = dx dy$ والتكامل على السطحين $FGDE, ABOC$

حيث متجه الوحدة العمودي عليها: $\hat{k} = +\hat{k} (z=a), \hat{n} = -\hat{k} (z=0)$

$$\therefore d\vec{s}_3 (z=a) = \hat{k} dx dy, \quad d\vec{s}_3 (z=0) = -\hat{k} dx dy$$

$$I_3 = \iint_{z=a} (z) \hat{k} \cdot \hat{k} dx dy + \iint_{z=0} (z) (-\hat{k} \cdot \hat{k}) dx dy = \int_0^a \int_0^a a dx dy = a^3 \quad \text{_____ (3)}$$

$$\therefore I = I_1 + I_2 + I_3 = a^5 - \frac{1}{3} a^5 + a^3 = \frac{1}{3} a^5 + a^3 \quad \text{من (1), (2), (3)}$$

وهو المطلوب.

مثال (٩): إذا كانت $\phi = 45x^2y$ فأوجد التكامل الحجمي $\iiint_V \phi dV$ حيث V هي

المنطقة المغلقة (الحجم) المحدودة بالمستويات:

$$x=0, y=0, z=0, 4x+2y+z=8$$

$$I = \iiint_V \phi dV = \iiint_V (45x^2y) dx dy dz \quad \text{الحل: المطلوب إيجاد:}$$

ولإيجاد حدود التكامل: x تتغير من 0 إلى 2 (تقاطع الحجم مع محور x يأتي

بوضع $z=0, y=0$ فنحصل على: $x=2 \leftarrow 4x=8$)

y تتغير من 0 إلى $4-2x$ (تقاطع الحجم مع المستوى xy يأتي بوضع $z=0$

فيعطي الخط المستقيم: $y=4-2x \leftarrow 2x+y=4$)

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

z تتغير من 0 إلى $8-4x-2y$ (حدود تكامل z من نقطة على المستوى $z=0$ إلى نقطة على السطح $4x+2y+z=8$)

$$\begin{aligned}
 \therefore I &= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{4-2x} \int_{z=0}^{8-4x-2y} (45x^2y) dx dy dz \\
 &= 45 \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{4-2x} x^2 y [z] \Big|_0^{8-4x-2y} dx dy \\
 &= 45 \int_0^2 \int_0^{4-2x} x^2 y (8-4x-2y) dx dy \\
 &= 45 \int_0^2 \int_0^{4-2x} x^2 (8y-4xy-2y^2) dx dy \\
 &= 45 \int_0^2 x^2 \left[4y^2 - 2xy^2 - 2\frac{y^3}{3} \right] \Big|_0^{4-2x} dx \\
 &= 45 \int_0^2 x^2 \left[4(4-2x)^2 - 2x(4-2x)^2 - \frac{2}{3}(4-2x)^3 \right] dx \\
 &= \frac{45}{3} \int_0^2 x^2 (4+2x)^2 [12-6x-2(4-2x)] dx \\
 &= 15 \int_0^2 x^2 (4-2x)^2 [4-2x] dx = 15 \int_0^2 x^2 (4-2x)^3 dx \\
 &= 15 \int_0^2 x^2 [64-32x+16x^2-8x^3] dx \\
 &= 15 \int_0^2 [64x^2-32x^3+16x^4-8x^5] dx \\
 &= 15 \left[\frac{64x^3}{3} - \frac{32x^4}{4} + \frac{16x^5}{5} - \frac{8x^6}{6} \right] \Big|_0^2 = 128
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (١٠): إذا كانت $\vec{F} = (2x^2 - 3z)\hat{i} - 2xy\hat{j} - 4x\hat{k}$ فأوجد التكاملين

(i) $\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV$, (ii) $\iiint_V (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) dV$ المحجمين:

حيث V هو المنطقة المغلقة (الحجم) المحدودة بالمستويات:

$$x=0, y=0, z=0, 2x+2y+z=4$$

الحل:

$$\vec{F} = (2x^2 - 3z)\hat{i} - 2xy\hat{j} - 4x\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) [(2x^2 - 3z)\hat{i} - 2xy\hat{j} - 4x\hat{k}]$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x^2 - 3z) + \frac{\partial}{\partial y}(-2xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-4x) \right] = 4x - 2x = 2x$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2 - 3z & -2xy & -4x \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y}(-4x) - \frac{\partial}{\partial z}(-2xy) \right] + \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial z}(2x^2 - 3z) - \frac{\partial}{\partial x}(-4x) \right]$$

$$+ \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 - 3z) \right]$$

$$= \hat{i}(0) + \hat{j}(-3+4) + \hat{k}(-2y) = \hat{j} - 2y\hat{k}$$

حدود التكامل هي: x تتغير من 0 ← 2

y تتغير من 0 ← 2-x

z تتغير من 0 ← 4-2x-2y

$$(i) \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \iiint_V 2x dx dy dz = 2 \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{2-x} \int_{z=0}^{4-2x-2y} x dx dy dz$$

$$= 2 \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{2-x} x(4-2x-2y) dx dy$$

$$= 2 \int_{x=0}^2 x[(4-2x)(2-x) - (2-x)^2] dx$$

$$= 2 \int_{x=0}^2 x[(8-4x-4x+2x^2) - (4+4x-x^2)] dx$$

$$= 2 \int_0^2 x[4-4x+x^2] dx = 2 \int_0^2 [4x-4x^2+x^2] dx$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

$$= 2 \left[2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 2 \left[8 - \frac{32}{3} + 4 \right] = 2 \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{8}{3}$$

وهو المطلوب أولاً.

$$(ii) \iiint_V (\nabla \wedge \vec{F}) dV = \iiint_V (\hat{j} - 2y\hat{k}) dx dy dz$$

$$= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{2-x} \int_{z=0}^{4-2x-2y} (\hat{j} - 2y\hat{k}) dx dy dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2-x} (\hat{j} - 2y\hat{k})(4 - 2x - 2y) dx dy$$

$$= \int_0^2 \left[\hat{j} \left\{ (4-2x)y - y^2 \right\} - \hat{k} \left\{ (4-2x)y^2 - \frac{4}{3}y^3 \right\} \right]_0^{2-x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[\hat{j} \left\{ (4-2x)(2-x) - (2-x)^2 \right\} - \hat{k} \left\{ (4-2x)(2-x)^2 - \frac{4}{3}(2-x)^3 \right\} \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[\hat{j} \{ 8 - 8x + 2x^2 - 4 - x^2 + 4x \} - \hat{k} \{ 16 - 24x + 12x^2 - 2x^3 - \frac{4}{3}(8 - 12x + 6x^2 - x^3) \} \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[\hat{j} \{ 4 - 4x + x^2 \} - \frac{\hat{k}}{3} \{ 16x - 24x + 12x^2 - 2x^3 \} \right] dx$$

$$= \left[\hat{j} \left\{ 4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} \right\} - \frac{\hat{k}}{3} \left\{ 16 - 12x^2 + 4x^2 - \frac{1}{2}x^4 \right\} \right]_0^2$$

$$= \hat{j} \left\{ 8 - 8 + \frac{8}{3} \right\} - \frac{\hat{k}}{3} \{ 32 - 48 + 32 - 8 \}$$

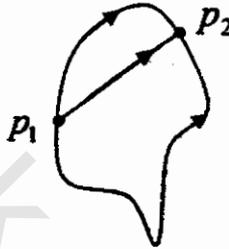
$$= \frac{8}{3} \hat{j} - \frac{8}{3} \hat{k} = \frac{8}{3} (\hat{j} - \hat{k})$$

وهو المطلوب ثانياً.

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

المجالات المحافضة:

يقال أن الدالة الاتجاهية \vec{F} تمثل مجالا محافظا إذا كان التكامل الخطي $\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ لا يعتمد على المسار الذي يربط بين النقطتين P_1, P_2 في منطقة ما في الفراغ.



الجهد القياسي للمجال المحافظ:

إذا كانت \vec{F} تمثل مجالا محافظا فإن هذا المجال يمكن كتابته بالصورة: $\vec{F} = -\nabla u$ حيث u دالة قياسية تسمى بالجهد القياسي للمجال أو دالة الجهد

أمثلة محلولة:

مثال (1):

إذا كانت $\vec{F} = -\nabla u$ فاثبت أن: $\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ لا يعتمد على المسار بين P_1, P_2 .

الحل: حيث أن $\vec{F} = -\nabla u$ فإن:

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int_{P_1}^{P_2} (\nabla u) \cdot (d\vec{r}) \\ &= - \int_{P_1}^{P_2} \left(\hat{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz) \\ &= - \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \end{aligned}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

$$= - \int_{p_1}^{p_2} du = -[u]_{p_1}^{p_2} = u(p_1) - u(p_2)$$

حيث $u(p_1)$, $u(p_2)$ هما قيمتا u عند p_1, p_2 وهذا يعني أن التكامل

$$\int_{p_2}^{p_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

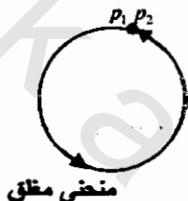
لا يعتمد على المسار بين p_1, p_2 ولكن يعتمد على موضع كلا

من p_1, p_2 وهو المطلوب.

مثال (٢):

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

حول أي مسار مغلق يصل p_1, p_2 .



الحل:

إذا كان التكامل حول منحنى مغلق، فإن النقطتان p_1, p_2 تكونان منطقتان

على بعضهما، وحيث أن:

$$\int_{p_1}^{p_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = u(p_1) - u(p_2)$$

مثال (١):

$$\therefore \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{p_1}^{p_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = u(p_1) - u(p_1) = 0$$

مثال (٣):

إذا كانت \vec{F} تمثل مجالاً محافظاً، أي $\vec{F} = -\vec{\nabla}u$ ، فثبت أن \vec{F} يكون متجهاً

لا دورانياً أي أن: $\text{curl } \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$.

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

الحل:

حيث أن $\vec{F} = -\vec{\nabla}u$ فيكون الالتفاف (أو الالتواء) \vec{F} هو:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \text{curl } \vec{F} = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}u) = 0$$

ونلك لأن: $\text{curl grad } u = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}u = 0$ (سبق اثباتها) وهذا يعني أن \vec{F} يشكل متجهها لا دورانياً. وهو المطلوب.

ملحوظة:

تستخدم العلاقة $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$ عادة لإثبات أن \vec{F} تشكل مجالاً محافظاً.

ملخص:

إذا كانت \vec{F} تشكل مجالاً محافظاً فإن:

$$(i) \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ لا يعتمد على المسار بين } P_1, P_2.$$

$$(ii) \vec{F} = -\vec{\nabla}u \text{ حيث } u \text{ دالة قياسية (دالة الجهد).}$$

$$(iii) \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0 \text{ أي أن } \vec{F} \text{ يكون متجهها لا دورانياً.}$$

مثال (٤):

إذا كانت: $\vec{F} = \cos y \hat{i} - x \sin y \hat{j} + \cos z \hat{k}$ تمثل مجالاً اتجاهياً فائت

أن هذا المجال هو مجال محافظ.

الحل:

شرط المجال المحافظ هو: $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos y & -x \sin y & \cos z \end{vmatrix}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

$$\begin{aligned}
 &= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\cos z) - \frac{\partial}{\partial z} (-x \sin y) \right] + \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\cos y) - \frac{\partial}{\partial x} (\cos z) \right] \\
 &+ \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-x \sin y) - \frac{\partial}{\partial y} (\cos y) \right] \\
 &= \hat{i}(0) + \hat{j}(0) + \hat{k}[-\sin y + \sin y] = 0
 \end{aligned}$$

∴ المجال \vec{F} هو مجال محافظ.

ملحوظة:

في علم الميكانيكا تمثل \vec{F} بالقوة المؤثرة على جسيم متحرك في مجال معين جهده U وغالبا ما تكون هذه القوة من النوع المحافظ، ويمثل التكامل الخطي

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

الشغل المبذول في تحريك الجسيم في مجال القوة \vec{F} .

مثال: أثبت أن المجال الاتجاهي الذي تمثله القوة:

$$\vec{F} = (x^2 + xy^2)\hat{i} + (y^2 + x^2y)\hat{j}$$

هو مجال محافظ وأوجد دالة الجهد (أو الجهد القياسي) لهذا المجال ثم احسب الشغل المبذول في تحريك جسيم في هذا المجال من النقطة (0,1) إلى النقطة (1,2).

الحل: شرط المجال المحافظ هو: $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$ فلنحسب $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$ فإذا انطبق الشرط فالمجال محافظ.

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \wedge \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + xy^2 & y^2 + x^2y & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \hat{i}(0) + \hat{j}(0) + \hat{k}(2xy - 2xy) = 0
 \end{aligned}$$

أي أن \vec{F} تمثل مجالا محافظا.

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

ولإيجاد دالة الجهد u :

حيث أن \vec{F} تمثل مجالا محافظا فان $\vec{F} = -\vec{\nabla}u$

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ &= (\vec{\nabla}u) \cdot (d\vec{r}) = -(\vec{F}) \cdot (d\vec{r}) \\ &= -[(x^2 + xy^2)\hat{i} + (y^2 + x^2y)\hat{j}] \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) \\ &= -[(x^2 + xy^2)dx + (y^2 + x^2y)dy] \\ &= -[x^2 dx + xy^2 dx + y^2 dy + x^2 y dy] \end{aligned}$$

وبإجراء التكامل:

$$\begin{aligned} u &= -\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2y^2\right] + c \\ \therefore u &= -\frac{1}{3}(x^3 + y^3) - x^2y^2 + c \end{aligned}$$

وهي دالة الجهد المطلوبة ، ولإيجاد الشغل المبذول :

$$\begin{aligned} w &= \int_{(0,1)}^{(1,2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,1)}^{(1,2)} [(x^2 + xy^2)dx + (y^2 + x^2y)dy] \\ &= \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2\right) + \left(\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2y^2\right) \right]_{(0,1)}^{(1,2)} \\ &= \left[\frac{1}{3}(x^3 + y^3) + x^2y^2 \right]_{(0,1)}^{(1,2)} \\ &= \left[\frac{1}{3}(1+8) + 4 \right] - \left[\frac{1}{3}(0+1) + 0 \right] = 7 - \frac{1}{3} = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

ثانياً: نظريات التكامل الاتجاهية:

هي نظريات تشتمل على تكاملات خطية وسطحية وحجمية لدوال اتجاهية ولدينا ٣ نظريات سوف نأخذها بدون برهان، وهي:

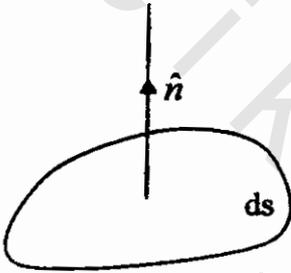
(١) نظرية التباعد لجاوس: Gauss Divergence Theorem

ترتبط بين التكامل السطحي لدالة اتجاهية \vec{F} والتكامل الحجمي لتباعد هذه

الدالة $(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$ وصورتها:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dv$$

حيث: $d\vec{s} = \hat{n} ds$



(٢) نظرية الالتفاف لستوكس: Stokes Curl Theorem

ترتبط بين التكامل الخطي لدالة اتجاهية \vec{F} والتكامل السطحي لالتفاف هذه

الدالة $(\vec{\nabla} \wedge \vec{F})$ وصورتها:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{s}$$

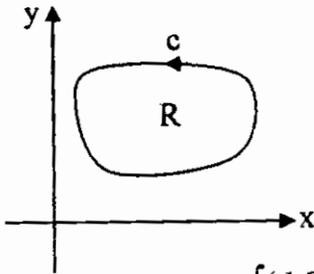
(٣) نظرية جرين في المستوى (Green Theorem)

نفرض أن لدينا منطقة R يحدها المنحني C

فإذا كانت M, N دالتان متصلتان في

هذه المنطقة، فإن نظرية جرين في

المستوى تنص على أن:



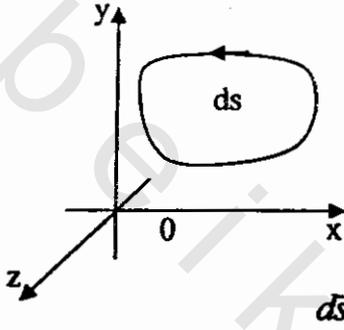
$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) ds$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

مثال:

أثبت أن نظرية جرين في المستوى هي حالة خاصة من نظرية الالتفاف
لستوكس:

الحل:



باعتبار المستوى (xy) فيكون العمودي عليه هو z

∴ متجه الوحدة العمودي على (xy) هو: $\hat{n} = \hat{k}$

∴ أي مساحة في المستوى (xy) تكون:

$$d\vec{s} = ds\hat{k} \quad \rightarrow (1)$$

نظرية ستوكس:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iiint (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{s}$$

$$= \iiint (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \hat{k} ds \quad \rightarrow (2)$$

وباعتبار أن M, N دالتان متصلتان في المنطقة R في المستوى (xy) ، بحيث

أن الدالة \vec{F} تكون بالصورة: $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j}$

$$\therefore \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \hat{k}$$

أيضاً:

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \hat{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \hat{k} \cdot \hat{k}$$

$$= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \rightarrow (3)$$

$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

وحيث أن :

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

$$\therefore \vec{F} \cdot d\vec{r} = (M\hat{i} + N\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j})$$

$$= Mdx + Ndy \quad \rightarrow (4)$$

بالتعويض من (٤) و(٣) في نظرية ستوكس [رقم (٢)] نحصل على:

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) ds$$

وهي نفس نظرية جرين في المستوى .

وهو المطلوب.

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

أمثلة محلولة على نظريات التكامل الاتجاهية

(1) أمثلة محلولة على نظرية التباعد لجاوس:

مثال (1):

إذا كانت $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ متجه موضع أي نقطة على السطح المغلق S،
فاثبت أن:

$$\iint_S \vec{r} \cdot d\vec{s} = 3V$$

حيث V هي الحجم المحدود بالسطح S ، $d\vec{s} = \hat{n}ds$

الحل:

بتطبيق نظرية جاوس:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV$$

بوضع $\vec{F} = \vec{r}$ نحصل على:

$$\iint_S \vec{r} \cdot d\vec{s} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) dV \rightarrow (1)$$

ولكن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

بالتعويض في (1):

$$\iint_S \vec{r} \cdot d\vec{s} = \iiint_V 3 dV = 3 \iiint_V dV = 3V$$

وهو المطلوب.

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

مثال (٢):

إذا كانت \hat{n} هي متجه الوحدة العمودي على السطح المغلق S فاثبت أن:

$$\iiint_V \operatorname{div} \hat{n} \, dV = S$$

الحل:

من نظرية جاوس:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

وبأخذ $\vec{F} = \hat{n}$ نحصل على:

$$\iiint_V \operatorname{div} \hat{n} \, dV = \iint_S \hat{n} \cdot \hat{n} \, dS = \iint_S dS = S \quad \left| \hat{n} \cdot \hat{n} = 1 \right.$$

وهو المطلوب.

مثال (٣):

إذا كانت \vec{F} هي متجه موضع أي نقطة على السطح المغلق S فاثبت أن:

الحجم المحصور داخل هذا السطح يعطى بالعلاقة:

$$V = \frac{1}{6} \iint_S \vec{\nabla}(r^2) \cdot d\vec{S}$$

الحل: من نظرية جاوس:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \, dV$$

بوضع $\vec{F} = \vec{\nabla}(r^2)$ نحصل على:

$$\iint_S \vec{\nabla}(r^2) \cdot d\vec{S} = \iiint_V [\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(r^2)] \, dV \quad \rightarrow (1)$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

$$\vec{\nabla}(r^n) = \frac{\partial}{\partial r}(r^n)\hat{r} \quad \text{ولكن :}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{حيث:}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 \quad (\text{مثال سابق})$$

$$\vec{\nabla}(r^2) = \frac{\partial}{\partial r}(r^2)\hat{r} = 2r\hat{r} = 2r\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = 2\vec{r}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(r^2) = \vec{\nabla} \cdot (2\vec{r}) = 2(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) = 2(3) = 6$$

بالتعويض في (1):

$$\oiint_S \vec{\nabla}(r^2) \cdot d\vec{S} = \iiint_V 6 dV = 6V$$

$$\therefore V = \frac{1}{6} \oiint_S \vec{\nabla}(r^2) \cdot d\vec{S}$$

مسألة:- أثبت أن:

$$V = \frac{1}{3} \oiint_S \vec{r} \cdot d\vec{S}$$

الحل: من المثال السابق، حيث أن:

$$\vec{\nabla}(r^2) = 2\vec{r}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(r^2) = 6$$

فبالتعويض في (1):

$$\oiint_S (2\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (6) dV = 6V$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \oiint_S \vec{r} \cdot d\vec{S}$$

وهو المطلوب.

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

مثال (4):

إذا كانت \vec{r} هي متجه موضع أي نقطة على السطح المغلق S المحتوى على الحجم V فاثبت أن:

$$\oiint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \iiint_V \frac{dV}{r^2}$$

الحل:

من نظرية جاوس:

$$\bar{F} = \frac{\vec{r}}{r^2} \text{ وبأخذ } \oiint_S \bar{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \bar{\nabla} \cdot \bar{F} dV$$

نصل على:

$$\oiint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \iiint_V \left[\bar{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2} \right] dV \rightarrow (1)$$

ولكن:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) &= \bar{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{r^2} \vec{r} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} (\bar{\nabla} \cdot \vec{r}) + \bar{\nabla} \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \vec{r} \\ &= \frac{1}{r^2} (3) + \left(\frac{-2\vec{r}}{r^4} \right) \cdot \vec{r} \\ &= \frac{3}{r^2} - \frac{2}{r^4} (\vec{r} \cdot \vec{r}) \\ &= \frac{3}{r^2} - \frac{2}{r^2} = \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot (\phi \vec{A}) &= \phi (\bar{\nabla} \cdot \vec{A}) \\ &\quad + (\bar{\nabla} \phi) \cdot \vec{A}, \bar{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 \\ \bar{\nabla} \left(\frac{1}{r^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \right) \hat{r} \\ &= \frac{-2\vec{r}}{r^3} = \frac{-2\vec{r}}{r^4} \end{aligned}$$

بالتعويض في (1) ينتج المطلوب:

$$\oiint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \iiint_V \frac{dV}{r^2}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

مثال (٥):

إذا كانت \vec{A} دالة اتجاهية ، ϕ دالة قياسية فاثبت أن:

$$\iiint_V [(\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})] dV = \iint_S (\vec{A} \wedge \vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{S}$$

الحل: من نظرية جاوس:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

وبأخذ $\vec{F} = \vec{A} \wedge \vec{\nabla} \phi$

$$\therefore \iint_S (\vec{A} \wedge \vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{S} = \iiint_V [\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{\nabla} \phi)] dV$$

$$= \iiint_V [(\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \phi)] dV$$

$$= \iiint_V [(\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})] dV$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \phi = 0$$

$$\therefore \iiint_V [(\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})] dV = \iint_S (\vec{A} \wedge \vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{S}$$

وهو المطلوب.

[من قوانين المتجهات:

$$[\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})]$$

مثال (٦):

إذا كانت ϕ, ψ دالتان قياسيتان فاثبت أن:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \phi \wedge \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{S} = 0$$

الحل: من نظرية جاوس:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \phi \wedge \vec{\nabla} \psi \quad \text{فبوضع}$$

$$\therefore \iint_S (\vec{\nabla} \phi \wedge \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{S} = \iiint_V [\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi \wedge \vec{\nabla} \psi)] dV \quad \rightarrow (1)$$

ولكن:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi \wedge \vec{\nabla} \psi) = (\vec{\nabla} \psi) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \phi) - (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \psi) = 0$$

وذلك لأن:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \phi = 0, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \psi = 0$$

$$\iint_S (\vec{\nabla} \phi \wedge \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{S} = 0$$

وتصبح (1):

وهو المطلوب.

(٢) أمثلة على نظرية الالتفاف مستوكس:

مثال (١):

$$\iint_S [\phi \vec{\nabla} \phi] \cdot d\vec{r} = 0$$

أثبت أن:

الحل: من نظرية مستوكس:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

فباخذ $\vec{F} = \phi \vec{\nabla} \phi$ نحصل على:

$$\iint_S [\phi \vec{\nabla} \phi] \cdot d\vec{r} = \iint_S [(\vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{\nabla} \phi))] \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow (1)$$

ولكن:

$$\vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{\nabla} \phi) = \phi (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \phi) + (\vec{\nabla} \phi) \wedge (\vec{\nabla} \phi) \quad \left| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{A}) \\ = \phi (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + (\vec{\nabla} \phi) \wedge \vec{A} \end{array} \right.$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\iint_S [\phi \vec{\nabla} \phi] \cdot d\vec{r} = 0$$

وبالتعويض في (1):

وهو المطلوب.

مثال (٢): أثبت أن:

$$\int [\phi \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \phi] \cdot d\vec{r} = 0$$

الحل: من نظرية ستوكس:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

وبأخذ $\vec{F} = \phi \vec{\nabla} \psi$

$$\therefore \int [\phi \vec{\nabla} \psi] \cdot d\vec{r} = \iint [\vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{\nabla} \psi)] \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow (1)$$

ولكن:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{\nabla} \psi) &= \phi (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \psi) + (\vec{\nabla} \phi) \wedge (\vec{\nabla} \psi) \\ &= 0 + (\vec{\nabla} \phi) \wedge (\vec{\nabla} \psi) \\ &= (\vec{\nabla} \phi) \wedge (\vec{\nabla} \psi) \end{aligned}$$

وبالتعويض في (١):

$$\therefore \int [\phi \vec{\nabla} \psi] \cdot d\vec{r} = \iint [(\vec{\nabla} \phi) \wedge (\vec{\nabla} \psi)] \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow (2)$$

وباستبدال ψ مكان ϕ نحصل على:

$$\begin{aligned} \int [\psi \vec{\nabla} \phi] \cdot d\vec{r} &= \iint [(\vec{\nabla} \psi) \wedge (\vec{\nabla} \phi)] \cdot d\vec{S} \\ &= - \iint [(\vec{\nabla} \phi) \wedge (\vec{\nabla} \psi)] \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow (3) \end{aligned}$$

بجمع (٢) و(٣):

$$\int [\phi \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \phi] \cdot d\vec{r} = 0$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: يمكن كتابة العلاقة الأخيرة بالصورة:

$$\int (\phi \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{r} = - \int (\psi \vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{r}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

مثال (3):

إذا كانت ϕ دالة قياسية قابلة للتفاضل فاثبت أن:

$$\oint_C \phi d\vec{r} = - \iint_S (\vec{\nabla} \phi) \wedge d\vec{S}$$

الحل : من نظرية ستوكس:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

بوضع $\vec{F} = \vec{a}\phi$ حيث \vec{a} متجه اختياري ثابت :

$$\therefore \oint_C (\vec{a}\phi) \cdot d\vec{r} = \iint_S [\vec{\nabla} \wedge (\vec{a}\phi)] \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_S [\phi(\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) + (\vec{\nabla} \phi) \wedge \vec{a}] \cdot d\vec{S}$$

حيث $\vec{\nabla} \wedge \vec{a} = 0$ (\vec{a} متجه ثابت).

$$\therefore \oint_C (\vec{a}\phi) \cdot d\vec{r} = \iint_S [(\vec{\nabla} \phi) \wedge \vec{a}] \cdot d\vec{S}$$

$$= - \iint_S [\vec{a} \wedge (\vec{\nabla} \phi)] \cdot d\vec{S} = - \iint_S [\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \phi] \wedge d\vec{S}$$

ونك لان:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \cdot \vec{C}$$

$$\therefore \oint_C (\vec{a}\phi) \cdot d\vec{r} = - \iint_S \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \phi \wedge d\vec{S}$$

وحيث أن \vec{a} متجه ثابت واختياري

$$\vec{a} \cdot \oint_C \phi d\vec{r} = - \vec{a} \cdot \iint_S \vec{\nabla} \phi \wedge d\vec{S}$$

(نتعامل هنا مع تكاملات اتجاهية).

$$\therefore \oint_C \phi d\vec{r} = - \iint_S \vec{\nabla} \phi \wedge d\vec{S}$$

وهو المطلوب.

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

(٣) أمثلة على نظرية جرين في المستوى :

مثال (١) :

باستخدام نظرية جرين في المستوى، أثبت أن مساحة المنطقة R المحدودة بالمنحنى المغلق c تعطى بالصورة:

$$S = \frac{1}{2} \oint_c (x dy - y dx)$$

ومن ذلك أثبت أن مساحة القطع الناقص تساوي (πab) حيث a, b نصف المحورين الأكبر والأصغر للقطع.

الحل:

من نظرية جرين في المستوى:

$$\oint_c (M dx + N dy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) ds$$

وحيث أن M, N دالتان اختياريتان فبأخذ:

$$:N = x, M = 0 \quad (i)$$

$$\oint_c x dy = \iint_R dS = S \quad \rightarrow (1)$$

$$:N = 0, M = -y \quad (ii)$$

$$\oint_c (-y) dx = \iint_R dS = S \quad \rightarrow (2)$$

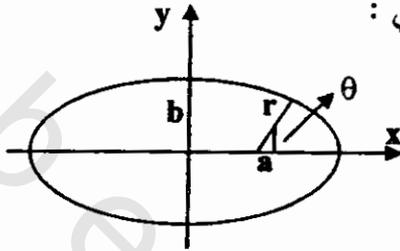
بجمع (١)، (٢)

$$\oint_c (x dy - y dx) = 2S$$

$$S = \frac{1}{2} \oint_c (x dy - y dx) \quad \rightarrow (3)$$

حساب التكامل للدوال الإبتجائية

تطبيق العلاقة (٣) لإيجاد مساحة القطع الناقص:



تستخدم المعادلات البارامترية للقطع الناقص وهي :

$$x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\therefore dx = -a \sin \theta d\theta, dy = b \cos \theta d\theta$$

بتطبيق العلاقة (٣):

$$S = \frac{1}{2} \oint_c (x dy - y dx)$$

$$= \frac{1}{2} \int [(a \cos \theta)(b \cos \theta d\theta) - (b \sin \theta)(-a \sin \theta d\theta)]$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [ab \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} ab [2\pi] = \pi ab$$

وهو المطلوب.

حالة خاصة :

في حالة الدائرة : $a = b = r$ تكون مساحة الدائرة هي : $S = \pi r^2$

مسألة : باستخدام العلاقة (٣) والمعادلات البارامترية للدائرة ، اثبت أن مساحة الدائرة تساوي πr^2 حيث r هو نصف قطر الدائرة.

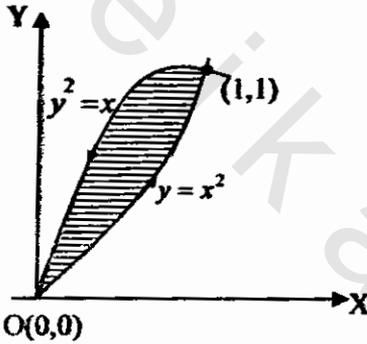
حساب التكامل للدوال الاتجاهية

مثال (٢): حقق نظرية جرين في المستوى على التكامل:

$$\int_c [(2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy]$$

حيث c هو المنحنى المغلق للمنطقة المحصورة بين المنحنيين

$$y = x^2, \quad y^2 = x$$



الحل:

المنحنيان $y = x^2, y^2 = x$ يتقاطعان عند النقطتين

$$(0,0), (1,1)$$

ولتحقيق نظرية جرين:

$$\oint_c (Mdx + Ndy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

فبحساب الطرف الأيسر ثم حساب الطرف الأيمن فإذا تساوى قيمتي الطرفين نكون قد حققنا نظرية جرين.

حساب الطرف الأيسر:

يتكون من تكاملين:

$$(1) \text{ على المنحنى } y = x^2$$

$$M = 2xy - x^2$$

↓

$$M = 2x(x^2) - x^2 = 2x^3 - x^2$$

$$N = x + y^2$$

↓

$$N = x + (x^2)^2 = x + x^4$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

$$\begin{aligned} \therefore I_1 &= \int_0^1 [(2x^3 - x^2)dx + (x + x^4)d(x^2)] \\ &= \int_0^1 [(2x^3 - x^2)dx + (2x^2 + 2x^5)dx] \\ &= \int_0^1 [2x^5 + 2x^3 + x^2]dx = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

(٢) على المنحني $y^2 = x$:

$$\begin{array}{l} M = 2xy - x^2 \\ \downarrow \\ M = 2(y^2)y - (y^2)^2 = 2y^3 - y^4 \\ \therefore I_2 = \int_1^0 [(2y^3 - y^4)d(y^2) + (2y^2)dy] \\ = \int_1^0 [(4y^4 - 2y^5)dy + 2y^2dy] \\ = \int_1^0 [-2y^5 + 4y^4 + 2y^2]dy = -\frac{17}{15} \end{array} \quad \begin{array}{l} N = x + y^2 \\ \downarrow \\ N = (y^2) + y^2 = 2y^2 \end{array}$$

ويصبح التكامل الكلي على المنحني C :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30} \rightarrow (1)$$

حساب الطرف الأيمن:

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} (x + y^2) \right) - \frac{\partial}{\partial y} (2xy - x^2) \right] dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_R (1 - 2x) dx dy \\
 &= \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dx dy \\
 &= \int_{x=0}^1 (1 - 2x) [y]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_0^1 (1 - 2x) [\sqrt{x} - x^2] dx \\
 &= \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + 2x^3] dx = \frac{1}{30} \rightarrow (2)
 \end{aligned}$$

من (٢)(١) يتضح أن: L.H.S=R.H.S.
 أي أننا بذلك نكون قد حققنا نظرية جرين للتكامل المذكور.

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

أمثلة عامة على نظريات التكامل الاتجاهية

مثال (1): باستخدام نظرية التباعد لجاوس ، أثبت متطابقتي جرين الأولى والثانية وهما:

$$(i) \iiint_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV = \iint_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S}$$

$$(ii) \iiint_V [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] dV = \iint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\vec{S}$$

الحل :

لإثبات متطابقة جرين الأولى:

من نظرية التباعد لجاوس:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

بوضع $\vec{F} = \phi \nabla \psi$

$$\therefore \iint_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) dV \quad \rightarrow (1)$$

ولحساب $\nabla \cdot (\phi \nabla \psi)$ نستخدم العلاقة الاتجاهية:

$$\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = \phi (\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\nabla \phi)$$

وبأخذ $\vec{A} = \nabla \psi$

$$\begin{aligned} \therefore \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) &= \phi (\nabla \cdot \nabla \psi) + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \phi) \\ &= \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \phi) \end{aligned}$$

بالتعويض في (1):

$$\therefore \iint_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S} = \iiint_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV$$

وهي متطابقة جرين الأولى.

اثبات متطابقة جرين الثانية:

من المتطابقة الأولى:

$$\begin{aligned} \iiint_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV \\ = \iint_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad \rightarrow (2)$$

وبتبادل ϕ مكان ψ نحصل على:

$$\begin{aligned} \iiint_V [\psi \nabla^2 \phi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \phi)] dV \\ = \iint_S (\psi \nabla \phi) \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad \rightarrow (3)$$

من (٢) و (٣): بالطرح:

$$\begin{aligned} \therefore \iiint_V [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] dV \\ = \iint_S [\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi] \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

وهي متطابقة جرين الثانية.

مثال (٢): باستخدام نظرية التباعد لجاوس، احسب التكامل السطحي

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{F} = 4xz \hat{i} - y^2 \hat{j} + yz \hat{k} \quad \text{حيث:}$$

S هو سطح المكعب المحدود بالمستويات:

$$x = 0, \quad x = 1$$

$$y = 0, \quad y = 1$$

$$z = 0, \quad z = 1$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

الحل:

سبق حل هذا المثال كتكامل سطحي عادي والآن نطبق نظرية التباعد لجاوس
لحل هذا المثال كالآتي:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV \quad \rightarrow (1)$$

لحساب الطرف الأيمن:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= 4xz \hat{i} - y^2 \hat{j} + yz \hat{k} \\ \nabla \cdot \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(4xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) \\ &= 4z - 2y + y = 4z - y \quad \rightarrow (2)\end{aligned}$$

وباعتبار الحجم: $dV = dx dy dz$ حيث:

$$\begin{aligned}x : 0 &\rightarrow 1 \\ y : 0 &\rightarrow 1 \\ z : 0 &\rightarrow 1\end{aligned}$$

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على:

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (4z - y) dx dy dz \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 [2z^2 - yz]_0^1 dx dy \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 [2 - y] dx dy = \int_{x=0}^1 [2y - \frac{1}{2}y^2]_0^1 dx \\ &= \int_0^1 [\frac{3}{2}] dx = \frac{3}{2}[x]_0^1 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

حساب التكامل للدوال الإتجاهية

مثال (٣): باستخدام نظرية الالتفاف لستوكس احسب التكامل $\iint_S (\nabla \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{S}$

للدالة الإتجاهية :

$$\vec{F} = (y - z + 2)\hat{i} + (yz + 4)\hat{j} - xz\hat{k}$$

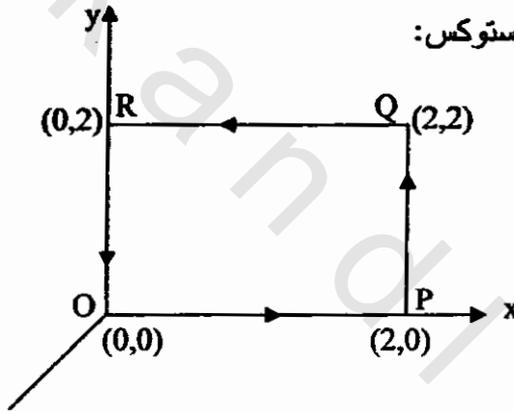
حيث S هو سطح المكعب

$$x = y = z = 0 \quad , \quad x = y = z = 2$$

فوق المستوى xy .

الحل :

من نظرية الالتفاف لستوكس:



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow (1)$$

حيث C (في المسألة) هي حدود السطح S ويمثل بالمربع المحدود بالمستقيمات:

$$x = 0 \quad , \quad x = 2$$

$$y = 0 \quad , \quad y = 2$$

في المستوى xy حيث $(z=0)$

$$\therefore \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{OP} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{PQ} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{QR} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{RO} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

ولحساب تلك التكاملات الأربعة:

(١) على الخط OP:

$$y = 0 \quad , \quad x : 0 \rightarrow 2$$

$$dy = 0 \quad , \quad dz = 0 \quad [y=0, z=0]$$

$$\vec{F} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\int_{OP} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (2\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (dx \hat{i}) = 2 \int_0^2 dx = 4$$

(٢) على الخط PQ:

$$x = 2 \quad , \quad y : 0 \rightarrow 2$$

$$dx = 0 \quad , \quad dz = 0$$

$$\vec{F} = (y + 2)\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$[x = 2, z = 0]$$

$$\therefore \int_{PQ} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int [(y + 2)\hat{i} + 4\hat{j}] \cdot (dy \hat{j}) = 4 \int_0^2 dy = 8$$

(٣) على الخط QR:

$$y = 2 \quad , \quad x : 2 \rightarrow 0$$

$$dy = 0 \quad , \quad dz = 0$$

$$\vec{F} = 4\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$[y = 2, z = 0]$$

$$\therefore \int_{QR} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (4\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (dx \hat{i}) = 4 \int_2^0 dx = -8$$

(٤) على الخط RO:

$$x=0 \quad , \quad y:2 \rightarrow 0$$

$$dx=0 \quad , \quad dz=0$$

$$\vec{F} = (y+2)\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$[x=0, z=0]$$

$$\therefore \int_{RO} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int [(y+2)\hat{i} + 4\hat{j}] \cdot (dy\hat{j}) = 4 \int_2^0 dy = -8$$

ويصبح التكامل الخطي على المنحنى C هو:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4 + 8 - 8 - 8 = -4$$

$$\therefore \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{S} = -4$$

وهو المطلوب.

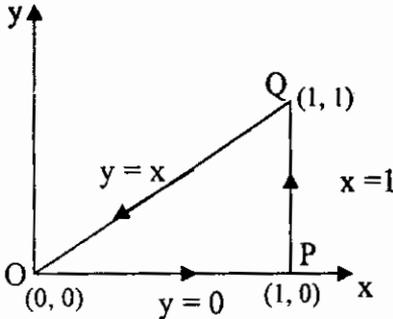
مثال (٤): احسب التكامل الخطي:

$$\oint_C [(xy - x^2)dx + x^2ydy]$$

حيث C هو المنحنى المحدود بالمستقيمات $y=0$, $x=1$, $y=x$

[أو هو المثلث الذي رؤوسه هي $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ ، ومن ثم تحقق نظرية

جرين في المستوى.



الحل:

$$\oint_C (F) : \text{التكامل الخطي على } C$$

يتكون من ٣ تكاملات هي :

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

(١) تكامل على OP:

$$y = 0, \quad x: 0 \rightarrow 1$$

$$dy = 0, \quad (F) = (-x^2) dx$$

$$I_1 = \int_0^1 (-x^2) dx = -\frac{1}{3}$$

(٢) تكامل على PQ:

$$x = 1, \quad y: 0 \rightarrow 1$$

$$dx = 0, \quad (F) = y dy$$

$$I_2 = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}$$

(٣) تكامل على QO:

$$y = x, \quad y = 1 \rightarrow 0$$

$$(F) = (y^2 - y^2) dy + y^3 dy = y^3 dy$$

$$\therefore I_3 = \int_1^0 y^3 dy = -\frac{1}{4}$$

ويصبح التكامل الخطي الكلي على C هو:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

وهو المطلوب الأول.

ولتحقيق نظرية جرين:

$$\oint_C (M dx + N dy) = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

$$M = xy - x^2, \quad N = x^2 y, \quad dS = dx dy$$

حيث:

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

الطرف الأيسر: تم حسابه في الجزء الأول من المسألة وقيمته $-\frac{1}{12}$

الطرف الأيمن:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} = x$$

$$\begin{aligned} R.H.S. &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x (2xy - x) dx dy \\ &= \int_0^1 (x^3 - x^2) dx = -\frac{1}{12} = L.H.S \end{aligned}$$

وبهذا نكون قد حققنا نظرية جرين في المستوى للتكامل المنكور.

مثال (٥):

حقق نظرية جرين في المستوى على التكامل الخطي:

$$\oint [(xy+y^2)dx + x^2 dy]$$

حيث C هو المنحنى المغلق للمنطقة المحصورة بين المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = x$ في الاتجاه الموجب للمنحنى C .

الحل:

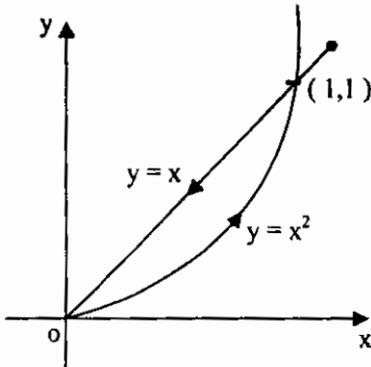
المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = x$ يتقاطعان عند النقطتين: $(0,0)$ ، $(1,1)$.

ولحساب التكامل الخطي:

يتكون هذا التكامل من تكاملين:

(i) تكامل على المنحنى $y = x^2$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (x \cdot x^2 + x^4) dx + \int_0^1 x^2 \cdot (2x) dx \\ &= \int_0^1 (3x^3 + x^4) dx = \frac{19}{20} \end{aligned}$$



حساب التكامل للدوال الاتجاهية

(ii) تكامل على المستقيم $y = x$ من $(0,0)$ إلى $(1,1)$:

$$I_2 = \int_1^0 (x^2 + x^2) dx + \int_1^0 x^2 dx = \int_0^1 3x^2 dx = -1$$

ويكون التكامل الخطي المطلوب :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{19}{20} - 1 = -\frac{1}{20} \quad \text{_____ (1)}$$

حساب التكامل السطحي :

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} (x^2) - \frac{\partial}{\partial y} (xy + y^2) \right] dx dy \\ &= \iint_S (x - 2y) dx dy = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x (x - 2y) dx dy \\ &= \int_0^1 (xy - y^2) \Big|_{x^2}^x dx = -\frac{1}{20} \quad \text{_____ (2)} \end{aligned}$$

من (٢) ، (١) نجد أن نظرية جرين في المستوى تكون متحققة على التكامل المنكور .

مثال (٦) : باستخدام نظرية التباعد لجاوس ، أثبت أن :

$$\iiint_V \bar{\nabla} \cdot \bar{A} dV = \iint_S (\hat{n} \cdot \bar{A}) dS$$

حيث \bar{A} دالة إتجاهية ، \hat{n} متجه الوحدة العمودي على السطح S .

الحل :

من نظرية جاوس :

$$\iiint_V \bar{\nabla} \cdot \bar{F} dV = \iint_S \bar{F} \cdot \hat{n} dS$$

وبوضع $\vec{F} = \vec{A} \wedge \vec{a}$ حيث \vec{a} متجه ثابت إختياري .

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{a}) dV = \iint_S (\vec{A} \wedge \vec{a}) \cdot \hat{n} dS \quad (1)$$

ولكن :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

$$\therefore (\vec{A} \wedge \vec{a}) \cdot \hat{n} = \vec{A} \cdot (\vec{a} \wedge \hat{n}) = (\vec{a} \wedge \hat{n}) \cdot \vec{A} = \vec{a} \cdot (\hat{n} \wedge \vec{A})$$

وتصبح (1) بالصورة :

$$\iiint_V \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) dV = \iint_S \vec{a} \cdot (\hat{n} \wedge \vec{A}) dS$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \iiint_V (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) dV = \vec{a} \cdot \iint_S (\hat{n} \wedge \vec{A}) dS \quad (2)$$

وحيث أن \vec{a} متجه ثابت إختياري ، فمن (2) نجد أن :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \wedge \vec{A} dV = \iint_S (\hat{n} \wedge \vec{A}) dS$$

وهو المطلوب .

ملاحظة : بملاحظة نظرية جاوس وصورتها :

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_S (\hat{n} \cdot \vec{F}) dS$$

ومن المثال (6) حصلنا على العلاقة المناظرة مع استخدام علامة الضرب الإتجاهي (8) بدلاً من علامة الضرب القياسي (•) وصورتها :

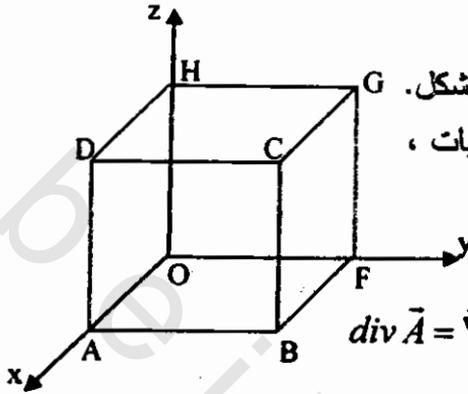
$$\iiint_V (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) dV = \iint_S (\hat{n} \wedge \vec{F}) dS$$

مثال (7) :

حقق نظرية جاوس للمتجه : $\vec{A} = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k}$ مأخوذاً على المكعب

$$. 0 \leq x, y, z \leq 1$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية



الحل :

نعتبر المكعب (ABCDOFGH) المبين بالشكل .
 نأخذ الأحرف Ox, Oy, Oz كمحاور للاحداثيات ،
 حيث O نقطة الأصل

$$\vec{A} = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k}$$

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)$$

$$= 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$$

وتغير قيم x, y, z من 0 ← 1 وبذلك نحصل على التكامل الحجمي :

$$\iiint_V \text{div } \vec{A} dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2(x + y + z) dx dy dz$$

$$= 2 \int_0^1 \int_0^1 \left[xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 dx dy = 2 \int_0^1 \int_0^1 \left[x + y + \frac{1}{2} \right] dx dy$$

$$= 2 \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}y \right]_0^1 dx = 2 \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = 2 \int_0^1 (x + 1) dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = 3 \quad \text{--- (1)}$$

وبالنسبة للتكامل السطحي فإنه يتكون من 6 تكاملات على أسطح المكعب الست ،
 وقد سبق إيجاده في مثال سابق ، وقيمته هي :

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = 3 \quad \text{--- (2)}$$

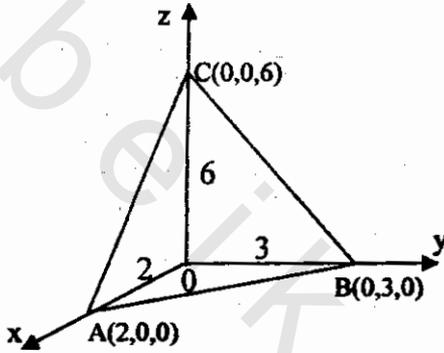
$$\iiint_V \text{div } \vec{A} \cdot dV = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad \text{ومن (1) ، (2) نجد أن :}$$

وهو المطلوب .

حساب التكامل للدوال الإتجاهية

مثال (٨) : حقق نظرية ستوكس للمتجه : $\vec{A} = (x+y, 2x-z, y+z)$

المأخوذ على المثلث ABC المقطوع من المستوى : $3x + 2y + z = 6$
بواسطة مستويات الإحداثيات .



الحل :

معادلة المستوى المعطى :

$$3x + 2y + z = 6$$

بالقسمة على 6 :

$$\therefore \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \quad \text{--- (1)}$$

من (1) نجد أن المستوى المعطى يتقاطع مع المحاور ونقط تقاطعه على التوالي

هي : 2,3,6 .

فالنقطة A : $x=2, y=z=0$

ونقطة B : $y=3, z=x=0$

ونقطة C : $z=6, x=y=0$

الصورة الإتجاهية للمتجه المعطى :

$$\vec{A} = (x+y)\hat{i} + (2x-z)\hat{j} + (y+z)\hat{k}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & 2x-z & y+z \end{vmatrix} = 2\hat{i} + \hat{k} \quad \text{--- (2)}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

ولتحقيق نظرية ستوكس :

$$\int_{ABC} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \hat{n} dS \quad \text{_____ (3)}$$

نوجد أولاً : التكامل الخطي $\int_{ABC} \vec{A} \cdot d\vec{l}$

$$\int_{ABC} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_C^A \vec{A} \cdot d\vec{l} = I_1 + I_2 + I_3 \quad \text{_____ (4)}$$

للضلع AB :

$$\vec{A} = (x + y)\hat{i} + 2x\hat{j} + y\hat{k} \leftarrow 3x + 2y = 6 \quad \text{وبذلك فإن } z = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore I_1 &= \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_A^B [(x + y)\hat{i} + 2x\hat{j} + y\hat{k}] \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) \\ &= \int_A^B [(x + y)dx + 2x dy] = \int_A^B \left[x + \frac{6 - 3x}{2} \right] dx + \int_A^B 2x \left(\frac{-3}{2} dx \right) \\ &= \int_2^0 \left(3 - \frac{7}{2}x \right) dx = \left[3x - \frac{7x^2}{4} \right]_2^0 = 1 \quad \text{_____ (5)} \end{aligned}$$

للضلع BC :

$$\vec{A} = y\hat{i} - z\hat{j} + (y + z)\hat{k} \leftarrow 2y + z = 6 \quad \text{وبذلك فإن } x = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore I_2 &= \int_B^C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_B^C [y\hat{i} - z\hat{j} + (y + z)\hat{k}] \cdot (dy\hat{i} + dz\hat{k}) \\ &= \int_B^C [-dy + (y + z)dz] = -\int_3^0 (6 - 2y)dy + \int_3^0 (6 - y)(-2dy) \end{aligned}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

$$= \int_0^3 [6 - 2y + 2(6 - y)] dy = \int_0^3 (18 - 4y) dy$$

$$= [18y - 2y^2]_0^3 = 36 \quad \text{_____ (6)}$$

للضلع CA :

$\vec{A} = x\hat{i} + (2x - z)\hat{j} + z\hat{k} \leftarrow 3x + z = 6$: وبذلك فإن $y = 0$

$$\therefore I_3 = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_C [x\hat{i} + (2x - z)\hat{j} + z\hat{k}] \cdot (dx\hat{i} + dz\hat{k})$$

$$= \int_C [x dx + z dz] = \int_0^2 x dx + \int_6^0 z dz$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[\frac{z^2}{2} \right]_6^0 = 2 - 18 = -16 \quad \text{_____ (7)}$$

بالتعويض في (٤) :

$$I = 1 + 36 - 16 = 21 \quad \text{_____ (8)}$$

ولإيجاد التكامل السطحي :

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \hat{n} dS = I_1 + I_2 + I_3 \quad \text{_____ (9)}$$

حيث :

$$I_1 = \iint_{OAB} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \hat{n} dS, I_2 = \iint_{BOC} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \hat{n} dS, I_3 = \iint_{CAO} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \hat{n} dS$$

وباستخدام (٢) $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 2\hat{i} + \hat{k} \leftarrow$

والآن : للوجه OAB :

$$dS = \frac{1}{2} dx dy, \quad \hat{n} = \hat{k}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

$$I_1 = \iint_{OAB} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \iint (2\hat{i} + \hat{k}) \cdot \hat{k} \left(\frac{1}{2} dx dy \right)$$

$$= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^3 \frac{1}{2} dx dy = \frac{1}{2} [x]_0^2 [y]_0^3 = 3$$

$$dS = \frac{1}{2} dy dz, \quad \hat{n} = \hat{i} \quad : \text{للوجه BOC}$$

$$I_2 = \iint_{BOC} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \iint (2\hat{i} + \hat{k}) \cdot \hat{i} \left(\frac{1}{2} dy dz \right)$$

$$= \int_{y=0}^3 \int_{z=0}^6 dy dz = [y]_0^3 [z]_0^6 = 18$$

$$dS = \frac{1}{2} dz dx, \quad \hat{n} = \hat{j} \quad : \text{للوجه CAO}$$

$$I_3 = \iint_{CAO} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \iint (2\hat{i} + \hat{k}) \cdot \hat{j} \left(\frac{1}{2} dz dx \right) = 0$$

وبالتعويض في (٩)

$$\therefore \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot \hat{n} dS = 3 + 18 + 0 = 21 \quad \text{_____ (10)}$$

$$\int_C \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad \text{من (٨) ، (١٠) نجد أن :}$$

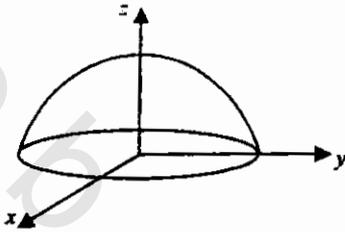
وهي نظرية ستوكس ، وهو المطلوب .

$$\text{مثال (٩):} \text{ تحقق نظرية ستوكس } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \hat{n} dS \text{ للمتجه}$$

حيث $\vec{F} = (2x - y)\hat{j} - yz^2\hat{j} - y^2z\hat{k}$ هو النصف العلوي لسطح الكرة (فوق المستوى xy) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، C هو المنحنى الذي يحدها.

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

الحل: نظرية ستوكس: $\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \hat{n} dS$



(1) التكامل الخطي: في المستوى $z=0$ فإن الحد

c للمسطح S هو الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ (مسطح

النصف العلوي للكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ على

المستوى xy هو الدائرة $x^2 + y^2 = 1$)

فبوضوح: $0 \leq \theta \leq 2\pi$ وذلك من المعادلات البارامترية للمنحنى c (الدائرة

حيث $dx = -\sin\theta d\theta$, $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = 0$)

فيكون التكامل الخطي:

$$\therefore \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C [(2x-y)\hat{i}] \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}] = \int_C (2x-y) dx$$

$$= \int_0^{2\pi} [2\cos\theta - \sin\theta](-\sin\theta d\theta) = \int_0^{2\pi} [-2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} [-2\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)] d\theta = [\cos^2\theta + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta]_0^{2\pi} = \pi(1)$$

(2) التكامل السطحي:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -4z^2 & -y^2z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(-yz^2) \right] + \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial z}(2x-y) - \frac{\partial}{\partial x}(-y^2z) \right]$$

$$+ \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-yz^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2x-y) \right] = (0)\hat{i} + (0)\hat{j} + \hat{k} = \hat{k}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

$$\iint_S (\nabla \wedge \vec{F}) \cdot \hat{n} ds = \iint_S \hat{k} \cdot \hat{n} ds = \iint_S ds = \iint_R dx dy \quad \text{ويصبح التكامل السطحي:}$$

$$\hat{k} \cdot \hat{n} = 1, ds = dx dy \quad \text{وذلك لأن:}$$

R هي مسقط السطح S على المستوى (xy) وهي عبارة عن مساحة دائرة نصف قطرها 1 ومركزها نقطة الأصل، حيث:

$$x \text{ تتغير من } x = -1 \text{ إلى } x = +1,$$

$$y \text{ تتغير من } y = -\sqrt{1-x^2} \text{ إلى } y = +\sqrt{1-x^2}$$

وبالتحول إلى الإحداثيات القطبية فإن:

$$\therefore \iint_R dx dy = \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r dr d\theta = 2\pi \left(\frac{r^2}{2}\right) \Big|_0^1 = \pi \quad \text{---(2)}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n} ds \quad \text{من (1), (2) يتضح أن:}$$

وهو ما يحقق نظرية ستوكس. وهو المطلوب.

مثال (١٠): حقق نظرية التباعد لجاوس للمتجه $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ المأخوذ على سطح الإسطوانة المحدودة بالمستويات

$$x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 3$$

$$\text{الحل: نظرية التباعد لجاوس} \quad \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

أولاً: التكامل الحجمي:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right] dV \\ &= \iiint_V [4 - 4y + 2z] dV = \iiint_V [4 - 4y + 2z] dx dy dz \end{aligned}$$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

ولكن x تتغير من $x = -2$ إلى $x = 2$ (بوضع $y = 0$ في $x^2 + y^2 = 4$)

y تتغير من $y = -\sqrt{4-x^2}$ إلى $y = \sqrt{4-x^2}$

z تتغير من $z = 0$ إلى $z = 3$

فيكون التكامل الحجمي:

$$\begin{aligned} \therefore I_1 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^3 (4-4y+2z) dx dy dz \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4z-4yz+z^2) \Big|_{z=0}^{z=3} dx dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (21-12y) dx dy \end{aligned}$$

التكامل على $dx dy$ (بعد إجراء التكامل على z) يكون على دائرة (قاعدة الاسطوانة) نصف قطرها 2 ومركزها نقطة الأصل.

وباستخدام الإحداثيات القطبية حيث:

$$dx dy = r dr d\theta, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore I_1 &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (21-12r \sin \theta) (r dr d\theta) \\ &= \int_0^2 (21r\theta + 12r^2 \cos \theta) \Big|_{\theta=0}^{2\pi} dr \\ &= \int_0^2 (42\pi r) dr = 21\pi r^2 \Big|_0^2 = 84\pi \end{aligned} \quad (1)$$

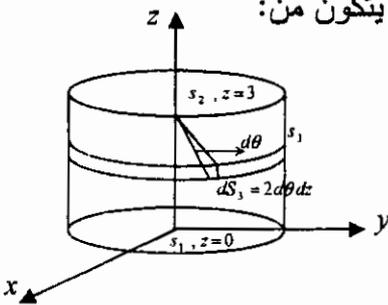
ثانياً: التكامل السطحي: السطح S للاسطوانة يتكون من:

القاعدة S_1 (حيث $z = 0$)

القمة S_2 (حيث $z = 3$)

الجزء المنحني (السطح الجانبي) S_3

(حيث $x^2 + y^2 = 4$)



حساب التكامل للدوال الاتجاهية

$$I_2 = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} dS_1 + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n} dS_2 + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n} dS_3$$

على القاعدة S_1 : حيث $z=0$ ، فإن:

$$\hat{n} = -\hat{k}, \quad \vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j}, \quad \vec{F} \cdot \hat{n} = 0$$

$$\therefore \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} dS_1 = 0$$

على القمة S_2 : حيث

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = 9, \quad \hat{n} = \hat{k}, \quad \vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + 9\hat{k}, \quad z=3$$

$$\therefore \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n} dS_2 = 9 \iint_{S_2} dS_2 = 9(4\pi) = 36\pi$$

وذلك لأن المساحة: $S_2 = 4\pi$

ولإيجاد التكامل على S_3 (السطح الجانبي للأسطوانة):

معادلة السطح: $x^2 + y^2 = 4$ ومنتجه للوحدة العمودي على هذا السطح هو:

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla} \phi}{|\vec{\nabla} \phi|} = \frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{2}$$

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = (4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}) \cdot \left(\frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{2}\right) = 2x^2 - y^3$$

ويصبح التكامل على هذا السطح:

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_3} (2x^2 - y^3) dS_3$$

المعادلات البارامترية للسطح الجانبي هي:

$$x = 2\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta$$

وعنصر السطح في الإحداثيات الاسطوانية هو:

$$dS_3 = r d\theta dz = 2 d\theta dz$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n} dS_3 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^3 [2(2\cos\theta)^2 - (2\sin\theta)^3] \cdot (2 dz d\theta) \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^3 [16\cos^2\theta - 16\sin^3\theta] dz d\theta \\
 &= 3 \int_{\theta=0}^{2\pi} [16\cos^2\theta - 16\sin^3\theta] d\theta \\
 &= 48 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta - 48 \int_0^{2\pi} \sin^3\theta d\theta \\
 &= 48 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = 48(\pi) = 48\pi \\
 &\quad \left(\int_0^{2\pi} \sin^3\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi \text{ حيث} \right)
 \end{aligned}$$

$$\therefore I_2 = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = 0 + 36\pi + 48\pi = 84\pi \quad \text{---(2)}$$

ومن (1), (2) نجد أن

$$\iiint_V (\text{div } \vec{F}) dV = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

وهو ما يحقق نظرية التباعد لجاوس. وهو المطلوب

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

مسائل على الباب الثالث

أولاً: تكامل الدوال القياسية والاتجاهية:

١. أوجد قيمة التكامل القياسي $\int_C y ds$ على طول المنحنى C المعطى

بالمعادلة الكرتيزية $y = 2\sqrt{x}$ من $x = 3$ إلى $x = 12$.

٢. احسب التكامل الخطي القياسي $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ للمجال الاتجاهي

$\vec{F} = y\hat{i} + x\hat{j}$ على المنحنى الذي معادلته $y = x^2$ من $(0, 0)$ إلى $(1, 1)$

٣. احسب التكامل الخطي $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ للمجال الاتجاهي

$\vec{F} = x^2 y\hat{i} + (x^2 + y)\hat{j}$ من نقطة الأصل إلى النقطة $(2, 4)$ على طول منحنى القطع المكافئ $y = x^2$.

٤. احسب التكامل الخطي للمجال الاتجاهي $\vec{F} = x^2\hat{i} + y\hat{j}$ على طول المنحنى الذي هو عبارة عن النصف الطوي لدائرة نصف قطرها ٢ ومركزها عند نقطة الأصل.

٥. احسب التكامل الخطي للمجال الاتجاهي:

$$\vec{F} = \alpha[-3a \sin^2 \theta \cos \theta \hat{i} + a(2 \sin \theta - 3 \sin^3 \theta)\hat{j} + b \sin 2\theta \hat{k}]$$

على المنحنى C الذي معادلاته البارامترية هي:

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = b\theta$$

حيث θ تتغير من $\frac{\pi}{4}$ إلى $\frac{\pi}{2}$ و α, a, b ثوابت

حساب التكامل للدوال الإتجاهية

٦. احسب التكامل الحجمي الإتجاهي $\iiint_V \vec{F} dV$ للدالة الإتجاهية

حيث $\vec{F} = 2xz\hat{i} - x\hat{j} + y^2\hat{k}$ V هو حجم المنطقة المحدودة بالاسطوانة المكافئية (Parabolic cylinder) $z=4-x^2$ والمستويات $z=0$, $x=0$, $y=0$, $y=6$

ثانيا: نظريات التكامل الإتجاهية:

٧. (أ) إذا كان S سطح مغلق يحتوي على الحجم V وكانت:

$$\vec{F} = \alpha x\hat{i} + \beta y\hat{j} + \gamma z\hat{k}$$

فاستخدم نظرية جاوس لإثبات أن:

$$\iiint_V \vec{F} \cdot d\vec{S} = (\alpha + \beta + \gamma)V$$

(ب) باستخدام نظرية جاوس، اثبت أن:

$$\iint_S (\phi A) \cdot d\vec{S} = \iiint_V [\phi(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \phi)] dV$$

٨. (أ) باستخدام نظرية ستوكس، اثبت أن:

$$(i) \int \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$(ii) \int \vec{r} \wedge d\vec{r} = 2 \iint d\vec{S}$$

(ب) باستخدام نظرية ستوكس ، اثبت أن:

$$\oint_C \vec{A} \wedge d\vec{r} = - \iint_S (d\vec{S} \wedge \vec{\nabla}) \wedge \vec{A}$$

٩. (أ) باستخدام نظرية جرين في المستوى ، أحسب التكامل :

$$\int_C [(x^2 - y) dx + x dy]$$

حيث المنحنى C يمثل بالدائرة : $x^2 + y^2 = 4$

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

(ب) باستخدام نظرية جرين في المستوى ، أحسب التكامل:-

$$\int_C [(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx + (x + y)^{\frac{3}{2}} dy]$$

حيث المنحنى C يمثل بالدائرة $x^2 + y^2 = 1$

١٠. باستخدام نظرية جرين في المستوى، أثبت أن قيمة التكامل:

$$I = \oint_C [(4 + e^{\cos x}) dx + (\sin y + 3x^2) dy]$$

هي $2(b^3 - a^3)$ ، حيث C هي حدود المنطقة المحصورة بين ربعي

دائرتين أنصاف أقطارها a, b والقطع المستقيمة على محوري x, y .

ملحوظة:

الطول الكاملة لهذه المسائل ملحقة بنهاية للقسم الأول [تحليل المنهجيات].