

القسم الثاني

تحليل الممتدات
TENSOR ANALYSIS

الباب الأول

جبر الممتدات Tensor Algebra

تعريفات أولية:

(١) الفراغ ذو الـ n بعد:

يتكون هذا الفراغ من مجموعة من النقاط، تتميز كل نقطة منها بعدد n من

الأبعاد أو (الإحداثيات) ويرمز لها بالرمز: x^1, x^2, \dots, x^n

أو باختصار x^μ حيث $(\mu = 1, 2, \dots, n)$

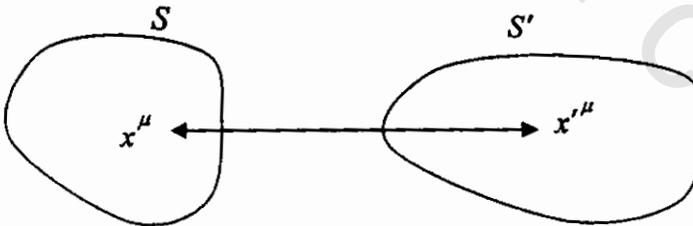
$$\therefore x^\mu \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n)$$

حالة خاصة: عندما $\mu = 1, 2, 3$

$$x^\mu \equiv (x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$$

وهو الفراغ الاقليدي ذو الثلاثة أبعاد.

(٢) تحويل الإحداثيات:



فراغ أو نظام الإحداثيات S' فراغ أو نظام الإحداثيات S

العلاقة الرياضية بين x^μ, x'^μ تسمى علاقة تحويل للإحداثيات.

(٣) اصطلاح التجميع:

$$S = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots a_n x^n = \sum_{\mu=1}^n a_{\mu} x^{\mu}$$

ولسهولة الكتابة يمكن الاستغناء عن علامة \sum بالرغم من وجود عملية

$$\therefore S = a_{\mu} x^{\mu} = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots$$

وتعرف عملية الاستغناء عن كتابة \sum مع وجود عملية التجميع بإصلاح

للتجميع (Summation Convention).

(٤) الدليل المتحرك (أو الدمية) (Dummy Index)

إذا تكرر دليل مرتين في حد ما، مرة في وضع علوي ومرة في وضع سفلي

فانه يسمى دليل متحرك أو دمية، فمثلا α هو دليل متحرك في $a_{\alpha}^{\beta} x^{\alpha}$ ،

ولما كان α يأخذ للقيم من ١ حتى n فيمكن استبداله بأي رمز آخر لا يستخدم

في الحد : $a_{\alpha}^{\beta} x^{\alpha} = a_{\mu}^{\beta} x^{\mu}$ [حيث إستبدلنا α بالرمز μ] .

أيضا: فان الأدلة المتحركة يمكن تبادلها (تبديل أماكنها) فمثلا:

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{dx'^{\mu}} \frac{dx^{\beta}}{dx'^{\nu}} = g_{\beta\alpha} \frac{dx^{\beta}}{dx'^{\mu}} \frac{dx^{\alpha}}{dx'^{\nu}}$$

أما الدليل الذي لا يتكرر فيسمى بالدليل الحقيقي (Real index) مثل الدليل β

في $a_{\alpha}^{\beta} x^{\alpha}$ ولا يمكن استبدال الدليل الحقيقي بأخر حقيقي

أي أن $a_{\alpha}^{\beta} x^{\alpha} \neq a_{\alpha}^{\mu} x^{\alpha}$.

(٥) المتجه المتغاير والمتجه مضاد المتغاير :

المتجه مضاد المتغاير
(contravariant) أو مضاد التآلف
يعرف بمعادلة التحويل:

$$A'^{\alpha} = \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right) A^{\mu}$$

الدليل علوي (A^{μ})

المتجه المتغاير
(Covariant) أو المتآلف
يعرف بمعادلة التحويل:

$$A'_{\alpha} = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \right) A_{\mu}$$

الدليل سفلي (A_{μ})

ملحوظة: في الفراغ ذو الثلاثة أبعاد، يمكن تمثيل المتجه بطريقتين:

(i) $\vec{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$

(ii) $A_n \equiv (A_1, A_2, A_3)$

حيث $n = 1, 2, 3$

ويمكن تعميم التمثيل الثاني على الفراغ ذو الـ n بعد فنكتب المتجه ذو الـ n

$$A_{\mu} \equiv (A_1, A_2, \dots, A_n)$$

حيث $\mu = 1, 2, \dots, n$

وهذا المتجه يعرف بالمتجه المتغاير (Covariant) وهناك تمثيل آخر للمتجه في

الفراغ ذو الـ n بعد وذلك بكتابة الرمز (أو الدليل) μ أعلى رمز المتجه

وهذا المتجه يعرف بالمتجه مضاد

التغاير (Contravariant)

(٦) اللامتغيرات (Invariants)

إذا كانت $\phi = \phi(x^\mu)$ هي دالة قياسية في الإحداثيات x^μ ، وكانت

$$\phi'(x'^\mu) = \phi(x^\mu) :$$

أي أن الدالة لم تتغير قيمتها عند الانتقال من نظام الإحداثيات S إلى النظام

S' فيقال أن الدالة ϕ هي لا متغير (Invariant) . $\phi = \phi' = Inv$.

(٧) دلتا كرونكر:

تعرف دلتا كرونكر بالعلاقة:

$$\delta_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \rightarrow (1)$$

حيث x^μ, x^ν إحداثيات مستقلة ، ويكون لدينا حالتان:

[١] إذا كانت $\nu = \mu$:

$$\delta_\mu^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\mu} = 1$$

مثال: بكتابة

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

فعندما $\mu = 1$:

$$\delta_1^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x^1} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

وعندما $\mu = 2$:

$$\delta_2^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$$

وهكذا.

[٢] إذا كانت $\nu \neq \mu$:

$$\delta_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0$$

فمثلاً: $\nu=1, \mu=2$

$$\delta_2^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x^2} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

وهكذا.

وبذلك تأخذ العلاقة (١) للصورة:

$$\delta_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \begin{cases} 1 (\mu = \nu) \\ 0 (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

وباستخدام قاعدة السلسلة يمكن كتابة δ_{μ}^{ν} بالصورة:-

$$\delta_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}$$

أمثلة محلولة:

مثال (١): أثبت أن:

$$(i) \quad \delta_{\mu}^{\nu} A^{\mu} = A^{\nu}$$

$$(ii) \quad \delta_{\alpha}^{\beta} \delta_{\gamma}^{\alpha} = \delta_{\gamma}^{\beta}$$

الحل:

(i) بوضع $\mu = \nu$ في الطرف الأيسر [لأن μ هو رمز نمية أو متحرك]

$$\therefore \delta_{\mu}^{\nu} A^{\mu} = \delta_{\nu}^{\nu} A^{\nu} = A^{\nu}$$

(ii) بوضع $\alpha = \beta$ في الطرف الأيسر [لأن α هو رمز دمية]
 $\therefore \delta_{\alpha}^{\beta} \delta_{\gamma}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\beta} \delta_{\gamma}^{\beta} = \delta_{\gamma}^{\beta}$

حل آخر لـ (ii) باستخدام تعريف دلتا كرونكر كالاتي:

$$\delta_{\alpha}^{\beta} \delta_{\gamma}^{\alpha} = \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \right) \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \right) = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \delta_{\gamma}^{\beta}$$

مثال (٢):

إذا كانت علاقة التحويل للمتجه A^{ν} من S إلى S' هي $A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}$

فاثبت أن علاقة التحويل من S' إلى S هي $A^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A'^{\mu}$

الحل: من العلاقة المعطاة:

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} \quad \rightarrow (1)$$

بضرب الطرفين في $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}$ نحصل على:

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A'^{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} = \delta_{\nu}^{\nu} A^{\nu} = A^{\nu}$$

$$\therefore A^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A'^{\mu}$$

وهو المطلوب.

مثال (٣):

أثبت أن حاصل ضرب متجهين أحدهما متغاير A_μ والآخر مضاد التغاير B^μ هو كمية لا متغيرة (Invariant).

الحل: المطلوب إثبات أن:

$$A_\mu B^\mu = A'_\mu B'^\mu = Inv$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

في S في S'

ولإثبات ذلك:

نكتب معادلات التحويل للمتجهين A_μ و B^μ (الرمز μ متكرر)

$$A'_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A_\mu, \quad B'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} B^\mu$$

بالضرب نحصل على:

$$\begin{aligned} A'_\alpha B'^\alpha &= \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A_\mu \right) \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} B^\mu \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} A_\mu B^\mu = A_\mu B^\mu \end{aligned}$$

$$\therefore A_\mu B^\mu = A'_\alpha B'^\alpha$$

ولكن α رمز ذمية (متكرر) فيمكن كتابته μ (مثلا)

$$\therefore A_\mu B^\mu = A'_\mu B'^\mu = Inv$$

وهو المطلوب.

المتدات: (Tensors)

تعرف المتدات بأنها كميات تخضع لقانون تحويل معين، وتنتج عن حاصل ضرب المتجهات المتغايرة ومضادة التغير.

وهي ثلاثة أنواع:

(1) متدات متغايرة (Covariant):

تنتج عن حاصل ضرب متجهين متغايرين A_α, B_β وتكتب بالصورة:

$$T_{\alpha\beta} = A_\alpha B_\beta$$

ويخضع الممتد المتغاير $T_{\alpha\beta}$ لقانون التحويل الآتي:

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta} \quad \rightarrow (1)$$

الإثبات:

نكتب قانون التحويل للمتجهين A_α, B_β

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A_\alpha, \quad B'_\nu = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} B_\beta$$

ويكون حاصل الضرب بالصورة:

$$A'_\mu B'_\nu = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A_\alpha \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} B_\beta \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A_\alpha B_\beta$$

وبكتابة

$$A'_\mu B'_\nu = T'_{\mu\nu}, \quad A_\alpha B_\beta = T_{\alpha\beta}$$

$$\therefore T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta} \quad \rightarrow (1)$$

وهو المطلوب.

(٢) ممتدات مضادة التغير (Contrariant):

تنتج عن حاصل ضرب متجهين مضاديين التغير A^α , B^β وتكتب بالصورة:

$$T^{\alpha\beta} = A^\alpha B^\beta$$

ويخضع الممتد مضاد التغير $T^{\alpha\beta}$ لقانون التحويل الآتي:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta} \quad \rightarrow (2)$$

الإثبات:

نكتب قانون التحويل للمتجهين A^α , B^β

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}, \quad B'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} B^{\beta}$$

ويكون حاصل الضرب بالصورة:

$$\begin{aligned} A'^{\mu} B'^{\nu} &= \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \right) \left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} B^{\beta} \right) \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} A^{\alpha} B^{\beta} \end{aligned}$$

وبكتابة:

$$A'^{\mu} B'^{\nu} = T'^{\mu\nu}, \quad A^{\alpha} B^{\beta} = T^{\alpha\beta}$$

$$\therefore T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta}$$

وهو المطلوب.

(٣) ممتدات مختلطة (Mixed):

تنتج عن حاصل ضرب متجهين أحدهما متغاير A_α والآخر مضاد التغاير B^β ، ويكتب بالصورة:

$$T_\alpha^\beta = A_\alpha B^\beta$$

ويخضع الممتد المختلط T_α^β لقانون التحويل:

$$T_\mu'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} T_\alpha^\beta \quad \rightarrow (3)$$

الإثبات:

بنفس الطريقة السابقة نكتب قانون التحويل للمتجهين A_α, B^β

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A_\alpha, \quad B'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} B^\beta$$

ويكون حاصل الضرب:

$$\begin{aligned} A'_\mu B'^\nu &= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A_\alpha \right) \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} B^\beta \right) \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} A_\alpha B^\beta \end{aligned}$$

ويكتابة:

$$T'_\mu = A'_\mu B'^\nu, \quad T_\alpha^\beta = A_\alpha B^\beta$$

$$\therefore T'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T_\alpha^\beta$$

$$\therefore T'_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} T_\alpha^\beta \quad \rightarrow (3)$$

وهو المطلوب.

مرتبة الممتد (rank):

تعرف مرتبة الممتد بأنها عدد الأدلة المرتبطة برمز الممتد.

فمثلا: الممتد $T_{\mu\nu}$ هو ممتد من المرتبة الثانية لأن عدد الأدلة اثنين μ, ν

الممتدات ذات المرتبة الأعلى من اثنين :

يوجد العديد من الممتدات ذات المرتبة الأعلى من اثنين، وكأمثلة على ذلك:-

$$(1) T_{\mu\nu\delta} \text{ ممتد متغاير من المرتبة الثالثة.}$$

$$(2) T^{\alpha\beta\gamma\delta} \text{ ممتد مضاد التغاير من المرتبة الرابعة.}$$

$$(3) T^{\alpha\beta}_{\mu\nu\delta} \text{ ممتد مختلط من المرتبة الخامسة.}$$

وتخضع هذه الممتدات لقوانين تحويل مماثلة.

الممتدات ذات المرتبة أقل من اثنين:

(1) المتجه سواء المتغاير (A_{μ}) أو مضاد التغاير (A^{μ}) يمكن اعتباره ممتدا من

الرتبة الأولى (لوجود دليل واحد μ).

(2) الكمية القياسية (ϕ) التي ليس لها مركبات، وبالتالي فلا تتميز بوجود دليل

لها، فهي ممتد من المرتبة صفر.

∴ المتجه هو ممتد من الرتبة الأولى

الكمية القياسية هي ممتد من الرتبة صفر.

رتبة الممتد (order) :

تعرف الرتبة بأنها عدد الأدلة من نوع معين، فمثلاً:

(1) $T_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ هو ممتد مختلط من المرتبة الرابعة (عدد الأدلة الكلي أربعة)، وهو

متغير من الرتبة الثانية (لوجود دليلين متغيرين أو سفليين) ، ومضاد

التغير من الرتبة الثانية أيضاً (لوجود دليلين مضادي التغير أو علويين).

(2) $T_{\alpha\beta}^{\mu\nu\delta}$ هو ممتد مختلط من الرتبة الخامسة، وهو متغير من الرتبة الثانية

ومضاد التغير من الرتبة الثالثة، وهكذا

∴ المرتبة: هي عدد الأدلة الكلي، الرتبة: هي عدد الأدلة من نوع معين

الممتدات (Tensors) والمصفوفات (Matrices):

مركبات الممتد $T_{\mu\nu}$ عندما $\mu, \nu = 1, 2, 3$ هي:

$$T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{31}, T_{32}, T_{33} .$$

∴ الممتد $T_{\mu\nu}$ (حيث $\mu, \nu = 1, 2, 3$) يكون له 9 مركبات، بينما المتجه

A_{μ} (حيث $\mu = 1, 2, 3$) له 3 مركبات فقط (A_1, A_2, A_3)

∴ الممتد هو امتداد لمفهوم المتجه.

ويمكن التعبير عن أي ممتد بمصفوفة عناصرها هي مركبات الممتد

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

تسمى المركبات T_{11} ، T_{22} ، T_{33} أي $T_{\mu\mu}$ بالمركبات القطرية (Diagonal Components) للممتد $T_{\mu\nu}$.

كما يسمى مجموع العناصر القطرية بالأثر (Trace)

$$T_r (T_{\mu\nu}) = \sum T_{\mu\mu} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

مركبات الممتد $T_{\mu\nu\delta}$:

بأخذ $\mu, \nu, \delta = 1, 2, 3$ نحصل على ٢٧ مركبة للممتد الثلاثي المرتبة $T_{\mu\nu\delta}$

وهي:

$$T_{111}, T_{112}, T_{113}, T_{121}, T_{122}, T_{123}, T_{131}, T_{132}, T_{133},$$

$$T_{211}, T_{212}, T_{213}, T_{221}, T_{222}, T_{223}, \dots$$

وهكذا بالنسبة للممتدات ذات المرتبات الأعلى.

أمثلة محلولة:

مثال (١) :

لكتب قانون التحويل من منظومة الإحداثيات $S(x^\mu)$ إلى المنظومة $S'(x'^\mu)$ وكذلك الخواص للممتدين :

$$(i) G_l^{mn} \quad , \quad (ii) D_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta}$$

الحل :

$$G_l^{mn} \quad \text{(i) الممتد}$$

قانون التحويل :

$$G_q'^{rp} = \frac{\partial x'^r}{\partial x^m} \frac{\partial x'^p}{\partial x^n} \frac{\partial x^l}{\partial x'^q} G_l^{mn}$$

الخواص: هو ممتد مختلط من المرتبة الثالثة وهو متغاير من الرتبة الأولى

ومضاد المتغاير من الرتبة الثانية.

(ii) الممتد $D_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta}$

قانون التحويل:

$$D_{pq\tau}^{\prime lm} = \frac{\partial x^{\prime l}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\prime m}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime p}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime q}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\prime \tau}} D_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta}$$

الخواص: هو ممتد مختلط من المرتبة الخامسة وهو متغاير من الرتبة الثالثة ومضاد التغاير من الرتبة الثانية.

مثال (٢):

إذا كانت $A(\alpha, \beta, \gamma)$ كمية تتحول من المنظومة S إلى المنظومة S' تبعاً للقانون:

$$A'(\mu, \nu, \sigma) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\prime \mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\prime \nu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\prime \sigma}} A(\alpha, \beta, \gamma)$$

فأثبت أن هذه الكمية تشكل ممتداً وانكر خواصه.

الحل: نكتب قانون التحويل للممتد الذي له نفس معاملات التحويل السابقة:

$$A'_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\prime \mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\prime \nu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\prime \sigma}} A_{\alpha\beta}^{\gamma}$$

ویمقارنة قانون التحويل المعطى للكمية $A(\alpha, \beta, \gamma)$

بقانون التحويل هذا، نجد أن:

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = A_{\alpha\beta}^{\gamma}$$

أي أنها تشكل ممتداً، وخواصه هي:

ممتد مختلط من المرتبة الثالثة، وهو متغاير من الرتبة الثانية ومضاد التغاير من الرتبة الأولى.

مثال (3):

أثبت أن دلتا كرونير تشكل ممثدا مختلطا من المرتبة الثانية.

الحل:

المطلوب إثبات أن دلتا كرونير δ_μ^ν تشكل ممثدا مختلطا من المرتبة الثانية وإثبات ذلك نثبت أن δ_μ^ν يجب أن تخضع لقانون التحويل الآتي:-

$$\delta_\beta^{\prime\alpha} = \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime\beta}} \delta_\mu^\nu \rightarrow (1)$$

ولإثبات ذلك: نبدأ بالطرف الأيمن:

$$\begin{aligned} R.H.S &= \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime\beta}} \delta_\mu^\nu = \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\prime\beta}} \delta_\nu^\nu \\ &= \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\prime\beta}} = \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^{\prime\beta}} = \delta_\beta^{\prime\alpha} = L.H.S \end{aligned}$$

حيث μ, ν رموز نمية فيمكن كتابة $\mu = \nu$

طريقة أخرى:

نبدأ بالطرف الأيسر ونستخدم تعريف دلتا كرونير

$$\begin{aligned} L.H.S &= \delta_\beta^{\prime\alpha} = \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^{\prime\beta}} = \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\prime\beta}} \\ &= \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime\beta}} = \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime\beta}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime\beta}} \delta_\mu^\nu = R.H.S \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (٤):

أثبت أنه إذا كانت مركبات ممتد تساوي صفرا في نظام إحداثيات معين فإنها تساوي صفرا في سائر أنظمة الإحداثيات.

الحل : نفرض أن مركبات الممتد في النظام $S(x^\mu)$ هي:

$$T_{\mu\nu\lambda \dots n} = 0 \quad (1) \quad \text{[ممتد من المرتبة } n \text{]}$$

بضرب طرفي هذه العلاقة في المعاملات:-

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu}, \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\nu}, \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\lambda}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial x'^n}$$

$$\therefore \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\lambda} \dots \frac{\partial x^n}{\partial x'^n} T_{\mu\nu\lambda \dots n} = 0 \quad \rightarrow (2)$$

ولكن من تعريف معاملات التحويل للممتدات فإن الطرف الأيسر من (٢) يكون:

$$T'_{\mu\nu\lambda \dots n}$$

$$\therefore T'_{\mu\nu\lambda \dots n} = 0 \quad \rightarrow (3)$$

من (٣) و(١) ينتج أنه إذا كانت المركبات $T_{\mu\nu\lambda \dots n}$ تساوي صفرا في S

فإنها تساوي صفرا في S' وبالتالي في أي نظام آخر.

وهو المطلوب .

ملحوظة: يوضح هذا المثال خاصية هامة للممتدات وهي احتفاظ الممتد بصورته

في أنظمة الإحداثيات المختلفة .

مثال (٥):

إذا كانت $x(p, q, r)$ كمية ما، وكان A_r^{qs} كمية ممتدة اختيارية بحيث أن

$$x(p, q, r)A_r^{qs} = 0$$

فان $x(p, q, r) = 0$ (أي أنه يمكن دائما اختيار $A_r^{qs} \neq 0$)

الحل: حيث أن A_r^{qs} هي كمية ممتدة اختيارية فباختيار مركبة واحدة لا تساوي صفرا (ولتكن المركبة ذات القيم $q=2, r=3$ أي المركبة A_3^{2s}) بينما كل المركبات الأخرى تساوي صفرا، إذن: $x(p, 2, 3)A_3^{2s} = 0$ وحيث أن $A_3^{2s} \neq 0$ فان $x(p, q, r) = 0$ ، وبأسلوب مماثل بأخذ كل التوافق للممكنة لقيم q, r يكون لدينا دائما $x(p, q, r) = 0$. وهو المطلوب.

ملحوظة:

تستخدم هذه النتيجة كثيرا في حل المسائل، ويتضح ذلك من الأمثلة التالية.

مثال (٦):

إذا كانت A^σ متجه مضاد التغير واختياري وكانت $A^\sigma B_{\mu\nu}$ تمثل ممتدا فاثبت أن $B_{\mu\nu}$ هو ممتد متغاير من المرتبة الثانية.

الحل: حيث أن الكمية $A^\sigma B_{\mu\nu}$ تمثل ممتدا فيمكن كتابته بالصورة $C_{\mu\nu}^\sigma$ ويكون قانون التحويل له:

$$C_{\beta\gamma}^{\prime\alpha} = \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime\beta}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\prime\gamma}} C_{\mu\nu}^\sigma$$

$$\begin{aligned}
 A'^{\alpha} B'_{\beta\gamma} &= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} A^{\sigma} B_{\mu\nu} \\
 &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma} B_{\mu\nu} \\
 &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} A'^{\alpha} B_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

$$\therefore A'^{\alpha} \left[B'_{\beta\gamma} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} B_{\mu\nu} \right] = 0$$

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma} \quad \text{حيث :}$$

وحيث أن $A'^{\alpha} \neq 0$ هو متجه اختياري فيمكن أخذه

$$\therefore B'_{\beta\gamma} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} B_{\mu\nu} = 0$$

$$\therefore B'_{\beta\gamma} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} B_{\mu\nu}$$

وهي معادلة تحويل لممتد $B_{\mu\nu}$ متغير من المرتبة الثانية وهو المطلوب.

مثال (٧):

إذا كان A^{μ}, B^{ν} متجهان مضادا للتغير واختياريان ، وكانت الكمية $(C_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu})$ تمثل كمية لا متغيرة ، فاثبت أن $C_{\mu\nu}$ يمثل ممتدا متغيرا من المرتبة الثانية.

الحل: حيث أن الكمية $(C_{\mu\nu} A^\mu B^\nu)$ هي كمية لا متغيرة (Invariant) :

$$\therefore C'_{\mu\nu} A'^\mu B'^\nu = C_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \rightarrow (1)$$

ومن قوانين التحويل للممتدين A^μ, B^ν :

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} A^\mu \rightarrow A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A'^\alpha \rightarrow (2)$$

(مثال سابق)

$$B'^\beta = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} B^\nu \rightarrow B^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} B'^\beta \rightarrow (3)$$

بالتعويض من (٣) و (٢) في الطرف الأيمن للمعادلة (١) :

$$\begin{aligned} C'_{\mu\nu} A'^\mu B'^\nu &= C_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A'^\alpha \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} B'^\beta \right) \\ &= C_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} A'^\alpha B'^\beta \end{aligned}$$

وحيث أن μ, ν في الطرف الأيسر هي رموز دمية (متكررة) فيمكن استبدالها بالرمزين α, β في هذا الطرف.

$$\begin{aligned} \therefore C'_{\alpha\beta} A'^\alpha B'^\beta &= C_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} A'^\alpha B'^\beta \\ A'^\alpha B'^\beta \left[C'_{\alpha\beta} - C_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \right] &= 0 \end{aligned}$$

وحيث أن $A'^{\alpha}, B'^{\beta} \neq 0$ اختياريان فيمكن أخذ

$$\therefore C'_{\alpha\beta} - C_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} = 0$$

$$\therefore C'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} = C_{\mu\nu}$$

وهذا يعني أن $C_{\mu\nu}$ تشكل ممتدا متغيرا من المرتبة الثانية ، وهو المطلوب.

مثال (٨):

أثبت أن تفاضلة دالة قياسية (لا متغيرة) ϕ هي أيضا كمية لا متغيرة (Invariant).

الحل:

حيث أن ϕ لا متغيرة

$$\therefore \phi' = \phi \rightarrow (1)$$

والمطلوب إثبات أن: $d\phi' = d\phi$

ولإثبات ذلك: من تعريف التفاضلة (Differential)

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \rightarrow (2)$$

$$d\phi' = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\mu}} dx'^{\mu} \rightarrow (3)$$

$$\phi = \phi(x^{\mu})$$

$$\phi' = \phi'(x'^{\mu})$$

أيضا فان:

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} \rightarrow (4)$$

بالتعويض من (٤) و(١) في (٣):

$$d\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} \right)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \quad \rightarrow (5)$$

(حيث أن β رمز دمية فيمكن كتابته يساوي μ)

من (٥) و(٢) ينتج أن $d\phi' = d\phi$

وهو المطلوب.

مثال (٩):

أثبت أن مشتقة دالة قياسية (أي ممتد من المرتبة الصفرية) تشكل متجهًا (أي

ممتدًا من المرتبة الأولى).

الحل: الدالة القياسية هي دالة لا متغيره ، أي أن:

$$\phi'(x'^{\mu}) = \phi(x^{\mu})$$

مشتقة هذه للدالة هي:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}} \rightarrow (1)$$

وبكتابة:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\mu}} = C'_{\mu} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}} = C_{\alpha}$$

فتصبح (١):

$$C'_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} C_{\alpha}$$

جبر الممتدات

وهي معادلة تحويل لمتجه (أي ممتد من المرتبة الأولى) متغاير وهذا يعني أن المشتقة $C_\alpha = \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}$ للدالة القياسية ϕ تشكل متجها (أي ممتدا من المرتبة الأولى)، وهو المطلوب.

مثال (١٠):

أثبت أن مشتقة ممتد من المرتبة الأولى (متجه) لا تشكل ممتدا (أي لا تخضع لقانون تحويل الممتدات).

الحل:

نعتبر الممتد من المرتبة الأولى هو المتجه المتغاير A_μ ولنكتب معادلة التحويل

$$A'_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A_\mu \quad \text{له:}$$

يتفاضل الطرفين بالنسبة إلى x'^β نحصل على للمشتقة بالصورة:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} &= \frac{\partial}{\partial x'^\beta} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A_\mu \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x'^\beta} \right) + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} A_\mu \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\beta} \right) + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} A_\mu \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\beta} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x'^\nu} \right) + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} A_\mu \end{aligned}$$

ويكتابة:

$$\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} = C'_{\alpha\beta} \quad , \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = C_{\mu\nu}$$

$$\therefore C'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} C_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} A_\mu$$

ونظرا لوجود الحد الثاني في الطرف الأيمن ، فإن المشتقة $C_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ لا تشكل

ممتدا لأنها لا تخضع لقانون تحويل الممتدات.

∴ مشتقة ممتد من المرتبة الأولى A_μ لا تكون ممتدا . وهو المطلوب .

العمليات الأساسية على الممتدات

(١) جمع وطرح الممتدات:

نظرية:

'حاصل جمع (أو الفرق بين) ممتدين من نفس المرتبة والنوع (الرتبة) يكون أيضا ممتدا من نفس المرتبة والنوع.'

الإثبات:

إذا كان $A_\mu^{\alpha\beta}, B_\mu^{\alpha\beta}$ ممتدان من نفس المرتبة والنوع (الرتبة الأولى متغايرة والثانية مضادة للتغاير).

$$A_\mu^{\alpha\beta} \pm B_\mu^{\alpha\beta} = C_\mu^{\alpha\beta} \quad \text{فان:}$$

ولإثبات ذلك: نكتب معادلات التحويل:

$$A_k'^{rs} = \frac{\partial x'^r}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^s}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^k} A_\mu^{\alpha\beta}$$

$$B_k'^{rs} = \frac{\partial x'^r}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^s}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^k} B_\mu^{\alpha\beta}$$

بالجمع (أو الطرح):

$$A_k'^{rs} \pm B_k'^{rs} = \frac{\partial x'^r}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^s}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^k} (A_\mu^{\alpha\beta} \pm B_\mu^{\alpha\beta})$$

$$C_k'^{rs} = \frac{\partial x'^r}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^s}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^k} C_\mu^{\alpha\beta}$$

أي أن الممتد $A_\mu^{\alpha\beta} \pm B_\mu^{\alpha\beta} = C_\mu^{\alpha\beta}$ هو ممتد من نفس المرتبة والنوع للممتدين

$$A_\mu^{\alpha\beta}, B_\mu^{\alpha\beta}$$

وهو المطلوب.

(٢) الضرب الخارجي (أو المعتاد) للممتدات : (Outer Product)

نظرية:

" حاصل الضرب الخارجي (أو المعتاد) لممتدين هو ممتد مرتبته تساوي مجموع مرتبتي الممتدين " .

الإثبات:

نعتبر الممتدين $A_\mu^{\alpha\beta}$, B_ν^γ فان حاصل ضربيهما الخارجي (أو المعتاد)

$$A_\mu^{\alpha\beta} B_\nu^\gamma = C_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma} \quad \text{هو:}$$

ولإثبات ذلك: معادلات التحويل للممتدين

$$A_\mu^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^m}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^l} A_\mu^{\alpha\beta}$$

$$B_i^{\gamma} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^i} B_\nu^\gamma$$

وبالضرب المعتاد (أو الخارجي):

$$\begin{aligned} A_i^{\alpha\beta} B_i^{\gamma} &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^m}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^i} A_\mu^{\alpha\beta} B_\nu^\gamma \\ &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^m}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^l} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^i} A_\mu^{\alpha\beta} B_\nu^\gamma \end{aligned}$$

$$C_{li}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^m}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^l} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^i} C_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma}$$

أي أن حاصل الضرب $A_\mu^{\alpha\beta} B_\nu^\gamma = C_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma}$ هو ممتد من المرتبة الخامسة وهي مجموع مرتبتي الممتدين $A_\mu^{\alpha\beta}$, B_ν^γ . وهو المطلوب .

(٣) التقليص (أو الانكماش) **Contraction** :

عملية التقليص أو الانكماش لممتد هي تقليل (أو إنقاص) مرتبة الممتد باثنين،
وتتم هذه العملية بمساواة دليل سفلي (متغير) بدليل علوي (مضادا لتعاير)

مثال: الممتد الخماسي $A_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma}$ يمكن تقليصه إلى الممتد الثلاثي المرتبة $B_v^{\beta\gamma}$

وذلك بمساواة $\alpha = \mu$

$$\therefore A_{\mu\nu}^{\mu\beta\gamma} = B_v^{\beta\gamma}$$

البرهان: نكتب معادلة التحويل للممتد الخماسي (الأصلي)

$$A_{ij}^{\prime mkl} = \frac{\partial x^{\prime m}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\prime l}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\prime k}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime i}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\prime j}} A_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma}$$

ونقليص هذا الممتد (تقليص مرتبته باثنين)

نضع $i = m$:

$$\begin{aligned} A_{mj}^{\prime mkl} &= \frac{\partial x^{\prime m}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\prime l}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\prime k}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime m}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\prime j}} A_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{\partial x^{\prime l}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\prime k}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\prime j}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime m}} \frac{\partial x^{\prime m}}{\partial x^\alpha} A_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{\partial x^{\prime l}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\prime k}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\prime j}} \delta_\alpha^\mu A_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma} \end{aligned}$$

$$\delta_\alpha^\mu A_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma} = A_\nu^{\beta\gamma}$$

ولكن:

$$\therefore A_{mj}^{\prime mkl} = \frac{\partial x^{\prime l}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\prime k}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\prime j}} A_\nu^{\beta\gamma}$$

وهذه معادلة تحويل ممتد ثلاثي بالصورة:

$$A_j'^{lk} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^j} A_\nu^{\beta\gamma}$$

وهذا يعني أن عملية التقليل حولت الممتد الخماسي $A_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma}$ إلى الممتد الثلاثي $A_\nu^{\beta\gamma}$ وذلك بوضع $\alpha = \mu$.

ملحوظة : يمكن إجراء عملية التقليل مرتين متتاليتين على نفس الممتد، فمثلا:

الممتد الخماسي $A_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma}$ يمكن تقليله وتحويله إلى الممتد الثلاثي $A_\nu^{\beta\gamma}$ بوضع $\alpha = \mu$ ، ومن الممتد الثلاثي $A_\nu^{\beta\gamma}$ يمكن الحصول على ممتد أحادي (أي متجه) بوضع $\beta = \nu$.

(٤) الضرب الداخلي (Inner Product)

تشمل هذه العملية مجموع عمليتين على التوالي :

(١) - ضرب خارجي + (٢) - تقليل

فمثلا: لإيجاد حاصل الضرب الداخلي للممتدين A_β^α ، $B_\sigma^{\mu\nu}$

(١) نجري عملية ضرب خارجي:

$$A_\beta^\alpha B_\sigma^{\mu\nu} = C_{\beta\sigma}^{\alpha\mu\nu}$$

(٢) نجري عملية تقليل للممتد الناتج:

فبوضع $\alpha = \beta$ نحصل على $C_{\beta\sigma}^{\beta\mu\nu} = D_\sigma^{\mu\nu}$ وبذلك فإن $D_\sigma^{\mu\nu}$ هو حاصل الضرب الداخلي للممتدين المعطيين.

أمثلة محلولة:

مثال (1):

كيف نحصل على ممتد من المرتبة الأولى (متجه) من الممتد الثلاثي المرتبة $A_{\mu\nu}^{\alpha}$ مع إجراء العمليات بالتفصيل.

الحل:

من الممتد الثلاثي $A_{\mu\nu}^{\alpha}$ يمكن الحصول على متجه (ممتد من المرتبة الأولى) بعملية تقليص (أو انكماش) كالتالي:

نكتب معادلة التحويل للممتد $A_{\mu\nu}^{\alpha}$:

$$A_{mn}^{\prime l} = \frac{\partial x^{\prime l}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime m}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime n}} A_{\mu\nu}^{\alpha}$$

بوضع $l = m$ لتقليص الممتد ، نحصل على:

$$\begin{aligned} A_{mn}^{\prime m} &= \frac{\partial x^{\prime m}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime m}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime n}} A_{\mu\nu}^{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime n}} A_{\mu\nu}^{\alpha} \\ &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime n}} \delta_{\alpha}^{\mu} A_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime n}} A_{\nu} \end{aligned}$$

$$\delta_{\alpha}^{\mu} A_{\mu\nu}^{\alpha} = A_{\nu}$$

حيث

وبالمقارنة مع الممتد $A'_n = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime n}} A_{\nu}$ نجد أن:

$$A_{mn}^{\prime m} = A'_n \quad \therefore A'_n = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime n}} A_{\nu}$$

أي أن عملية التقليص حولت الممتد $A_{\mu\nu}^{\alpha}$ الثلاثي المرتبة إلى الممتد A_{ν} الأحادي المرتبة. (المتجه) ، وهو المطلوب.

مثال (٢): أثبت الآتي:

- (i) تقليص الممتد المختلط A_μ^ν يعطى كمية لا متغيرة (Inv.)
(ii) حاصل الضرب الداخلي للمتجهين A^μ, B_ν هو كمية لا متغيرة.

الحل:

(١) معادلة التحويل للممتد A_μ^ν

$$A_{\beta}^{\prime\alpha} = \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime\beta}} A_{\mu}^{\nu}$$

لتقليص هذا الممتد:

نضع $\alpha = \beta$

$$A_{\beta}^{\prime\beta} = \frac{\partial x^{\prime\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime\beta}} A_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime\beta}} \frac{\partial x^{\prime\beta}}{\partial x^{\nu}} A_{\mu}^{\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} A_{\mu}^{\nu} = A = Inv.$$

حيث $\delta_{\nu}^{\mu} A_{\mu}^{\nu} = A$

(ii) معادلات التحويل للمتجهين A^μ, B_ν

$$A^{\prime\alpha} = \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu}, B'_{\beta} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\beta}} B_{\nu}$$

حاصل الضرب الداخلي = حاصل ضرب خارجي + تقليص.

أولاً: حاصل الضرب الخارجي:

$$A^{\prime\alpha} B'_{\beta} = \left(\frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} \right) \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\beta}} B_{\nu} \right) = \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\beta}} A^{\mu} B_{\nu}$$

$$\therefore C'_{\beta}{}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\beta}} C_{\nu}^{\mu}$$

ثانيا: عملية التقليل للممتد C_{ν}^{μ} :

تتم هذه العملية بوضع $\alpha = \beta$

$$\therefore C_{\beta}^{\prime\beta} = \frac{\partial x^{\prime\beta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\beta}} C_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\beta}} \frac{\partial x^{\prime\beta}}{\partial x^{\mu}} C_{\nu}^{\mu} = \delta_{\mu}^{\nu} C_{\nu}^{\mu} = C^{\mu}_{\mu} = Inv.$$

وهو المطلوب.

مثال (٣):

أثبت أن حاصل الضرب الداخلي للممتدين $C_{\mu\nu}^{\sigma}$, B_{β}^{α} هو ممتد من

للمرتبة الثالثة.

الحل:

معادلات التحويل للممتدين:

$$B_j^{\prime i} = \frac{\partial x^{\prime i}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\prime j}} B_{\beta}^{\alpha}$$

$$C_{mn}^{\prime l} = \frac{\partial x^{\prime l}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime m}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime n}} C_{\mu\nu}^{\sigma}$$

لإيجاد حاصل الضرب الداخلي: نجري عمليتين متتاليتين هما:

(i) ضرب خارجي:

$$B_j^{\prime i} C_{mn}^{\prime l} = \frac{\partial x^{\prime i}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\prime j}} \frac{\partial x^{\prime l}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime m}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime n}} B_{\beta}^{\alpha} C_{\mu\nu}^{\sigma}$$

$$D_{jmn}^{\prime il} = \frac{\partial x^{\prime i}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\prime j}} \frac{\partial x^{\prime l}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime m}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime n}} D_{\beta\mu\nu}^{\alpha\sigma}$$

(ii) تقليص:

وتأتي بأخذ $i = j$ (مثلا) فنحصل على:

$$\begin{aligned} D'_{jmn}{}^{jl} &= \frac{\partial x'^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^l}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^m} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^n} D_{\beta\mu\nu}{}^{\alpha\sigma} \\ &= \delta_\alpha^\beta \frac{\partial x'^l}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^m} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^n} D_{\beta\mu\nu}{}^{\alpha\sigma} \\ &= \frac{\partial x'^l}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^m} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^n} \delta_\alpha^\beta D_{\beta\mu\nu}{}^{\alpha\sigma} \\ &= \frac{\partial x'^l}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^m} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^n} D_{\mu\nu}{}^\sigma \end{aligned}$$

حيث

$$\delta_\alpha^\beta D_{\beta\mu\nu}{}^{\alpha\sigma} = D_{\mu\nu}{}^\sigma$$

المعادلة السابقة تكافئ معادلة تحويل للممتد:

$$D'_{mn}{}^{l} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^m} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^n} D_{\mu\nu}{}^\sigma$$

أي أن حاصل الضرب الداخلي للممتدين $B_\beta^\alpha, C_{\mu\nu}^\sigma$ هو الممتد ذو المرتبة الثالثة $D_{\mu\nu}^\sigma$ وهو المطلوب.

نظرية خارج القسمة: تنص هذه النظرية على الآتي:

" إذا كانت $x(\mu, \nu)$ هي كمية ما، وكان حاصل ضربها الخارجي مع ممتد

اختياري يساوي ممتدا آخر فان $x(\mu, \nu)$ تكون نفسها ممتدا"

الإثبات:

إذا كانت $x(\mu, \nu)$ هي كمية ما، وكان حاصل ضربها الخارجي مع ممتد اختياري A_μ (من المرتبة الأولى للتبسيط) هو: $x(\mu, \nu) A_\mu = B_\nu$ حيث B_ν هو ممتد آخر فالمطلوب إثبات أن $x(\mu, \nu)$ تشكل ممتدا.

ولإثبات ذلك: نكتب معادلة التحويل للممتد الاختياري A_μ :

$$A'_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A_\mu \quad \rightarrow (1)$$

وإذا انتقلنا إلى نظام آخر للإحداثيات فيمكننا كتابة:

$$x'(\alpha, \beta) A'_\alpha = B'_\beta \quad \rightarrow (2)$$

حيث (من رأس المعادلة):

$$x(\mu, \nu) A_\mu = B_\nu \quad \rightarrow (3)$$

ولكن:

$$\begin{aligned} B'_\beta &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} B_\nu \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} [x(\mu, \nu) A_\mu] \quad \rightarrow (4) \end{aligned}$$

بالتعويض في (٢):

$$\begin{aligned} \therefore x'(\alpha, \beta) A'_\alpha &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} x(\mu, \nu) A_\mu \\ \therefore x'(\alpha, \beta) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} x(\mu, \nu) A_\mu \end{aligned}$$

بالمضرب في $\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}$:

$$\therefore x'(\alpha, \beta) A_{\mu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} x(\mu, \nu) A_{\mu}$$

$$\therefore [x'(\alpha, \beta) - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} x(\mu, \nu)] A_{\mu} = 0$$

وحيث أن A_{μ} هو ممتد اختياري فيمكن أخذه $A_{\mu} \neq 0$

وبذلك فإن:

$$x'(\alpha, \beta) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} x(\mu, \nu)$$

وبكتابة معادلة التحويل:

$$T_{\beta}^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} T_{\nu}^{\mu}$$

نجد أن $x(\mu, \nu) = T_{\nu}^{\mu}$ أي أن $x(\mu, \nu)$ تشكل ممتدا . وهو المطلوب.

أمثلة على نظرية خارج القسمة:

مثال (1):

إذا كانت $C(\mu, \nu)$ هي كمية ما، وكان A^μ, B^ν ممتدان اختياريان (متجهان مضادا للتغاير) وكان حاصل الضرب $C(\mu, \nu) A^\mu B^\nu$ يمثل ممتدا من المرتبة الصفيرية (أي كمية لا متغيرة) فاثبت أن $C(\mu, \nu)$ تشكل ممتدا وانكر خواصه.

الحل: معادلات التحويل للممتدين A^μ, B^ν :

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} A^\mu \rightarrow A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A'^\alpha \rightarrow (1)$$

$$B'^\beta = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} B^\nu \rightarrow B^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} B'^\beta \rightarrow (2)$$

وحيث أن $C(\mu, \nu) A^\mu B^\nu$ هي كمية لا متغيرة.

$$\therefore C'(\mu, \nu) A'^\mu B'^\nu = C(\mu, \nu) A^\mu B^\nu \rightarrow (3)$$

بالتعويض من (2) و (1) في الطرف الأيمن من (3) نحصل على:

$$\begin{aligned} C'(\mu, \nu) A'^\mu B'^\nu &= C(\mu, \nu) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A'^\alpha \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} B'^\beta \right) \\ &= C(\mu, \nu) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} A'^\alpha B'^\beta \end{aligned}$$

وحيث أن μ, ν هي رموز دمية فيمكن استبدالها في التعبير الموجود في الطرف الأيسر بالرمزين α, β .

$$C'(\alpha, \beta) A'^{\alpha} B'^{\beta} = C(\mu, \nu) \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} A'^{\alpha} B'^{\beta}$$

$$\therefore [C'(\alpha, \beta) - (\mu, \nu) \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}] A'^{\alpha} B'^{\beta} = 0$$

وحيث أن A'^{α}, B'^{β} اختياريان فيمكن أخذ $A'^{\alpha} B'^{\beta} \neq 0$

$$\therefore C'(\alpha, \beta) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} C(\mu, \nu)$$

وهي معادلة تحويل لممتد صورته:

$$T'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} T_{\mu\nu}$$

فبالمقارنة نجد أن: $C(\mu, \nu) = T_{\mu\nu}$

أي أنها تشكل ممتدا متغيرا من المرتبة الثانية، وهو المطلوب.

مثال (٢):

إذا كانت $C(\mu, \nu)$ هي كمية ما، وكان A_{α}^{ν} هو ممتد اختياري لا يساوي صفرا، وكان حاصل الضرب $C(\mu, \nu) A_{\alpha}^{\nu} = B_{\alpha}^{\mu}$ حيث B_{α}^{μ} هو ممتد آخر، أثبت أن $C(\mu, \nu)$ يشكل ممتد وانكر خواصه.

الحل: معادلة التحويل للممتد الاختياري A_{α}^{ν}

$$A'^s_r = \frac{\partial x'^s}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^r} A_{\alpha}^{\nu} \rightarrow (1)$$

ومن رأس المسألة فإن

$$C(\mu, \nu) A_{\alpha}^{\nu} = B_{\alpha}^{\mu} \rightarrow (2)$$

وفي تحويل للإحداثيات يمكننا كتابة:

$$\begin{aligned} C'(p,s)A_r^s &= B_r^p = \frac{\partial x'^p}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^r} B_\alpha^\mu \\ &= \frac{\partial x'^p}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^r} C(\mu,\nu)A_\alpha^\nu \end{aligned} \quad [\text{من (2)}]$$

وباستخدام (1) نحصل على:

$$\begin{aligned} C'(p,s) \frac{\partial x'^s}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^r} A_\alpha^\nu &= \frac{\partial x'^p}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^r} C(\mu,\nu)A_\alpha^\nu \\ &: \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^s} \frac{\partial x'^r}{\partial x^\alpha} \right) \text{ وبالضرب في} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore C'(p,s)A_\alpha^\nu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^s} \frac{\partial x'^r}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^p}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^r} C(\mu,\nu)A_\alpha^\nu \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^s} \frac{\partial x'^p}{\partial x^\mu} C(\mu,\nu)A_\alpha^\nu \end{aligned}$$

$$\therefore \left[C'(p,s) - \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^s} \frac{\partial x'^p}{\partial x^\mu} C(\mu,\nu) \right] A_\alpha^\nu = 0$$

وحيث أن A_α^ν لا يساوي صفرا فان:

$$C'(p,s) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^s} \frac{\partial x'^p}{\partial x^\mu} C(\mu,\nu)$$

وهي معادلة تحويل لممتد صورته:

$$T_s'^p = \frac{\partial x'^p}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^s} T_\nu^\mu$$

$$C(\mu,\nu) = T_\nu^\mu \quad \text{فبالمقارنة نجد أن:}$$

أي أنها تشكل ممتدا مختلطا من المرتبة الثانية، وهو المطلوب .

المتجه المتماثل و المتجه مضاد التماثل:

(1) يعرف المتجه المتماثل بالعلاقة: $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ ،

(متماثل في الدليلين μ, ν)

أيضا: إذا كان $A_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = A_{\mu\nu}^{\beta\alpha}$ فإنه يكون متماثلا في الدليلين α, β

(2) يعرف المتجه مضاد التماثل بالعلاقة: $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$

(مضاد التماثل في μ, ν)

أيضا: إذا كان $A_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = -A_{\mu\nu}^{\beta\alpha}$ فإنه يكون مضاد التماثل في μ, ν

ملحوظة: ينطبق التعريف السابق على المتجه مضاد التماثل

$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$ (متماثل)، $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ (مضاد التماثل).

أمثلة محلولة:

مثال (1):

لثبت أن المركبات القطرية للمتجه مضاد التماثل تساوي صفرا.

الحل: من تعريف المتجه مضاد التماثل $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$

$$\therefore A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu} = 0$$

وفي حالة المركبات القطرية فإن: $\mu = \nu$

$$\therefore A_{\mu\mu} + A_{\mu\mu} = 0$$

$$\therefore 2A_{\mu\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad A_{\mu\mu} = 0$$

أي أن المركبات القطرية $A_{11}, A_{22}, A_{33}, \dots$ للمتجه مضاد التماثل

تساوي أصفارا. وهو المطلوب .

مثال (٢):

أثبت أن أي ممتد يمكن كتابته كمجموع ممتدين أحدهما متماثل والآخر مضاد التماثل في زوج من الأدلة المتغيرة أو مضادة التغير.

الحل: في حالة الممتد المتغير $A_{\mu\nu}$:

يمكن كتابة $A_{\mu\nu}$ بالصورة:

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) = B_{\mu\nu} + C_{\mu\nu}$$

ويمكن إثبات أن $B_{\mu\nu}$ ، وبذلك هو ممتد متماثل، بينما $C_{\mu\nu}$ هو ممتد مضاد التماثل، وبذلك يثبت المطلوب.

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(A_{\nu\mu} + A_{\mu\nu}) = B_{\nu\mu}$$

أي أن $B_{\mu\nu}$ هو ممتد متماثل

$$C_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) = -\frac{1}{2}(A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu}) = -C_{\nu\mu}$$

أي أن $C_{\mu\nu}$ هو ممتد مضاد التماثل وهو المطلوب.

ويمكن إثبات هذه الخاصية في حالة للممتد مضاد التغير $A^{\mu\nu}$ بنفس الطريقة.

مثال (٣):

أثبت أنه إذا كان هناك ممتدا متماثلا (أو مضاد التماثل) بالنسبة لأي دليلين في نظام للإحداثيات فإنه يظل متماثلا (أو مضاد التماثل) بالنسبة لنفس الدليلين في أي نظام آخر.

الحل:

(i) في حالة الممتد $A_{\alpha\beta}$ المتغير والمتماثل في الدليلين α, β :

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$$

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A_{\beta\alpha} = A'_{\nu\mu}$$

أي أنه إذا كان $A_{\alpha\beta}$ متماثلاً في النظام $S(x^\mu)$ فإنه يكون متماثلاً أيضاً في النظام $S'(x'^\mu)$ بالنسبة لـ α, β .

(ii) في حالة الممتد $A^{\alpha\beta}$ مضاد للتغير ومضاد للتماثل في الدليلين α, β

$$A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}$$

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} A^{\alpha\beta} = -\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^{\beta\alpha} = -A'^{\nu\mu}$$

أي أنه إذا كان $A^{\alpha\beta}$ مضاداً للتماثل في النظام $S(x^\mu)$ فإنه يظل مضاداً للتماثل في النظام $S'(x'^\mu)$ بالنسبة لـ α, β .

مثال (٤):

إذا كان A^{pq}, B_{rs} ممتدان مضادا للتماثل فاثبت أن:

حاصل ضربيهما $A^{pq}B_{rs} = C^{pq}_{rs}$ هو ممتد تماثل في زوجي الأضلة المتغيرة (r, s) ومضادة للتغير (p, q) .

الحل:

المطلوب إثبات أن $C^{qp}_{sr} = C^{pq}_{rs}$ ، حيث أن A^{pq}, B_{rs} ممتدان مضادا للتماثل

$$\therefore A^{pq} = -A^{qp}, \quad B_{rs} = -B_{sr}$$

جبر الممتدات

وحيث أن: $C_{rs}^{pq} = A^{pq} B_{rs}$ وبقييل وضع الألية (r, s) ، (q, p) في الطرفين :

$$\therefore C_{sr}^{qp} = A^{qp} B_{sr} = (-A^{pq})(-B_{rs}) = A^{pq} B_{rs} = C_{rs}^{pq}$$

وهو المطلوب.

مثال (٥):

إذا كان $A^{\alpha\beta}$ ممتد مضاد التماثل وكان B_α, B_β متجهان متغايران ، فاثبت

$$\text{أن : } A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta = 0$$

الحل:

حيث أن $A^{\alpha\beta}$ مضاد التماثل فان: $A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}$ وباعتبار الكمية $A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta$ ويتبادل الأتلة:

$$A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta = A^{\beta\alpha} B_\beta B_\alpha = (-A^{\alpha\beta}) B_\beta B_\alpha = -A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta$$

$$\therefore A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta + A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta = 0$$

$$\therefore 2 A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta = 0 \quad \rightarrow \quad A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta = 0$$

وهو المطلوب.

مسألة إذا كان $A_{\alpha\beta}$ ممتد مضاد التماثل وكان A^α, B^β متجهان مضادا

$$\text{التغير ، فاثبت أن } A_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = 0$$

مثال (٦): إذا كان $A_{\mu\nu}$ ممتدا مضاد التماثل فاثبت أن:

$$(B_\alpha^\mu B_\beta^\nu + B_\beta^\mu B_\alpha^\nu) A_{\mu\nu} = 0$$

الحل: حيث أن $A_{\mu\nu}$ ممتدا مضاد التماثل فان $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ وباعتبار الكمية

$$(B_\alpha^\mu B_\beta^\nu A_{\mu\nu})$$

وبتبادل موضع الدليلين (μ, ν) نحصل على:

$$\begin{aligned} B_{\alpha}^{\mu} B_{\beta}^{\nu} A_{\mu\nu} &= B_{\alpha}^{\nu} B_{\beta}^{\mu} A_{\nu\mu} \\ &= B_{\alpha}^{\nu} B_{\beta}^{\mu} (-A_{\mu\nu}) = -B_{\beta}^{\mu} B_{\alpha}^{\nu} A_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\therefore B_{\alpha}^{\mu} B_{\beta}^{\nu} A_{\mu\nu} + B_{\beta}^{\mu} B_{\alpha}^{\nu} A_{\mu\nu} = 0$$

$$(B_{\alpha}^{\mu} B_{\beta}^{\nu} + B_{\beta}^{\mu} B_{\alpha}^{\nu}) A_{\mu\nu} = 0$$

وهو المطلوب.

مثال (٧): إذا كان $A_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ ممتداً فأثبت أن:

$$(i) \quad (A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + A_{\beta\alpha}^{\nu\mu}) \text{ يكون ممتداً متماثلاً.}$$

$$(ii) \quad (A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} - A_{\beta\alpha}^{\nu\mu}) \text{ يكون ممتداً مضاداً التماثل.}$$

الحل:

$$(i) \text{ نفرض أن: } C_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + A_{\beta\alpha}^{\nu\mu}$$

فبتغيير مواضع الأدلة نحصل على:

$$C_{\beta\alpha}^{\nu\mu} = A_{\beta\alpha}^{\nu\mu} + A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + A_{\beta\alpha}^{\nu\mu} = C_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$$

أي أن $C_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + A_{\beta\alpha}^{\nu\mu}$ هو ممتد متماثل.

$$(ii) \text{ نفرض أن } D_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} - A_{\beta\alpha}^{\nu\mu}$$

فبتغيير مواضع الأدلة نحصل على:

$$D_{\beta\alpha}^{\nu\mu} = A_{\beta\alpha}^{\nu\mu} - A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = -(A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} - A_{\beta\alpha}^{\nu\mu}) = -D_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$$

أي أن $D_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} - A_{\beta\alpha}^{\nu\mu}$ هو ممتد مضاد التماثل. وهو المطلوب.

مسائل عامة على جبر الممتدات

(١) أكتب قانون التحويل للممتدات الآتية، مع ذكر خواص كل منها:

$$A_\alpha, B_{\alpha\beta}, C^i_j, D^i_k$$

(٢) أثبت الخواص الآتية لدلتا كرونكير:

$$(i) \delta_q^p A_p^{rs} = A_q^{rs}$$

$$(ii) \delta_q^p \delta_s^r A^{qs} = A^{pr}$$

$$(iii) \delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r = \delta_s^p$$

$$(iv) \delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r \delta_p^s = 1$$

(٣) بين ما إذا كانت للكمية $A(j, k, m, l)$ التي تتحول من نظام إحداثيات إلى نظام آخر تبعا للقانون:

$$A'(p, q, r, s) = \frac{\partial x^j}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^q}{\partial x^k} \frac{\partial x'^r}{\partial x^m} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} A(j, k, m, l)$$

هي كمية ممتدة أم لا، وإذا كانت تشكل ممثدا فانكر مرتبته ورتبته المتغايرة ومضادة للتغاير.

$$A_r'^p = \frac{\partial x'^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial x'^r} A_s^q \quad (٤) \text{ إذا كانت}$$

$$A_s^q = \frac{\partial x^q}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} A_r'^p \quad \text{فأثبت أن:}$$

(٥) إذا كان A^μ, B_ν متجهان أحدهما مضاد للتغاير والآخر متغاير، فأثبت أن حاصل ضربيهما $(A^\mu B_\nu)$ هو ممتد مختلط من المرتبة الثانية.

(٦) إذا كان B_μ, A_β^α ممتدان فاقبث أن حاصل ضربهما $A_\beta^\alpha B_\mu$ هو ممتد أيضا، وأنكر خواصه.

(٧) إذا كان A_r^{pq} ممتدا من المرتبة الثالثة فاقبث أن: A_r^{pq} هو ممتد مضاد التغير من المرتبة الأولى (أي متجه مضاد التغير).

(٨) إذا كان $A_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta}$ ممتدا من المرتبة الخامسة فبين كيف تحصل منه على ممتد من المرتبة الأولى (أي متجه)

(٩) إذا كان A_{rs}^{pq} ممتدا من المرتبة الرابعة فاقبث أن عملية الانكماش (أو التقليل) الثنائي له يعطي كمية لا متغيرة (أي مقدارا قياسيا).

(١٠) إذا كان A_{pq}, B^{rs} ممتدان فاقبث أن:

- (i) حاصل الضرب الخارجي لهما هو ممتد من المرتبة الرابعة
- (ii) حاصل الضرب الداخلي لهما يمكن أن يكون ممتدا من المرتبة الثانية أو الصفرية.

(١١) إذا كانت $x(\mu, \nu)$ كمية ما، وكان حاصل ضربها مع الممتد مضاد التغير والاختياري $A^{\nu\sigma}$ هو ممتد آخر $B^{\mu\sigma}$: أي أن $x(\mu, \nu) A^{\nu\sigma} = B^{\mu\sigma}$ فاقبث أن $x(\mu, \nu)$ هي كمية ممتدة.

(١٢) إذا كانت $A(p, q, r)$ كمية ما، وكان حاصل ضربها مع الممتد المختلط الاختياري B_r^{qs} هو ممتد آخر C_p^s ، أي أن: $A(p, q, r) B_r^{qs} = C_p^s$ فاقبث أن $A(p, q, r)$ هي كمية ممتدة

حلول مسائل الباب الأول في الممتدات

جبر الممتدات

مسألة (١):

قوانين التحويل للممتدات:

$$(i) A_{\alpha} : A'_{m} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{m}} A_{\alpha}$$

ممتد من المرتبة الأولى (متجه) متغير :

$$(ii) B_{\alpha\beta} : B'_{mn} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{m}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{n}} B_{\alpha\beta}$$

ممتد من المرتبة الثانية متغير :

$$(iii) C_{k}^{ij} : C'_{\alpha}{}^{\beta\gamma} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^i} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^{\alpha}} C_{k}^{ij}$$

ممتد مختلط من المرتبة الثالثة متغير من الرتبة الأولى ومضاد المتغير من الرتبة الثانية.

$$(iv) D_{kl}^{ij} : D'_{\gamma\delta}{}^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x^l}{\partial x'^{\delta}} D_{kl}^{ij}$$

ممتد مختلط من المرتبة الرابعة متغير من الرتبة الثانية ومضاد المتغير من الرتبة الثانية.

مسألة (٢):

$$(i) \delta_q^p A_p^{rs} = \delta_q^p A_q^{rs} = A_q^{rs}$$

(بوضع $p=q$ واعتبار أن $\delta_q^p = 1$)

$$(ii) \delta_q^p \delta_s^r A^{qs} = \delta_p^p \delta_s^r A^{ps} = \delta_s^r A^{ps} = \delta_r^r A^{pr} = A^{pr}$$

(بوضع $q = p$ واعتبار أن $\delta_p^p = 1$ ثم بوضع $s = r$ واعتبار أن $\delta_r^r = 1$)

$$(iii) \delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r = \delta_p^p \delta_r^p \delta_s^r = \delta_r^p \delta_s^r = \delta_p^p \delta_s^p = \delta_s^p$$

(بوضع $q = p$ واعتبار أن $\delta_p^p = 1$ ثم بوضع $r = p$ واعتبار أن $\delta_p^p = 1$)

طريقة أخرى: باستخدام تعريف دلتا كرونكير:

$$\delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r = \left(\frac{\partial x^p}{\partial x^q} \right) \left(\frac{\partial x^q}{\partial x^r} \right) \left(\frac{\partial x^r}{\partial x^s} \right) = \frac{\partial x^p}{\partial x^s} = \delta_s^p$$

$$(iv) \delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r \delta_p^s = \delta_p^p \delta_r^p \delta_s^r \delta_p^s = \delta_r^p \delta_s^r \delta_p^s$$

$$= \delta_p^p \delta_s^p \delta_p^s = \delta_s^p \delta_p^s = \delta_p^p \delta_p^p = 1.1 = 1$$

(بوضع $q = p$ ثم $r = p$ ثم $s = p$ واعتبار أن $\delta_p^p = 1$)

طريقة أخرى: باستخدام دلتا كرونكير:

$$\delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r \delta_p^s = \frac{\partial x^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial x^p} = \frac{\partial x^p}{\partial x^p} = 1$$

مسألة (3):

الكمية المعطاة تتغير طبقا لقانون التحويل:

$$A'(p, q, r, s) = \frac{\partial x^j}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^q}{\partial x^k} \frac{\partial x'^r}{\partial x^m} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} A(j, k, m, l) \rightarrow (1)$$

وبمقارنتها بالممتد الذي له نفس معاملات التحويل:

$$A_p'^{qrs} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^q}{\partial x^k} \frac{\partial x'^r}{\partial x^m} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} A_j^{kml} \rightarrow (2)$$

نجد أن الكمية $A(j, k, m, l) = A_j^{kml}$ فهي تشكل ممتدا من المرتبة الرابعة وهو متغاير من الرتبة الأولى ومضاد المتغاير من الرتبة الثالثة

مسألة (٤) :

حيث أن :

$$A_r'^p = \frac{\partial x'^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial x'^r} A_s^q$$

فبضرب الطرفين في $\frac{\partial x^q}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^r}{\partial x^s}$ نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^q}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} A_r'^p &= \frac{\partial x^q}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} \frac{\partial x'^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial x'^r} A_s^q \\ &= \frac{\partial x^q}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^p}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial x'^r} \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} A_s^q \\ &= \delta_q^q \cdot \delta_s^s A_s^q = A_s^q \end{aligned}$$

$$\therefore A_s^q = \frac{\partial x^q}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} A_r'^p$$

وهو المطلوب.

مسألة (٥) : قانون التحويل للممتدين A^μ, B_ν

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} A^\mu, B'_\beta = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} B_\nu$$

$$\therefore A'^\alpha B'_\beta = \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} A^\mu \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} B_\nu \right) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} A^\mu B_\nu$$

ويكتابة $A'^{\alpha} B'_{\beta} = C'^{\alpha}_{\beta}$, $A^{\mu} B_{\nu} = C^{\mu}_{\nu}$

$$\therefore C'^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} C^{\mu}_{\nu}$$

أي أن حاصل الضرب $C^{\mu}_{\nu} = A^{\mu} B_{\nu}$ يشكل ممتداً مختلطاً من المرتبة الثانية.

مسألة (٦): قوانين التحويل للممتدين A^{α}, B_{μ} :

$$A'^m_n = \frac{\partial x'^m}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^n} A^{\alpha}_{\beta}, B'_i = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^i} B_{\mu}$$

$$A'^m_n B'_i = \frac{\partial x'^m}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^n} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^i} A^{\alpha}_{\beta} B_{\mu} \quad \text{حاصل للضرب:}$$

وبمقارنة حاصل للضرب هذا بالممتد الذي له نفس معاملات التحويل:

$$C'^{im}_{ni} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^n} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^i} C^{\alpha}_{\beta\mu}$$

نجد أن حاصل الضرب $C^{\alpha}_{\beta\mu} = A^{\alpha}_{\beta} B_{\mu}$ هو ممتد، وهو مختلط من المرتبة الثالثة، متغاير من للرتبة الثانية ومضاد التغير من للرتبة الأولى.

مسألة (٧): بكتابة قانون التحويل للممتد A_r^{pq} :

$$A'^{\alpha\beta}_{\gamma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^p} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial x'^{\gamma}} A_r^{pq}$$

وبأخذ $\beta = \gamma$ (أي بإجراء عملية انكماش):

$$\begin{aligned} \therefore A'^{\alpha\gamma}_{\gamma} &= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^p} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial x'^{\gamma}} A_r^{pq} \\ &= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^p} \delta^r_q A_r^{pq} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^p} \delta^r_r A_r^{pr} = A_r^{pr} \end{aligned}$$

جبر المتندات

وهو ممتد مضاد للتغاير من المرتبة الأولى حيث أن قانون تحويله هو:

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} A^{\rho} \quad \therefore A_r^{pr} = A^p$$

وهو المطلوب.

مسألة (٨): قانون التحويل للممتد $A_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta}$:

$$A'_{lpq}{}^{mn} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^n}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^l} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^p} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^q} A_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta} \quad (1)$$

بوضع $m = l$ (أي بإجراء عملية الانكماش) في (١):

$$\begin{aligned} A'_{lpq}{}^{ln} &= \frac{\partial x'^l}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^n}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^l} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^p} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^q} A_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^l}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^n}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^p} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^q} A_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial x'^n}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^p} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^q} \delta_{\alpha}^{\mu} A_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial x'^n}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^p} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^q} \delta_{\alpha}^{\alpha} A_{\alpha\nu\sigma}^{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial x'^n}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^p} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^q} A_{\alpha\nu\sigma}^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

وبمقارنة هذه العلاقة بالعلاقة:

$$A'_{pq}{}^{ln} = \frac{\partial x'^n}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^p} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^q} A_{\nu\sigma}^{\beta} \quad \rightarrow (2)$$

$$A_{\alpha\nu\sigma}^{\alpha\beta} = A_{\nu\sigma}^{\beta} \quad \text{نجد أن :}$$

وبإجراء عملية الانكماش الثانية: - بوضع $n = p$ في (٢) :

$$\begin{aligned} A_{pq}^{\prime p} &= \frac{\partial x^{\prime p}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime p}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\prime q}} A_{\nu\sigma}^{\beta} \\ &= \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\prime q}} \delta_{\beta}^{\nu} A_{\nu\sigma}^{\beta} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\prime q}} \delta_{\nu}^{\nu} A_{\nu\sigma}^{\nu} \end{aligned}$$

وبمقارنة هذه العلاقة بالعلاقة:

$$A_{\nu\sigma}^{\nu} = A_{\sigma} \quad \text{نجد أن } A_{q}^{\prime} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\prime q}} A_{\sigma}$$

أي أننا حصلنا على ممتد من المرتبة الأولى (متجه) بإجراء عمليتي انكماش متتاليتين للممتد الخماسي المعطى $A_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta}$.

مسألة (٩) : قانون التحويل للممتد A_{rs}^{pq} :

$$A_{\gamma\delta}^{\prime\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\prime\alpha}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{\prime\beta}}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial x^{\prime\gamma}} \frac{\partial x^s}{\partial x^{\prime\delta}} A_{rs}^{pq} \quad \rightarrow (1)$$

بإجراء الانكماش الأول: بوضع $\alpha = \gamma$

$$\begin{aligned} A_{\gamma\delta}^{\prime\alpha\beta} &= \frac{\partial x^{\prime\gamma}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{\prime\beta}}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial x^{\prime\gamma}} \frac{\partial x^s}{\partial x^{\prime\delta}} A_{rs}^{pq} \\ &= \frac{\partial x^{\prime\beta}}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial x^{\prime\delta}} \delta_p^r A_{rs}^{pq} = \frac{\partial x^{\prime\beta}}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial x^{\prime\delta}} \delta_r^r A_{rs}^{pq} \\ &= \frac{\partial x^{\prime\beta}}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial x^{\prime\delta}} A_{rs}^{pq} \end{aligned}$$

وبمقارنة هذه العلاقة بالعلاقة : $A'_\delta{}^\beta = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial x'^\delta} A_s^q$ نجد أن :

$$A_{rs}^{rq} = A_s^q$$

وبإجراء الإنكماش الثاني : بوضع $\delta = \beta$ فإن :

$$A'^{\beta}{}_\beta = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial x'^\beta} A_s^q = \delta_q^s A_s^q = \delta_s^s A_s^s = A_s^s$$

وحيث أن s دليل دمية (متحرك) فيمكن أخذه يساوي β ونحصل على :

$$A'^{\beta}{}_\beta = A_\beta^\beta, \text{ وهو قانون تحويل لكمية قياسية (لا متغيرة)،}$$

وهو المطلوب.

مسألة (١٠) : معادلات التحويل للممتدين A_{pq}, B^{rs}

$$A'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^q}{\partial x'^\beta} A_{pq}, B'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^r} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^s} B^{rs}$$

(١) حاصل الضرب الخارجي:

$$A'_{\alpha\beta} B'^{\mu\nu} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^q}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^r} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^s} A_{pq} B^{rs}$$

$$C'_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^r} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^s} \frac{\partial x^p}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^q}{\partial x'^\beta} C_{pq}{}^{rs} \rightarrow (1)$$

وهو ما يشكل ممتد من المرتبة الرابعة .

(ii) حاصل الضرب الداخلي:

هو حاصل ضرب خارجي + عملية انكماش وقد أجرينا الضرب الخارجي

في (1) ولإجراء عملية الانكماش: نضع $\mu = \alpha$

$$\begin{aligned} \therefore C'_{\alpha\beta}{}^{\alpha\nu} &= \frac{\partial x'}{\partial x^r} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^s} \frac{\partial x^p}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^q}{\partial x'^{\beta}} C_{pq}{}^{rs} \\ &= \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^s} \frac{\partial x^q}{\partial x'^{\beta}} \delta_r^p C_{pq}{}^{rs} \\ &= \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^s} \frac{\partial x^q}{\partial x'^{\beta}} \delta_r^{rq} C_{rq}{}^{rs} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^s} \frac{\partial x^q}{\partial x'^{\beta}} C_{rq}{}^{rs} \end{aligned}$$

وبمقارنة هذه العلاقة بالعلاقة:

$$C'_{\beta}{}^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^s} \frac{\partial x^q}{\partial x'^{\beta}} C_q^s$$

نجد أن $C_{rq}{}^{rs} = C_q^s$ وهو ممتد من المرتبة الثانية .

أيضا: يمكن إجراء عملية انكماش ثانية: بوضع $\beta = \nu$

$$\therefore C'_{\beta}{}^{\beta} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^s} \frac{\partial x^q}{\partial x'^{\beta}} C_q^s = \delta_s^q C_q^s = \delta_s^s C_s^s = C_s^s = C_{\beta}^{\beta}$$

(حيث s رمز كمية) ، وهي كمية لا متغيرة (قياسية) أي ممتد من المرتبة الصفرية.

مسألة (11): معادلة التحويل للممتد الاختياري $A^{\nu\sigma}$

$$A'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} A^{\nu\sigma} \rightarrow (1)$$

ومن رأس المسألة:

$$x(\mu, \nu) A^{\nu\sigma} = B^{\mu\sigma} \rightarrow (2)$$

وفي تحويل للإحداثيات يمكننا كتابة:

$$x'(\delta, \alpha) A'^{\alpha\beta} = B'^{\delta\beta} = \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} B^{\mu\sigma}$$

وبالتعويض عن $B^{\mu\sigma}$ من (٢) في الطرف الأيمن وكذلك عن $A'^{\alpha\beta}$ من (١) في الطرف الأيسر:

$$\therefore x'(\delta, \alpha) \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} A^{\nu\sigma} = \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \cdot x(\mu, \nu) A^{\nu\sigma}$$

وبالضرب في $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\beta}}$

$$\begin{aligned} \therefore x'(\delta, \alpha) A^{\nu\sigma} &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} x(\mu, \nu) A^{\nu\sigma} \\ &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}} x(\mu, \nu) A^{\nu\sigma} \end{aligned}$$

$$\therefore \left[x'(\delta, \alpha) - \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}} x(\mu, \nu) \right] A^{\nu\sigma} = 0$$

وحيث أن $A^{\nu\sigma}$ يمثل ممدا اختياريًا فيمكن أخذه $A^{\nu\sigma} \neq 0$

$$\therefore x'(\delta, \alpha) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}} x(\mu, \nu)$$

$$T_{\alpha}^{\delta} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}} T_{\nu}^{\mu} \quad \text{وهي معادلة تحويل لممتد صورته:}$$

فبالمقارنة نجد أن: $x(\mu, \nu) = T_{\nu}^{\mu}$ أي أنها تشكل ممدا، وهو ممتد مختلط من المرتبة الثانية.

مسألة (١٢) : معادلة التحويل للممتد الاختياري B_r^{qs} :

$$B'_\gamma{}^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^q} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^s} \frac{\partial x^r}{\partial x'^\gamma} B_r^{qs} \quad \rightarrow (1)$$

ومن رأس المسألة:

$$A(p, q, r) B_r^{qs} = C_p^s \quad \rightarrow (2)$$

وفي تحويل للإحداثيات يمكننا كتابة:

$$A'(\delta, \alpha, \gamma) B'_\gamma{}^{\alpha\beta} = C'_\delta{}^\beta = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^s} \frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta} C_p^s$$

وبالتعويض عن $B'_\gamma{}^{\alpha\beta}$ من (١) في الطرف الأيسر وعن C_p^s من (٢) في الطرف الأيمن :

$$\begin{aligned} \therefore A'(\delta, \alpha, \gamma) \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^q} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^s} \frac{\partial x^r}{\partial x'^\gamma} B_r^{qs} \\ = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^s} \frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta} \cdot A(p, q, r) B_r^{qs} \end{aligned}$$

وبالضرب في $\frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^s}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r}$

$$\begin{aligned} \therefore A'(\delta, \alpha, \gamma) B_r^{qs} &= \frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^s}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^s} \frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta} A(p, q, r) B_r^{qs} \\ &= \frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r} \frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta} A(p, q, r) B_r^{qs} \end{aligned}$$

$$\therefore \left[A'(\delta, \alpha, \gamma) - \frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r} \frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta} A(p, q, r) \right] B_r^{qs} = 0$$

وحيث أن $B_r^{qs} \neq 0$ هو ممتد اختياري فيمكن كتابة:

$$\begin{aligned} \therefore A'(\delta, \alpha, \gamma) &= \frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r} \frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta} A(p, q, r) \\ &= \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r} \frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta} A(p, q, r) \end{aligned}$$

وهي معادلة تحويل لممتد بالصورة:

$$A'_{\alpha\delta}{}^\gamma = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r} \frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta} A_{qp}^r$$

فبالمقارنة نجد أن $A(p, q, r) = A_{qp}^r$ وهو ممتد مختلط من المرتبة الثالثة.

وهو المطلوب.