حساب الاحتمالات

الفصل الخامس

obeikan.com

١

معنى الاحتمال

إن معنى كلمة الاحتمال فى اللغة هو "ما لا يكون تصور طرفيه كافيًا بل يتردد الذهن فى النسبة بينهما، ويراد الإمكان الذهنى"[١]. وكلمة Probability (مشتقة من الكلمة اللاتينية Probare ومعناها يبرهن على" أو "يصدق على") هى ترجمة للكلمة اليونانية ευλοσον والتى معناها معقول" أو "مدرك". لذلك تشير كلمة Probability إلى احتمال وقوع حادث ما، أو ترجيح صدق قضية من القضايا[٢]. وعلى ذلك يكون مفهوم الاحتمال مناقضًا لكل من اليقين Certainty والاستحالة Impossibility[٣].

ويُعرَّف العالِم المنطقى دى مورجان De Morgan (١٨٠٦-١٨٧١) الاحتمال بأنه "حالة العقل تجاه حدث مقبل، أو أى شىء لا تتوافر لدينا معرفة مطلقة عنه"[٤]. فالعقل يكون إذن فى حالة تردد فى إصدار حكم محدد أو يقينى، ذلك أن العقل فى تعامله مع المستقبل لا يستطيع أن يعطى حكمًا إلا وكان الشك مدخلاً لمثل ذلك الحكم. فعلى سبيل المثال إذا ألقى شخص بقطعتى زهر النرد عشر مرات متتالية، فإنه من النادر أن يكون الرقم (٦) إلى أعلى عليهما معًا فى المرات العشر جميعها. إننا لا نتوقع أن يحدث هذا – رغم أنه ليس مستحيلاً – لذا يتطرق إلى توقعنا بعض الشك. ويندرج مثل هذا النوع من الشك تحت مفهوم الاحتمال[٥].

ويقول رونز Runes (فى قاموسه الفلسفى): إن الاحتمال ينشأ من اقتران جهلنا الجزئى بالطبيعة بالغة التعقيد وبشروط الظواهر، مع قصور وسائل الملاحظة والتجريب والتحليل[٦]. ولذا فمن الضرورى أن نضع فى اعتبارنا الطرق التى تؤدى بنا إلى تقريبات معقولة، وتقويم نتائجها بالقياس إلى الدلالة النسبية الممكنة فى كل حالة[٧]. ويرى رونز أن الاحتمال يعبر عن علاقة بين المقدمات والنتائج حين تكون المقدمات غير كافية لتحديد يقين النتيجة. ومع هذا فالاستدلال الاحتمالى يجب أن

يكون منطقيًا على أية حال، حتى ولو لم تكن نتيجته مؤكدة، ذلك لأن مقدماته مؤشر حقيقى لنتيجته[٨].

والاحتمال هو التعبير العلمى عن المصادفة فى المجال الرياضى. ومن المفكرين من يرى استبدال "الإمكان" بالاحتمال، لما فى كلمة الاحتمال من دلالة ذاتية وما فى كلمة الإمكان من إحالة مباشرة على موضوع خارجى، وإشارة إلى علاقات موضوعية[٩]. على حين أن هذه الإشارة إلى موضوع خارجى ليست بوجه عام شرطًا فى حساب الاحتمالات كفرع من فروع الرياضة، وإن تكن شرطًا لدى مدرسة بعينها تريد أن تخرج بحساب الاحتمالات من المجال الرياضى لتجعل منه عِلمًا موضوعيًا كالفيزياء مثلاً – سنوضح هذه المسألة فى الفصل السابع من هذا البحث. والحق، إنه على الرغم من النجاح البالغ الذى حققه حساب الاحتمالات من الناحية التطبيقية فى الفيزياء الذرية، وفى علم الحياة، وفى غير ذلك من أوجه النشاط العلمى الحديث، فإن الخلاف مازال على أشده حول تفسيره ودلالته الحقيقية. ولا شك أن أحد الأسباب الكثيرة الداعية إلى هذا الخلاف، هو وضع حساب الاحتمالات نفسه فى منطقة وسطى بين الرياضيات والعلوم التجريبية، حتى ليقال عنه فى هذا الصدد أن التجريبيين يتصورون أنه نظرية من النظريات الرياضية على حين أن الرياضيين يتصورون أنه واقعة تجريبية[١٠].

ولكلمة "الاحتمال" معان كثيرة ومتعددة، ومع ذلك يمكن حصرها فى المعانى الثلاثة الآتية[١١]:

١– المعنى الذى ينطوى عليه استخدامنا للاحتمال فى حياتنا اليومية والذى يعبر عن أن مضمون القضية الاحتمالية ونقيضه ممكن، كأن أقول لصديقى: "من المحتمل أن أقوم بزيارتك غدًا".

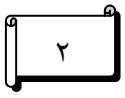
إن احتمال صدق هذه القضية يعادل كذبها.

٢– المعنى الثانى للاحتمال وهو المتضمن فى نظريات الاحتمال الرياضى، وفيه نجد أن القضية الاحتمالية ليست قضية يقينية كما انها ليست قضية مستحيلة، وإنما تقف بين اليقين والاستحالة. نرمز لليقين بالواحد الصحيح، وللاستحالة بالصفر، ونرمز للاحتمال بأى كسر من الكسور الواقعة بين الواحد والصفر.

٣- المعنى الثالث، وهو التعبير عن درجة عالية من التصديق، كالتعميمات الاستقرائية فى العلوم الطبيعية، والتى نصفها بأنها احتمالية، بمعنى أن لدينا درجة عالية من الاعتقاد فى صحتها فى المستقبل، وإن كانت لا ترتفع تلك الدرجة إلى اليقين.

ولقد بُذِلَت محاولات عديدة لتأسيس منطق للاحتمال، ولكن معظم هذه المحاولات واجهت اعتراضات قوية بسبب إغفالها التمييز الدقيق للتصورات المختلفة للاحتمال، غير أن هناك إجماع عام على وجود نظرية رياضية فى الاحتمال ترتكز على أسس راسخة، وأنها فرع متطور من الرياضيات الحديثة[١٢] غير أن منطق الاحتمال – كما يقول "رسل" – أقل اكتمالاً وقبولاً من المنطق الصورى[١٣]، ولذا ينبغى علينا أن نتجنب وضع تعريف جامع مانع للاحتمال، وذلك لسبب بسيط، هو أنه لا وجود لمثل هذا التعريف. كما أننا لا نجانب الصواب إن قلنا أنه ينبغى النظر إلى كل تعريف للاحتمال على أساس أنه تعريف لنظرية بعينها يخصها هى دون غيرها. فى حين لا توجد نظرية واحدة فى الاحتمال، بل هناك أنواع متعددة من النظريات، يندرج تحت كل نوع عدة نظريات قد تختلف فيما بينها[١٤]. أهم تلك الأنواع، نوعان: نوع يضم نظريات الاحتمال التى هى فرع من الرياضة البحتة، ونوع يضم نظريات الاحتمال التى تعالج مشكلة الاستقراء. وليس معنى هذا أن هناك فصلاً حاسمًا بين هذين النوعين من النظريات، فهناك من أصحاب الاحتمالات الرياضية من أراد أن يستخدم نظريته الرياضية فى حل مشكلة الاستقراء، وكل عالِم له نظرية فى الاحتمال الاستقرائى إنما شارك فى إقامة أو مناقشة نظريات الاحتمال الرياضى، لأن للاحتمال الاستقرائى أساسًا فى الاحتمال الرياضى[١٥].

ولقد كانت "المصادفة" هى أول ما تناولته نظرية الاحتمالات بالبحث، ولذا ينبغى علينا أن نحدد معنى "المصادفة" قبل المضى فى حديثنا عن حساب الاحتمالات.



الضرورة والمصادفة

المعنى الشائع للمصادفة Chance هو كل "ما يخرج على النظام والقانون المعروف، ولا يبدو له سبب ولا غاية واضحة، وهو أشبه ما يكون بالاتفاق"[١٦]. ومفهوم المصادفة على هذا النحو يناقض مفهوم "الضرورة" necessity فالضرورى هو "ما لا يمكن ألا يكون أو ما لا يمكن أن يكون بخلاف ما هو عليه. ويسمى الواجب، وهو ما يمتنع عدمه"[١٧]. فالشيء إما ضرورى أو مصادف، ولا سبيل إلى أن يكون ضروريًا ومصادفًا معًا. ولما كان الضرورى هو موضع العلم، كانت المصادفة هى الموضوع الذى يتجنبه العلم، وذلك لأن الضرورى يمكن صياغته فى قانون، أما المصادفة فلا تخضع لتحديد القانون[١٨].

وكان أرسطو هو أول من حدد معنى المصادفة (البخت)[١٩]، فذهب إلى أنها علة، ولكنها علة بالعرض، فالمصادفة عنده هى اللقاء العرضى الشبيه باللقاء القصدى. مثال ذلك أن يحفر الإنسان ليغرس شجرة فيجد كنزًا[٢٠]. كما ميّز أرسطو بين المصادفة و"تلقاء النفس"[٢١] على أساس أن المصادفة توجد فى الأشياء التى تعمل عن إرادة وروية، أما تلقاء النفس "فإنه قد يكون فى سائر الحيوان ويكون فى كثير مما لا نفس له، مثال ذلك أن نقول إن الفرس أتانا من تلقاء نفسه حتى سلم بمجيئه إلينا، إلا أن مجيئه إلينا لم يكن قصدًا منه للسلامة". وعلى ذلك فإن تلقاء النفس – هو فى رأى أرسطو – أعم وأشمل من المصادفة، إذ كل ما يحدث بالمصادفة فهو يحدث بتلقاء النفس. ولكن ليس كل ما يحدث بتلقاء النفس كان حدوثه بالمصادفة[٢٢]. ويرى أرسطو أن الحوادث أو الوقائع التى تحدث دائمًا وفى الغالب وبالطريقة نفسها لا يمكن أن نقول عنها إنها تحدث مصادفة، بل الحقيقة إنها تحدث بالضرورة[٢٣].

والمصادفة والضرورة كلمتان متضايفتان، أى أن الواحدة منهما لا تفهم إلا

مقرونة بالأخرى، فمعنى المصادفة لا يتبين إلا بالنسبة إلى معنى الضرورة، والعكس صحيح أيضًا. وتكون العلاقة بين شيئين "أ" و"ب" – من حيث الاتصال أو المصادفة – إحدى الحالات الثلاث الآتية[٢٤]:

١– إما أن " أ " تقتضى "ب" بالضرورة، مثال ذلك أن صفة البياض فى الشىء تقتضى أن يكون ذلك الشىء ممتدًا.

٢– وإما أن " أ " تستبعد "ب" بالضرورة، مثال ذلك أن وجود الشىء "الآن" وفى "هذا الموضع" يستبعد غيابه "الآن" ومن "نفس الجهة"[٢٥].

٣– وإما أن وجود " أ " لا يعنى شيئًا بالنسبة لوجود "ب" فقد توجد "ب" وقد لا توجد على حد سواء. كأن أصف الكرة بأنها بيضاء. فقد تكون الكرة بيضاء أو لا تكون. فليس هناك ضرورة لأن تكون بيضاء ولا تكون حمراء مثلاً. فإذا كانت بيضاء كان ذلك على سبيل المصادفة.

والحق أن لفكرة المصادفة عدة معان متباينة، نستبقى منها معنيين: مصادفة مطلقة ومصادفة نسبية[٢٦].

١– المصادفة المطلقة: وهى أن يوجد شىء بدون سبب إطلاقًا، فهى ناتجة عن عدم وجود علة. وهى تعبر عن غياب السابقة المحددة[٢٧].

٢– المصادفة النسبية: وهى تعبر عن غياب القصد المدبر (كالمصادفة الناتجة عن عدم وجود غاية)[٢٨]، كوجود حادثة معينة لتوافر سببها ويتفق اقترانها بحادثة أخرى مصادفة.

وعلى هذا الأساس يمكن القول بأن المصادفة المطلقة هى: أن توجد حادثة وجودًا مستقلاً بدون أى لزوم منطقى أو واقعى، أى بدون سبب. أما المصادفة النسبية: فهى اقتران حادثتين بدون أى لزوم منطقى أو واقعى لهذا الاقتران، أى بدون وجود رابطة سببية تحتم اقتران إحداهما بالأخرى[٢٩].

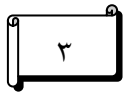
والمصادفة المطلقة مستحيلة من وجهة نظر المذهب العقلى[٣٠] الذى يؤمن أصحابه بمبدأ السببية بوصفه مبدأ عقليًا قبليًا. لأن المصادفة المطلقة تتعارض مع مبدأ السببية، فمن الطبيعى لكل من يؤمن بمبدأ السببية أن يرفض المصادفة

المطلقة[٣١]، وأما المصادفة النسبية فلا تتضمن استحالة، لأنها لا تتعارض مع فكرة السببية. فالمصادفة النسبية لا تنكر القول بأن الطبيعة تتكون من مجموعات من الظواهر التى تخضع كل منها لقانون يحددها تحديدًا ضروريًا، وقد تتداخل هذه المجموعات فى لحظة معينة فتحدث المصادفة. فعندما نقول إن صديقين تقابلا اتفاقًا، أو إن حجراً سقط من حائط فقتل بالصدفة شخصًا مارًا، نعنى بذلك أن المقابلة تبدو مقصودة مادامت قد وصلت إلى نقطة التقى فيها الاثنان، وأن سقوط الحجر يبدو منطويًا على قصد القتل، لشدة ما يبدو لنا أنه قد قصد الشخص المشار إليه بالذات. ولكن الأمر فى الواقع بخلاف ذلك. فما يبدو أنه قصد مدبر لا يطابق أية حقيقة واقعية، فليس ثمَّة قوة فاعلة هيأت المقابلة[٣٢]، أو وجهت الحجر.

غير أن بعض الفلاسفة اعتقدوا أن فى وسعهم تأكيد وجود الصدفة وجودًا فعليًا، ومن هؤلاء كورنو Cournot فالصدفة عنده تنحصر فى نظام "العلية". فسقوط الحجر مثلاً يكّون هو وسوابقه وشروطه (تماسكه الواهى بالسقف، هبوب الريح فى اتجاه معين، وفى لحظة معينة، وانخفاض الضغط الجوى) سلسلة حتمية تمامًا. ومن جهة أخرى، فإن مرور الشخص عاثر الحظ يكّون هو وسوابقه وشروطه (رغبته فى النزهة أو الذهاب إلى عمله) سلسلة أخرى حتمية كالسابقة، وتقابل السلسلتين هو الذى لا يخضع للحتمية، فالحتمية الأولى خاصة بالظواهر الجوية، والثانية نفسية[٣٣].

وتمتاز نظرية "كورنو" بأنها تُرْجِع مختلف تعريفات المصادفة إلى تعريف واحد. فليس ثمَّة إلا مصادفة واحدة، هى تقابل سلاسل مستقلة. والنظرية لا تنكر الحتمية بالمعنى الصحيح، بل تجزئها، وتفصلها إلى سلاسل وخيوط متميزة[٣٤].

إن المصادفة لا تتنافى مع الحتمية إلا إذا كانت كل حقائق الوجود وحوادثه مستقلة إحداهما عن الأخرى، ولكن الواقع غير ذلك، إذ من حقائق الوجود ما يقتضى بالضرورة حقائق أخرى، وإذن فالمصادفة والحتمية لا يتناقضان، أى أن الحادثة الواحدة المعينة قد تكون مصادفةً بالنسبة لشىء، آخر[٣٥].



النشأة التاريخية لمفهوم الاحتمال

صار مفهوم الاحتمال؛ كما يُسْتَخدم فى الرياضيات والفيزياء الرياضية والعلوم الإحصائية، موضوعًا لأحد أفرع الرياضة البحتة، يُطلق على هذا الفرع اسم "حساب الاحتمالات"، ويعتمد حساب الاحتمالات على المعادلات الرياضية المجردة، كما يعتمد فى تطبيقاته على مناهج الإحصاء الرياضية[٣٦]. ولقد بلغ "حساب الاحتمالات" حدًا كبيرًا من الاكتمال، رغم نشأته القريبة، إذ بدأ مع أبحاث باسكال Pascal (١٦٢٣-١٦٦٢)، وفيرما Fermat[٣٧]، وذلك فى صيف عام ١٦٥٤ عندما طرح الشفالييه دى ميريه Chevalier de Méré على باسكال سؤالين متعلقين بألعاب الحظ، يقول السؤال الأول: "على فرض أننا نلعب الزهر (النرد). فما هو أقل عدد من الرميات يستطيع المرء بعدها أن يتوقع أن يظهر رقم ٦ فى زهرتى اللعب معًا؟". أما السؤال الثانى، فيقول: "إذا أوقف اللعبان لعبهما مختارين قبل نهاية الدور، وبحثا عن تقسيم عادل لما جاء به الحظ لكل منهما، فما نصيب كل منهما تبعًا لاحتمال كسبه الدور فى ذلك الوقت؟"[٣٨].

نجح باسكال فى الإجابة عن السؤالين، وتوصل إلى اكتشاف طريقتين من طرق حساب الاحتمالات، واكتشف ثالثتهما "فيرما" الذى راسله بسكال فى ذلك الوقت، وقد نُشرت ثلاث من هذه الرسائل – التى كُتِبَت فى الفترة ما بين عامى ١٦٥٤ و١٦٧٩، ثم أعيد نشرها فى مجموعة مؤلفات بسكال سنة ١٨١٩. وكان منهج بسكال يقف عند حد لاعبين. أما منهج فيرما فكان يقوم على الاقترانات المتعددة، ويمتد ليشمل أى عدد من اللاعبين. ودار النقاش بين بسكال وفيرما حول هذه النقطة، اعترف باسكال فى نهايته بسلامة منهج فيرما[٣٩].

ومن بين مسائل الخلاف التى أثيرت بين باسكال وفيرما أيضًا هذه المسألة البسيطة:

شخص عليه أن يرمى الرقم ٦ بزهرة اللعب فى ٨ رميات، فلو افترضنا أنه رمى ثلاث رميات بدون نجاح، فما مقدار نسبة ما يُسْمَح له بأخذه من الرهان لو تنازل عن الرمية الرابعة؟

إن مصادفة النجاح فى الرمية الواحدة المستقلة هى $\frac{1}{6}$، وعلى هذا فله أن يأخذ $\frac{1}{6}$ الرهان لو تنازل عن رمية من الرميات، على أن الرمية الرابعة ليست مستقلة. فالرمية الأولى وحدها هى التى تساوى $\frac{1}{6}$، والثانية تساوى $\frac{1}{6}$ الباقى أى $\frac{5}{36}$ من الرهان، والثالثة تساوى $\frac{1}{16}$ الباقى أى $\frac{25}{216}$، أما الرمية الرابعة فتساوى $\frac{1}{6}$ الباقى الأخير أى تساوى $\frac{125}{1296}$ من الرهان[٤٠]. وهكذا كانت مسألة النقط هى المسألة الرئيسية التى أثارت الخلاف، ووضعت فى الوقت نفسه النواة الأولى لحساب الاحتمالات.

إن تصور الاحتمال الرياضى (حساب الاحتمالات)، وإن كان قد بدأ فى النصف الثانى من القرن السابع عشر على يد باسكال وفيرما – كما أشرنا – فإنه استمر فى تطوره بفضل جهود لابلاس Laplace وجاوس Gauss إلى أن وصل هذا التطور إلى ذروته فى المؤلفات العميقة التى قام بوضعها عدد كبير من علماء الرياضة المعاصرين[٤١]. وتستلزم كل محاولة لوضع نظرية عن التصور الرياضى للاحتمال أن نبدأ من الصورة الرياضية لهذا التصور، ومن هنا سعى بعض الرياضيين إلى القيام بدراسات حديثة من أجل بلورة أسس التصور الرياضى للاحتمال [٤٢].

ومع هذا، يجب علينا أن ننبه إلى وجود تصور آخر للاحتمال، لا يبرز من خلال الصورة الرياضية، ونعنى به: مفهوم الاحتمال كما يُسْتَخدم فى المحادثات الجارية، والذى نعبر عنه بالكلمات الآتية: "ممكن" و"محتمل" و"مرجّح". إن استخدام هذا المفهوم لا يقتصر على لغة الحياة اليومية، بل يُستخدم أيضًا فى اللغة العلمية وذلك حين يتطلب الأمر بعض التخمينات والتكهنات[٤٣]. إننا نطلق الأحكام العلمية دون الادعاء بأنها يقينية، أننا نقول بهذه الأحكام على سبيل الاحتمال

أو بوصفها على درجة عالية من الترجيح. إن كلمة "محتمل" Probabl فى مثل هذا السياق لا تخضع لطرق إحصائية [٤٤]. ومن الملاحظ أن هذا التصور المنطقى للاحتمال – والذى لا يمكن الاستغناء عنه لإقامة المعرفة – لم يصل، رغم أهميته، إلى تحديد دقيق كالذى توصل إليه التصور الرياضى للاحتمال. [٤٥]

والحق أن المناطقة قد انشغلوا طوال الوقت – منذ أرسطو وحتى اليوم – بالتصور المنطقى للاحتمال، ولذا فإن المعالجة العلمية لهذا التصور هى أقدم بكثير من المعالجة العلمية للتصور الرياضى (الذى بدأ مع باسكال وفيرما). ومع هذا فإن نظرية التصور المنطقى للاحتمال مازالت عاجزة عن بلوغ الدرجة نفسها من الاكتمال التى وصلت إليها نظرية التصور الرياضى له.[٤٦]

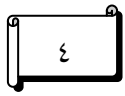
كانت الميزة الكبرى لمبدعى المنطق الرمزى أنهم عقدوا العزم منذ البداية على جعل منطق الاحتمال يصل لدقة المنطق ثنائى القيمة. فلقد طالب "ليبنتس" Leibnitz ببرنامج لصياغة منطق للاحتمال فى صورة منطق كمى لقياس درجات الحقيقة. ولم يتحقق هذا المطلب إلا فى القرن التاسع عشر. فظهرت بعض المحاولات من جانب "دى مورجان" De Morgan فى هذا الصدد، غير أن "جورج بول" Boole كان هو الواضع الحقيقى لأول حساب متكامل لمنطق الاحتمال – رغم أن بيرس Peirce قام فيما بعد بتصحيح بعض أخطائه – إن منطق بول يُعد أعظم إنجاز فى تاريخ التصور المنطقى للاحتمال منذ أرسطو[٤٧]. وظل منطق الاحتمال يواصل مسيرته من خلال أعمال "جون فن" Venn وبيرس كل على حده[٤٨]. كما استمر عند بعض المناطقة المعاصرين من أمثال: كينز Keynes ولوكاشيفتش Lukasiewicz وزوريسكى Zawirski[٤٩].

إن خطى تطور الاحتمال الرياضى والاحتمال المنطقى تكشف عن وجود تصورين للاحتمال: تصور رياضى وآخر منطقى. قد يبدو ثمَّة تشابه وارتباط معين بين التصورين، غير أن هناك، من جانب آخر، تمايز تام بين الطبيعة المنطقية لكل منهما. ومن هنا انقسم المناطقة إزاء هذا الموقف إلى فريقين[٥٠]:

الفريق الأول: يؤكد أصحابه – بشكل ضمنى أو صريح – على أن هناك تمايزاً واضحاً بين التصور الرياضى والتصور المنطقى للاحتمال.

الفريق الثانى: يتمسك بأن هذا التمايز الظاهر بين التصورين لا يمثل اختلافاً جوهرياً بينهما.

ولقد كشفت أبحاث قريبة العهد عن تماثل التصورين، واستنادهما إلى أساس واحد، وإن بين التصورين هوية[٥١]، وأن القول بهويتهما يسمح بفهمهما فهما أعمق. واحتل الصراع بين كلا الفريقين حيزاً كبيراً من المناقشة المتعلقة بمشكلة الاحتمال. ولقد كانت نتيجة هذا الصراع على جانب كبير من الأهمية. فما أن توصلت النظرية الرياضية فى الاحتمال إلى حل مرضٍ، حتى انتهى الفريق المدافع عن هوية التصورين – الرياضى والمنطقى للاحتمال – إلى حل المشكلة الفلسفية للاحتمال برمتها، بينما الفريق المدافع عن التمايز قد ترك مشكلة التصور المنطقى للاحتمال معلقة على نحو غير مرضٍ[٥٢].



الاحتمال الرياضى

يقوم الاحتمال الرياضى على أساس ارتباط قضيتين إحداهما معروفة لنا تمامًا فى حين تكون الأخرى مجهولة لنا تمامًا[٥٣]. إن درجة احتمال قضية ما، لا تتوقف على شىء فى طبيعتها، وإنما تتوقف على نسبتها إلى قضية أخرى، وحسبنا أن نعلم أن درجة احتمال القضية الواحدة، تختلف باختلاف القضية الأخرى التى ننسبها إليها، أو بعبارة أخرى: إن درجة احتمال قضية ما متوقفة على ما لدينا من معلومات، أو على ما لدينا من شواهد، فإن قيل لنا أن فيلاً يسير شاردًا فى الطريق العام، كان احتمال الصدق ضعيفًا جدًا، لأننا ننسب هذا القول إلى ما نعلمه فى خبرتنا الماضية عما يسير فى الطريق العام وما لا يسير، ولكن لو قيل لنا إن سيارة تسير فى الطريق، كان احتمال الصدق قويًا جدًا، لأننا هنا أيضًا ننسب القول إلى ما نعلمه عن الأشياء التى تسير فى الطريق. وهكذا تزيد درجة احتمال القول أو تنقص حسب الشواهد التى ننسبها إليه[٥٤].

وينشأ الاحتمال الرياضى – كما أشرنا – من ارتباط قضيتين، إحداهما معروفة تمامًا، فى حين أن الأخرى تكون غير معروفة على الإطلاق، فإذا سحبت ورقة من أوراق اللعب، فما هو احتمال أن تكون هذه الورقة مكتوبًا عليها الرقم (١)؟ إن عدد الأوراق معروف لنا تمامًا – وهو اثنتان وخمسون ورقة – ونعلم أيضًا أن بين كل ثلاث عشرة ورقة توجد واحدة تحمل الرقم (١)، ولكننا نجهل تمامًا رقم الورقة التى سأسحبها. ولكننا بعملية حسابية بسيطة نحصل على درجة الاحتمال المطلوبة[٥٥].

والحقيقة الأساسية التى يجب أن نضعها نصب أعيننا هى وجود نظرية رياضية فى الاحتمال، وأن هناك إجماع شبه تام بين علماء الرياضة – المشتغلين بهذه النظرية – على أن كل شىء يمكن التعبير عنه بالرموز الرياضية. ومع هذا فليس هناك اتفاق نهائى على تفسير الصيغة الرياضية. فى مثل هذه الحالة فإن أبسط الإجراءات التى

يمكن أن تتخذ هى أن نسرد البديهيات Axioms التى تستدل منها النظرية الرياضية فى الاحتمال[٥٦] – وهذا ما سنفعله فى الفقرة رقم (٥) – ومن ثم نقرر أى التصورات يفى بمطالب هذه البديهات ويكون جديرًا، من وجهة النظر الرياضية، أن يسمى "احتمال" ويرى "رسل" أنه إذا كانت هناك كثرة من التصورات، وإذا كنا قد قررنا أن نختار بينها، فإن دوافع الاختيار تقع خارج الرياضيات[٥٧].

ويطرح "رسل" تصورًا Concept بسيطًا وملائمًا يفى بمطالب بديهيات نظرية الاحتمال، فيقول: بافتراض فئة محدودة (ب) بها الأعضاء (ن)، وأن (م) من هذه الأعضاء ينتمى إلى فئة أخرى (أ)، عندئذ نقول إنه إذا اختير عضو من (ب) عشوائيًا، كان احتمال انتمائه للفئة (أ) هو $\frac{م}{ن}$[٥٨].

وجدير بالذكر أنه ليس هناك مجال للصدق أو الكذب فيما يتعلق باختيار التصور الملائم، إذ إن أى تصور يشبع هذه البديهيات يمكن أن يُؤخذ على أنه تفسير رياضى للاحتمال[٥٩]. وقد تتجه رغبتنا إلى تبنى تفسير Interpretation ما فى سياق معين، وتفسير آخر فى سياق آخر، ومن هنا تتعدد التفسيرات. لأن الملائمة هى الدافع الذى يرشدنا لاختيار تفسير دون آخر. وعادةً ما يكون هذا هو الموقف إزاء تفسير النظريات بصفة عامة[٦٠].

ولكى يوضح "رسل" كيف أن النظرية الرياضية فى الاحتمال تُشْتَق من عدد معين من البديهيات، يضرب مثلاً باشتقاق علم الحساب بالكامل من خمس بديهيات وضعها عالِم الرياضة الإيطالى "بيانو" Peano (١٨٥٨–١٩٣٢)، فلقد أثبت بيانو أن نظرية الأعداد الطبيعية كلها يمكن أن تشتق من ثلاثة مفاهيم أولية، وخمس قضايا أولية، بالإضافة إلى قضايا المنطق البحت. والمفاهيم الثلاثة الأولية فى حساب بيانو هى:

"الصفر"، "العدد"، "التالى".

والمقصود بـ"التالى" العدد "المابعد" فى الترتيب الطبيعى، أى أن تالى الصفر هو الواحد، وتالى الواحد هو اثنان ... وهكذا[٦١]. والقضايا الأولية الخمس التى يفترضها بيانو والتى تُعَد بمثابة العلاقات المنطقية التى تبين استعمال تلك الحدود، هى:

١- "الصفر" عدد.

٢- "تالى أى عدد" هو عدد.

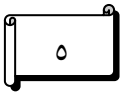
٣- ليس لعددين نفس التالى.

٤- ليس الصفر تاليًا لأى عدد.

٥- كل خاصية للصفر بما أنها تصدق عليه بوصفه عددًا فهى تصدق على العدد التالى له كما تصدق على التالى لما يليه[٦٢]، وهكذا.

إن نظرية الأعداد الطبيعية تنشأ من هذه المفاهيم الثلاثة والقضايا الخمس[٦٣]. وكما نشأت نظرية الأعداد الطبيعية من عدة مفاهيم أولية، تنشأ نظرية الاحتمال الرياضية – على النحو نفسه – من مجموعة بديهيات.

غير أن مفاهيم "بيانو" الأولية الثلاثة – التى هى "الصفر" و "العدد" و"التالى" – تقبل عددًا لا نهاية له من التفسيرات[٦٤]، تحقق جميعها القضايا الأولية الخمس[٦٥]، ولكننا تختار منها ما يصلح للرياضة البحتة وما يناسب الحياة اليومية أيضًا. وبالمثل فى حالة نظرية الاحتمالات الرياضية يتم اختيار التفسير وفقًا للغرض الذى نضعه نصب أعيننا[٦٦].



بديهيات نظرية الاحتمال

هناك مجموعة من البديهيات – تكاد تكون واحدة عند معظم الباحثين – تستند إليها النظريات المختلفة فى تفسير الاحتمال، ولقد عرضها برتراند "رسل" فى كتابه "المعرفة البشرية" Human Knowlesge نقلاً عن "برود" C.D. Broad. ويشير "رسل" بـ $\frac{ب}{ا}$ إلى الفكرة غير المُعَرَّفة والتى تعبر عن "احتمال ب إذا كانت لدينا أ". وهذه الفكرة غير المُعَرَّفة إنما يقصد بها "رسل" أنها تُعَرّف فقط عن طريق بديهيات معينة، وأى شىء يتفق ومتطلبات هذه البديهيات هو "تفسير" لحساب الاحتمالات[٦٧]. وعلى ذلك فمن المتوقع أن تكون هناك عدة تفسيرات ممكنة، ليس من بينها ما هو أكثر صوابًا أو مشروعية من الآخر، ولكن ربما يكون أحد التفسيرات أكثر أهمية من غيره، تمامًا كما هى الحال بالنسبة لبديهيات "بيانو" الخمس للحساب. فلقد رأينا أنها تقبل عددًا لا نهاية له من التفسيرات إلا أن تفسير الأعداد الطبيعية بأنها تبدأ بالصفر، أهم من تفسيرها على أنها تبدأ بالعدد ٣٧٨١ مثلاً. وهو أكثر أهمية لأنه مقبول فى الصياغات الرياضية البحتة وفى الحياة اليومية على السواء[٦٨]. وحالياً سنغض الطرف عن كل المشاكل المتعلقة بالتفسير ونواصل المعالجة الصورية المجردة للاحتمال. وها هى بديهيات نظرية الاحتمال[٦٩]:

١– إذا افترضنا (ب) و(أ) فهناك قيمة واحدة فقط لـ $\frac{ب}{ا}$، ولذا يمكننا أن نتحدث عن "احتمال (ب) على أساس (أ)".

٢– إن القيم الممكنة للصيغة $\frac{ب}{ا}$ هى كل الأعداد الحقيقية ابتداء من الصفر وانتهاء بالواحد الصحيح وما بينهما.

٣- إذا كانت (أ) تستلزم (ب) كانت $\frac{ب}{ا}$ = ١.

"يُسْتَخدم (الواحد الصحيح) للدلالة على اليقين".

٤- إذا كانت (أ) تستلزم لا - ب، كانت $\frac{ب}{أ}$ = صفر.

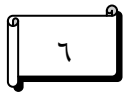
"ويُسْتَخدم (الصفر) للتعبير عن الاستحالة".

٥- إن درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفتى (ب)، (جـ) معًا هى درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفة (ب)، مضروبة فى درجة احتمال أن تتصف (أ ب) بصفة (جـ).

"وهذه البديهية تُعْرَف باسم (بديهية الاتصال)".

٦- إن درجة احتمال أن تتصف (أ) بواحدة على الأقل من صفتى (ب) و(جـ) هى درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفة (ب) وحدها، مضافًا إليها درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفة (جـ) وحدها، مطروحًا من ذلك درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفتى (ب) و(جـ) معًا.

هذه هى البديهيات الست التى تُشْتَق منها نظرية الاحتمال، وعلى هذا الأساس يجب أن يُلاحَظ عند تفسير الاحتمال أن يُعطى مفهومًا تصدق عليه تلك البديهيات، أى يجب أن يكون لاحتمال (ب) على افتراض (أ) معنى يفرض أن يكون لهذا الاحتمال قيمة واحدة لا أكثر، تحقيقًا للبديهية الأولى، ويسمح بأن يحصل هذا الاحتمال على أية قيمة ابتداءً من الصفر وانتهاءً بالواحد الصحيح، تحقيقًا للبديهية الثانية، ويتطلب أن تكون درجة الاحتمال مساوية للواحد الصحيح فى حالة لزوم (ب) عن (أ)، وتكون درجة الاحتمال مساوية للصفر فى حالة لزوم لا - ب عن (أ)، وذلك تحقيقًا للبديهية الثالثة والرابعة[٧٠]. أما البديهية الخامسة (بديهية الاتصال) والسادسة (بديهية الانفصال) فسنعود إلى شرحهما بعد أن نعرض بشكل مبسط الأسس المتضمنة فى حساب الاحتمالات.



حساب الاحتمالات

توضح بديهيات نظرية الاحتمال أن القضية الاحتمالية ليست قضية يقينية كما أنها ليست مستحيلة، وإنما تقف بين اليقين والاستحالة، فإذا قلنا إن الحادثة "هـ" من الممكن أن تحدث، فهذا معناه أن هناك أسبابًا ترجح حدوثها، وأن هذه الأسباب أقوى من الأسباب التى ترجح عدم حدوثها[٧١]. ولكى نتمكن من قياس درجة احتمال وقوع حادثة ما، فإنه يجب علينا أن نحصى عدد الحالات المواتية والحالات غير المواتية التى تساعد أو تعوق وقوع الحادثة المذكورة[٧٢]. وتتفاوت درجة احتمالها بين الصفر والواحد، أى بين الاستحالة واليقين. وعلى ذلك يتضح أن نظرية الاحتمال تستبعد النظرة الذاتية، وتجعل درجة الاحتمال أمرًا موضوعيًا خارجًا عن ذات الإنسان الذى يقوم بقياسها. فليس الاحتمال بهذا المعنى أمر عقيدة شخصية لا سند له إلا ما نظنه صوابًا، بل القضية الدالة على احتمال هى تعبير عن العلاقة بين قضيتين[٧٣]، فإذا كانت العلاقة بينهما لزومًا ضروريًا كانت درجة احتمالها واحد صحيح، وإذا كانت العلاقة بينهما تناقضًا كانت درجة الاحتمال صفرًا، وإذا كانت العلاقة بينهما هى بين هذين الطرفين، احتاج الأمر إلى عمليات رياضية لقياس درجة الاحتمال[٧٤].

ولتوضيح كيفية قياس درجة الاحتمال، نأخذ المشكلة المألوفة زهر اللعب (النرد) إذ إن العوامل المتضمنة فيها بسيطة ويمكن حسابها بسهولة[٧٥]:

١- ما هو احتمال أن يظهر الرقم ٦ إذا ألقينا **زهرة لعب واحدة؟**

إنه من الواضح أن هناك ستة طرق لوقوع زهرة اللعب، وأنها يجب أن تقع بطريقة من هذه الطرق الستة بحيث تستقر الزهرة عند أى وجه من وجوهها الستة.

إذن احتمال ظهور الرقم ٦ إلى أعلى إذا ألقينا زهرة لعب واحدة هو $\frac{1}{6}$.

٢- ما هو احتمال **ألا يظهر** الرقم ٦ إلى أعلى إذا ألقينا **زهرة واحدة؟**

الاحتمال هو $\frac{5}{6}$.

٣- إذا ألقينا بزهرتين فما هو احتمال أن يظهر الرقم ٦ **فى الزهرتين معًا؟**

بما أن لكل زهرة ستة أوجه، وبما أن أيًا من هذه الأوجه قد يظهر مع أى وجه من الأوجه الستة للزهرة الأخرى، فإنه من الواضح أن هناك ٣٦ اقترانًا ممكنًا. إذن فالاحتمال المطلوب هو $\frac{1}{36}$.

إنه من الواضح أن الحصول على الرقم ٦ فى واحدة من قطعتى الزهر معتمدًا على احتمال الحصول على الرقم ٦ فى الزهرة الأخرى. وهذه الحوادث تسمى حوادث مستقلة. واحتمال أن كليهما سوف يحدث إنما هو اقتران بين الاحتمالات المستقلة لكل منهما.

أى: $\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$

وهكذا نحصل على الاحتمال الاقترانى بين حادثتين أو أكثر من الحوادث المستقلة بضرب احتمالاتها المنفصلة.

٤- ما هو احتمال **ألا يظهر** الرقم ٦ **فى أية من الزهرتين إذا ألقيتا معًا؟**

هاتان الحادثتان مستقلتان. وعلى ذلك فإن احتمال عدم الحصول على الرقم ٦ فى كل منهما على حدة هو $\frac{5}{6}$. إذن الاحتمال المطلوب هو $\left(\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\right)=\frac{25}{36}$.

٥- ما هو احتمال أن يظهر الرقم ٦ **فى زهرة واحدة فقط**، إذا ألقيت الزهرتان معًا؟

لا يهمنا فى هذه الحالة أن نبحث عما إذا كان الرقم ٦ سيظهر فى الزهرة الأولى أو الثانية، ونستطيع أن نشير إلى الحالة التى يظهر فيها الرقم ٦ بالرمز "س١ أو س٢"، والحالة التى لا يظهر فيها الرقم ٦ بالرمز "ص١ أو ص٢".

وهكذا فنحن نتطلب إما س١ ص١ أو س٢ ص٢. ولقد عرفنا أن احتمال "س" هو $\frac{1}{6}$ وأن احتمال "ص" هو $\frac{5}{6}$.

إذن فاحتمال س١ ص١ هو $\left(\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\right)$.

واحتمال س٢ ص٢ هو أيضاً $\left(\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\right)$.

إذن فاحتمال س١ ص٢ أو س١ ص٢ هو:

$$\frac{10}{36}=\left(\frac{5}{36}+\frac{5}{36}\right)=\left(\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\right)$$

إن الحادثتين س١ ص١ و س٢ ص٢ حادثتان استبعديتان Exclusive أو تباديليتان Alternative. إذن فاحتمال انفصالهما هو مجموع احتمالهما المنفصلين، وهو $\frac{10}{36}$.

٦- ما هو احتمال أن **زهرة واحدة على الأقل** سيظهر فيها الرقم ٦ إذا ألقيت الزهرتان معًا؟

بما أننا فى هذه الحالة لا نستبعد كليهما، فإن الحالة الوحيدة المستبعدة هى "لا هذه ولا تلك". إذن فالاحتمال المطلوب يكافئ مجموع:

١- كليهما. ٢- واحد منهما فقط. ٣- الآخر.

أى: $\frac{11}{36}=\left(\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right)$

وينبغى ملاحظة أن احتمال الحصول على الرقم ٦ فى زهرة واحدة على الأقل واحتمال عدم الحصول عليه فى كل من الزهرتين يستنفد الحالات الممكنة، إذن فعلينا أن نأخذ واحدة من الحالتين أو الأخرى، فيكون مجموع الحالتين مساويًا للواحد الصحيح. وهذه الاحتمالات المنفصلة تكافئ $\frac{11}{36}$ و $\frac{25}{36}$.

وينتج عن هذا أن:

$$1=\frac{36}{36}=\frac{25}{36}+\frac{11}{36}$$

إن وقوع حادثة أو عدم وقوعها يستنفدان كل الاحتمالات.

ويمكن التعبير عن هذا بالصيغة الآتية: هـ+ هـ/=١

وهكذا نرى مرة أخرى (بواسطة مبدأ الوسط المرفوع) أن احتمال الحوادث الاستبعادية هو جمع منطقى. ويمكن تطبيق صيغ "دى مورجان" إذا كتبنا (أ) للتعبير عن احتمال أن (أ) سوف تحدث، و(ب) للتعبير عن أن (ب) سوف تحدث، إذن (أ ب) تشير إلى احتمال أن كليهما سيحدثان، (أَ + بَ) تشير إلى احتمال أن واحدًا منهما أو الآخر سوف لا يحدث. إذن فلدينا:

١- (أ + ب) = أَ بَ

٢- (أ ب) = أَ + بَ

وهذا يعبر عن أن:

١- احتمال أن لا – أ أو لا – ب يحدثان يكافئ حاصل احتمال أن (أ) سوف لا تحدث واحتمال أن (ب) سوف لا تحدث.

٢- احتمال أن ليس كل من (أ) و(ب) سوف يحدثان يكافئ مجموع الاحتمالين القائلين بأن (أ) سوف لا يحدث و(ب) سوف لا تحدث.

وترى سوزان استبينج[٧٦] Stebbing أن صيغ "دى مورجان" يمكن تطويرها لتغطى حالات أياً كانت درجة تعقيدها، وكذلك يمكن تطبيق القوانين السابقة حتى تغطى الحالات التى تتضمن أكثر من عاملين اثنين. كما تشير استبنج[٧٧] إلى أنه فى عمليات حساب الاحتمالات يجب أن نعتنى عناية فائقة بتحديد ما إذا كانت الحوادث مستقلة أو تابعة أو استبعادية. إن المبدأ الأساسى واحد سواء كانت الحوادث تابعة أو استبعادية. ولكن إذا كانت الحوادث مستقلة، فحينئذ تكون كل الاحتمالات عُرضة لأن تحدث فى كل حالة. وعلى سبيل المثال، يكون احتمال الحصول على "الصورة" فى قطعة العملة هو $\frac{1}{2}$، ويبقى هذا الاحتمال ثابتًا، ولا ينال منه كثرة ظهور "الكتابة"، إلا إذا كنا نحسب احتمال ظهور عدد معين من "الصورة" فى عدد محدود

من الرميات. وإذا كانت حادثة ما معتمدة على أخرى غيرها، فحينئذ يُحْتسب احتمالها فقط بعد حساب احتمال الحادثة المستقلة. وهذا يعنى أنه فى حالة الحوادث التابعة نكون بإزاء شروط أولية مختلفة.

لقد أصبح من المعتاد أن نحدد صيغًا معينة لحساب احتمال أن حادثة مثل (هـ) سيتكرر حدوثها مرة أخرى. ونستطيع أن نميز حالتين:

١- احتمال أن يتكرر حدوث "هـ" مرة واحدة أزيد.

٢- احتمال أن يتكرر حدوث "هـ" بمقدار "ن" من المرات.

ويمكن أن نقسم كلاً من هاتين الحالتين طبقًا لما يلى:

(أ) أننا لم نعلم أن "هـ" ستتخلف عن الحدوث.

(ب) أننا علمنا أن "هـ" ستتخلف عن الحدوث.

١- (أ) إذا علمنا أن "هـ" قد حدثت عددًا من المرات قدرها "م" ولم نعلم أنها تخلفت، فحينئذ نعبر عن نسبة الحالات المواتية إلى العدد الكلى للحالات الماضية بالكسر $\frac{م}{م} = 1$ (أى حالة اليقين). وعلى فرض أن احتمال وقوع "هـ" مساو لاحتمال عدم وقوعها، فعندئذ تكون درجة الاحتمال هى $\frac{1}{2}$، لكنها إذا حدثت مرة، زادت نسبة احتمال وقوعها فى المرة الثانية، وأصبحت درجة الاحتمال كالآتى: $\frac{م+1}{م+2} = \frac{2}{3}$

(ب) وباستخدام "م" كما استخدمناها من قبل، فإن احتمال أن تحدث "هـ" مرات أكثر عددها "ن" هو: $\frac{م+1}{م+ن+1}$

٢- (أ) باستخدام "م" كما سبق، وبالتعبير عن عدد المرات التى علمنا أن "هـ" ستتخلف فيها بالرمز "مَ" وهى تساوى لا - م، نعبر عن الاحتمال المطلوب بالكسر الآتى: $\frac{م+1}{م+م+ن}$

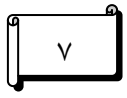
٢- (ب) باستخدام "م + م̄ + ن" كما سبق، فإننا نعرف بيسر أن الاحتمال المطلوب يعبر عنه بالكسر الآتى: $\frac{م + 1}{م + م + ن + 1}$

وتؤدى بنا ملاحظة هذه الصيغ إلى:

١- كلما كبرت "م" اقتربت قيمة الكسر من الواحد الصحيح، وبالتالى يزداد احتمال حدوث "هـ".

٢- كلما كبرت (م̄ أو ن)، قل احتمال حدوث "هـ". وتُعْرَف الصيغة $\frac{م + 1}{م + ن}$ بقانون التتابع لـ"لابلاس" الذى يعتمد على "إمكانية التساوى" للحالات التى لدينا. ولا يمكن البرهنة على صحة إمكانية التساوى إلا إذا كانت البدائل الممكنة متساوية القيمة.

obeikan.com



قياس الاحتمال فى الحوادث المركبة وفقـًا للبديهية الخامسة

المراد هنا هو قياس احتمال أن يكون شىء ما (أ) موصوفًا بصفتين فى آن واحد هما "ب" و"جـ". وقياس درجة الاحتمال فى هذه الحالة يجرى على أساس "البديهية الخامسة" من بديهيات نظرية الاحتمال – سبق أن ذكرناها – والتى تسمى باسم "بديهية الاتصال"[78]، وهى تتيح الفرصة للقول بأن الحادثتين ستقعان معًا. فعلى سبيل المثال:

إذا سحبت ورقتين من أوراق اللعب، فما هو احتمال أن تكون الورقتان حمراوين؟

فى هذه الحالة نجد أن (أ) تمثل المعطى الذى يقول (إن ورق اللعب يتكون من ٢٦ ورقة حمراء و٢٦ ورقة سوداء).

أما (ب) فهى تمثل العبارة القائلة: "إن الورقة الأولى حمراء" وتمثل (جـ) العبارة القائلة: "إن الورقة الثانية حمراء".

إذن $\frac{\text{ب} \times \text{جـ}}{\text{أ}}$ تمثل درجة احتمال أن كلتيهما حمراء.

و $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ تمثل درجة احتمال أن الورقة الأولى حمراء وهى تساوى $\frac{1}{2}$.

و $\frac{\text{جـ}}{\text{ب} \times \text{أ}}$ تمثل درجة احتمال أن الورقة الثانية حمراء على فرض تحقق أن الورقة الأولى حمراء.

وهى تساوى $\frac{25}{51}$، لأنه سيتبقى لنا بعد سحب الورقة الأولى ٥١ ورقة (من بينها ٢٥ ورقة حمراء)[٧٩].

وهكذا فإن درجة احتمال أن تكون الورقتان المسحوبتان حمراوين معاً هى:

$$\frac{25}{102} = \frac{25}{51} \times \frac{1}{2}$$

وهناك صيغة رمزية للبديهية الخامسة، وهى:

ح (أ – ب جـ) = ح(أ – ب) × ح(أ ب – جـ)[٨٠].

فإذا أردنا مثلاً أن نستخرج درجة احتمال أن يكون الطالب متفوقًا فى اللغة الإنجليزية والرياضية معًا، وجب أن نحسب درجة احتمال تفوقه فى اللغة الإنجليزية وحدها. ثم نضرب ذلك فى درجة احتمال تفوقه فى الرياضة على أساس أنه متفوق فى الإنجليزية.

ومن الملاحظ أننا نخطئ الحساب لو جعلنا:

ح (أ – ب جـ) = ح (أ – ب) × ح (أ – جـ).

أى أننا نخطئ الحساب فى المثال السابق لو ضربنا درجة احتمال تفوق الطالب فى اللغة الإنجليزية فى درجة تفوقه فى الرياضة، لأن ذلك قد يفوّت علينا الاحتمال بأن يكون التفوق فى اللغة الإنجليزية هو نفسه عاملاً يؤثر فى درجة الامتياز فى الرياضة، ولذلك ينبغى – بعد حساب التفوق فى اللغة الإنجليزية – أن نضرب هذا فى درجة احتمال التفوق فى الرياضة فى هذه الحالة الخاصة التى ظهر فيها تفوق فى اللغة الإنجليزية لا فى حالة التفوق فى الرياضة مطلقة من غير قيد[٨١].

فإذا كانت درجة الاحتمال فى الحالة الأولى وحدها هى: $\frac{1}{\text{ن}}$.

ودرجة الاحتمال فى الحالة الثانية – على فرض تحقق الحالة الأولى – هى $\frac{1}{\text{م}}$. فإن درجة احتمال اجتماع الحالتين معاً هى $\frac{1}{\text{م} \times \text{ن}}$[٨٢].

مثال آخر: وعاءان فى كل واحد منهما ثلاث كرات: اثنتان بيضاوان وواحدة سوداء، فما درجة احتمال أن تسحب السوداوين فى وقت واحد؟

قد يخيل إلينا للوهلة الأولى أن هناك أربع احتمالات، هى :ب ب، ب س، س ب، س س (حيث ب = أبيض، س = أسود) لكن فى ذلك الحساب تجاهلاً للقيمة

الاحتمالية للأبيض بالنسبة للأسود ويجعلهما متساويتين، مع أن القيمة الاحتمالية للأبيض أكبر من القيمة الاحتمالية للأسود، ويجب مراعاة ذلك – كما أسلفنا – عند حساب درجة الاحتمال، ولشرح ذلك نقول[٨٣]:

نرمز لكرات الوعاء الأول بالرمز:

ب١، ب٢، س١.

ونرمز لكرات الوعاء الثانى بالرموز:

ب٣، ب٤، س٢.

فيكون احتمال السحب من الوعاء الأول هو:

أَ إما أن تكون ب١، ب٢، س١

واحتمال السحب من الوعاء الثانى هو:

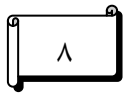
أَ إما ن تكون ب٣ أو ب٤ أو س٢.

واحتمالات الجمع بين أن أ ، أَ معاً هى:

ب١ب٣، ب١ب٤، ب١س٢، ب٢ب٣، ب٢ب٤، ب٢س٢، س١ب٤، س١ ب٤، س١س٢.

وهى تسع حالات، فيهما الأسودان معًا مرة واحدة، وإذن فاحتمال سحبهما معًا هو $\frac{1}{9}$

وهذه النتيجة تتفق مع بديهية الاتصال التى شرحناها، لأن احتمال الأسود فى الحالة الأولى هو $\frac{1}{3}$، وفى الحالة الثانية هو $\frac{1}{3}$، وإذن يكون احتمالهما معًا هو $\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$



قياس الاحتمال فى الحوادث المركبة وفقـًا للبديهية للسادسة

المراد هنا هو قياس درجة احتمال أن يكون شىء ما (أ) موصوفاً بواحدة على الأقل من صفتى (ب) و(جـ).

وقياس درجة الاحتمال فى هذه الحالة يجرى على أساس "البديهية السادسة" من بديهيات نظرية الاحتمال، والتى تسمى باسم "بديهية الانفصال" – سبق أن أشرنا إليها – والصورة الرمزية لهذه البديهية هى كالآتى:

ح(أ – ب٧جـ) = ح(أ – ب) + ح(أ – جـ) – ح(أ – ب حـ)[٨٤].

وتقرأ الصيغة هكذا: إن درجة احتمال أن تكون (أ) موصوفة إما بالصفة (ب) أو بالصفة (جـ)، تساوى درجة احتمال أن تكون (أ) موصوفة بصفة (ب) مضافًا إليها درجة احتمال أن تكون (أ) موصوفة بصفتى (ب)، (جـ) معًا[٨٥].

ولشرح هذا الجزء الأخير من بديهية الانفصال، نقول: إذا افترضنا أن حالتى ب، جـ متضادتان، أى أنهما لا تجتمعان معًا، مثال ذلك أن تكون لديك تذكرتان فى نصيب، ولابد أن تكون الرابحة إحداهما فقط، إذ لا يربح فى النصيب إلا تذكرة واحدة، فها هنا يكون احتمال ربحك بتذكرة ب أو بتذكرة جـ هو:

ح(أ – ب) + ح(أ – جـ).

لكن قد تكون حالتان ب، جـ مما يمكن اجتماعهما معًا، مثال ذلك أن ورقة اللعب قد تتصف بصفتين فى آن واحد، فتكون – مثلاً – سبعة وتكون حمراء، ونريد أن نحسب درجة احتمال سحب ورقة تكون فيها إحدى الصفتين على الأقل، فعندئذ لا يكفى فى قياس درجة الاحتمال أن نجمع احتمال أن تكون الورقة المسحوبة سبعة، إلى احتمال أن تكون الورقة المسحوبة حمراء، لأن احتمال أن تكون الورقة المسحوبة سبعة يدخل فيه احتمال أن تكون حمراء كذلك، وأيضًا احتمال أن تكون الورقة المسحوبة حمراء يدخل فيه احتمال أن تكون سبعة كذلك، لذا لا يكفى لحساب احتمال

إحدى الحالتين على الأقل مجرد جمع الاحتمالين، بل لابد أن نطرح من ذلك درجة احتمال اجتماعهما معًا[٨٦].

مثال[٨٧]: ما درجة احتمال أن نسحب ورقتين من أوراق اللعب فتكون إحداهما على الأقل حمراء؟

(عدد ورق اللعب ٥٢ ورقة، نصف أحمر والنصف الآخر أسود) احتمال أن تكون الأولى حمراء هو $\frac{1}{2}$.

احتمال أن تكون الثانية حمراء هو $\frac{1}{2}$.

احتمال أن تكونا حمراوين معًا هو $\frac{25}{102}$ (لقد أوضحنا هذه النتيجة فى مسألة سابقة).

احتمال أن تكون إحداهما على الأقل حمراء، هو:

$$\frac{77}{102}=\frac{25}{102}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

مثال آخر[٨٨]: وعاءان، الأول به ٨ كرات بيضاء وكرتان سوداوان، والثالث به ٦ كرات بيضاء وأربع كرات سوداء، فما درجة احتمال أن أسحب كرة من كل من الوعائين، فأسحب كرة واحدة على الأقل بيضاء؟

احتمال سحب كرة بيضاء من الوعاء الأول هو $\frac{8}{10}$.

واحتمال سحب كرة بيضاء من الوعاء الثانى هو $\frac{6}{10}$.

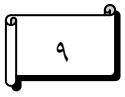
واحتمال سحب كرتين بيضاوين معا هو $\frac{48}{100}$.

واحتمال سحب واحدة على الأقل بيضاء هو:

$$\frac{93}{100}=\frac{48}{100}-\frac{6}{10}+\frac{8}{10}$$

ويتضح مما سبق أنه إذا كنا أمام احتمالات منفصلة لأية مجموعة محدودة من الحوادث، فإنه يمكننا – باستخدام البديهيتين الخامسة والسادسة – حساب درجة احتمال حدوث جميع هذه الحوادث أو على الأقل درجة احتمال حدوث إحداها[٨٩].

obeikan.com



مبدأ الاحتمال العكسى

يرى "رسل"[٩٠] أنه ينتج عن بديهية الاتصال أن:

$$\frac{\frac{ب}{أ} \times \frac{جـ}{(ب+أ)}}{\frac{جـ}{أ}} = \frac{ب}{(جـ+أ)}$$

وهذا ما يسمى بمبدأ الاحتمال العكسى

ويمكن توضيح هذا المبدأ على النحو الآتى:

نفترض أن (ب) نظرية ما، و(جـ) معطيات تجريبية تلائمها. إذن $\frac{ب}{أ}$ تمثل درجة احتمال النظرية (ب) القائمة على المعطيات (جـ) المعروفة لنا. وأن $\frac{جـ}{أ}$ تمثل درجة احتمال (جـ) استنادًا إلى المعطيات (جـ) التى تم التأكيد منها، ويمكن الحصول عليها بضرب الاحتمال السابق لـ(ب) فى احتمال (جـ) بافتراض أن لدينا (ب) وقسمته على الاحتمال السابق لـ(جـ). وفى أقصى الحالات ستضمن النظرية ب جـ، لأن:

$$أ = \frac{جـ}{(ب+أ)}$$

وفى هذه الحالة نجد أن:

$$\frac{\frac{ب}{ا}}{\frac{جـ}{ا}} = \left(\frac{ب}{جـ+ا}\right)$$

وهذا يعنى أن المعطى الجديد (جـ) يزيد من درجة احتمال (ب). وبعبارة أخرى، إذا عرفنا وقوع حوادث معينة، وكانت هناك عدة فروض لتفسيرها، فالاحتمال العكسى هو الذى نقيس به درجة ترجيح فرض على آخر، معتمدين على الحوادث التى عرفناها، كما يتضح من المثال التالى:

لدينا وعاء به ثلاث كرات نجهل لونها، سحبنا كرة منها فوجدناها بيضاء، ثم أرجعناها إلى الوعاء، وسحبنا كرة أخرى فوجدناها سوداء، ثم أرجعناها إلى الوعاء. وبعدئذ أخذنا نكرر العملية، لكننا كلما سحبنا كرة وجدناها إما بيضاء أو سوداء.

وهنا نجد أنفسنا أمام أحد احتمالين:

الاحتمال الأول: أن تكون الكرات الثلاث مزيجًا من أبيض وأسود معًا.

الاحتمال الثانى: أن تكون هناك كرة ثالثة لونها مخالف للأبيض والأسود، لم تخرج أبدًا فى عمليات السحب.

فكيف نُرجّح فرضًا على الآخر؟

لو فرضنا أن فى الوعاء كرة لونها مخالف للأبيض والأسود، كان احتمال عدم سحبها فى المرة الأولى هو $\frac{2}{3}$، وفى المرة الثانية $\frac{4}{9}$، وفى المرة الثالثة $\frac{8}{27}$، وفى المرة الرابعة $\frac{16}{81}$،... واحتمال عدم سحبها فى المرة الثامنة هو $\frac{256}{6651}$، وهى نسبة تكاد تبلغ $\frac{1}{26}$، وهكذا تأخذ نسبة الاحتمال فى النقصان كلما مضينا فى السحب، مما يقلل من شأن الفرض الثانى، ويزيد ترجيح الفرض الأول[٩١].

ولنوضح فائدة مبدأ الاحتمال العكسى فى حساب الاحتمالات نأخذ المثال الآتى:

إذا فرضنا خطًا مستقيمًا مُقّسمًا إلى قسمين: (أ) و(ب).

والمطلوب إطلاق النار على هدف موضوع على هذا الخط. ونحن لا علم ما إذا كان الهدف موضوعًا على (أ) أو على (ب)، ولنفرض أن احتمال كونه موضوعًا على (أ) هو $\frac{3}{4}$، واحتمال كونه موضوعًا على (ب) هو $\frac{1}{4}$. وعلى هذا

الأساس وجهنا القذيفة إلى (أ)، وكان احتمال إصابة (أ) وفقًا لمحاولتنا هو $\frac{3}{4}$، واحتمال أن نخطئ فى المحاولة ونصيب القذيفة (ب) هو $\frac{1}{4}$، ولنفرض أنه قيل لنا بشكل مؤكد أننا أصبنا الهدف، فما هى درجة احتمال أن يكون الهدف موضوعًا على (أ) بعد افتراض أننا قد أصبنا الهدف؟[٩٢].

لقد كانت درجة الاحتمال قبل توجيه الطلقة حسب ما افترضناه هى $\frac{3}{4}$، ولكنها سوف تزداد الآن. ومبدأ الاحتمال العكسى هو الذى يحدد لنا قيمة ذلك الاحتمال بعد افتراض إصابة الهدف، فإذا كنا نرمز إلى درجة الاحتمال بـ(د)، وإلى كون الهدف فى (أ) بـ(جـ)، وإلى كون الهدف (ب) بـ(س)، وإلى إصابة الهدف على تقدير كون الهدف فى (أ) بـ(ط)، وإلى إصابة الهدف على تقدير كون الهدف فى (ب) بـ(و) فسوف نحصل على المعادلة الآتية:

$$\text{د}(\text{جـ}) \text{ بعد إصابة الهدف} = \frac{\text{د}(\text{جـ}) \times \text{د}(\text{ط})}{\text{د}(\text{جـ}) \times \text{د}(\text{ط}) + \text{د}(\text{س}) \times \text{د}(\text{و})}$$[٩٣].

وإذا بدلنا الرموز بالأرقام، وافترضنا قيم الاحتمال كما تقدم فى المثال، كانت المعادلة كما يلى:

$$\frac{\frac{9}{16}}{\frac{10}{16}} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}$$

أى أن درجة احتمال كون الهدف موضوعًا على (أ) هى قبل الإصابة $\frac{3}{4}$ وبعد إصابة الهدف زادت فأصبحت $\frac{9}{10}$.

ويمكن فهم مبدأ الاحتمال العكسى بواقعة اكتشاف كوكب Neptune باعتبار أن اكتشاف هذا الكوكب زاد من احتمال صدق نظرية الجاذبية (فى هذه الحالة ستكون:

ب= نظرية الجاذبية.

أ= كل الوقائع التجريبية المعروفة قبل اكتشاف كوكب نبتون.

جـ= واقعة وجود كوكب نبتون فى موضع معين[٩٤].

وباستخدام المثال السابق – الخاص بإطلاق قذيفة على هدف موضوع على خط مستقيم – نقول إن نظرية الجاذبية يمثلها الهدف الموضوع على (أ)، واكتشاف كوكب نبتون يمثله العلم بأن الهدف قد أصيب عند توجيه القذيفة، فكلما زادت درجة احتمال كون الهدف موضوعًا على (أ) بعد اكتشاف أن الهدف قد أصيب مع محاولة الرامى لتوجيه الطلقة إلى (أ)، تزيد بالتالى درجة احتمال صدق نظرية الجاذبية بعد اكتشاف كوكب نبتون[٩٥].

ولمبدأ الاحتمال العكسى أهمية كبرى فى تبرير الاستدلال الاستقرائى، لأننا فى هذا الاستدلال نحكم على كل أفراد النوع بما شاهدناه فى بعض الأفراد، فمثلاً نشاهد بعض الغربان ونجدها سوداء، فنعمم الحكم قائلين: إن كل غراب أسود – فعلى أى أساس اعتمدنا فى تعميم هذا الحكم، مع أن هنالك احتمالاً بأن تكون الغربان التى لم نرها ليست سوداء؟ إننا نعمم هذا الحكم على أساس مبدأ الاحتمال العكسى[٩٦].

١٠

مبرهنة بايز

يقول "رسل"[٩٧] فى فصل بعنوان "الاحتمال الرياضى" من كتابه "المعرفة البشرية": إن هناك قضية على جانب كبير من الأهمية تسمى أحيانًا باسم (مبرهنة بايز) Bayes's theorem، ويوضحها "رسل" على النحو الآتى:

لنفرض أن ع١، ع٢، ... ع ن ممكنات تخارجية[٩٨] Exclusive Possibilities، وأننا نعلم أن إحدى هذه الممكنات صادقة، ولنفترض أن (ك) معطيات عامة. وأن (هـ) واقعة مواتية. ونريد أن نعرف درجة احتمال إحدى الممكنات (ع) إذا كانت لدينا (هـ).

إن احتمال (ع –) قبل أن تكون لدينا (هـ)، وأيضاً احتمال (هـ) إذا كانت لدينا (ع –) تمثله المعادلة الآتية:

$$\frac{\text{ع}-}{\text{هـ}+\text{ك}} = \frac{\frac{\text{ع}-}{\text{ك}} \times \frac{\text{هـ}}{(\text{ع}-+\text{ك})}}{\sum_{1}^{\text{ن}} \frac{\text{ع}-}{\text{ك}} \quad \frac{\text{هـ}}{\text{ع}_1+\text{ك}}}$$

هذه المعادلة تمكّننا – على سبيل المثال – من حل المشكلة الآتية[٩٩]:

إذا افترضنا أن لدينا ثلاث حقائب تحتوى كل منها على خمس كرات، غير أنها تختلف فى عدد ما تحتويه من الكرات البيضاء، فواحدة منها تحوى على ثلاث كرات بيضاء فقط، والثالث لا تشتمل إلا على الكرات البيضاء. ولنفرض أننا أخذنا حقيبة من تلك الحقائب الثلاث عشوائيًا، أى لا ندرى ما إذا كانت الأولى أو الثانية أو الثالثة، ثم سحبنا من الحقيبة المختارة ثلاث كرات، فاتفق أنها بيضاء. فما هى درجة احتمال أن تكون هذه الحقيبة التى اخترناها عشوائياً هى الحقيبة الثالثة التى لا تحتوى إلا على كرات بيضاء فقط؟

إننا إذا رمزنا بـ(د) إلى درجة الاحتمال، وبـ(جـ) إلى كون الحقيبة المختارة هى الحقيبة الثالثة التى تحتوى على الكرات البيضاء فقط، وبـ(ط) إلى سحب ثلاث كرات بيضاء على تقدير (جـ)، وبـ(س) إلى كون الحقيبة المختارة هى الحقيبة الأولى التى لا تحتوى إلا على ثلاث كرات بيضاء، وبـ(و) إلى سحب ثلاث كرات بيضاء على تقدير (س)، وبـ(ك) إلى كون الحقيبة المختارة هى الحقيبة الثانية التى تحتوى على أربع كرات بيضاء، وبـ(هـ) إلى سحب ثلاث كرات بيضاء على تقدير (ك).

باستخدام هذه الرموز نحصل على المعادلة الآتية:

$$د(جـ) = \frac{د(جـ) \times د(ط)}{د(جـ) \times د(ط) + د(س) \times د(و) + د(ك) \times و(هـ)}$$

وبالتعويض عن الرموز بالأرقام تكون المعادلة كما يلى:

احتمال أن تكون الحقيبة هى الثالثة التى تحتوى على كرات بيضاء فقط يساوى:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{4}{10} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}}$$

أى أن احتمال كون الحقيبة المختارة هى الحقيبة التى تحتوى على كرات بيضاء فقط هو $\frac{2}{3}$.

وهذه المشكلة لها أهمية تاريخية تتعلق ببرهان لابلاس Laplace الخاص بالاستقراء[١٠٠].

١١

نظرية بيرنوى فى الأعداد الكبيرة

يعد بيرنوى ,J.S. Bernoulli (١٦٥٤–١٧٠٥) من أعلام النظرية الرياضية فى الاحتمالات. ولقد وضع كتابًا بعنوان "فن التخمين" The art of conjecture نشره ابن أخته نيقولا بيرنوى عام ١٩١٣ – أى بعد وفاة خاله بثمان سنوات – ويقع الكتاب فى أربعة أجزاء، ليس للأجزاء الأولى أهمية تاريخية كبيرة. أما الجزء الرابع. فعلى الرغم من أنه تركه ناقصًا فإنه يمثل صفحة هامة فى تاريخ تطور نظرية الاحتمالات. إذ يقدم فيه بيرنوى خطوط نظريته الخاصة التى تسمى باسمه. ففى القرن السابع عشر دأب الرعيل الأول من علماء الإحصاء، على تجميع المعلومات الضرورية لتحديد الوفيات والمواليد وجنس المولود وغير ذلك. وكشفت هذه الأبحاث الأولى عن واقعة جديدة لم تكن متوقعة من قبل، وهى: أنه لو وُجِدَ انتظام بين نوع معين من الأمثلة المجمعة، فإن هذا الانتظام يصبح أكثر وضوحًا كلما تضاعف عدد الأمثلة موضوع البحث. كما تم اكتشاف أن الذكور والإناث لا تولد فحسب بنسب متساوية على وجه التقريب، وإنما تتقارب نحو رقم معين محدد عندما يصبح عدد الأمثلة المسجلة كبيرًا(١٠١).

ونظرية بيرنوى ليست إلا الصياغة الدقيقة لهذه الظاهرة، ويسميها المؤلفون عادة باسم قانون الأعداد الكبيرة. وإن كان كينز Keynes يراه اسمًا غير ملائم، ويرى أن تسمى النظرية باسم "ثبات التكرارات الإحصائية". وخلاصة نظرية بيرنوى أن درجة الاحتمال تزداد ثباتًا كلما مضت الأمثلة فى الزيادة(١٠٢).

ولتوضيح هذه النظرية بمثال رمى قطعة العملة: (الصورة) و(الكتابة) ولنفترض أن ظهور (الصورة) مساويًا لاحتمال ظهور (الكتابة) وذلك فى حالة ما إذا أجرينا عدداً كافياً من الرميات. وعلى ذلك لن تنحرف النسبة المئوية لظهور (الصورة) بعد الرمية "ن" عن ٥٠ إلا بمقدار ضئيل جدًا يمكن إهماله (حيث إن "ن" تمثل عددًا

كافيًا من الرميات)[١٠٣].

ووفقًا لنظرية الأعداد الكبيرة، فإن النسبة المئوية لظهور "الصورة" ستبقى دائمًا بين ٤٩ و٥١. وإنه لا يمكننا دحض هذه النسبة، لأننا إذا قررنا أن نتحقق من صدقها تجريبيًا بإجراء المزيد من الرميات، فسنجد أن هذا الإجراء سوف يثبت – لا أن يدحض – صحة هذه النسبة. حيث إن نظرية الأعداد الكبيرة تقول بأنه كلما زاد عدد الرميات كلما اقتربت النسبة من النصف، أى أن التجربة ستدعم القول بأن النسبة المئوية لظهور "الصورة" تظل دائمًا بين ٤٩ و٥١[١٠٤].

وحتى إذا تقدمنا خطوة أبعد وأكدنا على أن نسبة ظهور "الصورة" ستظل دائمًا بين ٤٩.٩٪، ٥٠.١٪. وأراد شخص ما أن يتحقق من صحة هذه النسبة فقام بإجراء المزيد من الرميات ووجد أن تأكيدنا السابق غير محقق، وبناء على ذلك، زعم هذا الشخص أن ازدياد عدد الرميات يهدم هذه النظرية. حتى فى هذه الحالة سيكون الرد، هو: أن "هذه الرميات" لم تستمر إلى الحد الكاف. وعلى هذا لا يمكن لنظرية الأعداد الكبيرة أن يتم إثباتها أو دحضها بالدليل التجريبى[١٠٥].

وبانتهائنا من معالجة نظرية "بيرنوى" فى الأعداد الكبيرة نكون قد انتهينا من عرض القضايا الأساسية لحساب الاحتمالات.

obeikan.com

المراجع

(١) الجرجانى، التعريفات، القاهرة، مكتبة الحلبى، ١٩٣٨، ص ٧.

(2) Reese, Willian L., Dictionary of Philosophy and Religion, New Jersry, P. 220

(3) S. Stebbing, A Modern Introduction to Logic, 4th. Edition, London, 1945, P. 364.

(4) M. Cohen, & Nagel, An Introduction to Logic, London, P. 165.

(5) B. Russell, Human Knowledge, London, 1976, P. 353.

(6) Runes, Dagobert D., Dictionary of Philosophy, New Jersey, 1980, P. 251.

(7) Ibid., P. 251.

(8) Ibid., P. 251.

(٩) محمود أمين العالم، فلسفة المصادفة، ص ١٩٧.

(١٠) المرجع السابق، الموضع نفسه.

(١١) محمود فهمى زيدان، الاستقراء والمنهج العلمى، ص ١١٦ وما بعدها.

(12) B. Russell, Human Knowledge, P. 356.

(13) Ibid., P. 355.

(١٤) د. محمود فهمى زيدان، الاستقراء والمنهج العلمى، ص ١١٥.

(١٥) المرجع السابق، ص ص ١٢٠-١.

(١٦) مجمع اللغة العربية، المعجم الفلسفى، القاهرة، ١٩٧٩، ص ١٨٥.

(١٧) المرجع السابق، ص ١٠٩.

(١٨) محمود أمين العالم، فلسفة المصادفة، ص ٣١.

(١٩) المصادفة أو البخت = Fortune, Chance, TUX3

(٢٠) أرسطو طاليس، الطبيعة، ترجمة اسحق بن حنين، تحقيق د. عبد الرحمن بدوى، القاهرة، الهيئة العامة للكتاب، ١٩٨٤، ص ١٣١.

(٢١) تلقاء النفس = Spontaneité, Spontaneity, To a ὐτσμα τον

(٢٢) أرسطو طاليس، الطبيعة، ترجمة اسحق بن حنين، تحقيق د. عبد الرحمن بدوى، القاهرة، الهيئة العامة للكتاب، ١٩٨٤، ص ١٢٩.

(٢٣) المرجع السابق، ص ١٢٩.

(٢٤) د. زكى نجيب محمود، المنطق الوضعى، جـ٢، ص ٣٣٨.

(٢٥) المرجع السابق، الموضع نفسه.

(٢٦) محمد باقر الصدر، الأسس المنطقية للاستقراء، ص ٤١.

(٢٧) بول موى، المنطق وفلسفة العلوم، ص ٦٦.

(٢٨) المرجع السابق، الموضع نفسه.

(٢٩) محمد باقر الصدر، الأسس المنطقية للاستقراء، ص ٤١.

(٣٠) فى كثير من الأحيان يقتصر اسم "المذهب العقلى" Rationalism فى الكتابات الفلسفية على مذاهب عقلانية معينة فى العصر الحديث، بينما يطلق على المذاهب التى تميز بين عالَم الأشياء كما نراها فى الواقع وبين عالَم الأفكار كما تدركها العقول اسم "المثالية" Idealism تمييزًا لها عن السابقة. ولكننا سوف نستخدم فى هذا البحث اسم "المذهب العقلى" بالمعنى الواسع بحيث يشمل "المثالية" أيضًا.

(٣١) المرجع السابق، الموضع نفسه.

(٣٢) بول موى، المنطق وفلسفة العلوم، ص ٦٦.

(٣٣) المرجع السابق، ص ٦٨.

(٣٤) المرجع السابق، الموضع نفسه.

(٣٥) د. زكى نجيب محمود، المنطق الوضعى، جـ٢، ص ٣٤٠.

(36) H. Reichenbach, Experience and Prediction, Chicago, The University of Chicago, 1952, P. 298.

(37) Ibid., P. 298.

(٣٨) د. نجيب بلدى، بسكال، القاهرة، دار المعارف، سلسلة نوابغ الفكر الغربى، ١٩٦٨، ص ٤٠.

(٣٩) محمود أمين العالم، فلسفة المصادفة، ص ١٩٩.

(٤٠) المرجع السابق، ص ٢٠٠.

(41) H. Reichenbach, Experience and Prediction, P. 298.

(42) Ibid., P. 298.

(43) Ibid., P. 298.

(44) Ibid., PP. 298-9.

(45) Ibid., P. 299.

(46) Ibid., P. 299.

(47) Ibid., P. 299.

(48) Ibid., P. 299.

(49) Ibid., PP. 299-300.

(50) Ibid., P. 300.

(٥١) تذكرنا هذه المشكلة (التمايز أو التماثل بين التصور الرياضى والتصور المنطقى للاحتمال) بالمشكلة الأعم، ونعنى بها: التمايز أو التماثل بين الرياضة البحتة والمنطق الصورى، وقد حسم كل من نورث هوايتهد A.N.Whitehead, (١٨٦٤–١٩٤٧) وبرتراند رسل، هذه المشكلة فى كتابهما "مبادئ الرياضيات" بأن وحَّدا بين الرياضة والمنطق فى نسق موحد مما ترتب عليه استحالة وضع خط فاصل بينهما، إذ الواقع – كما يقول رسل – إن الاثنين شىء واحد. والخلاف بينهما كالخلاف بين الصبى والرجل، فالمنطق شباب الرياضيات، والرياضيات تمثل طور الرجولة للمنطق. (رسل، مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ٢٠٨).

(52) H. Reichenbach, Experience and Prediction, P. 300.

(53) B. Russell, Human Knowledge, P. 353.

(٥٤) د. زكى نجيب محمود، المنطق الوضعى، جـ٢، ص ٣٤١–٣٤٢.

(55) B. Russell, Human Knowledge, P. 353.

(56) B. Russell, Human Knowledge, P. 356.

(57) Ibid., P. 356.

(58) Ibid., P. 356.

(59) Ibid., P. 356.

(60) Ibid., P. 357.

(٦١) "رسل"، مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ٩.

(٦٢) من الملاحظ أن البديهية الأخيرة – من بديهيات "بيانو" الخمس – هى التى تتضمن اطراد العمليات الحسابية مثل الجمع والضرب مثلاً. وقد أطلق هنرى بوانكاريه Poincaré (١٨٥٤–١٩١٢) على هذه الخاصية اسم :الاستقراء الرياضى" أو الاستقراء بالتكرار، أما برتراند رسل فقد أسماها الخاصية "الوراثية" للأعداد أى أن ما يصدق على عدد يُنْتَقل بالوراثة إلى غيره. (د. محمد ثابت الفندى، فلسفة الرياضة، ص ١٢١).

(٦٣) يمكننا أن نشير باختصار إلى الكيفية التى بها تنشأ نظرية الأعداد الطبيعية من المفاهيم الثلاثة والقضايا الخمس الأولية التى وضعها "بيانو"، وذلك على النحو التالى: نُعَرِّف العدد "١" بأنه "تالى" الصفر، وبأن العدد "٢" "تالى" الواحد، وأن العدد "٣" "تالى" العدد "٢" ... وهكذا. من الواضح أننا نستطيع أن نسير إلى أي حد نريد بهذا التعريف لأنه بمقتضى القضية الثانية – من قضايا "بيانو" الخمس – نجد أن كل عدد نصل إليه فله تال، وبمقتضى القضية الثالثة، نجد أنه لا يمكن أن يكون هذا التالى اى عدد من الأعداد التى عُرِفَت من قبل، لأنه لو كان كذلك فسيكون لعددين مختلفين نفس التالى، وبمقتضى القضية الرابعة نجد أنه لا عدد من الأعداد التى نصل إليها فى هذه المتسلسلة يمكن أن يكون الصفر. وبذلك تعطينا متسلسلة التوالى متسلسلة لا آخر لها من أعداد جديدة باستمرار. ومن القضية الخامسة نجد أن جميع الأعداد ترد فى هذه المتسلسلة التى تبدأ من الصفر وتستمر فى سيرها عن طريق التوالى المتعاقبة، لأن:

(أ) الصفر ينتمى إلى هذه المتسلسلة.

(ب) إذا انتمى عددان إلى هذه المتسلسلة فإن تاليه ينتمى كذلك إلى هذه المتسلسلة. ومن ثم فبالاستقراء الرياضى كل عدد ينتمى إلى المتسلسلة.

وهكذا نشأت نظرية الأعداد الطبيعية من عدة مفاهيم أولية. (رسل، مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٠).

(٦٤) قدم "رسل" (فى كتابه: مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٢ وما بعدها) عدة تفسيرات لمفاهيم "بيانو" الأولية الثلاثة، محاولاً التدليل على أنه ليس فى نظام "بيانو" ما يمكنّنا من التمييز بين التفسيرات المختلفة لمفاهيمه الأولية. وكان "بيانو" يفترض أننا نعرف ما نقصده بـ"الصفر" وأننا سوف لا نفترض أن هذا الرمز يعنى "١٠٠" أو أى شيء آخر مما يمكن أن يرمز إليه. إذ من الممكن – كما بيّن "رسل" – أن نأخذ "الصفر" ونعنى به "١٠٠"، ونأخذ "العدد" لنعنى به الأعداد من "١٠٠" فصاعدًا فى متسلسلة الأعداد الطبيعية، وبذلك تتحقق جميع القضايا الأولية الخمس، وواضح أن أى عدد يمكن أن يوضع بدل الـ"١٠٠" فى هذا المثال. ويكون تفسيرنا فى هذه الحالة صحيح أيضًا.

ويؤكد "رسل" أننا نتطلب من الأعداد، لا مجرد تحقيق الصيغ الرياضية، بل لتنطبق بطريقة صحيحة على الأشياء العادية، نريد أن يكون لنا عشرة أصابع وعينان، وأنف واحد. فالنظام الذى فيه "١" يُقْصَد به "١٠٠"، "٢" يقصد به "١٠١"... وهكذا، قد يصلح للرياضة البحتة، ولكنه لا يناسب الحياة اليومية.

(٦٥) "رسل"، مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٢.

(66) B. Russell, Human Knowledge, P. 357.

(67) Ibid., P. 362.

(68) Ibid., P. 362.

(69) Ibid., P. 363.

وأيضاً: محمد باقر الصدر، ص ص ١٤٨–٩.

وأيضاً: د. نازلى إسماعيل حسين، مناهج البحث العلمى، ص ١٢٦–١٢٧.

(٧٠) محمد باقر الصدر، الأسس المنطقية للاستقراء، ص ١٥٠.

(71) Stebbing, L.S., A Modern Introduction to Logic, 4th., edition, Methuen & Co. LTD., London, 1945, P. 364.

(72) Ibid., P. 364.

(٧٣) د. زكى نجيب محمود، المنطق الوضعى، جـ٢، ص ٣٤٣–٤.

(٧٤) المرجع السابق، ص ٣٤٤..

(٧٥) اعتمدنا فى عرض هذا الموضوع على: Stebbing. L.S., A Modern Introduction to Logic, PP. 364_8.

(76) Ibid., P. 366.

(77) Ibid., P. 366.

(٧٨) د. زكى نجيب محمود، المنطق الوضعى، جـ٢، ص ٣٤٦.

(79) B. Russell, Human Knowledge, P. 364.

وأيضًا: د. زكى نجيب محمود، المنطق الوضعى، جـ٢، ص ٣٤٨ ـ ٩.

(80) W. Kneale, Probability and Induction, P. 126.

نقلاً عن د. زكى نجيب محمود، المنطق الوضعى، جـ٢، ص ٣٤٦.

(٨١) د. زكى نجيب محمود، المنطق الوضعى، جـ٢، ص ٣٤٦ـ٧.

(٨٢) المرجع السابق، ص ٣٤٧.

(83) Welto and Monahan, Intermediate Logic, P, 427.

نقلاً عن: د. زكى نجيب محمود، المنطق الوضعى، جـ٢، ص ٣٤٧ـ٣٤٨.

(84) W. Kneale, Probability and Induction, P. 125.

نقلاً عن: د. زكى نجيب محمود، المنطق الوضعى، جـ٢، ص ٣٥٠.

(٨٥) د. زكى نجيب محمود، المنطق الوضعى، جـ٢، ص ٣٥٠.

(٨٦) المرجع السابق، ص ص ٣٥٠ـ٣٥١.

(٨٧) المرجع السابق، ص ٣٥١.

وأيضا: B. Russell, Human Knowledge, P. 364.

(٨٨) المرجع السابق، ص ٣٥٢.

(89) B. Russell, Human Knowledge, P. 364.

(90) Ibid., P. 364.

(٩١) د. زكى نجيب محمود، المنطق الوضعى، جـ٢، ص ص ٣٥٥ـ٦.

(٩٢) محمد باقر الصدر، الأسس المنطقية للاستقراء، ص ص ١٥٦ـ١٥٧.

وأيضًا: د. نازلى إسماعيل حسين، مناهج البحث العلمى، ص ١٣٥ـ١٣٦.

(٩٣) المرجع السابق، ص ١٥٧.

(94) B. Russell, Human Knowledge, P. 365.

(٩٥) محمد باقر الصدر، الأسس المنطقية للاستقراء، ص ١٥٧.

وأيضًا: د. نازلى إسماعيل حسين، مناهج البحث العلمى، ص ١٣٦.

(٩٦) د. زكى نجيب محمود، المنطق الوضعى، جـ٢، ص ٣٥٦.

(97) B. Russell, Human Known Knowledge, P. 365.

(٩٨) التخارج Exclusion علاقة منطقية بين كليين أو صفتين ليس بينهما عامل مشترك، ويقابل التداخل. (مجمع اللغة العربية، المعجم الفلسفى، ص ٤١).

(٩٩) المشكلة مأخوذة من كتاب:

محمد باقر الصدر، الأسس المنطقية للاستقراء، ص ص ١٥٧-٨. وأيضًا: د. نازلى إسماعيل حسين، مناهج البحث العلمى، ص ص ١٣٧-٨.

(100) B. Russell, Human Knowledge, P. 365.

(١٠١) محمود أمين العالم، فلسفة المصادفة، ص ص ٢٠٢-٣.

(١٠٢) المرجع السابق، ص ٢٠٣.

(103) B. Russell, Human Knowledge, P. 366.

(104) Ibid., P. 366.

(105) Ibid., P. 366.

obeikan.com