ملحق بالحلول الكاملة لمسائل القسم الأول

(تحليل المتجهات)

حلول مسائل الباب الأول

مسألة (١) :

$$\vec{a} = 2\,\hat{i} + 2\,\hat{j},\; b = 2\hat{i} + 2\sqrt{3}\,\hat{j}$$

مقدار $\vec{a}$: $|\vec{a}| = a = \sqrt{2^2 + 2^2} = 8 = 2\sqrt{2}$

اتجاه $\vec{a}$: $\tan\theta = \dfrac{a_y}{a_x} = \dfrac{2}{2} = 1 \rightarrow \theta = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$

مقدار $\vec{b}$: $|\vec{b}| = b = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

اتجاه $\vec{b}$: $\tan\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \rightarrow \theta = 60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$

مسألة (٢) :

$$\bar{a} = \hat{i} + 3\hat{j},\; b = -2\hat{i} + 4\hat{j},\; c = -\hat{i} - 5\hat{j}$$

$$(i)\;\vec{D} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\hat{i} + 3\hat{j}) + (-2\hat{i} + 4\hat{j}) + (-\hat{i} - 5\hat{j})$$

$$= -2\hat{i} + 2\hat{j} \quad \rightarrow \quad \vec{D} = (-2,2)$$

المقدار: $D = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

الاتجاه: $\tan\theta = \dfrac{2}{-2} = -1$

$$(ii)\;\vec{G} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c} = (2\hat{i} + 6\hat{j}) + (-6\hat{i} + 12\hat{j}) + (-2\hat{i} - 10\hat{j})$$

$$= -6\hat{i} + 8\hat{j} \rightarrow \vec{G} = (-6,8)$$

المقدار: $G = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

الاتجاه: $\tan\theta = \dfrac{8}{-6} = -\dfrac{4}{3}$

مسألة (٣) :

$\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k} \ , \ \vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

متجه الوحدة في اتجـــاه محـــور $\hat{j} = y$ ، وبفـــرض أن المتجـــه المطلـــوب إضافته $= \vec{c}$

المطلوب: إيجاد $\vec{c}$ بحيث أن محصلة المتجهات $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{j}$

$$\therefore \quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{j} \quad \rightarrow \quad (\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})+(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+\vec{c}=\hat{j}$$

$$\therefore 3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}+\vec{c}=\hat{j} \rightarrow \quad \vec{c}=\hat{j}-[3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}]=-3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$$

وهو المتجه الواجب إضافته إلى $\vec{a},\vec{b}$ بحيث تكون المحصلة $= \vec{j}$.

مسألة (٤) : لإثبات أن مجموعة المتجهات $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$ تكون مرتبطة خطيا يجب أن نثبت أولا أنه يوجد أعداد قياسية k_1,k_2,k_3 ليست كلها أصفار وتحقق العلاقة:

$$k_1\vec{r}_1 + k_2\vec{r}_2 + k_3\vec{r}_3 = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

بالتعويض عن $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$ في (١) نحصل على:

$$k_1(2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})+k_2(3\vec{a}-5\vec{b}+2\vec{c})$$
$$+k_3(4\vec{a}-5\vec{b}+\vec{c})=0$$

$$\therefore (2k_1+3k_2+4k_3)\vec{a}+(-3k_1-5k_2-5k_3)\vec{b}$$
$$+(k_1+2k_2+k_3)\vec{c}=0 \qquad \rightarrow (2)$$

وحيث أن المتجهات $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ متجهات غير متوازية (أي لا تقع فـــي مـــستوى واحد). أي أنها تحقق العلاقة: $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=0$ بشرط أن:

$x=0 \ , \ y=0 \ , \ z=0$

$$2k_1 + 3k_2 + 4k_3 = 0 \qquad \rightarrow (3)$$

$$-3k_1 - 5k_2 - 5k_3 = 0 \qquad \rightarrow (4)$$

$$k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \qquad \rightarrow (5)$$

مجموعة المعادلات (٥),(٤),(٣) تشكل نظام (أو مجموعة) متجانسة من المعادلات الخطية. وبحلها نوجد قيم k_1, k_2, k_3 فإذا كانت لا تساوي أصفار فالمجموعة المعطاة مرتبطة خطيا.

بضرب (٥) في ٢:

$$2k_1 + 4k_2 + 2k_3 = 0 \qquad \rightarrow (6)$$

من (٦) و(٣) بالطرح:

$$k_2 - 2k_3 = 0 \quad \therefore k_2 = 2k_3 \qquad \rightarrow (7)$$

وبالتعويض في(٥):

$$k_1 + 2(2k_3) + k_3 = 0 \rightarrow k_1 = -5k_3 \qquad \rightarrow (8)$$

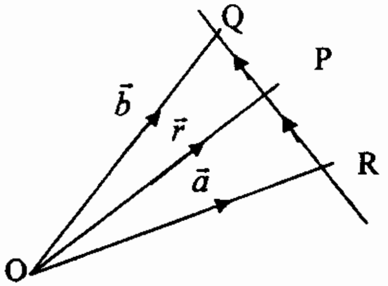
ومن المعادلتير (٨) و(٧) نجد أنه لدينا الحرية في تحديد قيمة مجهول واحد نختاره ونوجد من خلاله المجهولين الآخرين، فباختيار $k_3 = 1$ نجد أن: $k_2 = 2, k_1 = -5$ وبالتالي فان قيم k_1, k_2, k_3 هي قيم غير صفرية تحقق العلاقة(١) بمعنى أن:

$$-5\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2 + \vec{r}_3 = 0 \rightarrow \vec{r}_3 = 5\vec{r}_1 - 2\vec{r}_2$$

وهذا يوضح أن المتجهات $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ تكون مرتبطة خطيا.

وهو المطلوب.

<u>مسألة (٥):</u> بفرض أن المستقيم يمر بالنقطتين R,Q وبأخذ $\vec{a},\vec{b}$ متجهي موضعهما ونفرض P نقطة عامة على المستقيم ومتجه موضعها هو $\vec{r}$.



<u>من ΔORP</u>:

$$\vec{r} = \vec{a} + R\vec{P} \qquad \therefore R\vec{P} = \vec{r} - \vec{a} \qquad \rightarrow (1)$$

<u>من ΔORQ</u>:

$$\vec{b} = \vec{a} + R\vec{Q} \qquad \therefore R\vec{Q} = \vec{b} - \vec{a} \qquad \rightarrow (2)$$

وحيث أن RP هو جزء من RQ فان $R\vec{P} = \lambda R\vec{Q}$ حيث λ عدد قياسي.
وباستخدام (٢)، (١) نجد أن:

$$\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \qquad \therefore \vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

وهو المطلوب.

<u>مسألة (٦) :</u>

<u>المطلوب:</u> إثبات أنه إذا كانت المتجهات $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ غير متوازية فان العلاقة: $x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$ تستلزم أن يكون

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$$

فمن العلاقة المعطاة :

$$(x_1 - x_2)\vec{a} + (y_1 - y_2)\vec{b} + (z_1 - z_2)\vec{c} = 0$$

وبوضع :

$x_1 - x_2 = x, y_1 - y_2 = y, z_1 - z_2 = z$

$\therefore x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$

والآن: بفرض أن $x \neq 0$ (عكس المطلوب)

$x\vec{a} = -y\vec{b} - z\vec{c}$

$\therefore \vec{a} = (-\frac{y}{x})\vec{b} - (\frac{z}{x})\vec{c}$

وهذا يعني أن المتجه $\vec{a}$ يقع في المستوى الذي يحتوي $\vec{b},\vec{c}$ وهذا عكس المعطى بأن $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ لا تقع في نفس المستوى، وبالتالي فان عكس الذي فرضناه هو الصحيح أي أن :

$x_1 = x_2 \leftarrow x_1 - x_2 = 0 \leftarrow x = 0$

وبالمثل: إذا فرضنا أن $y \neq 0$ فإن :

$y\vec{b} = -x\vec{a} - z\vec{c}$

$\therefore \vec{b} = (\frac{-x}{y})\vec{a} - (z)\vec{c}$

وهذا يعني أن $\vec{b}$ يقع في مستوى $\vec{a},\vec{c}$ وهو عكس المعطى بأن $\vec{a}.\vec{b}.\vec{c}$ لا تقع في مستوى واحد (غير متوازية) وبالتالي فان عكس الذي فرضناه هو الصحيح أي أن:

$y_1 = y_2 \leftarrow y_1 - y_2 = 0 \leftarrow y = 0$

وبالمثل يمكن البرهنة على أن.

$z_1 = z_2 \leftarrow z_1 - z_2 = 0 \leftarrow z = 0$

وهو المطلوب.

مسألة (٧) :

(أ) حيث أن: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \rightarrow (1)$

بالضرب قياسيا في $\hat{i}$: $\vec{A}\cdot\hat{i} = A_x(\hat{i}.\hat{i}) = A_x$

بالضرب قياسيا في $\hat{j}$: $\vec{A}\cdot\hat{j} = A_y(\hat{j}.\hat{j}) = A_y$

بالضرب قياسيا في $\hat{k}$: $\vec{A}\cdot\hat{k} = A_z(\hat{k}.\hat{k}) = A_z$

حيث :

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0 \quad , \hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$

$$\therefore A_x = \vec{A}.\hat{i}, A_y = \vec{A}.\hat{j}, A_z = \vec{A}.\hat{k}$$

أي أن مركبة متجه في اتجاه ما تساوي حاصل الضرب القياسي للمتجه في متجه الوحدة في هذا الاتجاه. وتصبح العلاقة (١) بالصورة:

$$\vec{A} = (\vec{A}.\hat{i})\hat{i} + (\vec{A}.\hat{j})\hat{j} + (\vec{A}.\hat{k})\hat{k}$$

وهو المطلوب .

(ب) : $\vec{a} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$

شرط التعامد: $\vec{a}.\vec{b} = 0$

$$\therefore (4)(2) + (-2)(\lambda) + (-2)(1) = 0$$

$$8 - 2\lambda - 2 = 0$$

$$\therefore 6 = 2\lambda$$

$$\therefore \lambda = \frac{6}{2} = 3$$

وهو المطلوب.

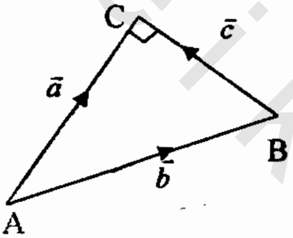
<u>مسألة (٨) :</u>

$$\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}, \vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$$

بالنظر إلى المتجهات الثلاثة $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ نجد أن:- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

أي أن المتجهات الثلاثة تشكل أضلاع مثلث (مثلث المتجهات).

ولإثبات أن هذا المثلث قائم الزاوية نوجد حواصل الضرب القياسية الممكنة للمتجهات $\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}$



$$\therefore\ \vec{a}.\vec{b} = 3 + 6 + 5 = 14$$

$$\vec{a}.\vec{c} = 6 - 2 - 4 = 6 - 6 = 0$$

$$\vec{b}.\vec{c} = 2 - 3 - 20 = -21$$

وهذا يعني أن $\vec{a}, \vec{c}$ متعامدان $(\vec{a}.\vec{c} = 0)$ أي أن المثلث ABC يكون قائم الزاوية عند c .

وهو المطلوب.

<u>مسألة (٩) :</u> من التعريف: مسقط $\vec{A}$ على $\vec{B}$ هو:

$$w = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|} = \vec{A}.\hat{b}$$

$$\hat{b} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$w = (3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}).\frac{1}{\sqrt{14}}(\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}(3 + 6 + 6) = \frac{15}{\sqrt{14}}$$

مسقط $\vec{B}$ على $\vec{A}$ هو $\leftarrow$ $w = \dfrac{\vec{B}.\vec{A}}{|\vec{A}|} = \vec{B}.\hat{a}$

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{9+4+9}} = \frac{1}{\sqrt{22}}(3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\therefore w = (\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{22}}(3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{22}}(3+6+6) = \frac{15}{\sqrt{22}}$$

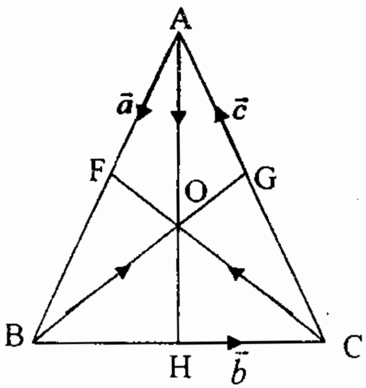
ولإيجاد الزاوية بين $\vec{A}, \vec{B}$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \hat{a}.\hat{b} = \left(\frac{3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{22}}\right) \cdot \left(\frac{\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{14}}\right)$$

$$= \frac{3+6+6}{\sqrt{22}.\sqrt{14}} = \frac{15}{\sqrt{308}}$$

مسألة (١٠) : المستقيمات المتوسطة أو متوسطات المثلث هي المستقيمات الواصلة بين منتصفات الأضلاع والرؤوس المقابلة،

وهي تتلاقى في نقطة واحدة تسمى المركز المتوسط للمثلث.



المطلوب: إثبات أن محصلة المتوسطات $\overline{AH}, \overline{BG}, \overline{CF}$ تساوي صفرا

أي:

$$\overline{AH} + \overline{BG} + \overline{CF} = 0$$

الإثبات: نأخذ ΔABC فيه $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{b}$, $\overline{CA} = \vec{c}$

فمن الشكل ومن خواص المتجهات:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0 \rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \qquad \rightarrow (1)$$

ومن تعريف المتوسطات:

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{BH}=\frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\therefore \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b} \qquad \rightarrow (2)$$

$$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c} \qquad \rightarrow (3)$$

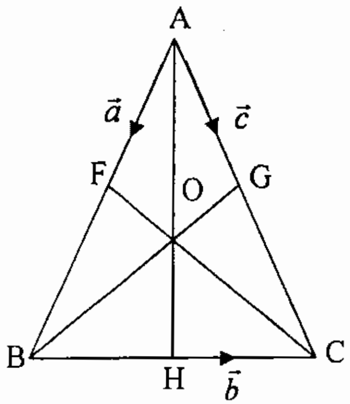
$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a} \qquad \rightarrow (4)$$

بالجمع واستخدام (١):

$$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$

وهو المطلوب.

<u>مسألة (١١) :</u> في $\Delta \ ABC$ المستقيمات المتوسطة AH, BG, GF تتلاقى في نقطة واحدة O



<u>المطلوب:</u> إثبات أن O تقسم هذه المستقيمات بنسبة 1:2 من جهة القاعدة

<u>الإثبات:</u> من خواص المتجهات:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$$

$$\therefore \vec{a}=-\vec{b}-\vec{c} \qquad \rightarrow (1)$$

نعتبر المستقيمين المتوسطين BG, CF المتلاقيين فيO

$$\overline{BG} = \overline{BC} + \overline{CG} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \qquad \rightarrow (2)$$

$$\overline{CF} = \overline{CA} + \overline{AF} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} \qquad \rightarrow (3)$$

وحيث أنO هي نقطة تلاقي هذين المستقيمين فان:

$$\overline{BO} = \lambda(\overline{BG}), \overline{CO} = \mu(\overline{CF})$$

$$\overline{BO} = \lambda(\vec{b} + \frac{1}{2}c) \qquad \rightarrow (4)$$

$$\overline{CO} = \mu(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}) \qquad \rightarrow (5)$$

حيث λ, μ أعداد قياسية.

بالتعويض عن $\vec{a}$ من (١) في (ح):

$$\overline{CO} = \mu(\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}) = \mu(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}) \qquad \rightarrow (6)$$

ومن ΔBOC :

$$\overline{BO} = \overline{BC} + \overline{CO}$$

$$\therefore \lambda(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}) = \vec{b} + \mu(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b})$$

$$\therefore (\lambda - 1 + \frac{1}{2}\mu)\vec{b} = (\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\lambda)\vec{c}$$

وحيث أن $\vec{b}, \vec{c}$ متجهان غير متوازيان:

$$\therefore \lambda - 1 + \frac{1}{2}\mu = 0 \qquad \rightarrow (7)$$

$$\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\lambda = 0 \qquad \rightarrow (8)$$

بحل (٨) و(٧) نجد أن: $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

$$\therefore \overrightarrow{BO} = \lambda(\overrightarrow{BG}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BG} \rightarrow \overrightarrow{GO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GB}$$

$$\overrightarrow{CO} = \mu(\overrightarrow{CF}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{CF} \rightarrow FO = \frac{1}{3}\overrightarrow{FC}$$

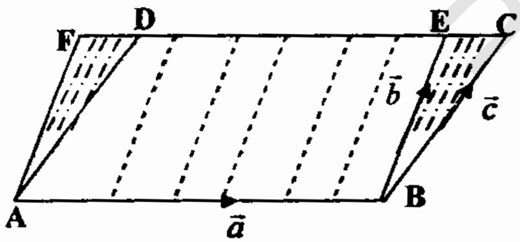
أي أن نقطة تقاطع المستقيمين BG, CF وهي O تقسمهما بنسبة ١:٢ من جهة القاعدة، أي تقع على مسافة $\frac{1}{3}$ من جهة القاعدة($\frac{2}{3}$ من جهة الرأس)

وهو المطلوب.

مسألة (١٢) : $ABCD, ABEF$ متوازيا أضلاع مرسومان على نفس القاعدة AB وبين الخطيين المتوازيين AB, FC

والمطلوب: إثبات أن

مساحة $ABEF$ = مساحة $ABCD$



الإثبات:

نفرض أن:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BE} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{c} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} = \vec{b} + \lambda\vec{a} \qquad \rightarrow (1)$$

حيث: $\overrightarrow{FD} = \lambda\overrightarrow{FE} = \lambda\vec{a}$

بضرب طرفي (١) في $\vec{a}$ إتجاهياً :

$$\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge (\vec{b} + \lambda\vec{a})$$

$$= \vec{a} \wedge \vec{b} + \lambda(\vec{a} \wedge \vec{a}) = \vec{a} \wedge \vec{b} \qquad \rightarrow (2)$$

وبأخذ مقياس الطرفيين (اي القيمه العددية) نحصل على: $|\vec{a} \wedge \vec{c}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}|$

ولكن $|\vec{a} \wedge \vec{b}|, |\vec{a} \wedge \vec{c}|$ يمثلان مساحتي متوازي الأضلاع $ABEF$, $ABCD$ المرسومان على نفس القاعدة وبين نفس الخصيين المتوازيين ، هذا يعني أن مساحة $ABEF$ = مساحة $ABCD$.

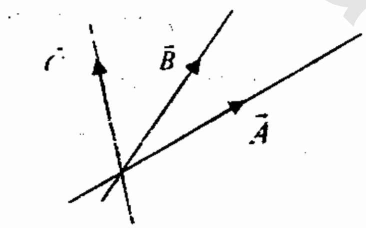
وهو المطلوب.

مسألة (١٣) :

(أ) لإثبات أن $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ يكون عموديا على كل من $\vec{A}, \vec{B}$

نطبق شرط التعامد أي نثبت أن:

$\vec{C}.\vec{A} = 0, \vec{C}.\vec{B} = 0$ حيث:



$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y)$$

$$+ \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

$$= \hat{i} c_x + \hat{j} c_y + \hat{k} c_z$$

أيضا:

$$\vec{A} = \hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z \qquad \vec{B} = \hat{i} B_x + \hat{j} B_y + \hat{k} B_z$$

$$\therefore \vec{C}.\vec{A} = C_x A_x + C_y A_y + C_z A_z$$
$$= (A_y B_z - A_z B_y)A_x + (A_z B_x - A_x B_z)A_y + (A_x B_y - A_y B_x)A_z$$
$$= A_y B_z A_x - A_z B_y A_x + A_z B_x A_y - A_x B_z A_y + A_x B_y A_z - A_y B_x A_z = 0$$

وبالمثل يمكن إثبات أن: $\vec{C} \cdot \vec{B} = 0$

أي أن المتجه $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ يكون عموديا على كل من $\vec{A}, \vec{B}$ أو على المستوى الذي يحتويهما.

وهو المطلوب .

(ب): المتجهان هما: $\vec{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\vec{k}\ ,\ \vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

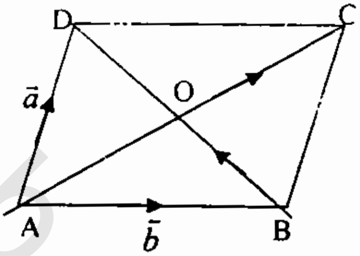
وحيث أن المتجه $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ عمودي على المستوى الذي يحتوي على $\vec{A}, \vec{B}$ فيكون المطلوب هو متجه الوحدة في اتجاه هذا المتجه أي $\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(15)^2 + (10)^2 + (30)^2} = 35$$

$$\therefore \hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}}{35}$$

$$\therefore \hat{c} = \frac{1}{7}(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$$



مسألة (١٤) :

نفرض أن O هي نقطة تقاطع

القطرين AC, BD في المعين $ABCD$

من الشكل:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \rightarrow (1)$$

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} \qquad \rightarrow \overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = \vec{a} - \vec{b} \qquad \rightarrow (2)$$

بضرب (٢) و(١) قياسيا نحصل على:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \qquad \vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 \qquad \vec{b}.\vec{b} = b^2$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{BD} = (\vec{b} + \vec{a})\cdot(\vec{a} - \vec{b})$$

$$= \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} = a^2 - b^2$$

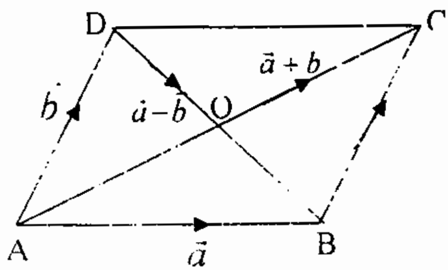
ولكن من خواص المعين فان:

$$a = b$$

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 0$$

أي أن القطريين AC, BD متعامدين

وهو المطلوب



مسألة (١٥) : نفرض أن:

$$\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{a}$$

$$\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{b}$$

فمن الشكل:

$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b} \ , \ \vec{DB} = \vec{a} - \vec{b}$$

مساحة المربع المنشأ على القطر AC:

$$S_1 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |A\vec{C}|^2$$

مساحة المربع المنشأ على القطرDB:

$$S_2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |D\vec{B}|^2$$

مجموع المساحتين:

$$S = S_1 + S_2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2$$
$$= a^2 + b^2 + 2(\vec{a}.\vec{b}) + a^2 + b^2 - 2(\vec{a}.\vec{b})$$
$$= 2a^2 + 2b^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 = 2|A\vec{B}|^2 + 2|A\vec{D}|^2$$

أي أن مجموع مساحتي المربعين المنشأين على القطرين يساوي مجموع مساحات المربعات المنشأة على الأضلاع، وهو المطلوب.

مسألة(١٦) :

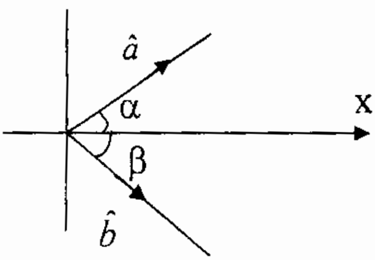
(i) لإثبات العلاقة: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

نأخذ متجهي وحدة $\hat{a}, \hat{b}$ يصنعان زاويتين α, β

مع محور x على الترتيب، فتكون الزاوية بينهما $(\alpha + \beta)$

$$\hat{a} = \cos\ \alpha\hat{i} + \sin\ \alpha\hat{j}$$

$$\hat{b} = \cos\ \beta\hat{i} - \sin\ \beta\hat{j}$$



بالضرب قياسيا:

$$\therefore \hat{a}.\hat{b} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \rightarrow (1)$$

أيضا: من تعريف حاصل الضرب القياسي:

$$\hat{a}.\hat{b} = 1.1.\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta) \rightarrow (2)$$

بمساواة (٢)، (١):

$$\therefore \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \rightarrow (1)$$

وهو المطلوب.

(ii) لإثبات العلاقة:

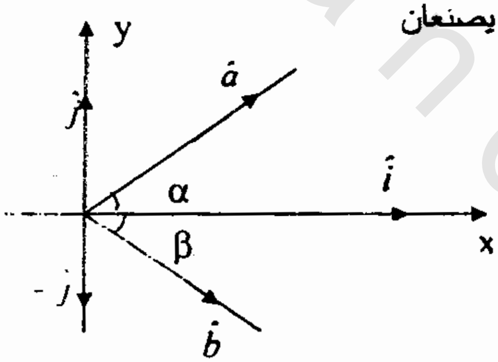
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

نعتبر متجهي الوحدة $\hat{a}.\hat{b}$ اللذان يصنعان

زاويتين α,β مع محور x

$$\hat{a} = \cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}$$

$$\hat{b} = \cos\beta\hat{i} - \sin\beta\hat{j}$$



بضرب $\hat{a},\hat{b}$ اتجاهيا:

$$\hat{a}\wedge\hat{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{k}(-\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta) \rightarrow (1)$$

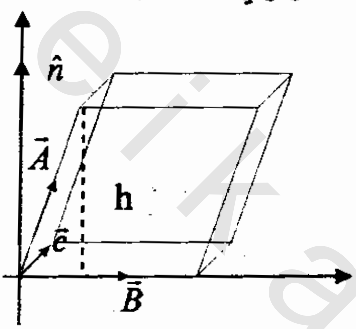
ومن تعريف حاصل الضرب الإتجهي :

$$\hat{a} \wedge \hat{b} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(\alpha+\beta)(-\hat{k}) = -\hat{k}(\alpha+\beta) \qquad \to (2)$$

من (٢)، (١) $\leftarrow \therefore \sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta$

مسألة (١٧) :

(أ) ليكن $\hat{n}$ هو متجه الوحدة العمودي على قاعدة متوازي المستطيلات .



مساحة القاعدة هي مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\vec{B},\vec{C}$ ضلعان متجاوران أي $|\vec{B} \wedge \vec{C}|$.

ليكن h هو ارتفاع متوازي المستطيلات ،

حيث : $h = \vec{A} \cdot \hat{n}$

فيكون حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الإرتفاع .

$$\therefore V = (\vec{A}.\hat{n})|\vec{A} \wedge \vec{C}| = \vec{A}.(|\vec{B} \wedge \vec{C}|\hat{n}) = \vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$$

حيث $\vec{B} \wedge \vec{C} = |\vec{B} \wedge \vec{C}|\hat{n}$

(ب) حيث أن حجم متوازي المستطيلات (أو السطوح) الذي فيه ثلاثة أضلاع متجاورة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ يمثله حاصل الضرب القياسي الثلاثي $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$

$$\therefore V = \vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5(2+0) + 2(2+3) + 0(0-3)$$

$$= 10 + 10 = 20$$

$\vec{A} = 5\hat{i} - 2\hat{j}$

$\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{C} = 3\hat{i} + 2\hat{k}$

وهو المطلوب.

حلول مسائل الباب الثاني

مسألة (١) :

$$\vec{F}(t) = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t-1)\hat{k}$$

$$\dot{\vec{F}}(t) = \frac{d\vec{F}}{dt} = 2t\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} \rightarrow \dot{\vec{F}}(t=0) = -\hat{j} + 2\hat{k} \quad \rightarrow (1)$$

$$\ddot{\vec{F}}(t) = \frac{d\dot{\vec{F}}}{dt} = 2\hat{i} \rightarrow \ddot{\vec{F}}(t=0) = 2\hat{i} \quad \rightarrow (2)$$

$$\therefore \left|\dot{\vec{F}}(t=0)\right| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\left|\ddot{\vec{F}}(t=0)\right| = \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

مسألة (٢) :

$$(i)[\vec{F} + \vec{G}]' = \vec{F}' + \vec{G}' = (2t\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + (2\hat{i} - \hat{k})$$

$$= 2(t+1)\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

عند $t = 1$:

$$[\vec{F} + \vec{G}]' = 4\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$(ii)[\vec{F} \cdot \vec{G}]' = \vec{F} \cdot \vec{G}' + \vec{F}' \cdot \vec{G}$$

$$= [t^2 i - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}] \cdot [2\hat{i} - \hat{k}]$$

$$+ [2t\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}] \cdot [(2t-3)\hat{i} + \hat{j} - t\hat{k}]$$

$$= [2t^2 - (2t+1)] + [2t(2t-3) - 1 - 2t]$$

$$= 6t^2 - 10t - 2 = 2(3t^2 - 5t - 1)$$

عند $t = 1$:

$$[\vec{F}+\vec{G}]' = 6-10-2-6$$

$$\therefore [\vec{F}\wedge\vec{G}]' = \vec{F}\wedge\vec{G}' + \vec{F}'\wedge\vec{G}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t^2 & -t & 2t+1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2t & -1 & 2 \\ 2t-3 & 1 & -t \end{vmatrix}$$

$$= (2t-2)\hat{i} + (3t^2+8t-4)\hat{j} + (6t-3)\hat{k}$$

وعند $t=1$:

$$[\vec{F}\wedge\vec{G}]' = 7\hat{j} + 3\hat{k}$$

مسألة (٣) :

(أ) حيث أن $A^2 = \vec{A}.\vec{A}$

فبتفاضل الطرفين:

$$\frac{d}{dt}\left(A^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right)$$

$$= \vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{A} = 2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} \qquad \rightarrow (1)$$

أيضاً: من التفاضل العادي للدوال القياسية:

$$\frac{d}{dt}(A^2) = 2A\frac{dA}{dt} \qquad \rightarrow (2)$$

بمساواة (٢)،(١):

$$\vec{A}.\frac{d\vec{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt} \qquad \therefore \vec{A}.\dot{\vec{A}} = A\dot{A}$$

وهو المطلوب .

(ب) حيث أن $\vec{A}(t)$ دالة اتجاهية ثابتة المقدار فان: $A^2 = \vec{A}.\vec{A} = const$.

بتفاضل الطرفين:

$$\frac{d}{dt}(A^2) = \frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{A}) = 0$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{A} = 0 \rightarrow 2\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{A} \cdot \dot{\vec{A}} = 0$$

أي أن $\vec{A}, \dot{\vec{A}}$ يكونان متعامدين ، وهو المطلوب .

<u>مسألة (٤) :</u>

$$r(t) = \vec{a}\cos\omega t + \vec{b}\sin\omega t$$

$$\therefore \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}(-\omega\sin\omega t) + \vec{b}(\omega\cos\omega t)$$

$$= (-\omega\sin\omega t)\vec{a} + (\omega\cos\omega t)\vec{b} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

$$\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = [\cos\omega t\vec{a} + \sin\omega t\vec{b}] \wedge [-\omega\sin\omega t\vec{a} + \omega\cos\omega t\vec{b}]$$

$$= -\omega\cos^2\omega t\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) - \omega\sin^2\omega t(\vec{b} \wedge \vec{a})$$

$$= \omega\cos^2\omega t(\vec{a} \wedge \vec{b}) + \omega\sin^2\omega t(\vec{a} \wedge \vec{a})$$

حيث:

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{b} = 0 \ , \ \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

$$\therefore \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = w(\vec{a} \wedge \vec{b})[\cos^2 wt + \sin^2 wt]$$

$$= w(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

وهو المطلوب الأول .

أيضاً: بتفاضل (١) مرة ثانية بالنسبة إلى t

$$\therefore \ddot{\vec{r}} = -w^2 \cos wt\vec{a} - w^2 \sin wt\,\vec{b}$$

$$= -w^2(\cos wt\vec{a} + \sin wt\vec{b}) = -w^2\vec{r}$$

وهو المطلوب ثانياً .

<u>مسألة (٥):</u>

$$\vec{F} = (2x^2y - x^4)\hat{i} + (e^{xy} - y\sin x)\hat{j} + x^2\cos y\hat{k}$$

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial x} = (4xy - 4x^3)\hat{i} + (ye^{xy} - y\cos x)\hat{j} + 2x\cos y\hat{k}$$

$$= 4x(y - x^2)\hat{i} + y(e^{xy} - \cos x)\hat{j} + 2x\cos y\hat{k}$$

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial y} = 2x^2\hat{i} + (xe^{xy} - \sin x)\hat{j} - x^2\sin y\hat{k}$$

$$\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial\vec{F}}{\partial y}]$$

$$= 4x\hat{i} + (x\cdot ye^{xy} + e^{xy}\cdot 1 - \cos x)\hat{j} - 2x\sin y\hat{k}$$

$$= 4x\hat{i} + (xye^{xy} + e^{xy} - \cos x)\hat{j} - 2x\sin y\hat{k} \qquad \rightarrow (1)$$

$$\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}]$$

$$= 4x\hat{i} + (y\cdot xe^{xy} + e^{xy}\cdot 1 - \cos x)\hat{j} - 2x\sin y\hat{k}$$

$$= 4x\hat{i} + (xye^{xy} + e^{xy} - \cos x)\hat{j} - 2x\sin y\hat{k} \qquad \rightarrow (2)$$

من (١)،(٢) يتضح أن :

$$\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\vec{F}}{\partial y\partial x}$$

مسألة (٦) :

(أ) : $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \rightarrow d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

$$u = u(x,y,z) \rightarrow du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \qquad \rightarrow (1)$$

أيضاً :

$$\vec{\nabla}\, u = \hat{i}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\therefore\ \vec{\nabla} u \cdot d\vec{r} = (\hat{i}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial u}{\partial z}) \cdot (dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k})$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \qquad \rightarrow (2)$$

من (٢)،(١) نجد أن : $du = \vec{\nabla} u \cdot d\vec{r}$

وهو المطلوب

(ب)

$$\nabla^2 (\frac{1}{r}) = \nabla^2 \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$= (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

ولكن:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x)$$

$$= -x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\partial}{\partial x}\left[-x\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\left[\frac{3}{2}x\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(2x)-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}\cdot(1)\right]$$

$$=3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}-(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$=(2x^2-y^2-z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \qquad \to (1)$$

وبالمثل فإن:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=(2y^2-z^2-x^2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \to (2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=(2z^2-x^2-y^2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \to (3)$$

بجمع (٣)،(٢)،(١):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$[2x^2-y^2-z^2+2y^2-z^2-x^2+2z^2-x^2-y^2](x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}=0$$

$$\therefore \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0$$

وهو المطلوب .

مسألة (٧) :

لإثبات (i) : نستخدم العلاقة :

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A})=\phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})+\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi$$

$$[\,div\,(\phi\vec{A})=\phi\, div\,\vec{A}+\vec{A}\cdot grad\ \phi\,]$$

وبوضع : $\phi = \phi, \vec{A} = \vec{\nabla}\psi$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi) = \phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi) + (\vec{\nabla}\psi)\cdot(\vec{\nabla}\phi)$$

$$= \phi\nabla^2\psi + (\vec{\nabla}\psi)\cdot(\vec{\nabla}\phi) \rightarrow (1)$$

وبتغيير وضعي ϕ, ψ نحصل على:

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{\nabla}\phi) = \psi\nabla^2\phi + (\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\psi) \qquad \rightarrow (2)$$

من(٢)،(١) بالطرح:

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi) = \phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi$$

وهو المطلوب .

<u>لإثبات (ii) :</u>

$$\nabla^2(\phi\psi) = \vec{\nabla}\cdot[\vec{\nabla}(\phi\psi)]$$

ولكن:

$$\vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi$$

$$\therefore \nabla^2(\phi\psi) = \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi)$$

$$= \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi) + \vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{\nabla}\phi)$$

وباستخدام العلاقة:

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}) = \phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi$$

ووضع : $\vec{A} = \vec{\nabla}\psi, \vec{\nabla}\phi$

$$\therefore \nabla^2(\phi\psi) = \phi\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\psi) + \vec{\nabla}\psi\cdot(\vec{\nabla}\phi)$$

$$+ \psi\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) + \vec{\nabla}\phi\cdot(\vec{\nabla}\psi)$$

$$= \phi\nabla^2\psi + 2(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\psi) + \psi\nabla^2\phi$$

وهو المطلوب .

مسألة (٨) :

$$\phi = x^2 yz \,, \psi = xy - 3z^2$$

(i) لإيجاد $\vec{\nabla}[(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\psi)]$:

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= \hat{i}(2xyz) + \hat{j}(x^2 z) + \hat{k}(x^2 y)$$

$$\vec{\nabla}\psi = \hat{i}(y) + \hat{j}(x) + \hat{k}(-6z)$$

$$\therefore (\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\psi) = (2xyz)(y) + (x^2 z)(x) + (x^2 y)(-6z)$$

$$= 2xy^2 z + x^3 z - 6x^2 yz$$

$$\therefore \vec{\nabla}[(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\psi)] = \left(\hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\left(2xy^2 z + x^3 z + 6x^2 yz\right)$$

$$= \hat{i}\left(2y^2 z + 3x^2 z - 12xyz\right) + \hat{j}(4xyz - 6x^2 z)$$

$$+ \hat{k}(2xy^2 + x^3 - 6x^2 y)$$

(ii) لإيجاد $\vec{\nabla}\cdot[(\vec{\nabla}\phi)\wedge(\vec{\nabla}\psi)]$:

$$(\vec{\nabla}\phi)\wedge(\vec{\nabla}\psi) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2xyz & x^2 z & x^2 y \\ y & x & -6z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-6x^2 z^2 - x^3 y) + \hat{j}(x^2 y^2 + 12xyz^2)$$

$$+ \hat{k}(2x^2 yz - x^2 yz)$$

$$= \hat{i}(-6x^2 z^2 - x^3 y) + \hat{j}(x^2 y^2 + 12xyz^2) + \hat{k}(x^2 yz)$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot[(\vec{\nabla}\phi)\wedge(\vec{\nabla}\psi)]=\frac{\partial}{\partial x}(-6x^2z^2-x^3y)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2+12xyz^2)+\frac{\partial}{\partial z}(x^2yz)$$

$$=[-12xz^2-3x^2y+2x^2y+12xz^2+x^2y]=0$$

(iii) لإيجاد $\vec{\nabla}\wedge[(\vec{\nabla}\phi)\wedge(\vec{\nabla}\psi)]$:

$$\vec{\nabla}\cdot[(\vec{\nabla}\phi)\wedge(\vec{\nabla}\psi)]=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -6x^2z^2-x^3y & x^2y^2+12xyz^2 & x^2yz \end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}[x^2z-24xyz]-\hat{j}[2xyz-(-12x^2z)]$$

$$+\hat{k}[2xy^2+12yz^2-(-x^3)]$$

$$=\hat{i}[x^2z-24xyz]-\hat{j}[2xyz+12x^2z]$$

$$+\hat{k}[2xy^2+12yz^2+x^3]$$

وهو المطلوب.

مسألة (٩) :

$$(i)\,grad(r^n)=\vec{\nabla}(r^n)$$

$$=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(r^n)=\hat{i}\frac{\partial(r^n)}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial(r^n)}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial(r^n)}{\partial z}$$

$$=\hat{i}\left[nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}\right]+\hat{j}\left[nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial y}\right]+\left[\hat{k}nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial z}\right]$$

$$=nr^{n-1}\left[\hat{i}\frac{\partial r}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial r}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial r}{\partial z}\right] \qquad \rightarrow (1)$$

ولكن:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\therefore 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

وبالمثل فان:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

بالتعويض في(١):

$$\therefore grad(r^n) = nr^{n-1}\left[\hat{i}\frac{x}{r} + \hat{j}\frac{y}{r} + \hat{k}\frac{z}{r}\right]$$

$$= nr^{n-1}\left[\frac{\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z}{r}\right] = nr^{n-1}\left[\frac{\vec{r}}{r}\right] = nr^{n-1}\hat{r}$$

حيث $\hat{r} = \vec{r}/r$ متجه الوحدة في اتجاه r

(ii) $div(r^n\vec{r}) = div(\phi\vec{A}), \phi = r^n, \vec{A} = \vec{r}$

ولكن:

$$div(\phi\vec{A}) = \phi div\vec{A} + \vec{A}\cdot grad\phi$$

$$\therefore div(r^n\vec{r}) = r^n div\vec{r} + \vec{A}\cdot grad(r^n) \qquad \rightarrow (2)$$

ولكن:

$$div\,\vec{r} = \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

أيضا:

$$grad(r^n) = nr^{n-1}\hat{r} = nr^{n-1}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = nr^{n-2}\vec{r}$$

بالتعويض في (٢):

$$div(r^n\vec{r}) = r^n(3) + \vec{r}\cdot\left(nr^{n-2}\vec{r}\right)$$

$$= 3r^n + nr^{n-2}(r^2)$$

$$= 3r^n + nr^n = (3+n)r^n$$

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2$$

(iii) $curl(r^n\vec{r}) = curl(\phi\vec{A}), \phi = r^n, \vec{A} = \vec{r}$

ولكن:

$$curl(\phi\vec{A}) = \phi curl\vec{A} - \vec{r}\wedge(grad\,\phi)$$

$$\therefore curl(r^n\vec{r}) = r^n curl\vec{r} - \vec{r}\wedge(grad r^n) \quad \rightarrow (3)$$

$$curl\vec{r} = \vec{\nabla}\wedge\vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$grad r^n = nr^{n-2}\vec{r}$$

بالتعويض في (٣):

$$curl(r^n\vec{r}) = r^n(0) - \vec{r}\wedge[nr^{n-2}\vec{r}]$$

$$= -nr^{n-2}(\vec{r}\wedge\vec{r}) = 0$$

$$\vec{r}\wedge\vec{r} = 0$$

وهو المطلوب.

مسألة (١٠) :

بأخذ a_1, a_2, a_3 مركبات متجه الوحدة $\hat{a}$

$$\therefore \hat{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k},\ |\hat{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$$

$$\text{(i)}\quad (\hat{a}\cdot\vec{r})\hat{a} = (a_1x + a_2y + a_3z)(\hat{i}a_1 + \hat{j}a_2 + \hat{k}a_3)$$

$$\vec{\nabla}\cdot[(\hat{a}\cdot\vec{r})\hat{a}] = \left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot[(a_1x + a_2y + a_3z)$$

$$(\hat{i}a_1 + \hat{j}a_2 + \hat{k}a_3)]$$

$$= \left[a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z}\right](a_1x + a_2y + a_3z)$$

$$= a_1\frac{\partial}{\partial x}(a_1x) + a_2\frac{\partial}{\partial y}(a_2y) + a_3\frac{\partial}{\partial z}(a_3z)$$

$$= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) = 1$$

وهو المطلوب الأول.

$$\text{(ii)}\ (\hat{a}\cdot\vec{r})\hat{a} = (a_1x + a_2y + a_3z)(\hat{i}a_1 + \hat{j}a_2 + \hat{k}a_3)$$

$$= \hat{i}a_1(a_1x + a_2y + a_3z) + \hat{j}a_2(a_1x + a_2y + a_3z)$$

$$+ \hat{k}a_3(a_1x + a_2y + a_3z)$$

$$\vec{\nabla}\wedge[(\hat{a}\cdot\vec{r})\hat{a}] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1(a_1x + a_2y + a_3z) & a_2(a_1x + a_2y + a_3z) & a_3(a_1x + a_2y + a_3z) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}[a_3a_2 - a_2a_3] + \hat{j}[a_1a_3 - a_3a_1] + \hat{k}[a_2a_1 - a_1a_2] = 0$$

$$\text{(iii)}\quad \hat{a}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(a_2z-a_3y)+\hat{j}(a_2x-a_1z)+\hat{k}(a_1y-a_2x)$$

$$\therefore(\hat{a}\wedge\vec{r})\wedge\hat{a}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_2z-a_3y & a_3x-a_1z & a_1y-a_2x\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left[a_3(a_3x-a_1z)-a_2(a_1y-a_2x)\right]$$
$$+\hat{j}\left[a_1(a_1y-a_2x)-a_3(a_2z-a_3y)\right]$$
$$+\hat{k}\left[a_2(a_2z-a_3y)-a_1(a_3x-a_1z)\right]$$

$$\therefore\vec{\nabla}\cdot\left[(\hat{a}\wedge\vec{r})\wedge\hat{a}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[a_3(a_3x-a_1z)-a_2(a_1y-a_2x)\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[a_1(a_1y-a_2x)-a_3(a_2z-a_3y)\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[a_2(a_2z-a_3y)-a_1(a_3x-a_1z)\right]$$
$$=\left[a_3^2+a_2^2\right]+\left[a_1^2+a_3^2\right]+\left[a_2^2+a_1^2\right]=2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)=2\times1=2$$

$$\vec{\nabla}\wedge[(\hat{a}\cdot\vec{r})\wedge\hat{a}]$$
$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_3(a_3x-a_1z)-a_2(a_1y-a_2x) & a_1(a_1y-a_2x)-a_3(a_2z-a_3y) & a_2(a_2z-a_3y)-a_1(a_3x-a_1z)\end{vmatrix}$$
$$=\hat{i}\left[-a_2a_3+a_3a_2\right]+\hat{j}\left[-a_3a_1+a_1a_3\right]+\hat{k}\left[-a_1a_2+a_2a_1\right]=0$$

وهو المطلوب.

حلول مسائل الباب الثالث

مسألة (١) :

معادلة المنحنى : $y = 2x^{\frac{1}{2}}$

طول القوس من هذا المنحنى : $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right) = x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \rightarrow y'^2 = \frac{1}{x}$$

$$\therefore ds = \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx$$

التكامل المطلوب:

$$\int_c y\,ds = \int_{x=3}^{12} 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx = 2\int_3^{12}\sqrt{x+1}\,dx$$

$$= 2\left.\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_3^{12} = \frac{4}{3}\left[(13)^{\frac{3}{2}} - (4)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{4}{3}[46.87 - 8] = 77.74$$

مسألة (٢) :

المعادلات البارامترية للمنحنى : $y = x^2$ (قطع مكافئ) هي :

$$x = t, y = t^2$$

ومن النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(1,1)$ فإن: $0 \le t \le 1$

يمكن تمثيل المنحنى المعطى بالمتجه:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = t\hat{i} + t^2\hat{j}$$

$$\therefore\ d\vec{r} = dt\,\hat{i} + 2t\,dt\,\hat{j} \qquad \rightarrow (1)$$

أيضا فإن المتجه $\vec{F}$ يمكن كتابته بدلالة t:

$$\vec{F} = y\hat{i} + x\hat{j} = t^2\hat{i} + t\hat{j} \qquad \rightarrow (2)$$

ويكون التكامل المطلوب:

$$\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^2\hat{i} + t\hat{j})\cdot(dt\,\hat{i} + 2t\,dt\,\hat{j})$$

$$= \int_0^1 (t^2\,dt + 2t^2\,dt) = \int_0^1 3t^2\,dt$$

$$= 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

<u>مسألة (٣) :</u>

المعادلات البارامترية للقطع المكافئ $y = x^2$ هي:

$$x = t,\ y = t^2$$

ومن نقطة الأصل إلى النقطة (2,4) فإن: $0 \le t \le 2$

يمكن تمثيل القطع بالمتجه:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = t\hat{i} + t^2\hat{j}$$

$$d\vec{r} = dt\,\hat{i} + 2t\,dt\,\hat{j} \qquad \rightarrow (1)$$

المتجه $\vec{F}$ يكتب بدلالة t بالصورة :

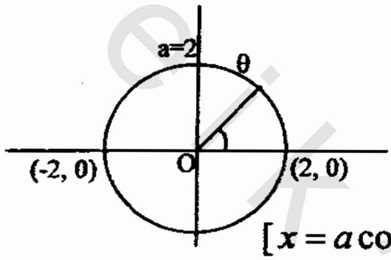
$$\vec{F} = x^2y\,\hat{i} + (x^2 + y)\,\hat{j} = t^4\hat{i} + 2t^2\hat{j}$$

ويكون التكامل الخطي المطلوب:

$$\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 (t^4 i + 2t^2 j)\cdot\left(dt\,\hat{i} + 2t\,dt\,\hat{j}\right)$$

$$= \int_0^2 (t^4\,dt + 4t^3\,dt) = \int_0^2 (t^4 + 4t^3)\,dt = \frac{112}{5}$$

مسألة (٤) :



المعادلات البارامترية لنصف الدائرة العلوي

$$x = 2\cos\theta\,,\quad y = 2\sin\theta$$

[المعادلات البارامترية للدائرة: $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$]

$$(0 \le \theta \le \pi)$$

$$\therefore \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = 2\cos\theta\,\hat{i} + 2\sin\theta\,\hat{j}$$

$$\therefore d\vec{r} = \left(-2\sin\theta\;\hat{i} + 2\cos\theta\;\hat{j}\right)d\theta \qquad \to (1)$$

المتجه $\vec{F}$ بدلالة البارمتر θ :

$$\vec{F} = x^2\hat{i} + y\hat{j} = (2\cos\theta)^2\,\hat{i} + (2\sin\theta)\,\hat{j} = 4\cos^2\theta\,\hat{i} + 2\sin\theta\,\hat{j}$$

ويكون التكامل المطلوب:

$$\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi} (4\cos^2\theta\hat{i} + 2\sin\theta\hat{j})\cdot(-2\sin\theta\hat{i} + 2\cos\theta\hat{j})\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} [-8\cos^2\theta\sin\theta + 4\sin\theta\cos\theta]\,d\theta$$

$$= -8\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d(-\cos\theta) + 4\int_0^{\pi}\cos\theta\,d(-\cos\theta)$$

$$= 8\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} - 4\left[\frac{\cos^2\theta}{2}\right]_0^{\pi} = -\frac{16}{3}$$

مسألة (٥) :

المعادلات البارامترية للمنحنى:

$$x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = b\theta$$

يمكن تمثيل المنحنى بالمتجه:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$= a\cos\theta\hat{i} + a\sin\theta\hat{j} + b\theta\hat{k}$$

$$\therefore d\vec{r} = (-a\sin\theta\hat{i} + a\cos\theta\hat{j} + b\hat{k})d\theta$$

ويكون التكامل المطلوب:

$$\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \alpha[-3a\sin^3\theta\cos\theta\,\hat{i} + a(2\sin\theta - 3\sin^3\theta)\,\hat{j} + b\sin 2\theta\hat{k}]\cdot$$

$$\cdot[-\alpha\sin\theta\hat{i} + \alpha\cos\theta\hat{j} + b\hat{k}]d\theta$$

$$= \alpha\int[3a^2\sin^3\theta\cos\theta + a^2(2\sin\theta - 3\sin^3\theta)\cos\theta$$

$$+ b^2\sin 2\theta]d\theta$$

$$= \alpha\int[a^2(3\sin^3\theta\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 3\sin^3\theta\cos\theta)$$

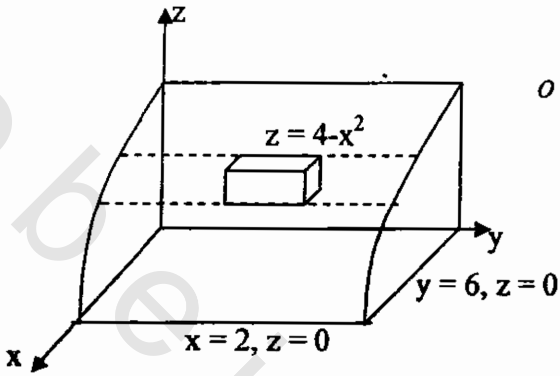
$$+ b^2\sin 2\theta]d\theta$$

$$= \alpha\int[a^2\sin 2\theta + b^2\sin 2\theta]d\theta$$

$$= \alpha\int(a^2 + b^2)\sin 2\theta d\theta$$

$$= \alpha(a^2 + b^2)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta$$

$$= \alpha(a^2 + b^2)\left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\alpha}{2}(a^2 + b^2)$$



مسألة (٦) : عندما $z = 0$ فإن :

$$o = 4 - x^2 \rightarrow x = 2$$

x تتغير من $0 \rightarrow 2$

y تتغير من $0 \rightarrow 6$

z تتغير من $0 \rightarrow (4 - x^2)$

التكامل الحجمي المطلوب:

$$I = \iiint_v \vec{F}\, dV = \iiint (2xz\,\hat{i} - x\hat{j} + y^2\hat{k})\, dxdydz$$

$$= I_1 i - I_2\hat{j} + I_3\hat{k} \qquad \rightarrow (1)$$

حيث:

$$I_1 = \iiint 2\, xzdxdydz \quad , I_2 = \iiint xdxdydz$$

$$I_3 = \iiint y^2\, dxdydz$$

ولنحسب كل تكامل على حدة:

$$I_1 = 2\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} xzdxdydz = 2\int_0^2\int_0^6 x\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{4-x^2} dxdy$$

$$= \int_0^2\int_0^6 x(4-x^2)^2\, dxdy = \int_0^2 x(4-x^2)^2\,[y]_0^6\, dx$$

$$= 6\int_0^2 x(4-x^2)^2\, dx = 6\int_0^2 x(16 - 8x^2 + x^4)\, dx$$

$$= 6\int_0^2 (16x - 8x^3 + x^5)\, dx = 64$$

$$I_2 = \int_0^2\int_0^6\int_0^{4-x^2} x\,dx\,dy\,dz \quad = \int_0^2\int_0^6 x(z)\Big|_0^{4-x^2} dx\,dy$$

$$= \int_0^2\int_0^6 x(4-x^2)\,dx\,dy \;= \int_0^2 x(4-x^2)(y)\Big|_0^6 dx$$

$$= 6\int_0^2 (4x-x^3)\,dx \;= 24$$

$$I_3 = \int_0^2\int_0^6\int_0^{4-x^2} y^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^2\int_0^6 y^2(z)\Big|_0^{4-x^2} dx\,dy$$

$$= \int_0^2\int_0^6 y^2(4-x^2)\,dx\,dy = \int_0^2 (4-x^2)\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^6 dx$$

$$= 72\int_0^2 (4-x^2)\,dx = 72\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 72\left[\frac{16}{3}\right] = 384$$

ويصبح التكامل الحجمي المطلوب:

$$\iiint_v \vec{F}\,dV = 64\hat{i} - 24\hat{j} + 384\hat{k}$$

$$= 8[8i - 3\hat{j} + 48\hat{k}]$$

تابع حلول المسائل : نظريات التكامل الاتجاهية

مسألة (٧): (أ) من نظرية جاوس للتباعد:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,dV \qquad \to (1)$$

ولكن:

$$\vec{F} = \alpha x\hat{i} + \beta y\hat{j} + \gamma z\vec{k}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha x) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta y) + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma z) = \alpha + \beta + \gamma \quad \to (2)$$

بالتعويض من (٢)،(١):

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iiint_V (\alpha+\beta+\gamma)dV$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma)\iiint_V dV = (\alpha+\beta+\gamma)V$$

(ب) من نظرية جاوس:

$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})dV$ وبوضع $\vec{F}=\phi\vec{A}$ نحصل على :

$$\therefore \iint_S (\phi\vec{A})\cdot d\vec{s} = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A})dV \qquad \to (1)$$

ولكن: حيث أن:

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}) = \phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$$

$$[div\,(\phi\vec{A}) = \phi div\,\vec{A} + \vec{A}\cdot grad\,\phi]$$

فبالتعويض في (١):

$$\iint_S (\phi\vec{A})\cdot d\vec{s} = \iiint_V [\phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\phi)]dV$$

وهو المطلوب.

<u>مسألة (٨) :</u>

(أ) <u>لإثبات (i) :</u> من نظرية الالتفاف لستوكس:

$$\oint_c \vec{F}\cdot dr = \iint_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot dS$$

فبوضع $\vec{F}=\vec{r}$:

$$\oint_c \vec{r}\cdot dr = \iint_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{r})\cdot dS \to (1)$$

ولكن:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=i(\frac{\partial}{\partial y}z-\frac{\partial}{\partial z}y)+\ldots\ldots=0\rightarrow(2)$$

وذلك لأن x,y.z إحداثيات مستقلة . $\frac{\partial z}{\partial y}=0,\frac{\partial y}{\partial z}=0,\ldots\ldots\ldots$

بالتعويض من (٢)،(١):

$$\therefore\oint_C\vec{r}\cdot d\vec{r}=0 \qquad \_\_\_\_\_\_\_(i)$$

<u>**ولإثبات (ii) :**</u> من نظرية ستوكس :

$$\oint_c\vec{F}\cdot dr=\iint_S(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot dS$$

فبوضع $\vec{F}=\vec{a}\wedge\vec{r}$ حيث $\vec{a}$ متجه ثابت واختياري

$$\therefore\int_c(\vec{a}\wedge\vec{r})\cdot d\vec{r}=\iint_S\vec{\nabla}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{r})\cdot d\vec{S} \qquad \rightarrow(1)$$

ولكن من خواص حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي:

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$$\therefore\vec{\nabla}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{r})=(\vec{\nabla}\cdot\vec{r})\vec{a}-(\vec{\nabla}\cdot\vec{a})\vec{r}=(\vec{\nabla}\cdot\vec{r})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}\rightarrow(2)$$

وحيث أن:

$$\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=1+1+1=3$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}=\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+a_2\frac{\partial}{\partial y}+a_3\frac{\partial}{\partial z}\right)(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})$$

$$=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}=\vec{a}$$

وبالتعويض في(٢):

$$\therefore \vec{\nabla} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{r}) = 3\vec{a} - \vec{a} = 2\vec{a}$$

$$\therefore \int_C (\vec{a} \wedge \vec{r}) \cdot dr = \iint_S (2\vec{a}) \cdot dS = 2\iint_S \vec{a} \cdot d\vec{s} \rightarrow (3)$$

وحيث أن:

$$\vec{a} \wedge \vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{a} \cdot \vec{r} \wedge d\vec{r}$$

وبتبديل مواقع $(\cdot, \wedge)$

$$\therefore \int_C \vec{a} \cdot \vec{r} \wedge d\vec{r} = 2\iint_S \vec{a} \cdot ds$$

وحيث أن $\vec{a}$ متجه ثابت:

$$\therefore \vec{a} \cdot \int_C \vec{r} \wedge d\vec{r} = 2\vec{a} \cdot \iint_S d\vec{S}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \left(\int_C \vec{r} \wedge d\vec{r} - 2\iint_S d\vec{s} \right) = 0$$

وحيث أن $\vec{a}$ اختياري فيمكن أختيار $\vec{a} \neq 0$ وبذلك فإن :-

$$\therefore \int_C \vec{r} \wedge d\vec{r} = 2\iint_S d\vec{s} \qquad \underline{\qquad\qquad} (ii)$$

وهو المطلوب .

(ب) من نظرية ستوكس:

$$\oint_c \vec{F} \cdot dr = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot dS$$

بوضع $\vec{F} = \vec{a} \wedge \vec{A}$ حيث $\vec{a}$ متجه ثابت واختياري

$$\therefore \oint_C (\vec{a} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{r} = \iint_S [\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{A})] \cdot d\vec{S} \qquad \rightarrow (1)$$

ولكن من قانون حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{A}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{a} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{a})\vec{A}$$

$$= \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \qquad \rightarrow (2)$$

بالتعويض في(١):

$$\oint_C (\vec{a} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{r} = \iint_S [\vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}] \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_S (\vec{a} \cdot d\vec{S})(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})(\vec{A} \cdot d\vec{S})$$

$$= \iint_S \vec{a} \cdot [dS(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot d\vec{S})]$$

$$= \iint_S \vec{a} \cdot [(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})d\vec{S} - (\vec{A} \cdot d\vec{S})\vec{\nabla}]$$

$$= \iint_S \vec{a} \cdot [\vec{A} \wedge (d\vec{S} \wedge \vec{\nabla})]$$

$$= -\iint_S \vec{a} \cdot [(d\vec{S} \wedge \vec{\nabla}) \wedge \vec{A}] \qquad \rightarrow (3)$$

ولكن: $\vec{a} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{r} = \vec{a} \cdot \vec{A} \wedge d\vec{r}$

وبذلك تصبح (٣):

$$\oint_C \vec{a} \cdot \vec{A} \wedge d\vec{r} = -\iint_S \vec{a} \cdot [(d\vec{s} \wedge \vec{\nabla}) \wedge \vec{A}]$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \oint_C \vec{A} \wedge d\vec{r} = -\vec{a} \cdot \iint_S [d\vec{s} \wedge \vec{\nabla}) \wedge \vec{A}]$$

وحيث أن $\vec{a}$ متجه ثابت واختياري:

$$\therefore \oint_C \vec{A} \wedge d\vec{r} = -\iint_S [(d\vec{s} \wedge \vec{\nabla}) \wedge \vec{A}] = -\iint_S [(\hat{n} \wedge \vec{\nabla}) \wedge \vec{A}] dS$$

وهو المطلوب.

مسألة (٩) : (أ) من نظرية جرين في المستوى:

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dS$$

التكامل المعطى:

$$\oint_C [(x^2 - y)dx + xdy] = \oint_C [Mdx + Ndy]$$

$$\therefore M = x^2 - y \quad , \quad N = x$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = -1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

بتطبيق نظرية جرين:

$$\oint_C [(x^2 - y)dx + xdy] = \iint_S [1 - (-1)]dS = 2\iint_S dS$$

ولحساب $\iint_S dS$:

نتذكر أن المنحنى C هو الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ التي نصف قطرها $r = 2$ ، ويمكن اعتبار أن: $\iint_S dS = S$ حيث S هي مساحة الدائرة : $S = \pi r^2 = 4\pi$

$$\therefore \oint_c [(x^2 - y)dx + xdy] = 2(4\pi) = 8\pi$$

أو بطريقة أخرى:

نستخدم عنصر المساحة في الإحداثيات القطبية: $dS = rdrd\theta$

حيث: $a \le r \le 2 \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\therefore \iint_s dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta = 2[2\pi] = 4\pi$$

$$\therefore \oint_C [(x^2 - y)dx + xdy] = 2(4\pi) = 8\pi$$

(ب) من نظرية جرين:

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dS$$

التكامل المعطى:

$$\oint_C [(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dx + (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dy] = \oint_C [Mdx + Ndy]$$

$$\therefore M = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}, N = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(2y) = 3y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(2x) = 3x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

وبتطبيق نظرية جرين:

$$\oint_C [(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dx + (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dy]$$

$$= \iint_S [3x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - 3y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}] dS$$

$$= 3\iint_S (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(x-y) dS \qquad \to (1)$$

ولإيجاد هذا التكامل: نستخدم الإحداثيات القطبية حيث المعـادلات البارامترية للدائرة المعطاة $x^2+y^2=1$ ذات النصف قطر $r=1$ هي:

$$x = r\cos\theta = \cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta = \sin\theta$$

وعنصر المساحة $dS = r\,dr\,d\theta$

$$0 \le r \le 1 \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\therefore \iint_S (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(x-y)dS$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}(\cos\theta-\sin\theta)rdrd\theta$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} rdr(\cos\theta-\sin\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1(\cos\theta-\sin\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}[\sin\theta+\cos\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[(0-0)+(1-1)] = 0$$

وبذلك يصبح التكامل المطلوب على منحنى الدائرة المعطاة:

$$\oint_C [(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dx + (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dy] = 0$$

<u>مسألة (١٠) :</u> من نظرية جرين:

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dS$$

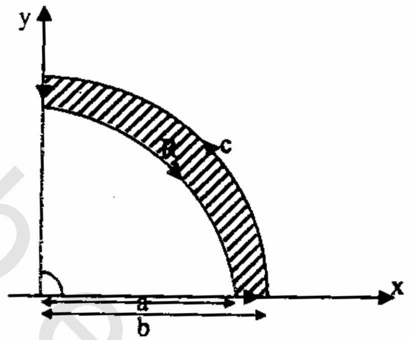
في التكامل المعطى I:

$$M = 4 + e^{\cos x}\ ,\ \ N = \sin y + 3x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0, \frac{\partial N}{\partial x} = 6x$$

وبتطبيق نظرية جرين يصبح التكامل I بالصورة:

$$I = \iint_R (6x)dS = 6\iint_R xdS \qquad \rightarrow (1)$$



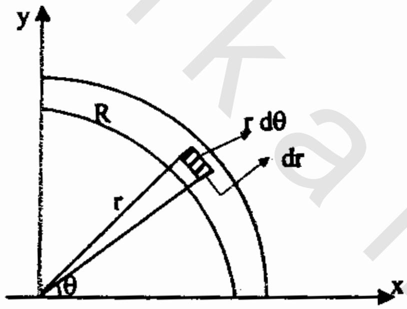
ولإيجاد هذا التكامل :

نتحول إلى الإحداثيات القطبية

حيث عنصر المساحة:

$$dS = r dr d\theta$$

$$[a \le r \le b, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}]$$



أيضا فان : $x = r\cos\theta$

$$\therefore I = 6\iint_R x dS = 6\int_a^b\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\theta)(r dr d\theta)$$

$$= 6\int_a^b r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta = 1$$

$$= 6\int_a^b r^2 dr = 6\left[{r^3}/{3}\right]_a^b = 2(b^3 - a^3)$$

وهو المطلوب.