

الفصل الثاني

أنظمة الأعداد

obeikandi.com

1- أنظمة الأعداد :

المقصود بنظام الأعداد ، هو ذلك النظام المستخدم في تمثيل الأعداد . حيث يمكن ان نمثل اي عدد (يتكون من عدة مراتب) مثل س بالمعادلة العامة التالية :

$$س = ق_0 ق_1 ق_2 ق_3 \dots ق_n \quad (1) \dots$$

او

$$س = ق_0 \times ر^0 + ق_1 \times ر^1 + ق_2 \times ر^2 + ق_3 \times ر^3 + \dots + ق_n \times ر^n \quad (2) \dots$$

حيث أن (ق) تمثل أي رقم موجود ضمن العدد (س) في مرتبة معينة ، تتحدد قيمتها حسب موقع هذا الرقم ضمن العدد . وتظهر هذه المرتبة بصورة الأس الذي يعلو الحرف (ر) في المعادلة رقم (2) أعلاه .

علماء بأن (ر) هنا تمثل الأساس العددي الذي يقوم عليه النظام والذي يسمى بأسمه . فلو كان (ر) مثلاً عشرة فإن الأساس العددي للنظام هو عشرة ولذلك يسمى بالنظام العشري للأعداد .

فلو أخذنا على سبيل المثال العدد (563) بالنظام العشري للأعداد . فيمكننا ان نقوم بتحليل هذا العدد حسب المعادلة (1) اعلاه . فيظهر لنا مايلي :

$$س_{10} = 563 = ق_0 ق_1 ق_2$$

$$اي ان : ق_0 = 3$$

$$ق_1 = 6$$

$$ق_2 = 5$$

وعدد الأرقام الموجودة في هذا العدد هي (3) اعداد (3 ، 6 ، 5) ،
أ ويعنى أصح (3) مراتب تبدأ بالمرتبة (0) (أي الأحاد) وتنتهي بالمرتبة
(2) أي المئات . أي أن :

$$ن = 1 + 3$$

$$\therefore ن = 2$$

كما إننا منذ البداية قلنا إن (563) هو بالنظام العشري للاعداد أي أن :

$$10 = r$$

ويتطبيق المعادلة (2) أعلاه نجد أن :

$${}^2_{10}10 \times 5 + {}^1_{10}10 \times 6 + {}^0_{10}10 \times 3 =$$

$$100 \times 5 + 10 \times 6 + 1 \times 3 =$$

$$563 =$$

وهذا صحيح تماماً كما نلاحظ . علماً بأن الرقم (10) الذي يظهر أسفل الرمز (س) يعني ان العدد بالنظام العشري .

مثال :

ضع العدد التالي بصيغة المعادلتين (1) ، (2) :

$$615004 =$$

الحل :

من المعادلة (1) :

$${}^5_{10}ق = {}^0_{10}ق + {}^1_{10}ق + {}^2_{10}ق + {}^3_{10}ق + {}^4_{10}ق + {}^5_{10}ق$$

$$4 = {}^0_{10}ق \therefore$$

$$0 = {}^1_{10}ق$$

$$0 = {}^2_{10}ق$$

$$5 = {}^3_{10}ق$$

$$1 = {}^4_{10}ق$$

$$6 = {}^5_{10}ق$$

وبما إن $r = 10$ (نلاحظ علامة 10 أسفل الرمز س)

اذن ومن المعادلة (2) يمكن كتابة س₁₀ حسب المعادلة وكما يلي :

$${}^5_{10}10 \times 6 + {}^4_{10}10 \times 1 + {}^3_{10}10 \times 5 + {}^2_{10}10 \times 0 + {}^1_{10}10 \times 0 + {}^0_{10}10 \times 4 =$$

$$\begin{aligned}
 100000 \times 6 + 10000 \times 1 + 1000 \times 5 + 100 \times 0 + 10 \times 0 + 1 \times 4 &= \text{س } 10 \\
 600000 + 10000 + 5000 + 0 + 0 + 4 &= \\
 615004 &= \text{س } 10 \therefore
 \end{aligned}$$

مثال :

أكتب عدد المراتب وقيم ن ، ق₀ ، ق₁ ، ... ، ق₅ ، ر للعدد التالي .
ثم ضعه بصيغة المعادلتين (1) و (2) .

$$75193 = \text{س } 10$$

الحل :

$$\text{عدد المراتب} = \text{ن} = 5 = 1 +$$

$$\therefore \text{ن} = 4$$

$$10 = \text{ر}$$

$$\text{ق}_0 = 3 ، \text{ق}_1 = 9 ، \text{ق}_2 = 1 ، \text{ق}_3 = 5 ، \text{ق}_4 = 7 .$$

وبذلك يمكن كتابة العدد بصيغة المعادلة (2) وكما يلي :

$$\text{س } 10 = 3 \times 10^0 + 9 \times 10^1 + 1 \times 10^2 + 5 \times 10^3 + 7 \times 10^4$$

$$= 3 + 90 + 100 + 5000 + 70000$$

$$75193 = \text{س } 10$$

وهو المطلوب .

2- النظام الثنائي للأعداد :

لقد تعودنا من دراساتنا السابقة على التعامل مع النظام العشري

للأعداد فقط ، حيث أن (ر = 10) في المعادلتين (1) و (2) وكما يلي :

$$\text{س } 10 = \text{ق}_0 \times 10^0 + \text{ق}_1 \times 10^1 + \text{ق}_2 \times 10^2 + \dots + \text{ق}_5 \times 10^5 \dots (3)$$

$$\text{س } 10 = \text{ق}_0 \times 10^0 + \text{ق}_1 \times 10^1 + \text{ق}_2 \times 10^2 + \dots + \text{ق}_5 \times 10^5 \dots (4)$$

ولكن لا يفوتنا ان نذكر ملاحظة مهمة جداً ، وهي ان قيمة الرقم (ق) تتراوح بين (0) الى (9) وبغض النظر عن قيمة (ن) .

ولو راجعنا الأمثلة في الفقرة السابقة لوجدنا أن (ق) ممكن أن تأخذ قيم متعددة وتقع جميعها بين (0) و (9) وذلك لأن النظام المستخدم لتمثيل الأعداد هو النظام العشري ولكن لو افترضنا أن الأساس (ر) للنظام العددي هو (2) ، فسنحصل على نظام جديد للأعداد هو النظام الثنائي للأعداد . وتكون فيه (ق) بإحدى قيمتين هما (0) أو (1) أي يمكن كتابة المعادلة (1) و (2) كما يلي :

$$س_2 = ق_0 ق_1 ق_2 ق_3 \dots ق_n \dots \quad (5)$$

$$س_2 = ق_0 2^0 + ق_1 2^1 + ق_2 2^2 + \dots + ق_n 2^n \dots \quad (6)$$

حيث تكون قيم كل من (ق₀ ، ق₁ ، ق₂ ، ق₃ ، ... ، ق_n) هي أما (5) أو (1) لذا يكون العدد س₂ (أي العدد في النظام الثنائي للأعداد) هو بصورة عامة عبارة عن سلسلة من ارقام (0) و (1) ، والمعادلة (6) نجد بواسطتها العدد العشري الذي يكافئ العدد الثنائي س₂ وتدعى (خوارزمي تحويل الثنائي إلى عشري) .

مثال :

في العدد الثنائي التالي جد قيمة (ق₀ ، ق₁ ، ق₂ ، ق₃ ، ... ، ق_n) ثم جد قيمة العدد العشري الذي يقابل هذا العدد الثنائي بواسطة (خوارزمي تحويل العدد الثنائي إلى عشري) .

$$س_2 = 10$$

الحل :

عدد المراتب = 2 = ن + 1

∴ ن = 1

وبتطبيق المعادلة (5) نجد أن :

$$س_2 = ق_0 ق_1$$

$$5 = ق_0 ∴$$

$$ق_1 = 1$$

وبأستخدام المعادلة (6) نجد أن

$$(س_2) = ق_0 ق_1 + ق_2 ق_0 = 1 \times 1 + 2 \times 0 =$$

$$1 + 0 =$$

$$1 + 0 =$$

$$1 + 0 =$$

$$1 =$$

∴ العدد الثنائي (10) يساوي العدد العشري (2) .

مثال :

جد العدد العشري الذي يقابل العدد الثنائي (11101) بواسطة

خوارزمي تحويل الثنائي إلى عشري .

الحل :

بتطبيق المعادلة (5) نجد إن :

$$س_2 = ق_0 ق_1 ق_2 ق_3 ق_4$$

$$∴ ق_0 = 1 ، ق_1 = 0 ، ق_2 = 1 ، ق_3 = 1 ، ق_4 = 1$$

$$∴ (س_2) = ق_0 ق_1 ق_2 ق_3 ق_4 = 1 \times 1 + 2 \times 0 + 4 \times 1 + 8 \times 1 + 16 \times 1 =$$

$$1 + 0 + 4 + 8 + 16 =$$

$$1 + 0 + 4 + 8 + 16 =$$

$$29 = (س_2)$$

اذن العدد (11101) في النظام الثنائي للأعداد يقابل العدد (29) في النظام العشري للأعداد .

مثال :

ما هو العدد العشري الذي يقابل العدد (100000) في النظام الثنائي للأعداد .

الحل :

$$100\ 000 = {}_2s$$

ومن المعادلة (5) نستنتج إن قيمة (ن) = 5

$$\therefore {}_2s = {}_0q + {}_1q + {}_2q + {}_3q + {}_4q + {}_5q$$

$$\text{حيث أن } {}_0q = 0, {}_1q = 0, {}_2q = 0, {}_3q = 0, {}_4q = 0, {}_5q = 1$$

ويتطبيق المعادلة (6) نجد ان :

$$({}_2s) = {}_02 \times 0 + {}_12 \times 0 + {}_22 \times 0 + {}_32 \times 0 + {}_42 \times 0 + {}_51 \times 1 = 32$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 32 \times 1$$

$$= 32 = {}_{10}({}_2s)$$

إذن العدد (100000) في النظام الثنائي للأعداد يساوي (32) في النظام العشري للأعداد .

3- حساب الأعداد في النظام الثنائي للأعداد :

3-1- الجمع في النظام الثنائي للأعداد :

لقد تعودنا في النظام العشري للأعداد أن نجمع عددين بأن نضع كل رقم من العدد الأول تحت الرقم الذي يكافئه بالمرتبة من العدد الثاني ونجمع الرقمين مع بعضهما . وإذا زاد مجموع الرقمين عن تسعة (أي كان 10 فما فوق) فإننا نضيف الباقي إلى الناتج . أي مع الرقمين التاليين ، من ناحية المرتبة ، ويدعى هذا بـ(خوارزمي الجمع في النظام

العشري للأعداد) .

مثال :

جد مجموع العددين العشريين التاليين :

$$\text{س} = 514$$

$$\text{ص} = 692$$

الحل :

$$\text{ع} = \text{س} + \text{ص} = 514 + 692$$

1 الباقي

514 المضاف

$$\begin{array}{r} 692 + \text{المضاف اليه} \\ \hline 1206 \end{array}$$

أما في النظام الثنائي للأعداد فإن الطريقة متشابهة ، على أن تتذكر دائماً بأن العدد الثنائي هو عبارة عن سلسلة من أرقام (0) و (1) والجمع فيه يتم ضمن القواعد التالية :

$$0 = 0 + 0$$

$$1 = 0 + 1 = 1 + 0$$

$$1 + 1 = 10 \text{ (أو بعبارة أخرى (0) والباقي (1) يضاف إلى ناتج الجمع للمرتبة اللاحقة) .}$$

ولكي نثبت أن قيمة (1+1) تساوي في النظام الثنائي للأعداد (10) فإننا نعلم ، وكما تعودنا في النظام العشري للأعداد ، بأن مجموع (1+1) يساوي (2) . وباستخدام المعادلة (6) نجد إن $10 = 2$ ، يعني :

$$\text{س}_2 = 2 \times 0 + 1 \times 2 =$$

$$= 0 + 2 =$$

$$2 = \text{س}_{10} \text{ (س)}$$

وبذلك إثبتنا إن (1+1) في النظام الثنائي للأعداد يساوي (10) .

وتدعى طريقة جمع عددين ثنائيين بأسلوب مشابه للجمع في النظام العشري للأعداد بـ (خوارزمي الجمع في النظام الثنائي للأعداد) .

مثال :

يستخدم خوارزمي الجمع في النظام الثنائي للأعداد . جد ناتج العدد (س) التالي . ثم أثبت صحة الناتج ، بتحويل الأعداد إلى النظام العشري للأعداد واستخدام (خوارزمي الجمع في النظام العشري للأعداد) .

$$1100 + 1101 = {}_2\text{س}$$

الحل :

في النظام الثنائي للأعداد :

1 الباقي

1101 المضاف

1100 المضاف اليه

11001

$$\therefore {}_2\text{س} = 11001$$

ولو حولنا الأعداد إلى النظام العشري للأعداد بواسطة (خوارزمي

تحويل الثنائي إلى عشري) كما يلي :

$${}_3 2 \times 1 + {}_2 2 \times 1 + {}_1 2 \times 0 + {}_0 2 \times 1 = {}_{10} (1101)$$

$$8 + 4 + 0 + 1 =$$

$$13 =$$

$${}_3 2 \times 1 + {}_2 2 \times 1 + {}_1 2 \times 0 + {}_0 2 \times 0 = {}_{10} (1100)$$

$$8 + 4 + 0 + 0 =$$

$$12 =$$

$$25 = 12 + 13 = \text{اذن } {}_2\text{س}$$

ولتحويل س₂ إلى النظام العشري نتبع (خوارزمي تحويل
الثنائي إلى عشري) .

$$11001 = (س_2)_{10}$$

$${}^4 2 \times 1 + {}^3 2 \times 1 + {}^2 2 \times 0 + {}^1 2 \times 0 + {}^0 2 \times 1 =$$

$$16 + 8 + 0 + 0 + 1 =$$

$$25 = (س_2)_{10}$$

إذن العدد الثنائي (11001) يساوي العدد (25) في النظام العشري
للأعداد وناتج الجمع للأعداد الثنائية صحيح.

مثال :

إجمع العدد الثنائي (1010) مع العدد الثنائي (0001) .

الحل :

باتباع خوارزمي الجمع في النظام الثنائي للأعداد نجد إن :

$$\begin{array}{r} 1010 \\ + 0001 \\ \hline 1011 \end{array}$$

اذن س₂ = 1011

2-3- الطرح في النظام الثنائي للأعداد :

كما في النظام العشري للأعداد فإننا نقوم بطرح كل رقم (من
العدد المطروح) من الذي يكافئه من ناحية المرتبة (في العدد المطروح
منه). وإذا كان الرقم في العدد المطروح منه لا يكفي ، فنستدين واحد
من المرتبة المجاورة (التي إلى اليسار) أو بعبارة أصح (عشرة) . فلو
قمنا بطرح (671) من (765) فنحصل على ما يلي :

الاستدانة	1-	10+	
المطروح منه	7	6	5
المطروح	6	7	1-
	0	9	4

وندعو هذه الطريقة بـ خوارزمي الطرح في النظام العشري للأعداد .

مثال :

إطرح العدد الثنائي (1001) من العدد الثنائي (1010)

الحل :

باستخدام خوارزمي الطرح في النظام الثنائي للأعداد نرتب العددين واحد فوق الآخر ، بحيث يكون المطروح منه إلى أعلى والمطروح هو الأسفل ثم نقوم بعملية الطرح للأرقام الثنائية وكما يلي :

$$\begin{array}{r}
 \text{الاستدانة} \quad 1 \\
 1010 \text{ المطروح منه} \\
 - 1001 \text{ المطروح} \\
 \hline
 1001
 \end{array}$$

مثال :

جد ناتج ما يأتي :

$$101101 - 11010 = 2 \text{ س}$$

الحل :

بإتباع خوارزمي الطرح في النظام الثنائي للأعداد ، نجد أن :

$$\begin{array}{r}
 \text{الاستدانة} \quad 11 \quad 1 \\
 \text{المطروح منه} \quad 110010 \\
 \text{المطروح} \quad 101101 - \\
 \hline
 000101 \\
 \text{س } 2 = 101
 \end{array}$$

مثال :

جد قيمة س₂ إذا كانت :

$$10110 - 1101001 = \text{س } 2$$

الحل :

بواسطة (خوارزمي الطرح في النظام الثنائي للأعداد) نجد

أن:

$$\begin{array}{r}
 \text{الاستدانة} \quad 1 \quad 11 \\
 \text{المطروح منه} \quad 1101001 \\
 \text{المطروح} \quad 10110 \\
 \hline
 1010011
 \end{array}$$

3-3- الضرب في النظام الثنائي للأعداد :

لقد تعلمنا من دراستنا في السنين السابقة أننا لكي نجد حاصل ضرب عددين في النظام العشري للأعداد ، فإننا نقوم بضرب كل رقم من عدد بجميع الأرقام في العدد الآخر ، ثم نأخذ الرقم التالي بالمرتبة ونضربه بنفس الطريقة كما في المثال التالي . حيث نضرب (65) بالعدد (392) على شرط أن نتذكر أنه إذا تخلف باقي من عملية الضرب فنضيفه للخطوة التالية ثم نجمع نواتج الضرب وكما يلي :

$$\begin{array}{r}
 \text{المضروب} \quad 392 \\
 \text{المضروب به} \quad 65 \times \\
 \hline
 1960 \\
 2352 \quad + \\
 \hline
 25480
 \end{array}$$

وهذه الطريقة تدعى بـ(خوارزمي الضرب في النظام العشري للأعداد) . أما في النظام الثنائي للأعداد فتتبع نفس الخوارزمي بشرط أن نتذكر ما يلي :

$$0 = 0 \times 0$$

$$0 = 1 \times 0$$

$$0 = 0 \times 1$$

$$1 = 1 \times 1$$

وعندما نتبع نفس الخوارزمي السابق على الأعداد الثنائية ، نسمي ذلك بـ(خوارزمي الضرب في النظام الثنائي للأعداد) . وكما مبين في المثال التالي :

مثال :

يأتباع (خوارزمي الضرب في النظام الثنائي للأعداد) :
إضرب العدد (1011) بالعدد (10111) .

الحل :

$$\begin{array}{r}
 10111 \\
 1011 \times \\
 \hline
 10111 \\
 10111 \\
 00000 \\
 \hline
 10111 \\
 \hline
 1111101
 \end{array}$$

مثال :

$$1101 = {}_2\text{ص}$$

$$1100 = {}_2\text{ع}$$

$$\text{جد قيمة س} = {}_2\text{ص} \times {}_2\text{ع}$$

الحل :

باستخدام (خوارزمي الضرب في النظام الثنائي للأعداد)

نجد إن :

$$\begin{array}{r}
 1101 \\
 1100 \times \\
 \hline
 0000 \\
 0000 \\
 1101 \\
 \hline
 1011 + \\
 \hline
 10011100
 \end{array}$$

مثال :

جد حاصل ضرب العددين الثنائيين (10) و (100) ثم حقق النتيجة

بتحويلهما إلى النظام العشري للأعداد .

الحل :

يأتبع (خوارزمي الضرب في النظام الثنائي للأعداد) نجد أن :

$$\begin{array}{r} 100 \\ 10 \times \\ \hline 000 \\ 100 + \\ \hline 1000 \end{array}$$

$$1000 = 10^3$$

ولكي نتأكد من النتيجة ، تحول الأرقام الثنائية إلى أرقام عشرية بواسطة (خوارزمي تحويل الثنائي إلى عشري) ، (المعادلة (6))

$$10(10) = 10^2(ص)$$

$$2 = 2 + 0 = {}^1_2 \times 1 + {}^0_2 \times 0 =$$

$$10(100) = 10^2(ع)$$

$$4 = 4 + 0 + 0 = {}^2_2 \times 1 + {}^1_2 \times 0 + {}^0_2 \times 0 =$$

$$8 = 4 \times 2 = 10(س) \therefore$$

ويتحول 10^3 إلى النظام العشري للأعداد نجد إن :

$$1000 = 10^3$$

$${}^2_2 \times 1 + {}^1_2 \times 0 + {}^0_2 \times 0 + {}^0_2 \times 0 = 10^3(س)$$

$$8 + 0 + 0 + 0 =$$

$$8 = 10^3(س)$$

$$\therefore 10^3 = 10^3(س)$$

وهو المطلوب .

4-3 - القسمة في النظام الثنائي للأعداد :

لو تأملنا القسمة في النظام العشري للأعداد ، لوجدناها تخضع للتجربة والخطأ كما في المثال التالي :

$$= 130 \div 15461 = \text{ص}$$

$$\begin{array}{r} 118 \\ \underline{130 \overline{) 15461}} \\ 130 \\ \underline{ 246} \\ 130 \\ \underline{ 1161} \\ 1040 \\ \underline{ 121} \end{array}$$

$$\therefore \text{ص} = 130 \div 15461 = 118 \text{ والباقي } 121$$

(وخوارزمي القسمة في النظام الثنائي للأعداد) يتم بنفس الأسلوب السابق وكما نلاحظ ذلك في الأمثلة التالية

مثال :

جد ناتج قسمة العدد الثنائي (101101) على العدد الثنائي (100) .

الحل :

$$= 100 \div 101101 = \text{س}$$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \underline{100 \overline{) 101101}} \\ 100 - \\ \underline{ 00110} \\ 100 - \\ \underline{ 0101} \\ 100 - \\ \underline{ 001} \end{array}$$

∴ س = 1011 والباقي (1)

مثال :

أفرض أن :

$$ع = 100$$

$$ص = 10100$$

$$\text{جد قيمة س} = ص \div ع$$

ثم حقق النتيجة بضرب (س) في (ع) بحيث ينتج (ص)

الحل :

$$س = ص \div ع = 10100 \div 100 = 101$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 100 \overline{) 10100} \\ \underline{100} \\ 00100 \\ \underline{100} \\ 000 \end{array}$$

$$\therefore س = 101$$

ولكي نتحقق من النتيجة نضرب (ع) في (س) باستخدام
خوارزمية الضرب في النظام الثنائي للأعداد :

$$ع \times س = 100 \times 101$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 100 \times \\ \hline 000 \\ 000 \\ \hline 101 + \\ \hline 10100 \end{array}$$

$$\therefore \text{ص} = \text{ع} \times \text{س} = 10100$$

وهو المطلوب .

مثال :

جد ناتج قسمة العدد (10001) على العدد (11) ثم حقق النتيجة بنفس الطريقة المتبعة في المثال السابق .

الحل :

أفرض أن :

$$10001 = {}_2\text{س}$$

$$11 = {}_2\text{ص}$$

بإتباع (خوارزمي القسمة في النظام الثنائي للأعداد) نجد أن :

$${}_2\text{س} \div {}_2\text{ص} =$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11 \overline{) 10001} \\ \underline{11} \\ 00101 \\ \underline{11} \\ 010 \end{array}$$

\therefore الناتج هو $101 = {}_2\text{ك}$ والباقي $10 = {}_2\text{ب}$

ولكي نثبت النتيجة نقوم بضرب (${}_2\text{ك}$) في (${}_2\text{ص}$) ثم نضيف (${}_2\text{ب}$) إلى النتائج فيفترض أن نحصل على ${}_2\text{س}$ وكما يلي :

$${}_2\text{ك} \times {}_2\text{ص} =$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11 \times \\ \hline 101 \\ 101 + \\ \hline 1111 \end{array}$$

ثم نضيف للناتج $_2$ فنجد أن :

$$10001 = 10 + 1111$$

∴ الناتج = $_2$ س . وهو المطلوب .

مثال :

أفرض (كما في المثال السابق) أن :

$$10001 = {}_2 \text{س}$$

$$11 = {}_2 \text{ص}$$

جد ناتج قسمة ($_2$ س) على ($_2$ ص) وذلك بتحويل كل عدد ثنائي إلى عدد عشري . ثم أجري القسمة . ثم أثبت أن الأعداد العشرية الناتجة هي نفس الأعداد الثنائية الناتجة من القسمة في المثال السابق .

الحل :

باستخدام المعادلة (6) نجد أن

$$(1) \quad {}_2 \text{س} = {}_{10} (2 \times 1 + {}^0_2 \times 0 + {}^1_2 \times 0 + {}^2_2 \times 0 + {}^3_2 \times 0 + {}^4_2 \times 0)$$

$$= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$$

$$= 17$$

$$(2) \quad {}_2 \text{ص} = {}_{10} (2 \times 1 + {}^0_2 \times 1)$$

$$= 2 + 1 =$$

$$3 =$$

$$\therefore ({}_2 \text{ص}) \div ({}_2 \text{س}) = 3 + 5 = 5 \text{ والباقي } (2)$$

$$\therefore {}_2 \text{ك} = 5 \text{ و } {}_{10} \text{ب} = 2$$

والآن يجب أن نثبت أن ($_2$ ك) = ${}_{10}$ ك ، ($_2$ ب) = ${}_{10}$ ب

$$(ك) \quad {}_{10} \text{ك} = {}_2 (2 \times 1 + {}^1_2 \times 0 + {}^0_2 \times 1)$$

$$= 4 + 0 + 1 =$$

$$5 =$$

$$\therefore (ك)_{10} = {}_{10}^2 ك$$

والان نثبت ان :

$${}_{10}^2 ب = {}_{10}^2 ب$$

$${}^1 2 \times 1 + {}^0 2 \times 0 = {}_{10}^2 ب$$

$$2 + 0 =$$

$$2 = {}_{10}^2 ب$$

وهو يساوي ب

وهو المطلوب .

4- تحويل الأعداد العشرية إلى أعداد ثنائية :

لقد لاحظنا من تطبيق المعادلة (6) ، في الفقرة (2) من هذا الفصل أننا نستطيع تحويل العدد من النظام الثنائي للأعداد إلى عدد في النظام العشري للأعداد . ولو أردنا القيام بالعكس فإننا نقوم بقسمة العدد العشري على (2) ونسجل الباقي على جهة ونقسم الناتج على (2) ونسجل الباقي على يسار الباقي السابق ، وهكذا نستمر بالعملية حتى نصل إلى الرقم (0) . ويمكننا أيضاً كتابة الباقي على شكل عمود . فعند ذلك يصبح العدد الثنائي عبارة عن سلسلة من الباقي ، بشرط أن يكون آخر رقم ثنائي باقي هو إلى أقصى اليسار في العدد الثنائي ويليهِ الرقم الذي يليه ويوضع إلى يمينه ، وهكذا مبتدئاً من الأسفل إلى الأعلى . وتدعى هذه الطريقة (خوارزمي تحويل العدد العشري إلى ثنائي) وفيما يلي بعض الأمثلة على ذلك .

مثال :

جد العدد الثنائي الذي يساوي بالقيمة العدد (6) في النظام العشري .

الحل :

نتبع (خوارزمي تحويل العدد العشري إلى ثنائي) ، وذلك بقسمة العدد (6) على (2) وتسجيل الباقي ونستمر بالعملية إلى أن يتحول (6) إلى (0) .

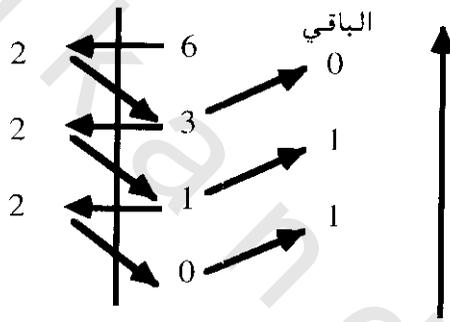
$$3 = 2 \div 6 \text{ والباقي } (0)$$

$$1 = 2 \div 3 \text{ والباقي } (1)$$

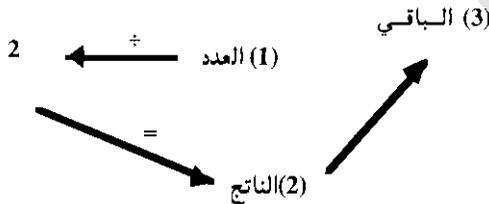
$$0 = 2 \div 1 \text{ والباقي } (1)$$

فيكون العدد الثنائي هو (110)

ويمكن كتابة الصيغة السابقة على الصورة التالية :



إتجاه السهم من الاسفل الى الاعلى يمثل العدد الثنائي من اليسار إلى اليمين .ويمكن إختصار الخوارزمي هذا بالرسم التوضيحي التالي :



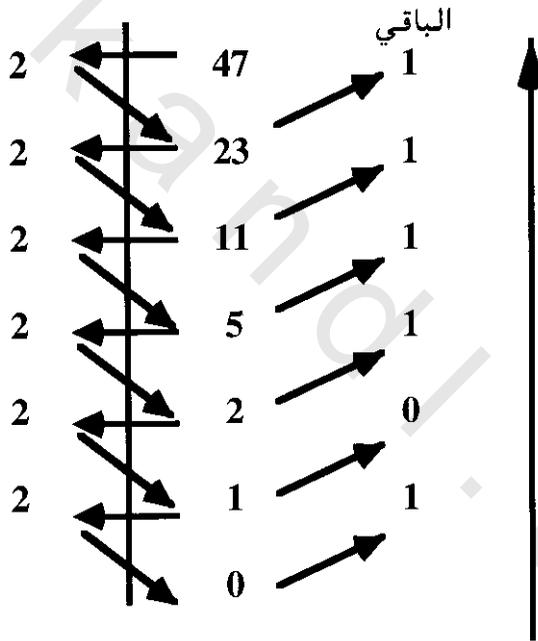
حيث نضع الناتج بدل العدد ونكرر العملية عدة مرات حتى نصل إلى الناتج يساوي (0) ، وبعد ذلك نكتب العدد الثنائي والذي يمثل قيم الباقي بدءاً من الأسفل إلى الأعلى .

مثال :

جد العدد الثنائي الذي يساوي بالقيمة العدد العشري (47) .

الحل :

باستخدام (خوارزمية تحويل العشري إلى ثنائي) نجد أن:

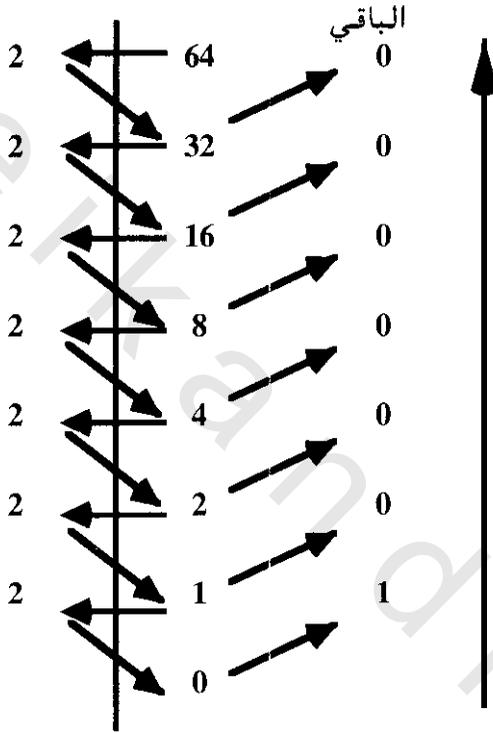


ونكتب باقي القسمة بحيث يصبح الرقم الذي إلى الأسفل في أقصى اليسار ، والأعلى في أقصى اليمين أي ان العدد الثنائي هو (101111) .

مثال :

باستخدام خوارزمية تحويل العشري إلى ثنائي جد قيمة العدد العشري (64) .

الحل :



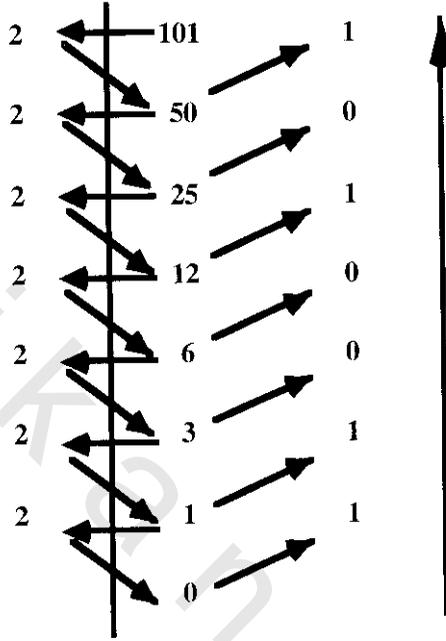
إذن العدد الثنائي هو (1000000) .

مثال :

جد قيمة العدد الثنائي الذي يكافئ العدد العشري (101) . ثم حقق النتيجة .

الحل :

باستخدام (خوارزمي تحويل العشري إلى ثنائي) نجد أن



إذن العدد الثنائي هو (1100101)

ولكي نتأكد من قيمة العدد الثنائي نحوله بواسطة (خوارزمي تحويل الثنائي إلى عشري) كما في المعادلة (6) من الفقرة (2) من هذا الفصل:

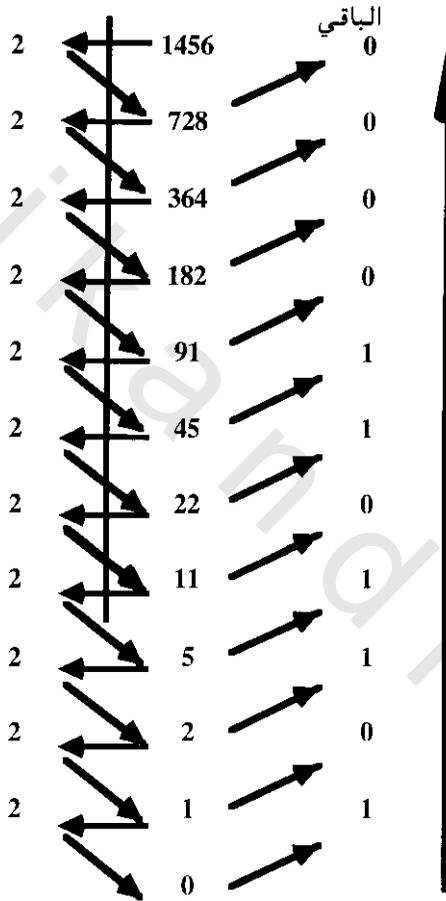
$$\begin{aligned} {}^6_2 \times 1 + {}^5_2 \times 1 + {}^4_2 \times 0 + {}^3_2 \times 0 + {}^2_2 \times 1 + {}^1_2 \times 0 + {}^0_2 \times 1 &= (س) \\ 64 + 32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1 &= \\ 101 &= \end{aligned}$$

∴ العدد الثنائي (1100101) يكافئ العدد العشري (101) .

مثال :

باستخدام (خوارزمية تحويل العشري إلى ثنائي) جد العدد الثنائي والذي يكافئ العدد العشري 1456 .

الحل :



∴ العدد الثنائي هو (10110110000) .

5- النظام الثماني للأعداد :

كما شرحنا في الفقرة (1) من هذا الفصل ، فإن المعادلات العامة لأي نظام للأعداد هي المعادلتين (1) و (2) والتي سنكتبها مرة أخرى فيما يلي للتذكير :

$$\begin{aligned} (1) \dots & \text{س}_r = \text{ق}_0 \text{ق}_1 \text{ق}_2 \dots \text{ق}_r \\ (2) \dots & \text{س}_r = \text{ق}_0 \times 8^0 + \text{ق}_1 \times 8^1 + \text{ق}_2 \times 8^2 + \dots + \text{ق}_r \times 8^r \end{aligned}$$

حيث r تمثل الأساس الذي يقوم عليه النظام العددي . فلوافترضنا أن $r = 8$. فسنحصل على نظام جديد للأعداد ندعوه **النظام الثماني للأعداد** وهذا النظام تكون فيه قيمة (ق) بثمانية احتمالات هي $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

من ذلك نستطيع أن نكتب المعادلتين (1) و (2) بصيغة أخرى تلائم **النظام الثماني للأعداد** وكما في المعادلتين (7) و (8) التاليتين

$$\begin{aligned} (7) \dots & \text{س}_8 = \text{ق}_0 \text{ق}_1 \text{ق}_2 \dots \text{ق}_r \\ (8) \dots & \text{س}_8 = \text{ق}_0 \times 8^0 + \text{ق}_1 \times 8^1 + \text{ق}_2 \times 8^2 + \dots + \text{ق}_r \times 8^r \end{aligned}$$

حيث إن عدد المراتب يساوي $(n + 1)$ أما (ق) فيتراوح بين (0) و (7) . والمعادلة (8) ، تمثل لنا (خوارزمي تحويل الثماني إلى عشري) للرقم الثماني الذي نمثله حسب المعادلة (7) .

مثال :

جد العدد العشري الذي يقابل العدد الثماني (531)

الحل :

حسب المعادلة (7) نجد أن عدد المراتب $= 3 = n + 1$

$$\text{س}_8 = 531 = \text{ق}_0 \text{ق}_1 \text{ق}_2$$

حيث أن :

$$ق_0 = 1$$

$$ق_1 = 3$$

$$ق_2 = 5$$

وحسب المعادلة (8) نجد إن :

$$\therefore (س)_8 = ق_0 \times 0 + ق_1 \times 1 + ق_2 \times 2$$

$$= 8 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times 5 =$$

$$= 8 + 9 + 25 =$$

$$= 320 + 24 + 1 =$$

$$= 345$$

إذن العدد (531) في النظام الثماني للأعداد ، يساوي (345) في النظام العشري للأعداد .

مثال :

جد العدد العشري الذي يقابل العدد الثماني (476) .

الحل :

$$س_8 = 476 = ق_0 \times 6 + ق_1 \times 7 + ق_2 \times 4$$

$$\therefore ق_0 = 6 ، ق_1 = 7 ، ق_2 = 4$$

ولإيجاد (س)₈ في النظام العشري للأعداد ، تطبق المعادلة (8) وكما

يلي

$$(س)_8 = 8 \times 1 + 7 \times 8 + 4 \times 64 =$$

$$= 8 + 56 + 256 =$$

$$= 318$$

6- تحويل الأعداد الثنائية إلى أعداد ثمانية :

قلنا في الفقرة السابقة بأن (ق) يكون بثمانية احتمالات في النظام الثماني للأعداد هي من (0) إلى (7) . ويمكننا أن نرمز إلى الإحتمالات الثمانية هذه بعدد ثنائي يتكون من ثلاثة مواضع ثنائية ، أي إن عدد المراتب يساوي (3) ، كما نلاحظ ذلك في الجدول التالي :

العدد الثنائي	الرقم الثماني
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

وكما نلاحظ فإن عدد ثنائي مكون من ثلاثة أرقام ثنائية ، يستطيع تمثيل ثمانية احتمالات . وهذا يناسب النظام الثماني للأعداد وندعو الرقم الثنائي (أو الموضع الثنائي) باللغة الإنكليزية (بت) ومجموعة الأرقام الثنائية ، أي العدد الثنائي ، بـ (الحزمة الثنائية) ويدعى باللغة الإنكليزية (بايت) أو بعبارة أخرى فإن العدد الثماني يمكن تمثيله بـ (بايت) مكون من (3-بت) بواسطة (خوارزمي تحويل الثنائي إلى ثماني) . ولهذه الطريقة في تمثيل العدد الثنائي فائدة كبيرة . فلو كان لدينا مثلاً العدد الثنائي (101110100) . والذي يتكون من (9) أرقام ثنائية (أي 9 - بت) فإنه يمكن أن نجزئه إلى ثلاثة أجزاء (حزم) من الأرقام (أي 3 - بايت) . كل منها يتكون من (3 - بت) . وكل بايت يمكن تحويله إلى عدد من النظام الثماني للأعداد

وكما يلي :

101	110	100
5	6	4

أي إننا وجدنا الرقم الثماني الذي يقابل كل حزمة ثنائية (أي بايت) وبذلك إختصرنا عملية كتابة سلسلة طويلة من أرقام (0) و (1)، مما قد يسبب أخطاء كثيرة .

مثال :

جد العدد الثماني الذي يكافىء العدد الثنائي التالي :

111011000010

الحل :

نجزىء العدد الثنائي إلى (4 - بايت) كل واحد يحتوي على 3 - بت) . ونجد العدد الثماني الذي يكافىء كل بايت على حدة :

111	011	000	010
7	3	0	2

7- المتيمات :

إن المتيم هو عدد يضاف إلى عدد آخر ، كي نحصل على عدد ثالث هو رقم الأساس للنظام العددي أو مضاعفاته الأسية ، فلو كنا نتحدث عن النظام العشري للأعداد مثلاً ، فإن العدد الأساس للنظام هو (10) ومضاعفاته الأسية هي $(10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \dots, 10^{n+1})$ فإذا كان لدينا عدد عشري معين فإن المتيم له، هو أقرب أكبر مضاعفات العشرة

له ناقصاً العدد العشري الذي نريد إيجاد المتم له . مثال على ذلك أن متم العدد (91) مثلاً هو ، أقرب أكبر مضاعفات العشرة (وهو (100)) ناقصاً العدد المعطى (أي 91) فيكون الناتج (9) والذي يمثل متم (91) ونستطيع أن نضع الشرح السابق بصيغة معادلة عامة كما يلي :

$$M_r = r^{1+n} - c \quad (9) \dots$$

حيث r هو الأساس للنظام .

M_r هو المتم في النظام الرائي للأعداد .
($n + 1$) يمثل عدد المراتب للعدد c .
 c العدد الذي يراد إيجاد المتم له .

ولو كان العدد الأساس للنظام (r) يساوي (10) ، أي إننا نتحدث عن النظام العشري للأعداد ، فإن المتم ممكن أن يوضع بصيغة المعادلة العامة التالية :

$$M_{10} = 10^{1+n} - c \quad (10) \dots$$

أما في النظام الثنائي للأعداد فتكون المعادلة كما يلي :

$$M_2 = 2^{1+n} - c \quad (11) \dots$$

حيث تمثل ($n+1$) عدد المراتب أو المواضع الثنائية للعدد الثنائي (c_2) .

مثال :

جد المتم للعدد العشري (103) .

الحل :

عدد المراتب يساوي (3) .

$$3 = 1 + n$$

ثم بتطبيق المعادلة (10) نجد أن :

$$M_{10} = 10^3 - 103$$

$$897 =$$

مثال .

جد المتمم للعدد الثنائي (1101)

الحل :

نلاحظ أن عدد المراتب هو (4) .

$$4 = 1 + n \therefore$$

وبتطبيق المعادلة (11) نجد أن :

$$m = 2^4 - 1101$$

$$= 10000 - 1101$$

$$= 11$$

وهناك طريقتان للحصول على متمم العدد . وهما :

7-1- متمم الأساس :

وهي الطريقة المباشرة ، والتي تنطبق عليها المعادلة (9) بصورة عامة . فلو كنا نتحدث عن النظام العشري للأعداد ، فهو يدعى (متمم العشرة) ، والذي تنطبق عليه المعادلة (10) ، أما إذا كنا نتكلم عن النظام الثنائي للأعداد (م) (أي متمم الاثنان) والذي نستطيع إيجاده ، كما شرحنا سابقاً ، بتطبيق المعادلة (11) .

مثال :

جد (متمم الاثنان) للعدد (10001) .

الحل :

عدد المراتب يساوي (5)

$$5 = 1 + n \therefore$$

وبتطبيق المعادلة (11) نجد أن :

$$m = 2^5 - 10001$$

$$10001 - 100000 = {}_2M$$

$$111 =$$

ملاحظة :

نلاحظ من الأمثلة السابقة بأن 2^n يعني رقم (1) وأمامه ، أي إلى يمينه ، (ن) من الأصفار . أي أن (2^4) هو (1) وأمامه أربعة أصفار . و (2^5) هو (1) وأمامه خمسة أصفار أي (100000)، كما في المثال السابق.

2-7- متمم (الأساس ناقص واحد) :

وفي النظام الثنائي للأعداد يكون الأساس هو (2) لذلك فإن متمم الأساس (ناقص واحد) . يعني متمم (1) أي (متمم الواحد) والذي يمكن وضعه بصيغة معادلة عامة كما يلي :

$${}_rM = (1 - r^{n+1}) - r \quad (12) \dots$$

وفي النظام الثنائي للأعداد تصبح المعادلة (12) كما يلي :

$${}_2M = (1 - 2^{n+1}) - 2 \quad (13) \dots$$

مثال :

جد (متمم الواحد) للعدد (1100101) .

الحل :

نلاحظ أن عدد المراتب = 7

وتطبيق المعادلة (12) نجد أن :

$${}_2M = (1 - 2^7) - 2 = 1100101 -$$

$$1100101 - (1 - 10000000) =$$

$$1100101 - 1111111 =$$

$$11010 = {}_2M$$

مثال :

جد (متمم الاثنان) و (متمم الواحد) للعدد (11000)

الحل :

$$\text{عدد المراتب} = 5$$

$$\therefore n + 1 = 5$$

و بتطبيق المعادلة (11) نجد (متمم الاثنان) وكما يلي :

$$2^5 - 11000 = 2^5$$

$$11000 - 100000 =$$

$$1000 = 2^5$$

ولإيجاد (متمم الواحد) نطبق المعادلة (13) وكما يلي :

$$11000 - (1 - 2^5) = 1^5$$

$$11000 - (1 - 100000) = 1^5$$

$$11000 - 11111 =$$

$$\therefore 111 = 1^5$$

ومن هذا المثال نلاحظ أننا لو أضفنا واحد إلى (متمم الواحد)

لأصبح (متمم الاثنان) .

ملاحظة :

إن الحد $(2^{n+1} - 1)$ يساوي في الواقع $(n + 1)$ من رقم (1) . فلو

كان $(n + 1)$ يساوي 7 فإن $(2^7 - 1)$ يساوي سبعة أرقام (1) ، أي (1111111)

ولو كان $(n + 1)$ يساوي (5) ، فإن $(2^5 - 1)$ يساوي خمسة أرقام (1) ، أي

(11111) .