

الفصل الخامس

خارطة كارنوف

obeikandi.com

1- تمثيل الكميات المنطقية :

لقد درسنا في الفصول السابقة طريقتين لتمثيل الكميات المنطقية هما **جداول الحقيقة ومخطط فين** . حيث يتم تمثيل الكميات الجبرية المنطقية في جداول الحقيقة على شكل أرقام ثنائية ، بينما يتم تمثيلها على شكل دوائر مظللة أو غير مظللة في مخطط فين . أما في هذا الفصل فسوف ندرس (مع الكثير من الأمثلة) نوع ثالث من انواع تمثيل الكميات المنطقية يدعى (**خارطة كارنوف**) . و **خارطة كارنوف** تتكون من شكل رباعي (مربع أو مستطيل) . ويقسم هذا الشكل الرباعي ، بواسطة محاور أفقية وعمودية إلى أجزاء أصغر . وتفصل هذه المحاور الحيز الذي يشغله المتغير (أو المتغيرات) عن المتغيرات الأخرى ، أو بين العناصر ومتمماتها . وبأسلوب خاص سوف نوضحه بالرسم فيما يلي . فإذا أردنا مثلاً أن نرسم حيز المتغير (أ) فإننا يجب أن نرسم حيز المتمم له على نفس المربع (أو المستطيل) . كما مبين في الشكل أدناه :

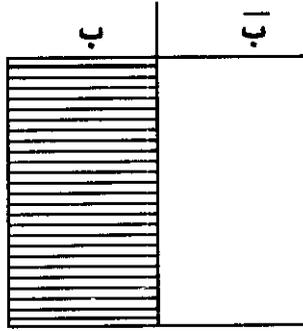


تمثيل (أ)

الشكل (1)

أما إذا أردنا تمثيل الحيز الذي يشغله متغير ثاني مثل (ب) بشكل مشابه ، ولكن بمحور عمودي يفصل المتغير (ب) عن متممه

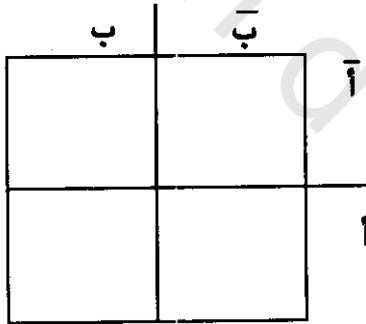
(ب) فأننا نرسمه كما في الشكل أدناه :



تمثيل (ب)

الشكل (2)

ولكي نرمز إلى حيز يحوي على المتغيرين المنطقتين (أ) و (ب) معا ، فأننا نتبع طريقة معينة في تمثيل ذلك . حيث نقوم بمزج الشكلين معا ، فنحصل على مربع فيه محورين أفقي وعمودي ، كما في الشكل أدناه :

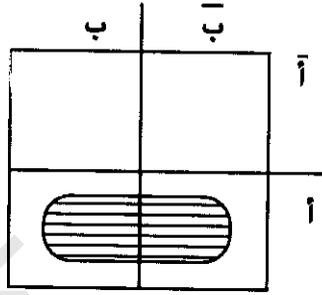


تمثيل (أ)، (ب)

الشكل (3)

ولكي نرمز لأي متغير بأنه موجود أو غير موجود . فأننا نقوم

برسم منحنى مغلق (دائرة ، مستطيل ، مربع .. إلخ) داخل المنطقة التي يتواجد فيها المتغير (أو المتغيرات) . فلو أردنا مثلاً أن نرمز للمتغير (أ) في الشكل (3) أعلاه . فأننا نقوم برسم منحنى مغلق يقع في الحيز الأفقي الذي يشمل (أ) ، ونظلل المساحة المحصورة داخل هذا المنحنى . كما في الشكل التالي :

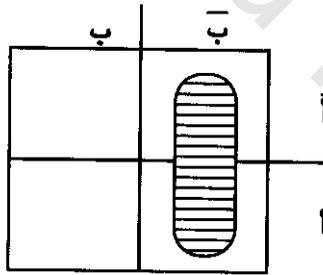


تمثيل (أ)

الشكل (4)

أما لو أردنا مثلاً أن نرمز إلى المتغير (ب) فأننا يمكن أن نرسم

خارطة كارنوف له ، وكما يلي :

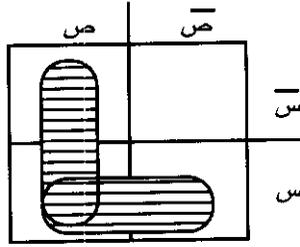


تمثيل (ب)

الشكل (5)

وهكذا نستطيع أن نقوم بتمثيل بقية المتغيرات . وذلك بتظليل الجزء المحصور داخل المنحني المغلق والذي يوجد داخل المربع . أو المربعات) التي تشتمل على المتغير .

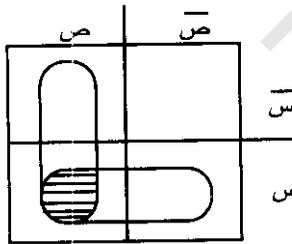
أما إذا كان لدينا معادلة جبرية منطقية ، مثل $(ع = س + ص)$ فإننا نقوم برسم الحيز الذي يحوي المتغيرين $(س)$ ، $(ص)$ ، كما فعلنا ذلك بالنسبة للمتغيرين $(أ)$ ، $(ب)$. وكما موضح في الشكل التالي :



تمثيل $(س + ص)$

الشكل (6)

ولو أردنا تمثيل التقاطع للكميتين $(س)$ ، $(ص)$. فإننا نقوم بنفس الطريقة برسم منحنيات في كل من حيز $(س)$ ، وحيز $(ص)$. ونقوم بتظليل المنطقية (أو على الأصح المربع) الذي يحصل فيه التقاطع لهاتين الكميتين ، $(س . ص)$. وكما موضح في الشكل أدناه :



تمثيل $(س . ص)$

الشكل (7)

2- خارطة كارنوف لثلاثة متغيرات منطقية :

نستطيع تمثيل ثلاثة كميات جبرية منطقية ، بواسطة خارطة كارنوف . فلو كان لدينا مثلاً ، الكميات الجبرية المنطقية أ ، ب ، ج ، فيمكننا أن نقوم بتمثيل الكمية (أ) ، كما في الشكل التالي :

	\bar{a}
	a

تمثيل (أ)

الشكل (8)

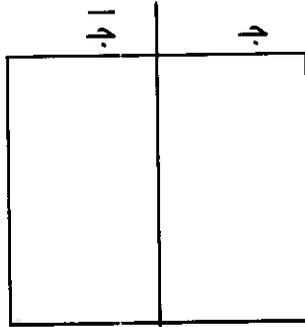
ونستطيع كذلك تمثيل الحيز الذي تشغله الكمية (ب) ، بطريقة مختلفة نوعاً ما حيث نتبع الطريقة التالية في تمثيلها . وكما موضح في الشكل أدناه :

\bar{b}	
b	
\bar{b}	

تمثيل (ب)

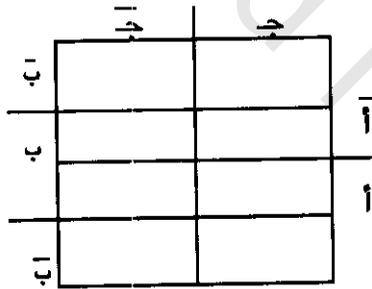
الشكل (9)

أما (ج) فنقوم بتمثيلها بحيز يقسم إلى قسمين ، بواسطة خط عمودي . بحيث يكون الجزء الأيمن يمثل (ج) أما الأيسر فيمثل (ج̄) كما في الشكل أدناه :



تمثيل (ج)
الشكل (10)

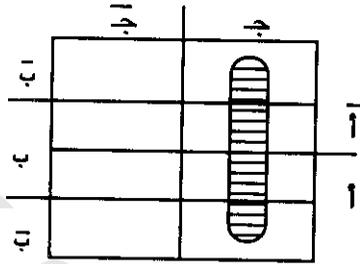
ولو قمنا الآن بدمج الأشكال (8) ، (9) ، (10) معاً في مخطط أو شكل واحد فسنحصل على الشكل التالي :



تمثيل (أ ، ب ، ج)
الشكل (11)

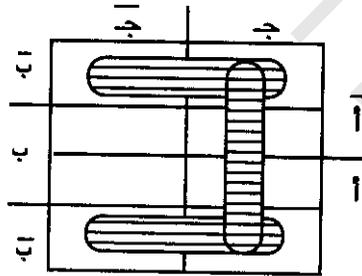
ومن ملاحظة الشكل (11) ، نجد أنه يوجد مربع مشترك بين كل عنصر ومتممه ، والعناصر الباقية ، وبذلك نستطيع تمثيل أي تعبير مشترك بين العناصر فيما بينها . وكما سنلاحظ ذلك جلياً في الأمثلة التي سنوردها فيما بعد .

ولو أردنا تمثيل (ج) على الحيز الذي يحوي ثلاثة متغيرات (أ) ، (ب) ، (ج) مثل الشكل (11) . فأننا نقوم برسمه كما يلي :



تمثيل (ج)
الشكل (12)

أما إذا أردنا رسم أو تمثيل (ب) على نفس الشكل (12) . فنقوم برسمه كالتالي :



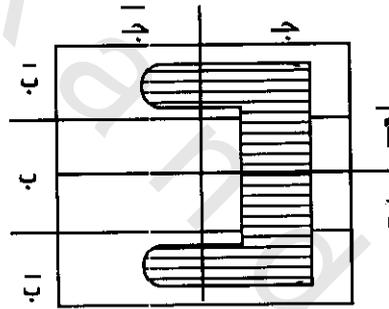
تمثيل (ب. ج)
الشكل (13)

أما العلاقات الجبرية (مثل إتحاد ، تقاطع) فيمكن أن نعود إلى التعريف الأصلي للإتحاد . وهو أن الإتحاد يمثل مجموعة (أو حيز) تحوي على كل العناصر المشتركة وغير المشتركة معاً ، بين متغيرين . فلو عدنا إلى الشكل (13) ، فأنا سنلاحظ أن الحيز الذي

تم تظليله يمثل المنطقة التي تتواجد فيها عناصر (ب) أو عناصر (ج) أو العناصر المشتركة بينهما . ويمكن كتابة ذلك جبرياً كما يلي :

$$د = \overline{ب} + ج$$

ويمكن تمثيل ذلك بمنحني مغلق نطله من الداخل . بشكل مشابه للشكل (13) أعلاه وكما يلي :



تمثيل (ب + ج)
الشكل (14)

أما التقاطع بين مجموعتين أو عنصرين مثل تقاطع (ب) مع (ج) فيمكن أن نعبر عنه بالمعادلة التالية :

$$د = ب \cdot ج$$

ونستطيع تمثيل هذه المعادلة على خارطة كارنوف كما في

الشكل أدناه :

	$\bar{ج}$	ج
$\bar{ب}$		
ب		
ب		

تمثيل (ب . ج)

الشكل (15)

وهكذا نستطيع تمثيل الكميات والمعادلات الجبرية المنطقية بواسطة خارطة كارنوف ، وبطريقة تشبه إلى حد كبير ، مخطط فين الذي درسناه في الفصل السابق .

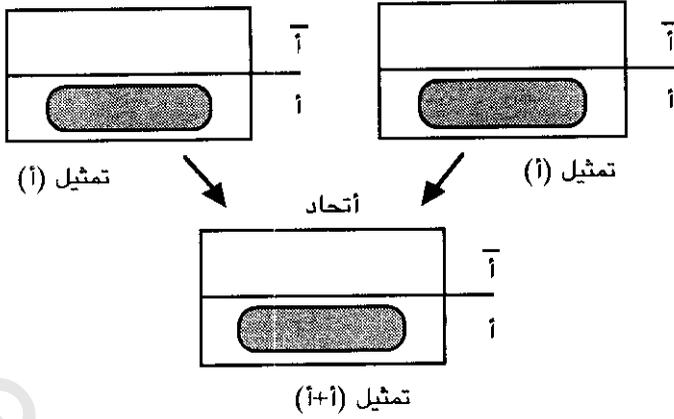
3- إثبات نظريات الجبر البولياني :

لفهم خارطة كارنوف أكثر ، وللتعود على إستعمالها ، سوف نقوم فيما يلي بإثبات نظريات الجبر المنطقي (والتي أثبتناها جميعاً في الفصل السابق) بواسطة خارطة كارنوف في هذه المرة .

3-1- المعادلة الأولى النظرية الأولى :

$$أ + أ = أ$$

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :

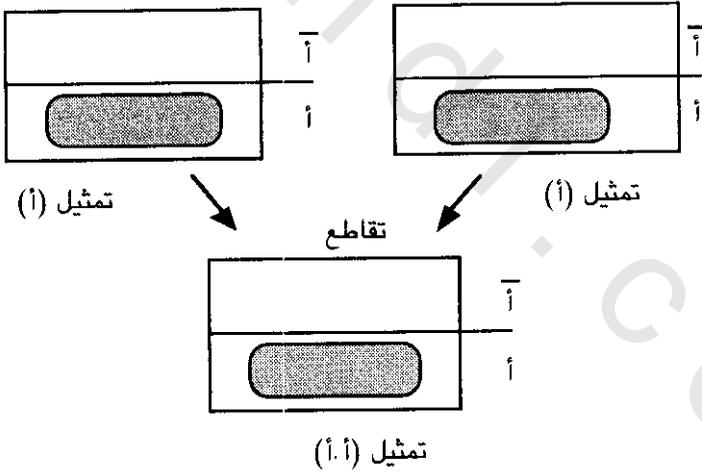


ومن ذلك نلاحظ أن هذه المعادلة قد تحققت وهو المطلوب .

2-3- المعادلة الثانية النظرية الأولى :

$$A \cdot \bar{A} = \bar{A}$$

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :

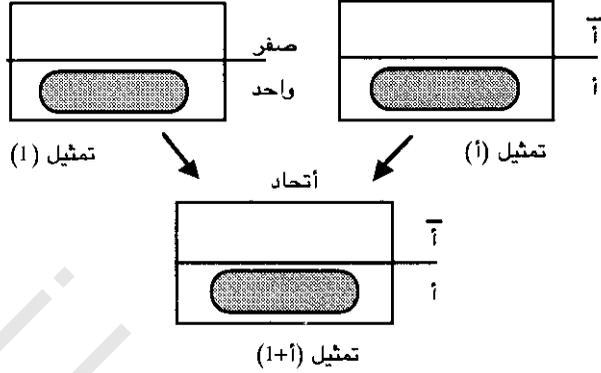


ومن ذلك نلاحظ أن هذه المعادلة قد تحققت وهو المطلوب .

3-3- المعادلة الأولى النظرية الثانية :

$$1 = 1 + \bar{1}$$

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :

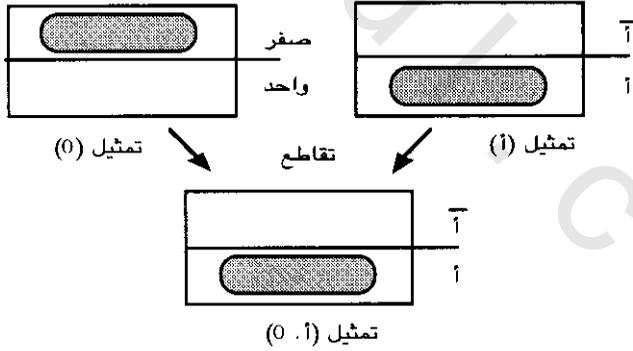


ومن ذلك نلاحظ أن هذه المعادلة قد تحققت . وهو المطلوب .

3-4- المعادلة الثانية النظرية الثانية :

$$0 = 0 \cdot \bar{1}$$

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :

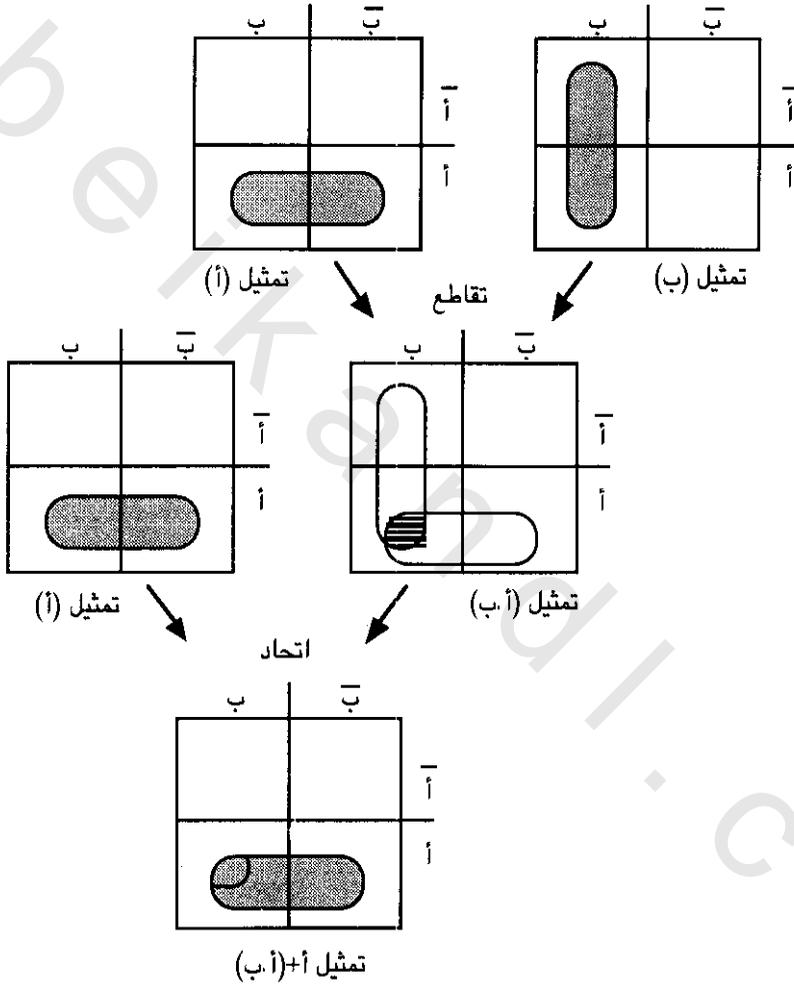


ومن ذلك نلاحظ أن هذه المعادلة قد تحققت . وهو المطلوب .

3-5- المعادلة الأولى النظرية الثالثة :

$$A = (A \cdot B) + \bar{A}$$

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :

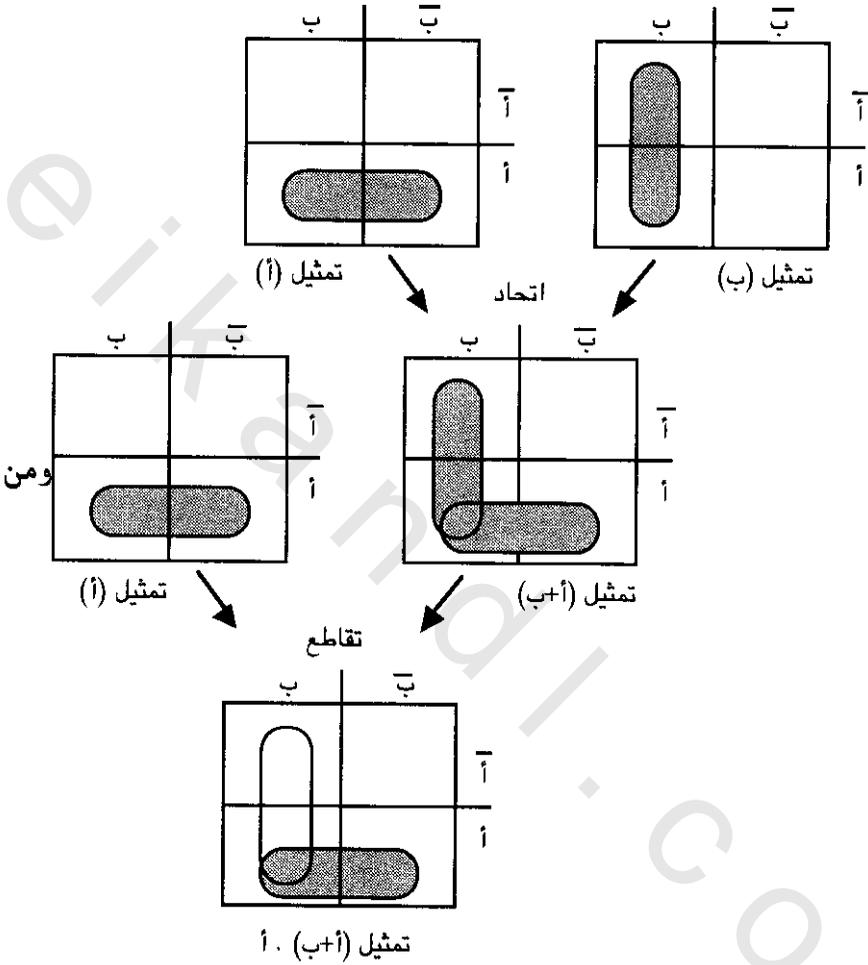


ومن ذلك نلاحظ أن هذه المعادلة قد تحققت . وهو المطلوب .

3-6- المعادلة الثانية النظرية الثالثة :

$$A = (A + B) \cdot A$$

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :

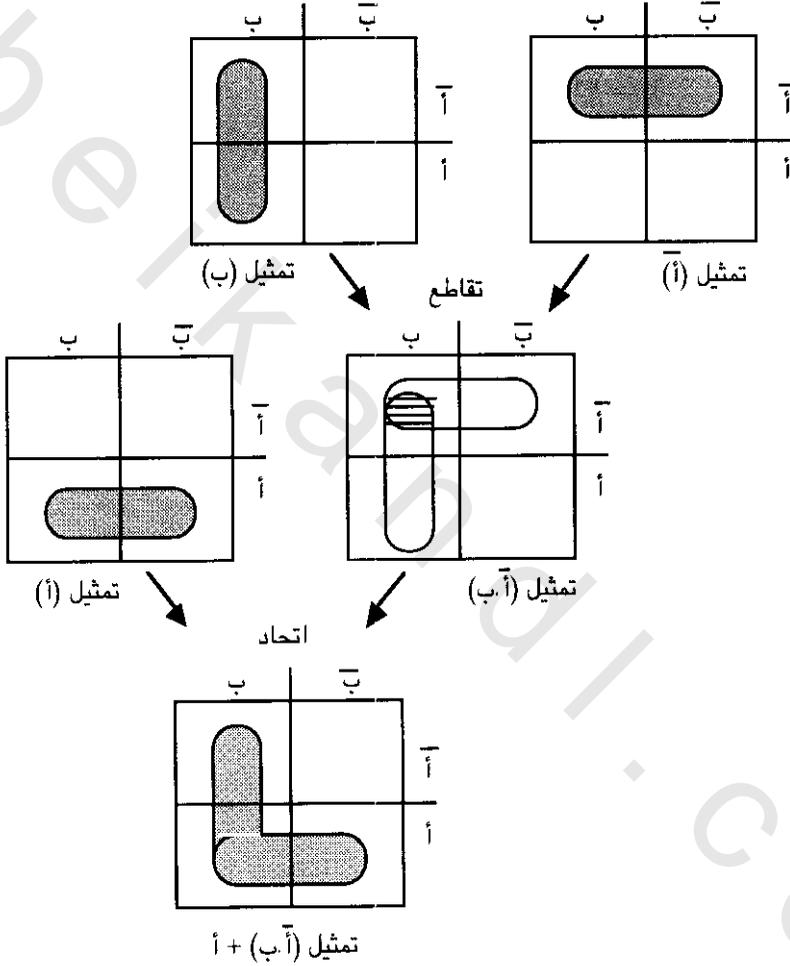


ذلك نلاحظ أن المعادلة قد تحققت وهو المطلوب .

3-7- المعادلة الأولى النظرية الرابعة :

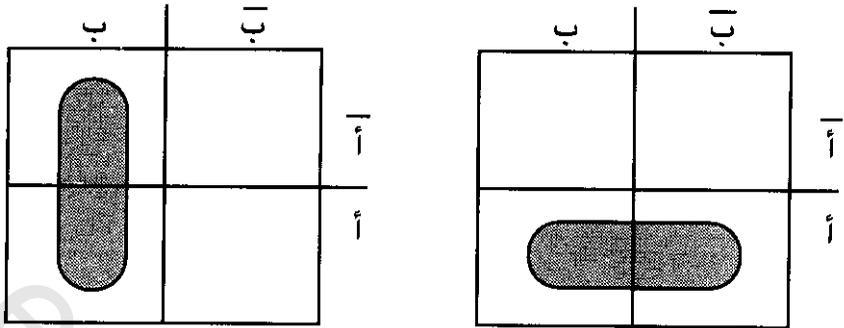
$$A + \bar{A}B = \bar{A} + AB$$

التمثيل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيمن هو كالتالي :



ومن ذلك نلاحظ أن المعادلة قد تحققت . وهو المطلوب .

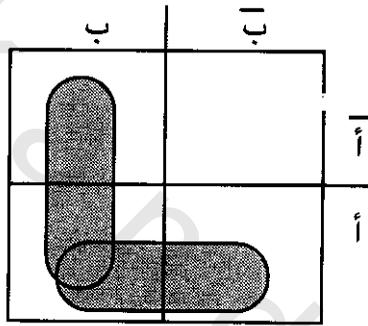
أما الطرف الأيسر فيمكن تمثيله بنفس الطريقة وكما يلي :



تمثيل (ب)

اتحاد

تمثيل (أ)



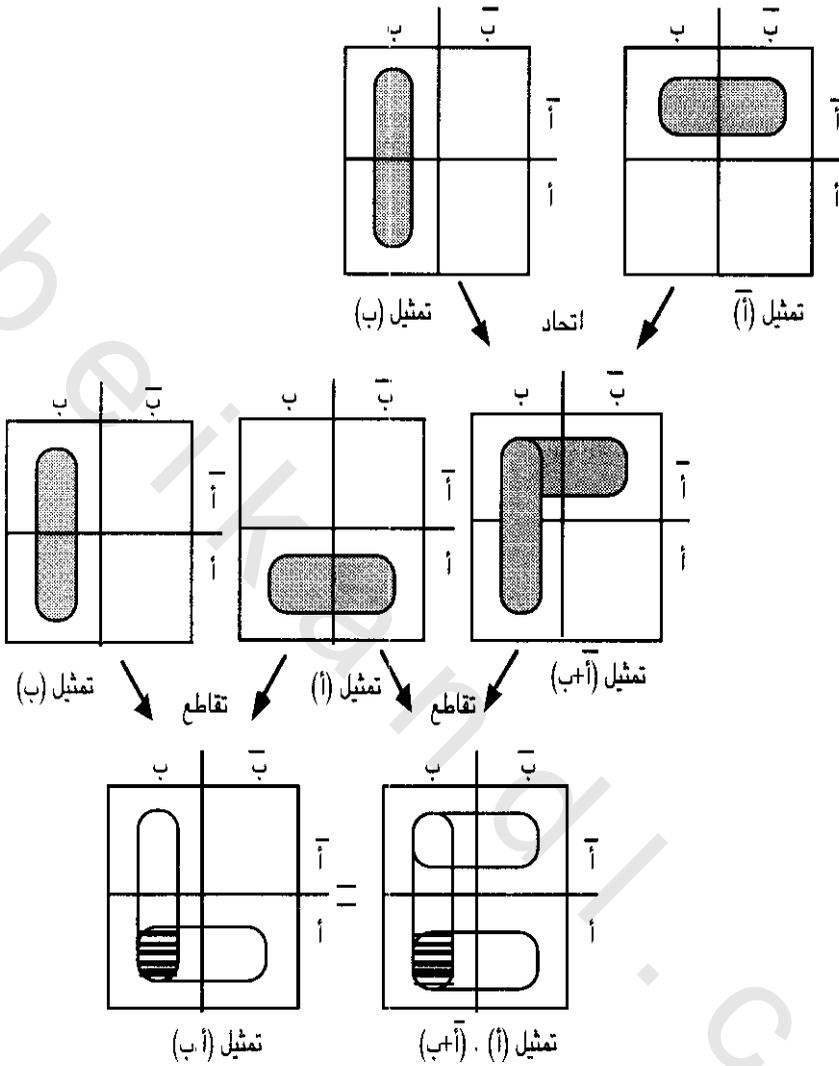
تمثيل (أ+ب)

ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

8-3- المعادلة الثانية النظرية الرابعة :

$$أ . (أ + ب) = أ . ب$$

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف لطرفي المعادلة معاً هو كالتالي :

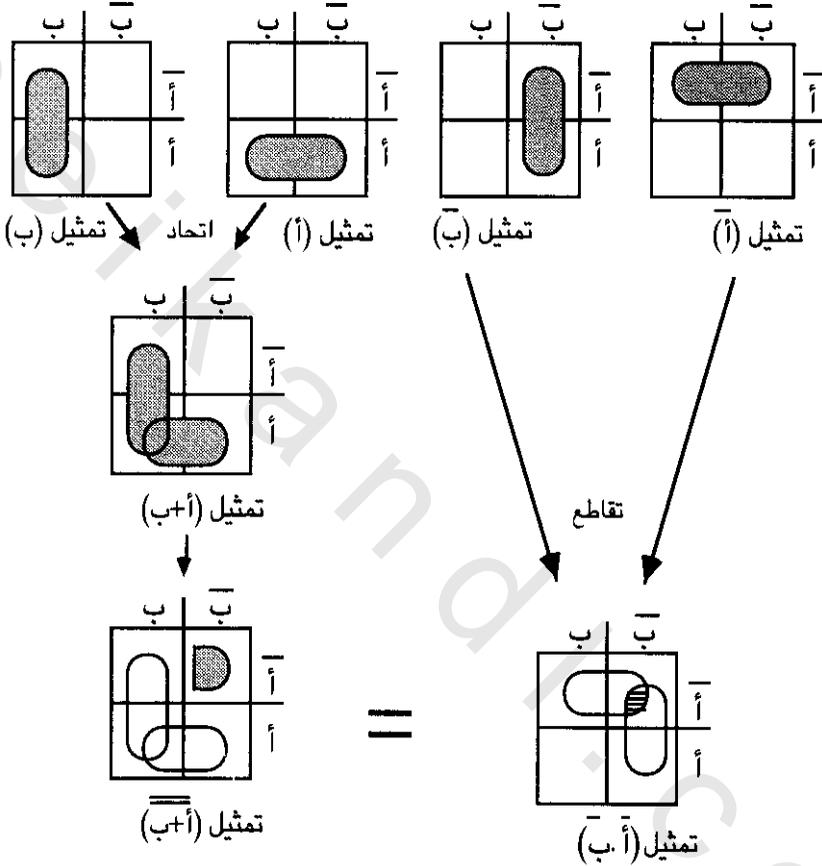


ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

3-9- المعادلة الأولى النظرية الخامسة :

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

والإثبات لطرفي المعادلة معاً بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :

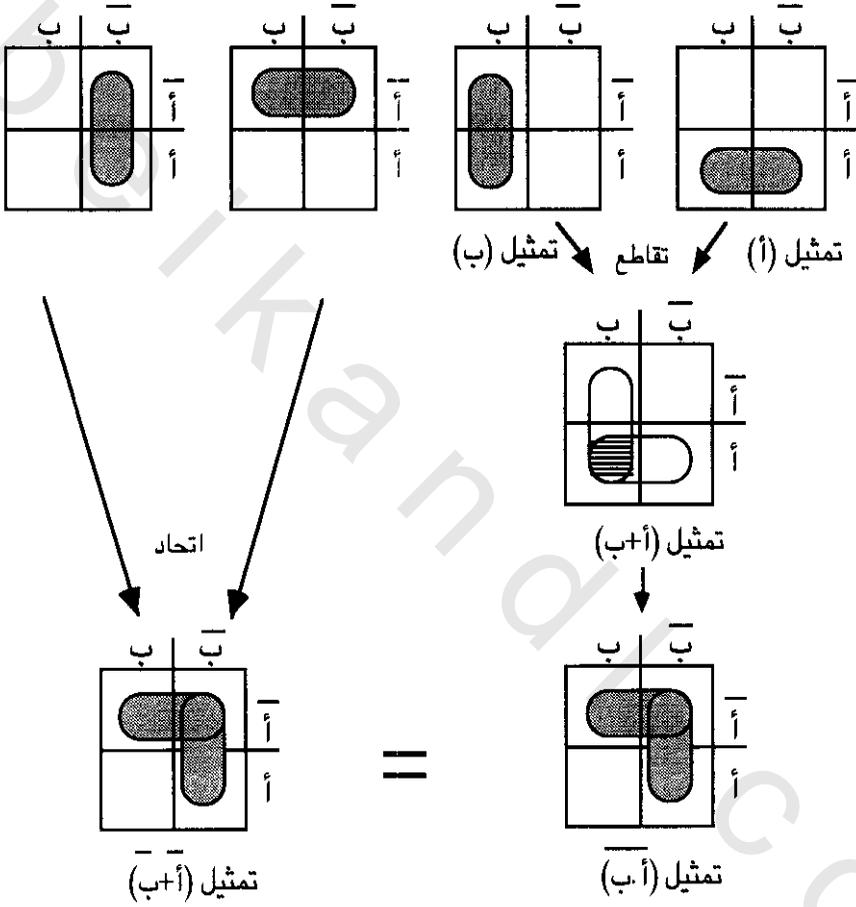


ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

3-10- المعادلة الثانية النظرية الخامسة :

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف لطرفي المعادلة معاً ، هو كالتالي :



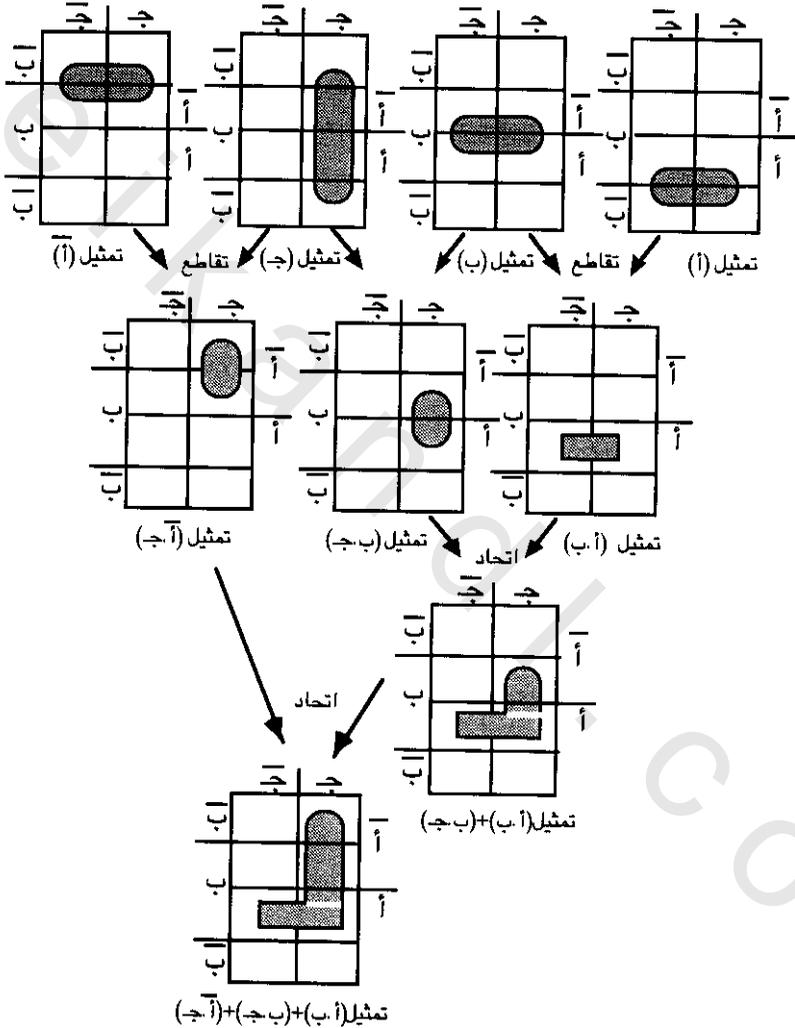
ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

3-11- المعادلة الأولى النظرية السادسة :

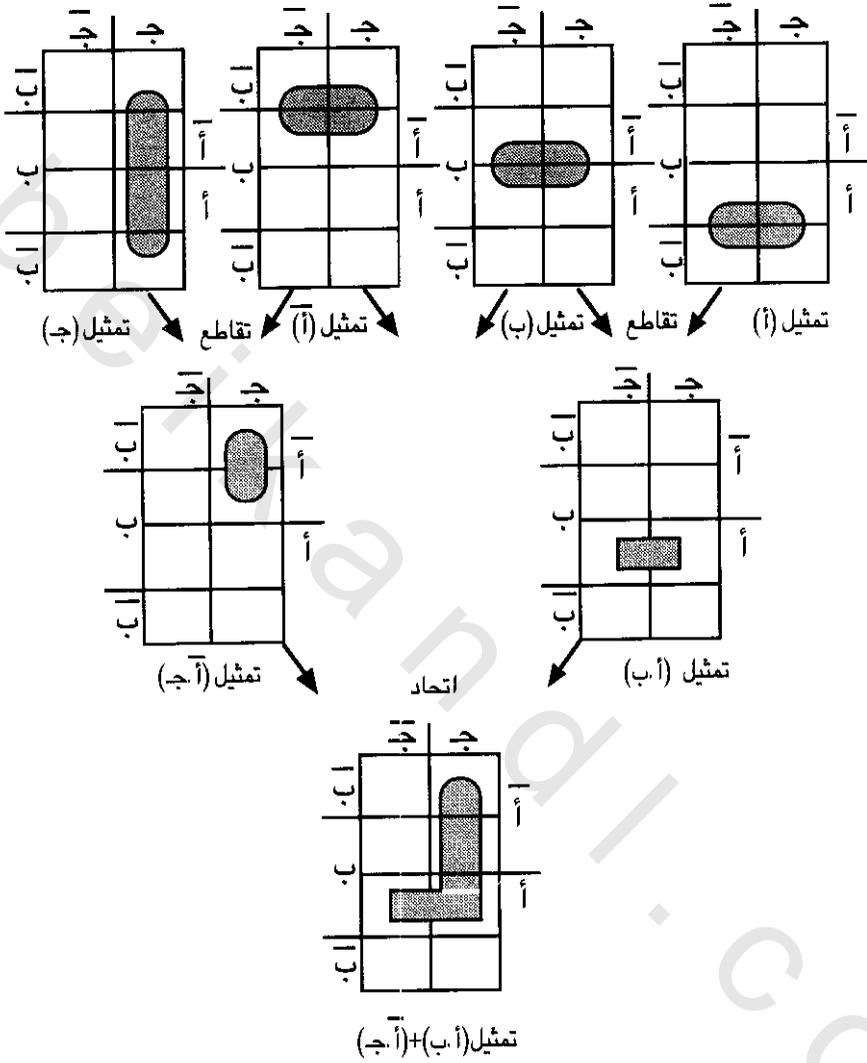
$$(أ.ب) + (أ.ج) = (أ.ب.ج) + (أ.ج.ب) + (أ.ب.ج)$$

التمثيل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيمن لهذه المعادلة هو

كالتالي :



والتمثيل للطرف الأيسر للمعادلة ، بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :



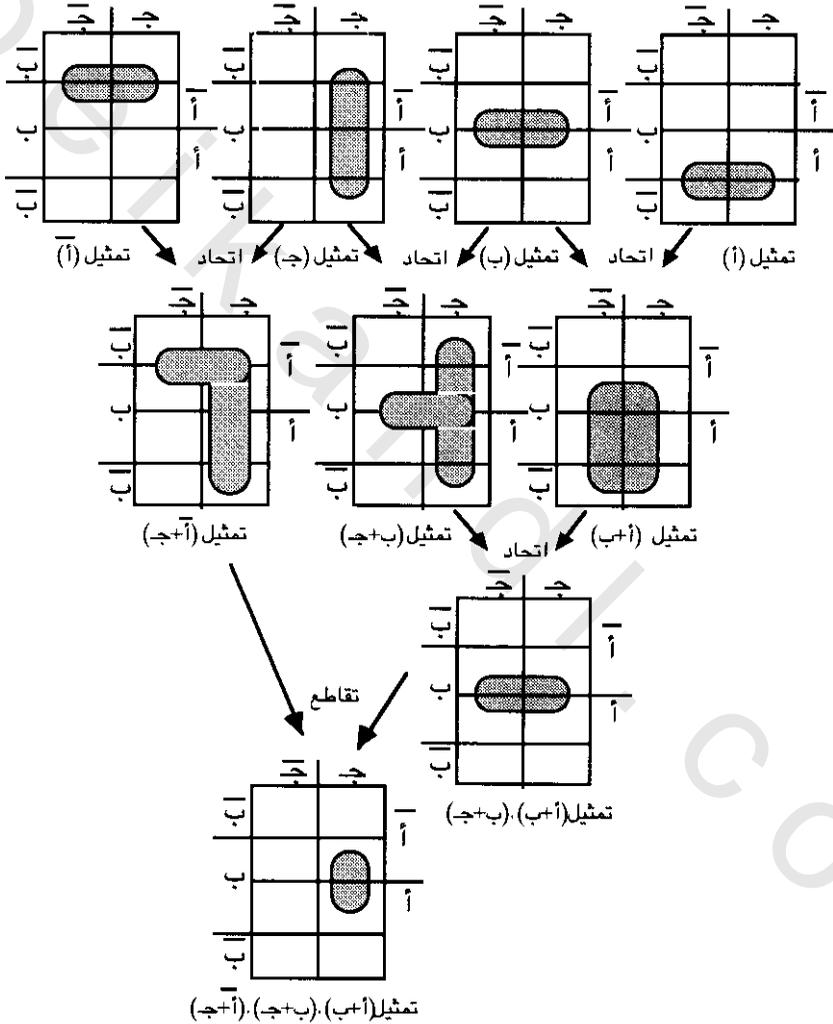
ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

3-12- المعادلة الثانية النظرية السادسة :

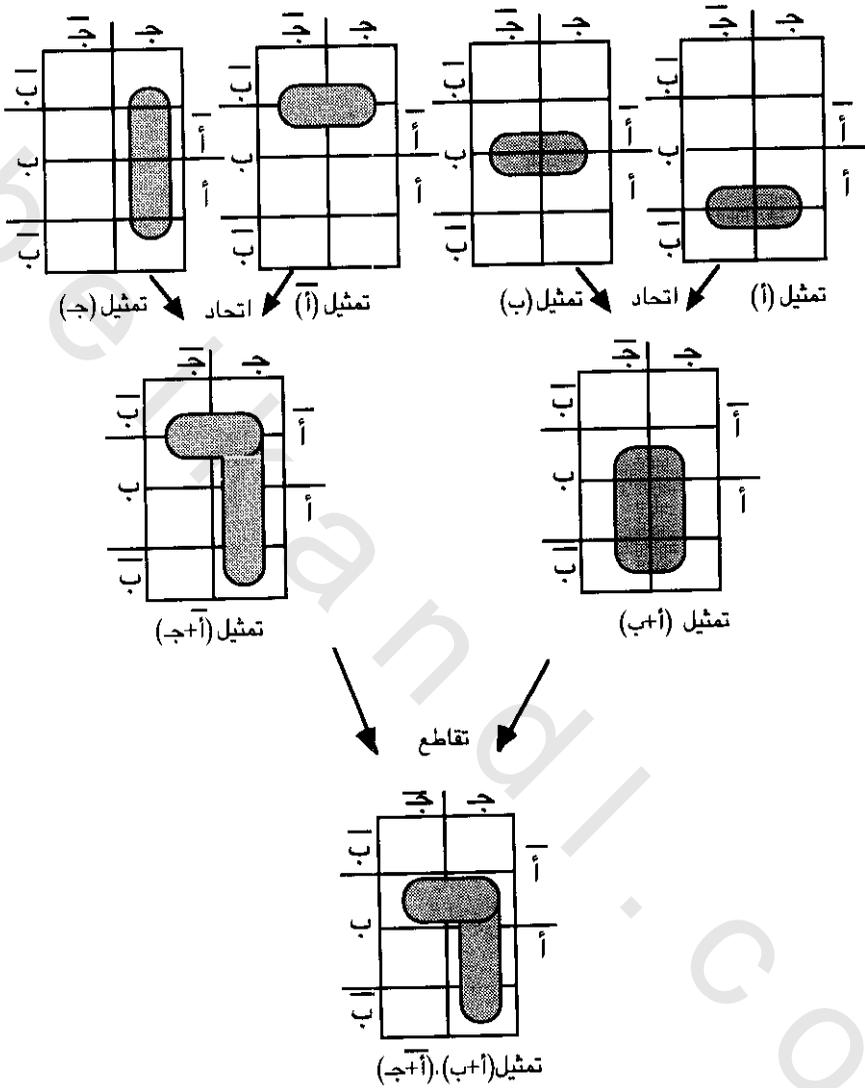
$$(أ+ب).(أ+ج) = (أ+ب).(ب+ج) + (أ+ب).(أ+ج)$$

التمثيل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيمن لهذه المعادلة ، هو

كالتالي :



التمثيل للطرف الأيسر بواسطة خارطة كارنوف هو كما يلي :

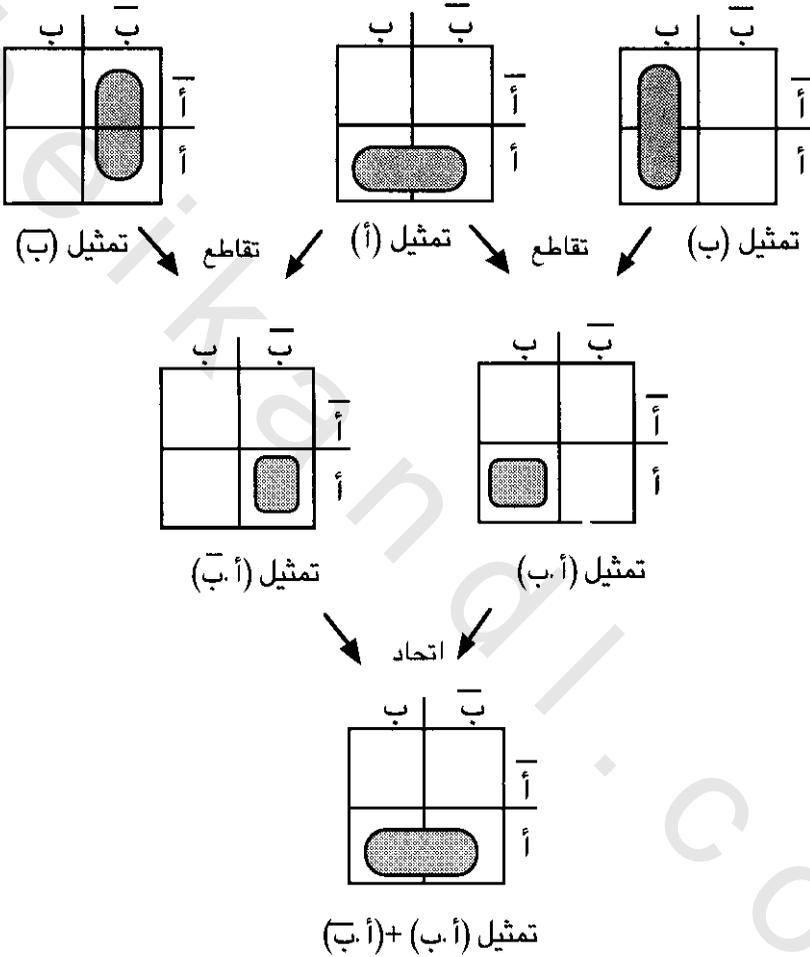


ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

3-13 - المعادلة الأولى النظرية السابعة :

$$A = (A \cdot B) + (A \cdot \bar{B})$$

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف ، لهذه المعادلة هو كالتالي :

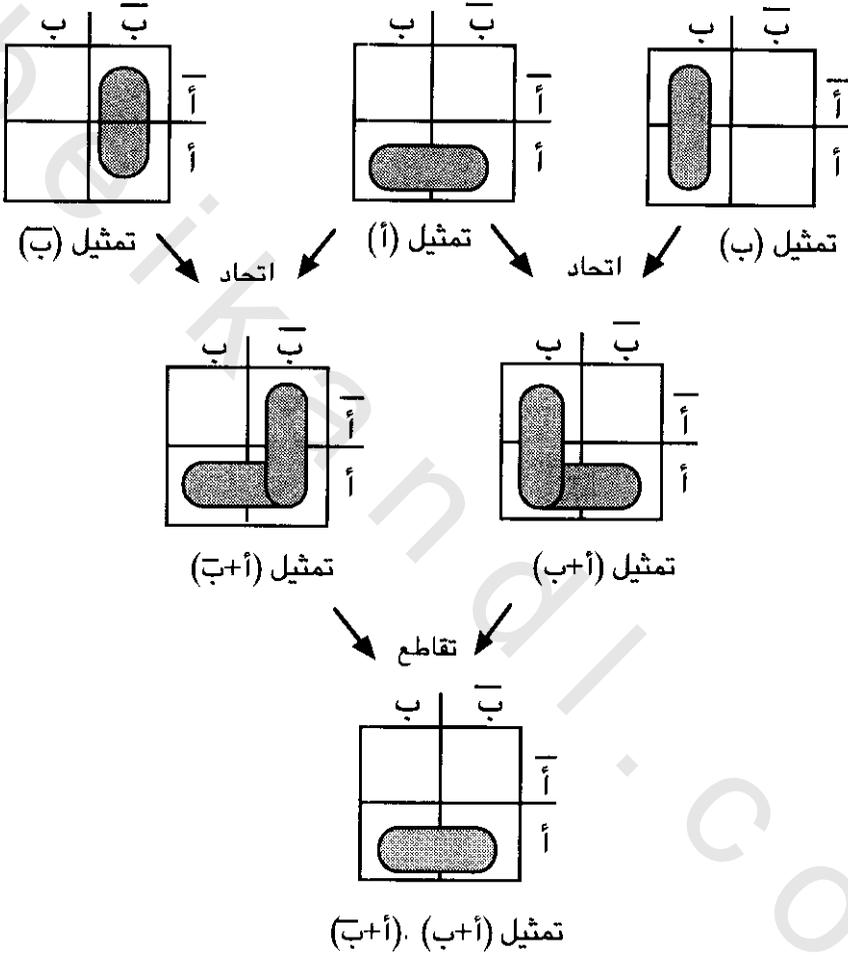


والشكل الأخير يمثل (أ)؛ وهو يكافئ الطرف الايسر من المعادلة .

3-14- المعادلة الثانية النظرية السابعة :

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف ، لهذه المعادلة هو كما يلي :

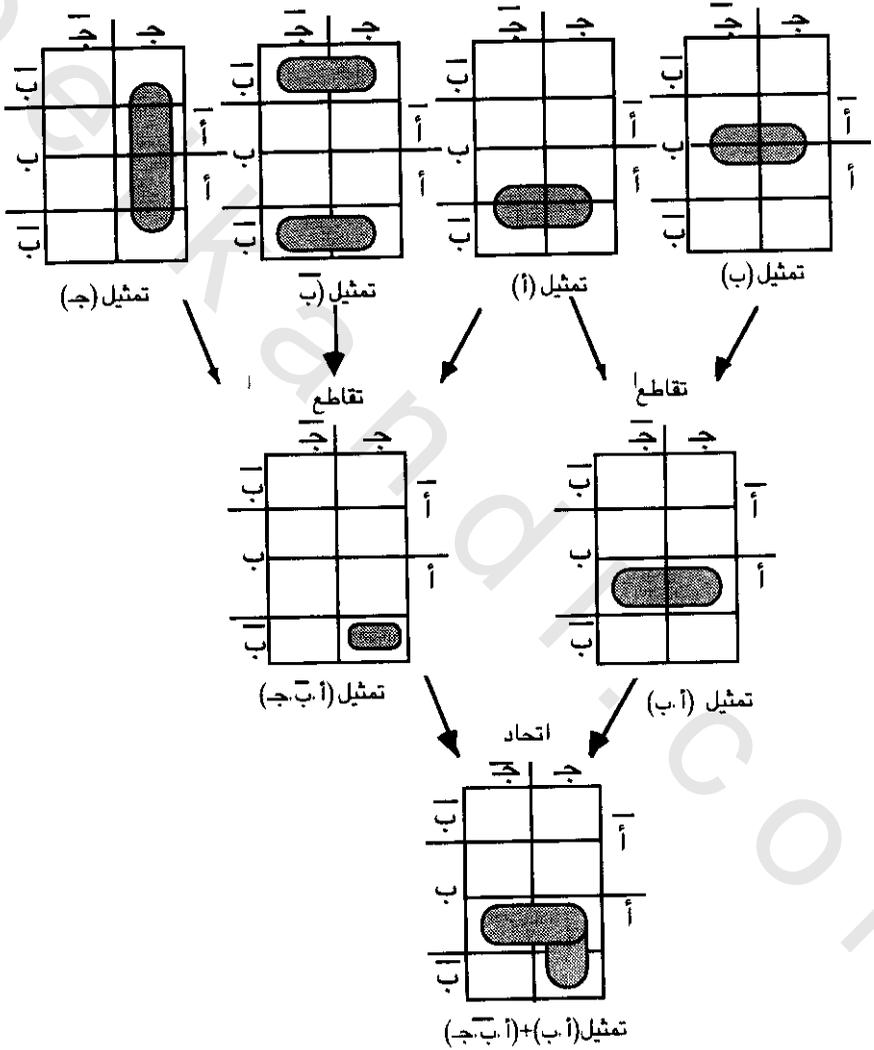


والشكل الاخير يمثل (أ) . وبذلك تحققت المعادلة . وهو المطلوب.

3-15- المعادلة الأولى النظرية الثامنة :

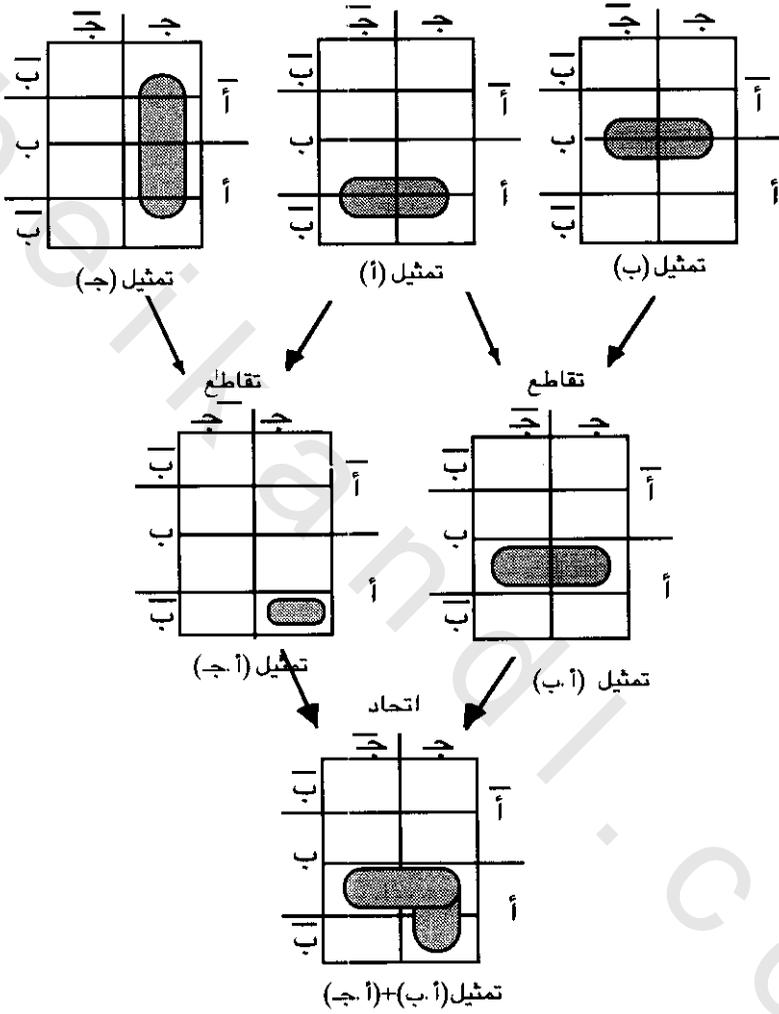
$$(A \cdot B) + (\bar{A} \cdot \bar{B}) = (A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B)$$

والتمثيل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيمن للمعادلة هو كالتالي :



والتمثيل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيسر للمعادلة ، هو

كالتالي :

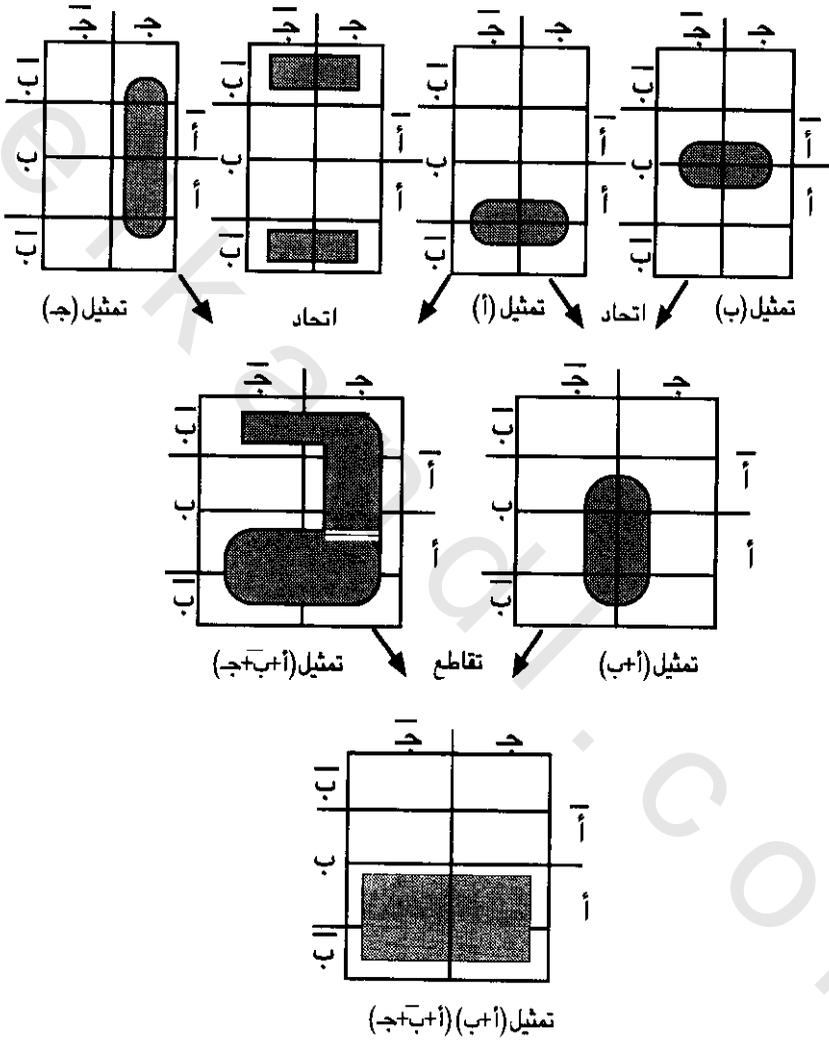


ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

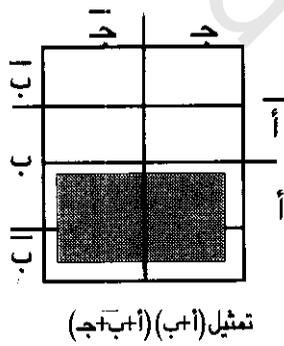
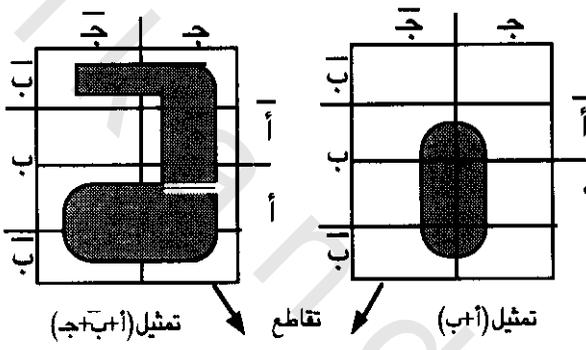
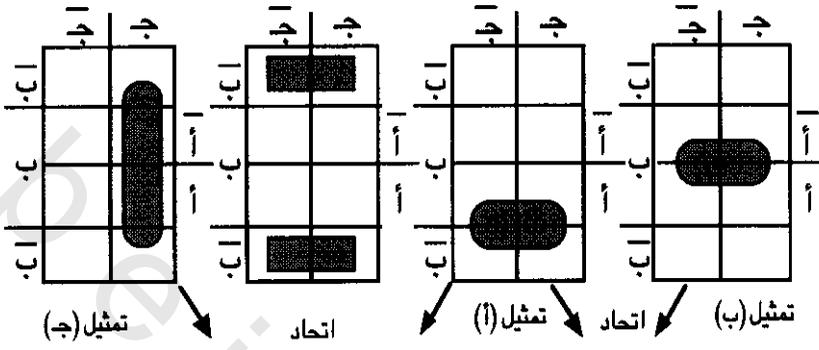
3-16- المعادلة الثانية النظرية الثامنة :

$$(أ + ب) . (أ + \bar{ب} + ج) = (أ + \bar{ب} + ج) . (أ + ج)$$

الإثبات للطرف الأيمن بواسطة خارطة كارنوف ، كما يلي :



والتمثيل للطرف الأيسر لهذه المعادلة هو كما يلي :



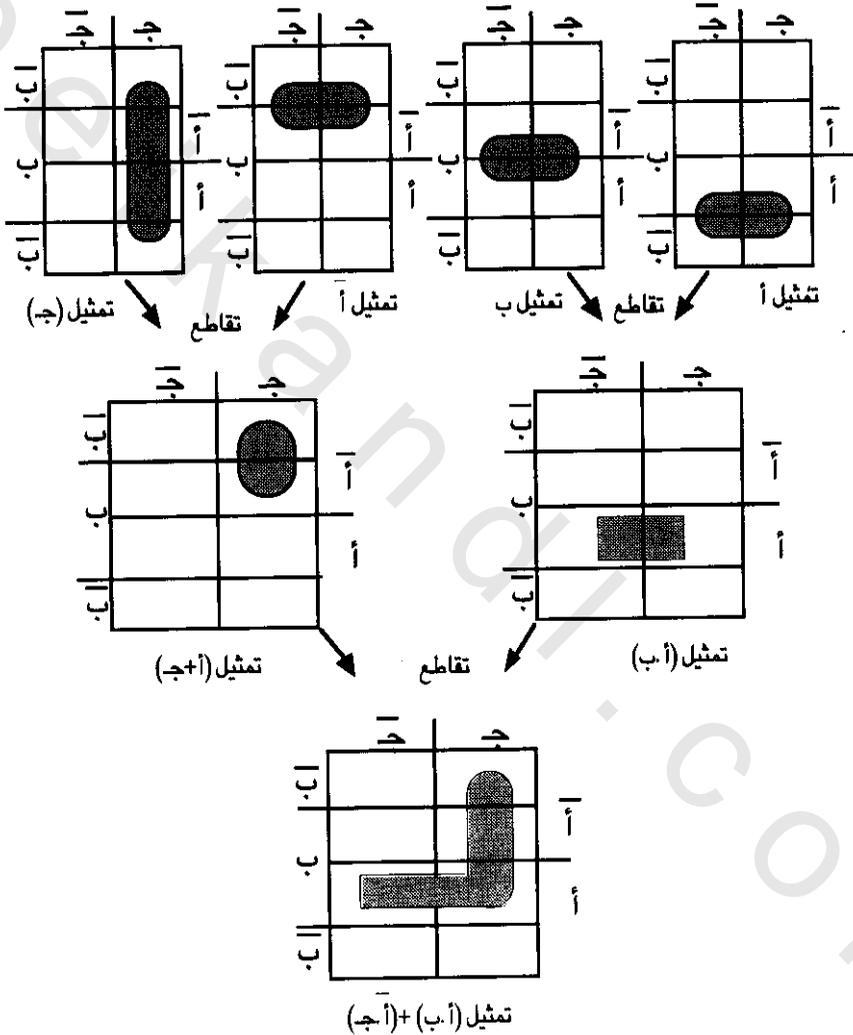
ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

3-17- المعادلة الأولى النظرية التاسعة :

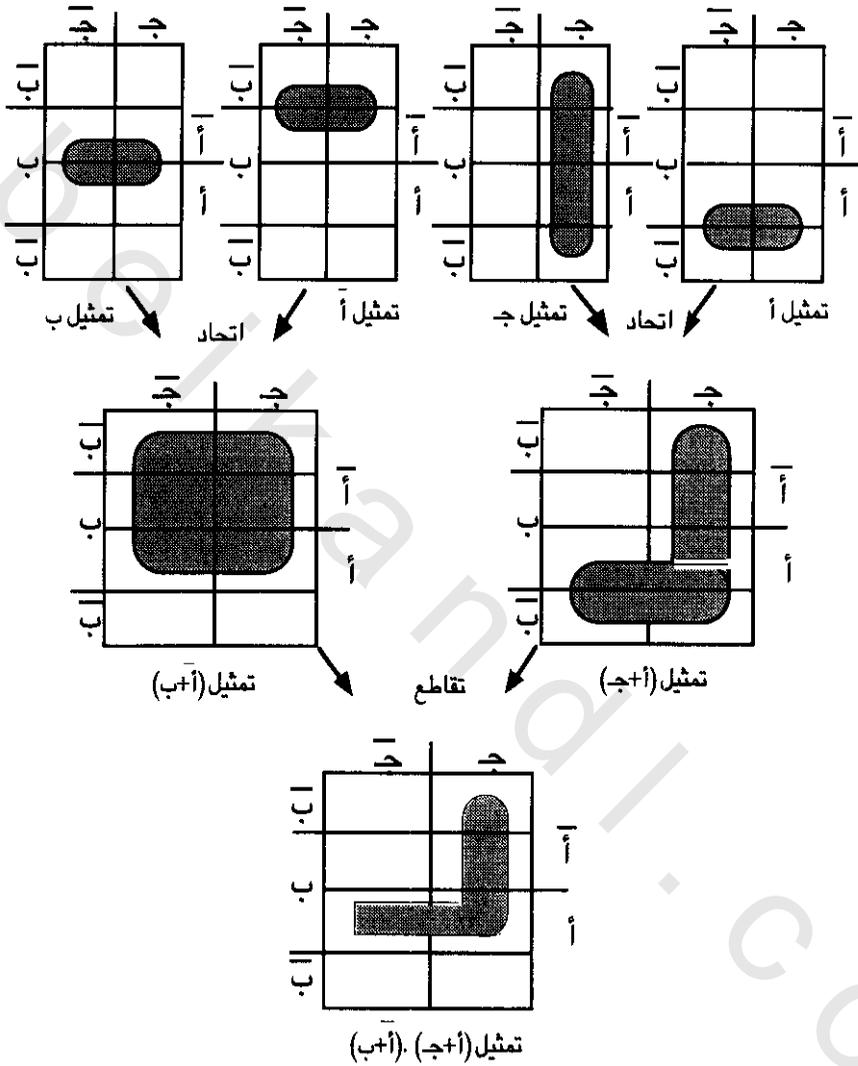
$$(A \cdot B) + (\bar{A} \cdot \bar{B}) = (\bar{A} \cdot B) + (A \cdot \bar{B})$$

التمثيل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيمن لهذه المعادلة ، هو

كما يلي :



والتمثيل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيسر ، هو كما يلي :



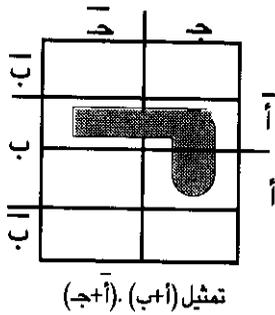
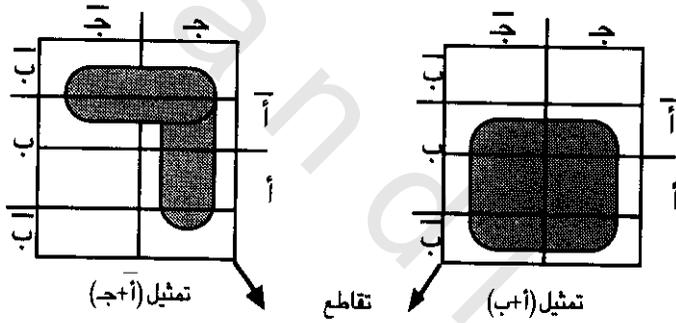
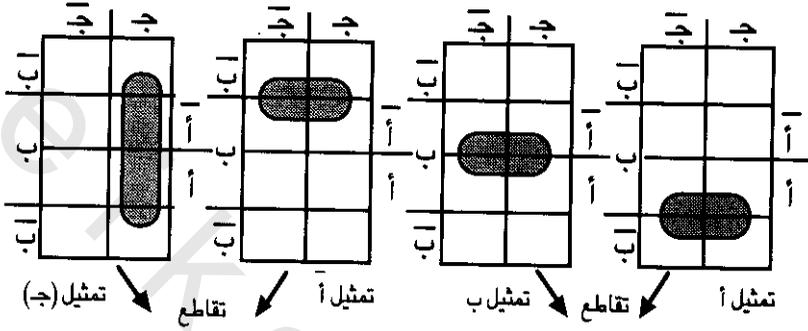
ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

3-18- المعادلة الثانية النظرية التاسعة :

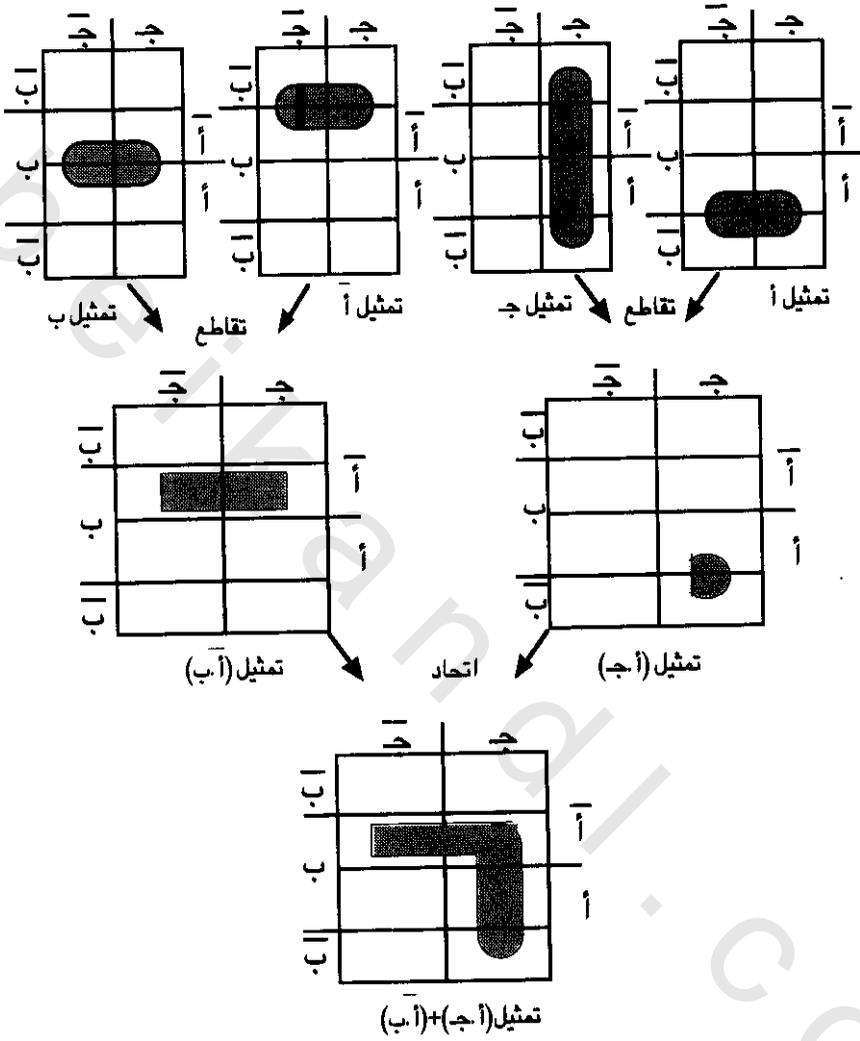
$$(أ + ب) \cdot (أ + ج) = (أ \cdot ج) + (أ \cdot ب)$$

والتمثيل للطرف الأيمن لهذه المعادلة بواسطة خارطة كارنوف هو

كما يلي :



والتمثيل للطرف الأيسر من هذه المعادلة هو كما يلي :



ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .