جمعية الثقافة من أجل التنمية بالاشتراك مع جامعة سوهاج

المؤتمر العلمي العربي الثالث

التعليم وقضايا المجتمع المعاصر

٢٠- ٢١ أبريل ٢٠٠٨م

تنمية التذوق الجمالى للرياضيات

الأستاذ الدكتور/ جمال حامد محمد

كلية التربية

جامعة سوهاج - مصر

المجلد الأول

obeikandl.com

obeikandl.com

تنمية التذوق الجمالى للرياضيات

الأستاذ الدكتور/ جمال حامد محمد
كلية التربية – جامعة سوهاج

مقدمة :

يمثل الجانب الوجدانى أحد الجوانب الهامة التى يجب أن يهتم بها تدريس الرياضيات. وتذوق الطلاب لجمال الرياضيات والإحساس به من الأهداف الوجدانية التى يجب أن تسعى مناهج الرياضيات إلى تحقيقها.

ويبين فحص الدراسات السابقة قلة الدراسات التى تناولت الجانب الوجدانى للرياضيات - بصفة عامة – وندرة الدراسات التى تناولت جماليات الرياضيات بصفة خاصة. وقد يكون من أحد الأسباب فى ذلك هو صعوبات القياس للجانب الوجدانى عنها للجانب المعرفى، فضلاً عن نسبية الجمال.

ويرى فوزى الشربينى (٢٠٠٥ أ) أن المادة الدراسية التى لا تهتم بإثارة الإحساس بالجمال تتحول إلى مادة جافة ومجموعة من الحقائق لا يتذوق الدارس قيمتها، وينظر إليها كعبء للتذكر لا ينفعل بها وجدانه.

وتبين بعض أدبيات الجماليات فى التربية مثل (*W. Gowers, 2002*) أن جمال الموضوعات الرياضية يسهم فى الإحساس بأهميتها، وأن هناك ارتباطاً بين الرياضيات الجميلة والرياضيات الهامة. كما تشير بعض الأدبيات إلى علاقة الجماليات بالتفكير وحل المشكلات والإبداع وإقبال المتعلمين على الدراسة.

وترى (*A. Brinkmann, 2000*) أن الجماليات لها دور كموجه للباحثين فى الرياضيات فى تحركهم نحو نظرية رياضية، وكذلك للدارسين فى اختيار أفكار البراهين الرياضية. ويرى البعض مثل:(*C. MEROW. 1997*) أن الجهل بالعنصر الجمالى فى الرياضيات يؤدى إلى شعور بأنها جافة وتافهة.

ويبين (*W. Gowers, 2002*) أن قلة صغيرة جدا من سكان العالم هى التى تتذوق جمال الرياضيات العالية ويرجع السبب فى ذلك إلى وجود ارتباط بين الرياضيات الجميلة – من وجهة نظر الفرد – وإحساسه بأهمية الرياضيات.

ويؤكد كثير من المتخصصين فى طرق تدريس الرياضيات مثل: نظلة خضر (٢٠٠٤، ٢٠٠١)، (*W. Gowers, 2002*)،ومجدى عزيز(٢٠٠٠)، ووليم عبيد وآخرون (٢٠٠٠) (*J. R. Rogers,1999*)(*C. Merow, 1997*)،(*A. Brinkman, 2000*) إلى ضرورة الاهتمام بتنمية تذوق جماليات الرياضيات.

ويؤكد (*C. Merow, 1997*) على أن التربية لها دور محورى فى تنمية تذوق الطلاب لجمال الرياضيات، حيث يرى إمكانية تنمية تذوق الطلاب لجمال الرياضيات من خلال التدريب والتعرض المنتظم لأمثلة مختارة بعناية.

ولا يمكن أن نتهم أبناءنا الطلاب بعدم اهتمامهم بجمال الرياضيات، فهذا الاهتمام يبدو واضحاً فى إقبال الطلاب على تبادل الطرائف والألغاز الرياضية فى أوقات الفراغ فى اليوم الدراسى، وفى الرحلات. وقد أثبتت دراسة جمال حامد (١٩٩٢) أن التلاميذ والطلاب المعلمين يتداولون كثير من الألغاز الرياضية التى يمكن توظيفها فى بعض موضوعات الرياضيات المدرسية.

ويبين ذلك أن بعض الأنشطة التى يمارسها الطلاب فى أوقات الفراغ تعبر عن بحثهم عن الجمال. ومن هنا يأتى دور مناهج الرياضيات فى تنمية تذوق الطلاب لجمال الرياضيات.

تذوق جمال الرياضيات: استخدام معيار أو أكثر من معايير جمال الرياضيات، فى المقارنة بين جماليات مواقف رياضية، ومن ثم تحديد الموقف الأجمل من وجهة نظر الفرد.

معنى الجمال ومعاييره

لا يوجد إجماع بين أعضاء أى فئة من فئات المربين والعلماء والفنانين والأدباء والفلاسفة حول مفهوم الجمال. وهناك من يرى أن الجمال ذاتى وآخرون يرون أن الجمال موضوعى، وهناك فريق ثالث يرى أن الجمال له شقان أحدهما ذاتى وآخر موضوعى.

وفى ضوء الاطلاع على بعض المراجع مثل: جمال أبو الخير (١٩٩٨)، محسن عطية (١٩٩٦)، محمد المنوفى (١٩٩٥)، محمد سالم (١٩٨٦)، يمكن القول بأن هناك ثلاث نظريات حول معنى الجمال، نناقشها فيما يأتى.

١- **النظرية الموضوعية**: يعتبر أفلاطون على رأس من يعتقدون موضوعية الأحكام الجمالية وأصحاب هذه المدرسة يرون أن الشئ الجميل يكون صوابا، والشئ القبيح يكون خطأ وقد ربط أفلاطون بين الجمال والحق. وأصحاب هذه المدرسة يرون أن الجمال صفة فى الشئ، موجودة فى أرجائه بغض النظر عن وجود عقل يتذوق هذه الصفة. وقد بينت دراسة محمد المنوفى (١٩٩٥) أن الجمال وفقا للتصور الإسلامى له وجود موضوعى فى الأشياء والموضوعات الجميلة سواء شعرنا به أم لم نشعر على قدر وعينا الجمالى.

ويبين محسن عطية (١٩٩٦) أنه وفقا لرأى أرسطو فإن خصائص الجميل مثل التناسق والانسجام والوضوح، صفات يمكن أن يتنبأ بها على أساس موضوعى

وبالنسبة للنظرية الموضوعية يمكن القول بأنه حتى مع التسليم بأن الجمال موضوعى نجد أن الواقع يبين أن حكم الفرد جماليا على شئ ما يتوقف على خبراته السابقة والبيئة التى نشأ فيها، فالناس يختلفون فى تحديد مستوى جماليات الأشياء، ولا يمكن لجميع الناس أن يتفقوا فى أحكامهم الجمالية. ومما يبين منطقية هذا الرأى أن بعض الناس قد لا يتذوقون جمال كثير من الأعمال العظيمة مثل الأهرام. كذلك فإن بعض الناس قد لا يتذوقون جمال بعض الأعمال النادرة لفنانين كبار، وهذا لا ينفى عنها الجمال.

ومن خلال اطلاع الباحث على أدبيات تناولت الجماليات بصفة عامة، أو جمال الرياضيات بصفة خاصة، مثل فوزى الشربينى(٢٠٠٥ أ، ٢٠٠٥ ب)،(*W. Gowers, 2002*) (*A. Brinkmann, 2000*)، (*A. Whitcombe; 1988*)، (*T. Dreyfus, T. Eisenberg. 1986*) التى ، فقد لوحظ أن بعض التعريفات للجمال اعتمدت فى تحديد مفهوم الجمال على أساس بعض الصفات للجميل التى يمكن التنبؤ بها على أساس موضوعى.

٢- **النظرية الذاتية**: ومن أصحاب هذه المدرسة تولستوى. فالجمال من وجهة نظر أصحاب هذه المدرسة ليس ظاهرة موضوعية بل مرهوناً بالتأثير. ووفقاً لهذه المدرسة فإن للجمال معنى عقلى فقط، وليس صفة فى الشئ منعزلة عن إدراكنا لها. ويدلل (*D. King, 2003; 12*) على أن الجمال له طابع ذاتى بقوله "كل طفل فى العالم ينظر إلى أمه على أنها أكثر امرأة جمالا فى العالم، وأن الأمهات الأخريات لسن بهذا القدر من الجمال. والسبب فى ذلك أن الطفل يرى من خلال الحب، والحب هو الذى يجعل الشئ جميلا فى نظر الطفل".

٣- **النظرية الموضوعية الذاتية**: ويرى أصحاب هذه المدرسة أن الحكم الجمالى ذاتى وموضوعي فى نفس الوقت، وأن الجمال علاقة بين الشئ الجميل والعقل الذى يدركه.

وتشترك كل من النظرية الذاتية والنظرية الموضوعية الذاتية، فى تأثير الذاتية على الحكم الجمالى، بينما تختلفان فى حجم هذا التأثير وأسبابه.

ويلاحظ أن النظريات الثلاث رغم اختلافها فى تعريف الجمال إلا أنها تتفق فى حد أدنى هو أن خبرات الفرد السابقة تؤثر فى الحكم الجمالى على الشئ.

وقد تكون الذاتية فى الجمال مصدرا لصعوبة الدراسة الكمية للجماليات. ويرى محمد صابر سليم (٢٠٠١) أن البعض ممن يستخدمون المنهج التجريبى الكمى، يسيطر عليهم تصور بأن الظاهرة الجمالية فضفاضة مراوغة يصعب التحكم فيها وقياسها وإخضاعها للتناول التجريبى، كما يرى أنه - بالرغم من ذلك - فقد ظهر فى الآونة الأخيرة لدى مستخدمى المنهج التجريبى الكمى اهتمامات متزايدة بالجماليات كعنصر مؤثر فى حياة الإنسان وتصرفاته.

ويرى صابر سليم (٢٠٠١) أن الآونة الأخيرة شهدت ظهور اهتمامات- بين مستخدمى المنهج التجريبى الكمى فى مختلف العلوم - بالجماليات كعنصر مؤثر فى حياة الإنسان وتصرفاته. وقد اهتم الكثير من المربين والفنانين والفلاسفة بتحديد معايير الجمال.

ويرى علي عبد المعطي محمد (١٩٩٨) أن الجمال هو ذلك الذي يتسم بالتناسق والانسجام والتوافق والتماثل والنظام. ويؤكد البعض مثل: جمال جامد (٢٠٠٧) (R. Penrose, 2003)، (C. Merow, 1997)، (Massachusetts Department of Education MDE, 1996)، (M. E. Mcintyre, 1995) ويرى (P. J. Davis & R.

Hersh, 1991) على صفة أو أكثر من جمال التعبير وجمال الأفكار، والدقة، والإتقان كصفة للرياضيات الجميلة. كما يؤكد البعض مثل: (R. E. Nunez, 2005) (C. Merow; 1997)، (P. J. Davis & R. Hersh, 1991) على التناسب والأنماط الرياضية كعناصر جميلة فى الرياضيات. وقد أشار كل من: (L. Perlovsky, 2006) (S. Rebsdorf & H. Kragh, 2002)، (W. Gowers, 2002)، ويرى (R. Penrose, 2003) أن التشابهات والتماثل تمثل عناصر جمالية للرياضيات. ويبين فوزى الشربينى (٢٠٠٥ أ) أن ارتباط الحقائق بملابساتها الثقافية والتاريخية التى أحاطت بكشفها يصبغها بصبغة جمالية. ويرى كل من (W. Gowers, 2002)، ونظلة خضر (٢٠٠١، ١٩٨٤)، (C. Merow, 1997)، (M. E. Mcintyre, 1995) أن جمال الرياضيات يقع إلى حد كبير فى العلاقات البينية بين أفكار الرياضيات، بالإضافة إلى التطبيقات الفيزيقية.

وفى نفس الوقت فإن هناك اهتمام بالبساطة كمعيار من معايير الجمال. ويرى كل من: علي عبد المعطي (١٩٩٨)، ومحسن عطية (١٩٩٦) أن الوضوح من العناصر الهامة التى تميز الشئ الجميل. وقد أشار جمال حامد (٢٠٠٧)، (R. Penrose, 2003) (W. Gowers, 2002)، (C. Merow, 1997)، (S. Rebsdorf & H. Kragh 2002) (S. Weinberg, 1993)، (D. Deutsch, 1997)، (A. Brinkmann, 2000) (T. Dreyfus & T. Eisenberg, 1986)، (A. Whitcombe, 1988) أن البساطة تمثل عنصرا بارزا من عناصر جمالية للرياضيات.

والبساطة تتمثل فى مواقف مثل بساطة الحل لمشكلة معقدة، وبساطة البرهان للنظرية، أو بساطة التمثيلات للبنى الرياضية.

والتركيب عنصر من العناصر الجمالية. ويرى جمال حامد (٢٠٠٧)،(L. I. A.) (W. Gowers, 2002)،(S. Rebsdorf & H. Kragh 2002)، (Perlovsky, 2006 Brinkmann, 2000)، علي عبد المعطى (١٩٩٨)، (F. Schweitzer, 1997)، (M. E. Mcintyre, 1995) أن العمق والتعقد مؤشرين متكاملين يكونان التركيب الذى يمثل عنصراً جمالياً.

ويؤكد كل من جمال حامد (٢٠٠٧)، (R. Penrose, 2003)، (W. Gowers, 2002 (C. Merow,1997)،(W. Gowers, 2002)،(S. Rebsdorf & H. Kragh 2002) (A. Whitcombe, 1988) (S. Weinberg, 1993 ،(M. E. Mcintyre, 1995) (T. Dreyfus & T. Eisenberg, 1986) بأن جماليات التفكير الرياضية عنصر من عناصر جمالية للرياضيات.

ويرى كل من جمال حامد (٢٠٠٧)، (R. Penrose, 2003)،(W. Gowers, 2002) (S. *CHANDRASEKHAR*, 1987)، (M. E. Mcintyre, 1995)،(A. Brinkmann, 2000) أن التوازن بين البساطة والتعقد والتوازن بين العشوائية والمنظومية تضفى على الرياضيات جمالاً.

فى ضوء ما سبق يمكن القول بأن الجمال الرياضى يتمثل فى صفات مثل:

١- **النظام**: ويضم الترتيب والدقة والتماثل والتناغم والتناسب والارتباط. وتبين الأدبيات أن النظام يمثل معيارا هاما من معايير الجمال الرياضى.

٢- **البساطة**: تعنى بساطة البراهين والحلول والتمثيلات والارتباطات أو الأنماط الرياضية وضوحها وسهولة فهمها، واعتمادها على مبادئ بسيطة.

٣- **التركيب**: ويتضمن ثلاثة عناصر هى (التعقيد، والجَهد ، والعمق)

٤- **المنطقية**: حيث تظهر جماليات التفكير الرياضى من خلال: (مستوى المتطلبات السابقة التى تعتمد عليها الحجة، ومستوى وضوح خطوات الحجة، وقصر الحجة، وقلة عدد الخطوات الحاسمة)

٥- **التوازن**: وهو يتصل بجانبين هما: المستوى المطلوب من كل معيار، التوفيق بين التعارض بين المعايير. ويظهر فى مواقف مثل: التوازن بين النظامية والعشوائية والتوازن بين البساطة والتركيب ، والتوازن بين الترتيب وعدم الترتيب، والتوازن بين التماثل والتنوع، والتوازن بين الألفة والحداثة للمعلومات المتضمنة بالموقف، والتوازن بين الاتساق وعدم الاتساق فى العرض المنطقى للبرهان أو حل المشكلة. والتوازن بين البنى الدورية وبين البنى العشوائية (غير المترابطة).

مشكلة البحث والدراسات السابقة

لعل أحد الأسباب التى حدت بالمربين وواضعى المناهج الدرسية إلى تجنب ترجمة الأهداف المتعلقة بتنمية تذوق الطلاب لجمال الرياضيات، يعود إلى القناعات بأن الظاهرة الجمالية تخضع للذاتية، وأن الاهتمام بالجانب الجمالى مكانه الطبيعى فى التربية الفنية والموسيقى والشعر.

ورغم التسليم بأهمية تنمية تذوق الطلاب لجماليات الرياضيات، يظل كيفية ترجمة ذلك إلى إجراءات عملية ملموسة فى واقع تعليم الرياضيات مسألة تبدو ترفاً ومناقشة للتسلية والمتعة. وبالرغم من أن مقدمة أى كتاب من كتب الرياضيات المدرسية لا تخلو من التأكيد على أهداف تتعلق بتنمية تذوق الطلاب لجمال الرياضيات، إلا أن مضمون تلك الكتب يتضمن على استحياء بعض المواقف القليلة التى تسهم فى تحقيق تلك الأهداف.

وقد اهتمت بعض الدراسات السابقة بقياس تذوق المتعلمين للجمال فى بعض المواد الدراسية. ومن بين تلك الدراسات: دراسة جمال حامد (٢٠٠٧) التى اهتمت بقياس تذوق الطلاب المعلمين لجماليات الرياضيات، فى ضوء معايير الجمال الرياضى لدى أعضاء هيئة التدريس ومعلمى وموجهى الرياضيات. وقد أجريت تلك الدراسة على مجموعتين إحداهما مكونة من(٧٦) من الطلاب المعلمين شعبة رياضيات فى العام الدراسى ٢٠٠٥/٢٠٠٦م بكلية التربية بسوهاج. وأشارت تلك الدراسة إلى أن النسب المئوية لمتوسطات النسب المئوية لمتوسطات درجات تذوق مجموعة البحث من الطلاب المعلمين فى كل معيار من معايير الجمال الرياضى أقل من(٥٠٪) من النهايات العظمى لدرجة كل معيار، وكذلك الحال بالنسبة لمتوسط الدرجة الكلية للاختبار. كما أثبتت تلك الدراسة وجود ارتباط موجب بين مجموع درجات الطلاب فى رياضيات الثانوية العامة وبين استخدامهم للمعايير الجمالية (البساطة والمنطقية والتركيب والتوازن) فى المقارنة بين جماليات البدائل الرياضية

ويتضح من نتائج تلك الدراسة تدنى درجات الطلاب المعلمين فى تذوق الجمال الرياضى. وهذه النتيجة تشير إلى ضرورة الاهتمام بتنمية التذوق الجمالى للطلاب المعلمين لكى يكونوا قادرين على تنمية هذا التذوق لدى تلاميذهم عندما يمارسون مهنة التدريس مستقبلاً. كما تشير إلى ضرورة الاهتمام بتنمية التذوق الجمالى للرياضيات للطلاب فى التعليم العام منذ التحاقهم بالمدرسة الابتدائية.

وهدفت دراسة سعودى عبد الظاهر (١٩٩٩) إلى تحليل آراء معلمى المرحلة الثانوية فى القيم الجمالية بالمرحلة الثانوية ومدى إحاطة المنهج الدراسى بتلك القيم. وقد أجريت تلك الدراسة على عينة من (٢٠٠) معلما ومعلمة من بين معلمى أربع مدارس بمدينة

المنيا. وقد أوضحت تلك الدراسة أن القيم الجمالية الهامة لطلاب المرحلة الثانوية هى (النظافة ، الدقة، النظام ، والدقة ، والتناسق، الوحدة والترابط، والاتزان والتوازن)، وعدم إدراك المعلمين لبعض القيم الجمالية مثل: (التنوع، التكوين، والايقاع، التباين، التنوع) كما أوضحت نتائج تلك الدراسة أن المنهج الدراسى بالمرحلة الثانوية لا يهتم بالقيم الجمالية بدرجة كافية.

ويتضح من تلك الدراسة عدم إدراك المعلمين لبعض القيم الجمالية، ومن ثم عدم وضوح تلك القيم لديهم، وبالتالى عدم إمكانية مساهمتهم - بوضعهم الحالى - بطريقة فعالة فى تنمية تذوق الطلاب للقيم الجمالية.

وهدفت دراسة محمد سويلم (١٩٩٢) إلى تحديد الأهداف الوجدانية لتدريس الرياضيات وإمكانية تحقيقها من وجهة نظر مجموعة من معلمى الرياضيات بمراحل التعليم الابتدائى والإعدادى والثانوى والطلاب المعلمين بسلطنة عمان. وأثبتت تلك الدراسة اتفاق معلمى الرياضيات بجميع مراحل التعليم العام على إمكانية تحقيق بعض الأهداف الجمالية، مثل: اكتساب القدرة على تذوق وتناسق الأشكال الرياضية، وكذلك تقدير النواحى الجمالية والفنية فى مادة الرياضيات، والمتعة فى التجريب واكتشاف العلاقات الجديدة. وحب الطلاب لرسم أشكال هندسية تعبر عن التناسق والجمال فى الرياضيات.

مما سبق يتضح صعوبة إخضاع الجانب الجمالى للقياس الكمى، بالإضافة إلى ضعف مستوى تذوق الجمال الرياضى لدى الطلاب المعلمين، بالإضافة إلى عدم إدراك المعلمين لبعض القيم الجمالية للمنهج الدراسى. ومن ثم يمكن القول انخفاض مستوى التلاميذ بالتعليم العام فى تذوق الجانب الجمالى.

الجمال فى الرياضيات

الجمال صفة لا يمكن نزعها عن مجال دراسى ما، بل إن الجمال نجده فى ثنايا كل فرع من فروع المعرفة، كما نجده فى الفنون والموسيقى والأدب.

وفى مجال الرياضيات، فإن هناك من يعتقد أن الجمال له صلة وطيدة بالرياضيات وأن أساس الجمال رياضي. وعلى سبيل المثال فإن مفهوم الجمال عند أرسطو يستند إلى التناسب والعدد. كما يشير محسن عطية (١٩٩٦) إلى وجهة نظر فيثاغورث فى هذا الشأن، التى تبرز فيما يأتى:

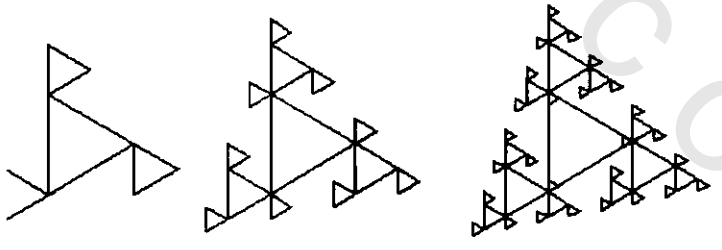
- أن العدد جوهر الأشياء، وأن معرفة الأعداد فى تركيبها وتناسقها تقود إلى معرفة العالم فى ماهياته وقوانينه. أما العلاقات بين هذه الأعداد فهى الحياة بكامل جوانبها."
- أن الأعداد هى نماذج تحاكيها الموجودات، وأن الكون تطبيق وامتداد لنظرية العدد.
- أن نظرية العدد هى الأساس للعلاقة الجمالية. فالنسب القائمة بين الأعداد وبين أجزاء الموجودات هى التى تحدد طابعها الجمالى. الأشياء والموجودات جميلة حسب تناسق الأعداد وتدرجها. هى جميلة بقدر ما تكون بريئة من الكثرة وبقدر تناسقها.
- معيار الجمال عند فيثاغورث معيار رياضى، فالتناسق- الذى يمثل ملمحا هاما للجمال- ليس تناسقا من فراغ، وإنما نتاج ارتباط رياضى بين الأجزاء. وهذا يعنى رد الحس الجمالى إلى مستوى العلم.
- إن مفهوم الجمال عند فيثاغورث محكوم بعلاقات رياضية منطقية ثابتة أعلى من التحولات الزمانية والمكانية.

ويرى محسن عطية (١٩٩٦) أن العلاقات الرياضية الكامنة فى الأعمال الفنية والأثرية المشهورة هو الذى يضفى عليها المسحة الجمالية، ويدلل على ذلك بأن تمثال

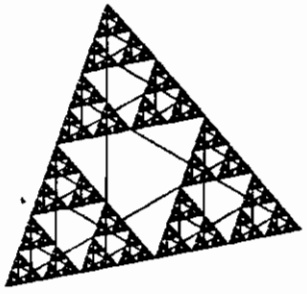
"أفروديت" الذى صنعه براكستيل من الرخام، أحد الأعمال التى تجسد مبادئ الجمال المثالى، حيث تجسد مضمون الجمال فى التمثال- فى النظام المتناسق، وفى التآلف بين الأجزاء والكل، وفى التناسبات العددية الصحيحة بين بعض مكونات الجسم.

وعلى حد قول محسن عطية (١٩٩٦، ٥٠) "من بين الصيغ العددية التى قدمها الفنانون والفلاسفة الإغريق عن نموذج الجمال المثالى ما يعرف بالقطاع الذهبى الذى صاغه اقليدس وهو النسبة بني الجزء الأصغر والجزء الأكبر يساوى النسبة بين الجزء الأكبر والكل". ويلاحظ أن فكرة القطاع الذهبى تقابل -فكرة التشابه الذاتى- فى هندسة الفراكتال، التى تنتج أشكالا غاية فى الجمال.

وبالإضافة إلى موضوع العدد والنسب العددية التى تضفى جملاً على جمال الأعمال الفنية، فإن موضوعات رياضية أخرى تتضمن جمالاً. ومن بين الموضوعات هندسة الفراكتال. وترى نظلة خضر (٢٠٠٤) أن بعض الرياضيات العصرية مثل هندسة لها ملامح جذابة ساحرة تثير التفكير الرياضى الخلاق، فهى تمس الإحساس والوجدان وتشبع العقل وتثير الخيال وتحلق بالأفكار بعيدا جدا وقريبا جدا. كما ترى نظلة خضر (٢٠٠٤، ٤٥) أن " تناغم الرياضيات مع الطبيعة مع الفن الراقى الذى يولد نظريات وتطبيقات فى أرجاء الحياة المعاصرة نجد مثالا له فى هندسة عصرية تسمى هندسة الفراكتال". والشكل التالى يبين أربعة مراحل لتولد فراكتالى.



شكل (١ - أ) شكل (١ - ب) شكل (١ - ح)



شكل (١ – أ)

شكل (١)

الأشكال (١- أ ، ١- ب ، ١- ح ، ١ – د) تبين بالترتيب أربعة مراحل تولد فراكتالى حيث تبين الأشكال (١ – أ)، (١ – ب)، (١ – ح)، (١– د) المراحل الأولى والثانية والثالثة والرابعة بالترتيب. ويلاحظ هنا أنه مع تقدم مراحل الفراكتال نحصل على أشكال جميلة.

تنمية تذوق الطلاب لجمال الرياضيات

مع التسليم بأن تنمية تذوق الطلاب لجمال الرياضيات يمثل أحد الأهداف الهامة لتعليم الرياضيات بالتعليم العام، فإن هناك صعوبات تواجه تحقيق هذا الهدف. وبعض الصعوبات ينبع من كون الجمال يتضمن بعداً ذاتياً. ولكن الجمال يتضمن جانباً موضوعياً، خاصة أن بعض المواقف يجمع الكثيرون على جمالها.

وسواء كان الشخص يعتقد ذاتية الجمال أو موضوعيته، فإنه لا يوجد اختلاف على أهمية تنمية وتدريب الأفراد على التذوق والإحساس بالجمال. ويؤكد كثيرون أمثال (C. Merow. 1997) على أهمية التربية والتعليم فى التربية الجمالية للمتعلمين، حيث يرى أن الرجل الأعمى الذى لم يرى جمال قوس قزح، لا يمكن لأى مناقشة أن تقنعه بجمال هذا القوس، لأن هذا يستلزم أن يراه، وهذا ينطبق على الجمال الرياضى.

وفيما يأتى نعرض بعض الآراء حول كيفية تنمية التذوق الجمالى للرياضيات لدى الطلاب.

ترى نظلة حضر (٢٠٠٤) إمكانية تنمية التذوق الجمالى من خلال:

- دراسة المعلم والطلاب لحكاية نشأة هندسة الفراكتال.
- ربط الرياضيات بتاريخ تطورها، وتاريخ بعض من ساهموا فى صنع (ابتكار) بعض موضوعات الرياضيات المدرسية وحكاياتهم حول نشأتها.
- ربط الرياضيات بالطبيعة البديعة، يجعل المتعلم يستشعر جمالها.
- ربط الرياضيات بالفن يجعلها قريبة من وجدان المتعلم. ويتم ذلك بربط الرياضيات بالفنون مثل الموسيقى الرسم والنحت والزخرفة.
- استخدام مداخل تبسط الرياضيات، يتيح استيعاب الرياضيات بحب وتقدير.
- ربط الرياضيات بالعلوم الأخرى، بحيث يتجلى إسهام الرياضيات فى اختراع ونمو نظريات جديدة، وتطبيقات واسعة وتقدم حلولا لمشكلات حيوية عصرية كانت تعتبر مشكلات أزلية فهذا يجعل المتعلم يقدرها ويستشعر جمالها.
- جعل الرياضيات المدرسية أكثر إنسانية، بإتاحة الفرص للتلميذ أن يصنع ويعمل الرياضيات بمفرده أو بالاشتراك مع غيره، وأن يشعر أنها تخاطب عقله ووجدانه وإحساسه وخياله.
- توجيه الاهتمام لجمال الرياضيات الظاهر فى أنماطها العددية والهندسية.
- توفير الفرص لمساعدة المتعلم على النجاح فى الاستقراء واكتشاف مفاهيم الرياضيات وأفكارها من هذه الأنماط. كذلك توجيه الاهتمام إلى جمالها الباطن فى استدلالاتها ومنطقتها وقوانينها.

ويمكن أن يجد المتعلم الجمال فى أى موضوع رياضى. وكيفية عرض بعض المفاهيم الرياضية بالموضوع الرياضى قد يسهم فى إبراز جمال الموضوع الرياضى. فالجمال الرياضي لا يرتبط بموضوع رياضى دون غيره

وتؤكد نظلة خضر (٢٠٠١) أهمية الروابط فى تذوق جمال الرياضيات، وربط الرياضيات بما يحسه المتعلم ويستشعر فائدته ويتذوق جماله وما يقوم بعمله، وتعلقه بالرياضيات وحبها وتقديرها يأتى عن طريق اكتشافه وتقديره لروابطها بالمجالات المختلفة وبالحياة وبالفن وبعظمة إبداع الخالق.

ويرى فوزى الشربينى (٢٠٠٥ أ) أنه لكى تكون المادة الدراسية متضمنة للعامل الجمالى فلا بد تقديم المادة الدراسية بحيث تكون عبارة عن سلسلة من الخبرات لا يسهل فيها فصل الحقيقة عن مذاقها، وعن ملابساتها الثقافية التى أحاطت بكشفها. وبالتالى تكون تلك المادة خبرات متكاملة.

كما ترى نظلة خضر (١٩٨٤) أنه يمكن تنمية تذوق جمال الرياضيات عن طريق تعرف التلاميذ للرياضيات على أنها وسيلة لوصف الحياة، ومعرفة دلالاتها فى الحياة والعلوم الأخرى، واكتشاف جمالها الذاتى من خلال طرق تدريس مرنة تتيح للتلميذ اكتشاف أنماطها وتركيباتها.

ويرى وليم عبيد وآخرون (٢٠٠٠) أنه يمكن تنمية تذوق جمال الرياضيات بتوفير الفرص للاستمتاع بها من خلال دراسة الأنماط الرياضية والأبنية والأشكال الهندسية المختلفة.

ويرى فوزى الشربينى (٢٠٠٥ أ) أن الموضوعات التى تتناولها مسائل الرياضيات يمكن أن تسهم فى تحقيق التربية الجمالية. ويضرب مثالا بموضوعات مثل (استهلاك الفرد من المحاصيل أو تعدادات السكان، والتكاليف الباهظة فى نقل مخلفات البيئة).

ويقترح مجدى عزيز (٢٠٠٠) سبعة أسس لتطوير منهج الرياضيات منها أربعة أسس ذات علاقة وطيدة بجماليات الرياضيات، وهى (الرياضيات الوظيفية، الرياضيات كفن من الفنون، الرياضيات من أجل المتعة، تاريخ الرياضيات). ويرى أن الرياضيات يمكن أن تحقق المتعة، بتضمين موضوعات مثل (الألعاب الرياضية الذهنية غير الآلية ألعاب الكمبيوتر، البحث عن تطبيقات جديدة، تكوين مسائل فى صورة مشكلات رياضية، والبحث عن حلول مبتكرة لها).كما يرى أن الرياضيات يمكن أن تكون فن من الفنون الجميلة، وذلك **بمراعاة ما يأتى:**

- ربط موضوعات الرياضيات بالتطبيقات العملية بعامة، وبالفنون بخاصة.
- البحث عن حلول مبتكرة وغير تقليدية لبعض المسائل الرياضية.
- الكشف عن التناغم والتناسق فى صياغة القوانين والنظريات الرياضية.
- دراسة مدى تحقيق التكامل بين فروع الرياضيات المختلفة.
- إيجاد العلاقات التى تربط بين الرياضيات ومختلف جوانب المعرفة.

- ويرى (*C. Merow. 1997*) أن المعلم يمكن أن يسهم فى تنمية تذوق الطلاب لجمال الرياضيات، وذلك بمراعاته لما يأتى:

- تقديم مواقف رياضية تخلق قناعات لدى الطلاب بأن كل جزء منها يتصل بالأجزاء الأخرى. وبحيث يرونها كشبكة من الأفكار تمثل نسيجاً جميلاً.

- مناقشة أكبر قدر من الارتباطات بين الأفكار، وتقديم أنشطة تسهم فى إدخال البهجة على قلوب الطلاب من خلال إيجاد اتصالات غير متوقعة.
- تمكين الطلاب من تطوير التذوق الجمالى للرياضيات من خلال التعرض المنتظم لأمثلة مختارة بعناية.
- استغلال المعلم لكل فرصة ممكنة لمناقشة البعد الفنى للرياضيات.
- مقارنة التصورات المختلفة للبراهين والحلول. واستخدام قدر من العمل ينجز كثير من العمل بكثير من الاطمئنان والعمق لوصف النتائج ذات التطبيقات بعيدة المدى، والنتائج التى تجلى العلاقات غير المفهومة.

ويرى صابر سليم (٢٠٠١) أن القصص والخيال العلمى ييسر الاستمتاع بالعلم. ويرى أن المدخل الجمالى فى التربية العلمية يفرض الاعتبارات التالية:

١- الفن والخيال يلعبان دورا أساسيا فى نجاح المدخل الجمالى فى التربية العلمية بحيث لا يتعارض ذلك مع موضوعية العلم ونتائجه.

٢- إبراز النواحى الفنية المرتبطة بالمكون الجمالى فى الظواهر العلمية.

٣- إظهار المكون الجمالى وعدم تركيز كل الاهتمام بالنتائج العلمية فقط.

٤- القصص العلمى المرتبط بالاكتشافات والاختراعات والصعوبات التى واجهت أصحابها فى سبيل إثبات أفكارهم العملية وما يرتبط بذلك من نواحى جمالية يمكن أن تثير استمتاع الطلاب عند دراسة هذه التجارب.

٥- الخيال العلمى وسيلة فعالة لاستخدام المدخل الجمالى فى التربية العلمية.

٦- توفير مصادر تعلم ووسائل تعليمية تلبى المدخل الجمالى.

٧- استثارة سلوك الاستكشاف وحب الاستطلاع والخيال لدى التلاميذ فى سن مبكرة بطرائق مختلفة كالأسئلة والملاحظة من خلال فحص الطبيعة والبيئة ومكوناتها. ووضع الخبرات الجمالية فى سياق الخبرة العادية.

٨- الاهتمام بتنمية الإحساس بالجمال فى برامج إعداد المعلم وتدريبه.

ويرى فوزى الشربينى (٢٠٠٥ أ) أن تعلم الرياضيات من خلال تطبيقها فى مواقف وأنشطة حياتية يثير فى التلميذ مشاعر تساعد على تقوية استيعابه للدرس، ومن ثم يرى التلميذ أن التربية الجمالية لا تقتصر على الفنون.

بل يرى (C. Merow. 1997) أن حل التمرينات يجب أن يسهم فى تنمية التذوق الجمالى للرياضيات، وذلك من خلال التأكيد على قيام الطالب بمقارنة حلوله لأكثر المشكلات والبراهين صعوبة بتلك الحلول التى يقدمها زملاؤه، خاصة للحلول الصحيحة بالإجابة عن أسئلة مثل: (ما وجه الاختلاف الجوهرى؟، ما الحل الذى يظهر أكثر تبصرا بالعلاقات المتضمنة بالمشكلة؟، ما الحل الأبسط؟ ما الحل الذى يجعل المشكلة تبدو أولية؟، هل تجد حلا أكثر إمتاعا؟ وأكثر جمالا؟).

وفى ضوء ما سبق يقترح الباحث مجموعة من الإجراءات لتنمية تذوق الجمال فى الرياضيات لدى المتعلمين. وهذه الإجراءات تتمثل فى:

١. الاهتمام بإكساب وتنمية تذوق معايير الجمال الرياضى، لدى الطلاب منذ التحاقهم بالمدرسة.

٢. الاهتمام بتنمية تذوق الطلاب لجماليات البساطة، وذلك من خلال أنشطة رياضية تؤكد على:

- استخدام الطلاب لمفاهيم رياضية أولية لتحليل الموقف الرياضى.

- اكتشاف علاقات رياضية كثيرة، من خلال المعطيات المتضمنة بالموقف.
- مهارات استخدام لغة رياضية تتسم ببساطة التعريفات والبراهين وتمثيلات المفاهيم والعلاقات والأنماط الرياضية بالموقف الرياضي.
- مهارات تنظيم الموقف الرياضي بطريقة تساعد على إمكانية التنبؤ بالعلاقات المتضمنة الكامنة بالموقف الرياضي.
- مهارات ترتيب العلاقات الرياضية بالموقف الرياضي بطريقة تسهم في وضوح أوجه التشابه بين عناصر الموقف الرياضي.

٣. الاهتمام بتنمية تذوق الطلاب لجماليات التركيب، من خلال أنشطة مثل:

- اكتشاف الطلاب التفسيرات المختلفة لعناصر الموقف الرياضي.
- تعويد الطلاب على التروى في اكتشاف العلاقات بين مكونات الموقف.
- تعويد الطلاب على استخدام أكثر من أسلوب لترتيب عناصر الموقف.

٤. تنمية تذوق الطلاب لجماليات المنطقية، وذلك من خلال أنشطة مثل:

- استخدام الطلاب لمبادئ رياضية أولية في برهنة وحلول التمرينات.
- البراهين التي تعتمدعلى عدد قليل من المبادئ الرياضية والخطوات.
- استخدام خطوات للبرهان أو الحل، مقنعة تؤدى إلى يقين بصحة النتائج.

٥. الاهتمام بتنمية تذوق الطلاب لجماليات النظام، من خلال أنشطة تؤكد على:

- مهارات إيجاد ترابط بين عناصر الموقف الرياضي.
- الارتباط بين الرياضيات ومواقف بيئية أو فيزيائية أو اجتماعية.
- تنظيم وتسلسل الأفكار، ووضوح النظام والترتيب في تعبيرات وبراهين الطلاب.
- اكتشاف العناصر المتشابهة أو المتماثلة بالموقف الرياضي.

- اكتشاف صفات مثل التناسب والتناسق والتشابه والتماثل والتوافق - إن وجدت - بين عناصر الموقف الرياضى.
- دقة التعبيرات الرياضية التى يستخدمها الطلاب، من حيث الرموز الرياضية والمفاهيم والرسوم والتمثيلات.
- بساطة التمثيلات الرياضية أو حلول التمرينات أو المشكلات المعقدة.

٦. الاهتمام بتنمية تذوق الطلاب لجمال الحلول الرياضية، من خلال أنشطة تؤكد على:

= التركيز على مع طلابه كيفية تحسين الحل ونوعية التحسينات التى يمكن إدخالها على الحل لتصبح أكثر جمالا.

= الحلول الرياضية التى تعتمد على فكرة واحدة رئيسة تؤدى إلى الحل.

= التأكيد فى حلول المشكلات الرياضية على الحلول التى تعتمد على وجود تماثل بين بعض مكونات الموقف الرياضى ييسر الوصول إلى الحل.

= مناقشة الطلاب فى خصائص المسارات المختلفة للحل، التى تسهم فى تحديد المستوى الجمالى، مثل: مستوى المتطلبات القبلية اللازمة للحل، ومستوى وضوح الحل وبساطته، وطوله، وإيجاز الحل، وبنيته، وقوته، وحذقه وبراعته، وكذلك احتواؤد على عناصر للدهشة والغرابة.

= التركيز على البراهين البسيطة، والتأكيد على تجنب الحجة المعقدة.

= التأكيد على الحلول المختصرة، وتفضيل الحلول ذات الخطوات القليلة وتجنب الحلول الطويلة المملة، خاصة عندما يؤدى إلى نفس النتيجة من الوضوح التى يؤدى إليها الحل المختصر. ويجب التأكيد على أن الاختصار لا يقاس - بشكل دائم - بعدد الكلمات أو الصفحات، فالجانب الهام للاختصار هو عدد الخطوات المنطقية وحجم الخطوة

ويجب تفضيل الحل الذى يتضمن خطوة واحدة - فقط - رئيسية مهمة، وتكون باقى الخطوات الأخرى محدودة فى القدر الذى يسهم به كل منها فى تحقيق الخطوة الرئيسية. ويجب التأكيد على تجنب الحل الذى يعتمد على عدد كبير من الخطوات ليس منها خطوة ما حيوية وحاسمة فى الوصول قريبا نحو الهدف النهائى أكثر من أى خطوة أخرى.

= التركيز على عنصر الوحدة لبنية الحل. ويمكن ذلك من خلال تشجيع المعلم للحلول التى تتسم بوضوح خط التفكير، بحيث يتضح خط التفكير على أنه يتكون من عناصر صغيرة ومن ثم إدراكه ككل.

= الاهتمام بجماليات حل المشكلة الرياضية من ناحيتين هما العملية والناتج، أى الاهتمام بجماليات حل المشكلة الرياضية من ناحيتين هما:

(أ) تقييم المنتج (الحل الذى تم إنجازه). وبلغة أخرى تقييم جمال الحجة الرياضية بعد أن تم بلورتها للعرض.

(ب) العملية التى يتم من خلالها تطوير الحل لحل المشكلة، أى التفكير الرياضى المرتبط بالعملية.

= الاهتمام بعرض مشكلات لها أكثر من حل واحد، وإتاحة الفرص لمناقشة تلك الحلول والمقارنة بين جمالياتها.

= التأكيد على كيفية اكتشاف الحلول الجميلة للمشكلات الرياضية، وعدم قصر الاهتمام فى الفصل على وصول الطالب للحل الصحيح.

= توفير مراجع للطلاب فيها حلول مختلفة لبعض الألغاز الرياضية، ومجلات بها مشكلات رياضية وحلول لها تتسم ببساطتها وجمالها، مثل برهان إقليدس لنهائية الأعداد الأولية، وعدم نسبية الجذر التربيعي للعدد(٢).

= إتاحة فرص للتلاميذ لترتيب المواقف الرياضية تنازليا وفقا للجمال.

= مناقشة اندهاش الطلاب ببعض الحلول، ومناقشة أوجه الجمال التى تثيرهم.

= إتاحة فرص لمناقشة أكثر من فكرة عامة للوصول للحل قبل انهماك الطلاب فى الحل فهذا قد يتيح لهم البحث عن الحل الأجمل، وتحديد مساره.

obeikandl.com

مراجع البحث

١. جمال أبو الخير(١٩٩٢): " مفهوم الجمال من المنظور الإسلامي وبعض مظاهره التطبيقية في التربية الفنية." مجلة البحث وعلم النفس، كلية التربية - جامعة المنيا، المجلد (١٢)، العدد(٢)..

٢. جمال حامد (٢٠٠٧): "دراسة لتذوق الطلاب المعلمين لجماليات الرياضيات، فى ضوء معايير الجمال الرياضى لدى أعضاء هيئة التدريس ومعلمى وموجهى الرياضيات،" مجلة كلية التربية بأسيوط، يناير.

٣. ----- (١٩٩٢): " الألغاز الرياضية الشائعة لدى تلاميذ ومعلمى التعليم الأساسى والطلاب المعلمين." مجلة كلية التربية بأسيوط، المجلد الخامس عشر، العدد الثانى، المجلد الأول، يناير.

٤. سعودى عبد الظاهر (١٩٩٩): " دور المدرسة الثانوية فى تنمية القيم الجمالية لدى طلابها"، مجلة البحث فى التربية وعلم النفس، كلية التربية بالمنيا، المجلد الثانى عشر، العدد الرابع، أبريل ١٩٩٩.

٥. صابر سليم (٢٠٠١): "المدخل الجمالى فى التربية العلمية،" التربية العلمية، الجمعية المصرية للتربية العلمية، المجلد الرابع، العدد الرابع.

٦. علي عبد المعطي (١٩٩٨): جماليات الفن: المناهج والمذاهب والنظريات. الإسكندرية: دار المعرفة الجامعية.

٧. فوزى الشربينى(٢٠٠٥ أ): التربية الجمالية بمناهج التعليم لمواجهة القضايا والمشكلات المعاصرة، القاهرة: مركز الكتاب للنشر.

٨. فوزى الشربينى (٢٠٠٥ ب): " التربية الجمالية بمناهج التعليم."معوقات التربية العلمية فى الوطن العربى، التشخيص والحلول،المؤتمر العلمى التاسع، الجمعية المصرية للتربية العلمية،عقد فى يوليو، ٢٠٠٥.

٩. مجدى عزيز (٢٠٠٠): " تطوير مناهج الرياضيات – الموضوع القديم الجديد." مجلة تربويات الرياضيات، المجلد الثالث، يناير ٢٠٠٠.

١٠. محسن عطية (١٩٩٦): غاية الفن: دراسة فلسفية ونقدية،ط٢ القاهرة: دار المعارف.

١١. محمد المنوفى (١٩٩٥): " التربية الجمالية فى الإسلام." مجلة البحوث النفسية والتربوية، كلية التربية جامعة المنوفية، العدد (١).

١٢. محمد سويلم (١٩٩٢): " الأهداف الوجدانية لتدريس الرياضيات بمراحل التعليم العام، دراسة تقويمية." مجلة كلية التربية بدمياط، العدد(١٦)،الجزء الأول.

١٣. محمد عزيز سالم، علم الجمال، الإسكندرية: دار الفكر الجامعي،١٩٨٦

١٤. نظلة خضر (٢٠٠٤): معلم الرياضيات والتجديدات الرياضية،هندسة الفراكتال وتنمية الابتكار التدريسى لمعلم الرياضيات، سلسلة التجديدات الرياضية والنشاطية والتدريسية لتطوير الرياضيات المدرسية، الكتاب الأول. القاهرة عالم الكتب

١٥. ----- (٢٠٠١): " نحو أسلوب جديد فى عمل الروابط الرياضية بمصر." مؤتمر الرياضيات المدرسية: معايير ومستويات، جمعية تربويات الرياضيات، عقد فى الفترة ٢١ – ٢٢ فبراير، ٢٠٠١

١٦. ------(١٩٨٤): أصول تدريس الرياضيات، ط ٣، القاهرة: عالم الكتاب.

١٧. وليم عبيد، وآخرون (٢٠٠٠): تربويات الرياضيات. ط٤؛القاهرة: مكتبة الأنجلو المصرية.

18. Whitcombe, Allen (1988): "Creativity, Imagination, Beauty." Mathematics in School, Vol. 17, No. 2.

19. Brinkmann, A. ,(2000): "Aesthetics - Complexity - Pragmatic Information", Research on Mathematical Beliefs Proceedings of the MAVI-9 European Workshop, Austria: University of Vienna, June 1-5, 2000, ed. Stefan Götz and Günter Törner.

20. Merow, Craig (1997): "The World of Mathematics: A Maker Of Patterns," PCTM Magazine, Vol. 36, No. 1.

21. Deutsch, D., 1997: The Fabric of Reality. London: Allen Lane.

22. Weinberg, Steven (1993): Dreams of a Final Theory the Search for the Fundamental Laws of Nature. London: Vintage Books.

23. King, David (2003): Spirituality, Art, And Beauty, Retrieved on 5 Jan. 2004 from: http://www.geocities.com/Athens/Olympus/7695/index.htm.

24. Davis, Philip J. & Reuben Hersh (1991): Comparative aesthetics. Chap. in: The mathematical experience, Boston: Birkhauser.

25. Dreyfus, T. & T. Eisenberg (1986): "On the Aesthetics of Mathematical Thought. For the Learning of Mathematics," An International Journal of Mathematics Education, Vol. 6, No. 1.

26. Schweitzer, F. (1997): "Structural and Functional Information - an Evolutionary Approach to Pragmatic Information." World Futures: The Journal of General Evolution , Vol. 5.

27. Gowers, W. T. (2002), The Importance of Mathematics, (23p). Springer. Format: Hardcover. ISBN: 3540926526

28. Rogers, James R. (1999): " Mathematics as Art: The Missing Standard," Mathematics Teacher, Vol. 92.

29. *Massachusetts Department of Education (1996): Mathematics Curriculum Framework: - Achieving Mathematical Power - The Beauty and Power of Mathematics. Retrieved on 25 Jan. 2003 from: http://www.doe.mass.edu/framworks/math/beauty.html. 3p.*

30. *McIntyre, Michael E. (1995): "Hyper Credulity, quantum mechanics, and scientific truth", journal Interdisciplinary Science Reviews, Vol. 23.*

31. *Nunez, Rafael E. (2005): "Creating Mathematical Infinities: Metaphor, Blending, And The Beauty Of Transfinite Cardinals." Journal of Pragmatics, Vol. 37.*

32. *Penrose, Roger: Heaven Words. Retrieved on 25 Sep., 2003 from: http://www.heaven-words.com/index.htm.*

33. *Perlovsky, Leonid I. (2006): " Toward physics of the mind: Concepts, emotions, consciousness, and symbols." Physics of Life Reviews , Vol. 3.*

34. *Chandrasekhar, S. (1987): Truth and Beauty. Aesthetics and Motivations in Science. Chicago: University of Chicago Press.*

35. *Rebsdorf, S. & H. Kragh (2002): " The Relations of Mathematics To Science." Studies In History And Philosophy Of Modern Physics, Vol. 33.*