الباب الثالث
ماثيماتيكا والجبر

في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ . كثيرات الحدود والدوال الكسرية Polynomials & Rational Functions

٢ . المتسلسلات Series

٣ . حل المعادلات Solving Equations

٤ . الجبر الخطى Linear Algebra

أولا : القوائم Lists
ثانيا : المصفوفات Matrices
ثالثا : حل الأنظمة الخطية Solving Linear Systems
رابعا : القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues and Eigenvectors

الباب الثالث

ماثيماتيكا والجبـر

من الأشياء الهامة فى برنامج ماثيماتيكا هو المقدرة على القيام بالحسابات على المقـــادير الرمزية **Symbolic** الى جانب المقادير العددية **Numeric** وهذا يعنى أن ماثيماتيكا يســـتطيع التعامل مع الصيغ والمقادير الجبرية تماما مثل التعامل مع الأعداد .

١ . كثيرات الحدود والدوال الكسرية
Polynomials and Rational Functions

برنامج ماثيماتيكا يقدم عدد كبير من الأوامر للتحويل بين الأشكال المختلفـــة للتعبـــيرات الجبرية وأجراء العمليات الجبرية على كثيرات الحدود **Polynomials** وسوف نتعرف فيما يأتي على بعض هذه الأوامر مع توضيح الوظيفة والصيغة العامة لكل من هذه الأوامر ونعطـــى أمثلة توضيحية .

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Factor[poly]	تحليل كثيرة الحدود Poly الى قوى صحيحة
Expand[expr]	إيجاد مفكوك حاصل الضرب والقوى الصحيحة الموجبة الموجودة فى البسط للتعبير expr
ExpandAl[expr]	إيجاد مفكوك حاصل الضرب والقوى الصحيحة الموجبة الموجودة فى كل أجزاء التعبير expr
Together[expr]	توحيد المقامات denominators للكسور الموجودة فى التعبير expr
Apart[expr]	كتابة التعبير الكسرى expr على صورة مجموع لكسوره الجزئية
Simplify[expr]	إيجاد صورة مبسطة للتعبير expr بأصغر عدد ممكن من الأجزاء
Collect[expr,x]	تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قوى x فى التعبير expr

لتحليل كثيرة الحدود $x^2 + 2x - 3$ إلى عواملها

In[1]:=Factor[x^2+2x-3]

Out[1]= (x+3)(x-1)

الأمر Expand هو عكس الأمر Factor ويقوم بفك الأقواس

In[2]:=Expand[%]

Out[2]= $x^2 + 2x - 3$

لتحليل كثيرة الحدود $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ إلى عواملها

In[3]:=Factor[8x^3+36x^2+54x+27]

Out[3]= $(3 + 2\,x)^3$

تعريف المقدار الجبرى rrr ثم إيجاد مفكوك القوى الصحيحة الموجبة وكذلك حاصل الضرب الموجود فى البسط للمقدار الجبرى rrr

In[4]:=rrr=(x-1)^2 (x+2)/((x+1)(x-3)^2);Expand[rrr]

Out[4]= $\dfrac{2}{(-3+x)^2(1+x)} - \dfrac{3x}{(-3+x)^2(1+x)} + \dfrac{x^3}{(-3+x)^2(1+x)}$

توحيد المقامات للكسور الموجودة فى المقدار

In[5]:=Together[%]

الجبرى الناتج من جملة الإخراج السابقة

Out[5]: $\dfrac{2-3x+x^3}{(-3+x)^2(1+x)}$

إيجاد مفكوك القوى الصحيحة الموجبة وكذلك حاصل الضرب الموجود فى كل المقدار الجبرى rrr

In[6]:=ExpandAll[rrr]

Out[6]= $\dfrac{2}{9+3x-5x\text{^}2+x\text{^}3}-\dfrac{3x}{9+3x-5x\text{^}2+x\text{^}3}+\dfrac{x^3}{9+3x-5x\text{^}2+x\text{^}3}$

كتابة المقدار الجبرى rrr فى صورة كسوره الجزئية

In[7]:=Apart[rrr]

Out[7]= $1+\dfrac{5}{(-3+x)^2}+\dfrac{19}{4(-3+x)}+\dfrac{1}{4(1+x)}$

تبسيط شكل الناتج من جملة الإخراج Out[7] السابقة

In[8]:=Simplify[%7]

Out[8]= $\dfrac{(-1+x)^2(2+x)}{9+3x-5x\text{^}2+x\text{^}3}$

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قوى x فى التعبير expr	Collect[expr, x]
الحصول على معامل form فى كثيرة الحدود expr	Coefficient[expr, form]
الحصول على عدد العناصر الموجودة فى التعبير expr	Length[expr]
الحصول على اكبر قوى للمقدار form فى التعبير expr	Exponent[expr,form]

إيجاد مفكوك المقدار الجبرى $(2x + y + 1)^2$ ووضع الناتج فى المتغير r1

In[9]:=r1=Expand[(2x+y+1)^2]

Out[9]= $1 + 4x + 4x^2 + 2y + 4xy + y^2$

تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قوى المتغير y فى التعبير الجبيرى rl

In[10]:=Collect[r1,y]

Out[10]= $1 + 4x + 4x^2 + (2 + 4x)y + y^2$

للحصول على معامل y فى التعبير الجبرى rl

In[11]:=Coefficient[r1,y]

Out[11]= $2 + 4x$

للحصول على أكبر قوى للمتغير y فى التعبير الجبرى rl

In[12]:=Exponent[r1,y]

Out[12]=2

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Numerator[expr]	الحصول على البسط فى التعبير expr
Denominator[expr]	الحصول على المقام فى التعبير expr
PolynomialQuotient[p, q, x]	إيجاد خارج قسمة p على q مع إهمال الجزء الباقى حيث p , q كثيرات حدود فى المتغير x
PolynomialRemainder[p, q, x]	إيجاد الجزء الباقى من خارج قسمة p علـــى q حيث p , q كثيرات حدود فى المتغير x

In[13]:=Numerator[rrr] — للحصول على البسط فى التعبير الجبرى rrr

Out[13]=$(-1+x)^2$ (2+x)

In[14]:=Denominator[rrr] — للحصول على المقام فى التعبير الجبرى rrr

Out[14]=$(-3+x)^2$ (1+x)

In[15]:= p=x^3+5x^2+4x-6;q=x+1;
PolynomialQuotient[p,q,x]

Out[15]=$4x^2$ +x

تعريف كثيرتى حدود p,q ثم إيجاد خارج قسمة كثيرة الحدود p على كثيرة الحدود q مع إهمال الجزء الباقى

In[16]:=PolynomialRemainder[p,q,x]

Out[16]= -6

للحصول على الجزء الباقى من خارج قسمة كثيرة الحدود p على كثيرة الحدود q

٢ . المتســـلســـلات Series

فى كثير من المســـائل الرياضية تنشـــأ عمليات جمع وضرب للحدود المنتظمة وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حساب مثل هذه العمليات . ولحساب مجموع حدود المتسلســـلة يســـتخدم الأمر Sum كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Sum[f, {i, imax}]	حســـــاب المجموع $\sum_{i=1}^{i\,max} f$
Sum[f, {i, imin, imax}]	حســـــاب المجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} f$
Sum[f, {i,imin, imax, step}]	حســـاب المجـــوع $\sum_{i} f$ مـــن **i=imin** الى **i=imax** بخطوة مقدارها **step**
Sum[f, {i, imin, imax}, {j,jmin, jmax}, . . .]	حساب المجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} \sum_{j=j\,min}^{j\,max} f$

لحساب مجموع العشرة حدود الأولى من المتسلسلة $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i^2}$

In[1]:= Sum[1/i^2,{i,1,10}]//N

Out[1]=1.54977

ويمكن حســـــاب مجموع عدد لانهائى من المتسلسلة بشرط أن تكون المتسلسلة تقاربية

In[2]:= Sum[i/I^2,{i,1,Infinity}]//N

Out[2]= 1.64493

لحساب المجموع $\sum_{i=1}^{7} \frac{x^i}{i!}$

In[3]:=Sum[x^i/i!,{i,1,7,2}

Out[3]= $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}$

لحساب مجموع $\sum \frac{x^i}{i!}$ من i=2 الى i=7 بخطوة step=2

In[4]:=Sum[x^i/i!,{i,1,7,2}]

Out[4]= $x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{5040}$

لحساب المجموع المزدوج $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} x^i\, y^j$

In[5]:=Sum[x^i y^j,{i,1,3},{j,1,i}]

Out[5]= $xy+x^2y+x^2y^2+x^3y+x^3y^2+x^3y^3$

ويمكن لماثيماتيكا أجراء عمليات الضرب على الحدود المنتظمـــة باســتخدام الأمـــر Product كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Product[f,{i, imax}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{imax} f$
Product[f,{i, imin, imax}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$
Product[f,{i, imin, imax, step}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$ بخطوة مقدارها step
Product[f,{i,imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]	حساب حاصل الضرب المزدوج $\prod_{i=imin}^{imax} \prod_{j=jmin}^{jmax} f$

لحساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{5} i^2$

In[6]:=Product[i^2,{i,1,5}]

Out[6]=14400

لحساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{4} (x+i)$

In[7]:=Product[x+i,{i,1,4}]

Out[7]=(1 + x) (2 + x) (3 + x) (4 + x)

لحساب حاصل $\prod_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{i} (x+i)^j$

In[8]:=Product[(x+i)^j,{i,1,3},{j,1,i}]

Out[8]= $(1 + x)\ (2 + x)^3\ (3 + x)^6$

وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حســـاب مفكوك متسلسلة القوى للدالة $f(x)$ حول النقطة $x= x_0$ لآي عدد n من الحدود وكذلك حساب مفكوك تيلور لدالة فـــي متغــيرين $f(x,y)$ حول النقطة (x_0, y_0) وذلك باستخدام الأمر **Series** كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب مفكوك متسلســلة القوى للدالة f حول النقطة x_0 حتى الحد $(x-x_0)^n$	Series[f, {x, x0, n}]
حساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة f علــى التتابع بالنسبة الى y ثم الى x	Series[f, {x, x0, nx}, {y,y0, ny}]
تحويل expr الى الشكل العادى بدون أي رموز خاصة	Normal[expr]

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة $f(x)$ حول النقطة $x=a$ حتى الحدود من الدرجـــة الثالثة

In[9]:=Series[f[x],{x,a,3}]

Out[9]=

$$f[a]+f'[a](-a+x)+\frac{f``[a](-a+x)^2}{2}+\frac{f^{(3)}[a](-a+x)^3}{6}+O[-a+x]^4$$

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة e^x حول النقطة $x = 0$ حتى الحدود من الدرجة الرابعة

In[10]:=Series[Exp[x],{x,0,4}]

$$\text{Out[10]}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O[x]^5$$

ويمكن إلغاء الحد $O[x]^5$ وكتابة المفكوك فى الشكل العادى وذلك باستخدام الأمر **Normal**

In[11]:=Normal[%]

$$\text{Out[11]}= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة e^{xy} حول النقطة $x = 0$, $y = 0$ حتى الحدود من الدرجة الثالثة فى x والدرجة الثانية فى y

In[12]:=Series[Exp[x y],{x,0,3},{y,0,2}]

$$\text{Out[12]}=1+(y+O[y]^3)x+(\frac{y^2}{2}+O[y]^3)x^2+O[x]^3$$

ويمكن كتابة المفكوك فى الشكل العادى وذلك باستخدام الأمر **Normal**

In[13]:=Normal[Series[Exp[x y],{x,0,3},{y,0,2}]]

$$\text{Out[13]}=1+x\,y+\frac{x^2\,y^2}{2}$$

٣ . حل المعادلات Solving Equations

فى برنامج ماثيماتيكا المعادلة يكون لها الشكل lhs == rhs حيث يستخدم المؤثر العلاقي == وهو يعنى اختبار ما إذا كان الطرف الأيمن rhs يساوى الطرف الأيسر lhs ولذلك فإن المعادلات فى ماثيماتيكا تعامل على أنها تعبيرات منطقية Logical Statement .

فمثلا عند إدخال المعادلة 2+3==5 فإن الناتج يكون صواب True

In[1] := 2+3= =5
Out[1]= True

وعند إدخال المعادلة $x^2+3x==2$ فإن ماثيماتيكا يقوم بإخراج المعادلة فى صورة رمزية لأنه لم يستطع اختبار ما إذا كان $x^2 + 3x = 2$ صواب أو خطأ نظرا لعدم وجود قيمة سابقة للمتغير x .

In[2] := x^2+3x= =2
Out[2]= $x^2+3x==2$

والآن لحل المعادلة والحصول على قيم x التى تمثل جذور المعادلة نستخدم الأمر Roots كالآتي :

Roots[lhs= =rhs,var]	للحصول على قائمة تحتوى على جذور المعادلة lhs= =rhs بالنسبة للمتغير var .

الحصول على جذور المعادلة $x^2+3x==2$ ونلاحظ أن الناتج يكون على صورة تعبير منطقى

In[3]:=Roots[x^2+3x= =2,x]

Out[3]=

$$x=\frac{-3-\text{Sqrt}[17]}{2} \quad \| \quad x=\frac{-3+\text{Sqrt}[17]}{2}$$

وكثيرا ما نحتاج الى استخدام الحل الناتج فى حسابات أخرى لذلك يكون من المفيد تحويل الحـــل من التعبير المنطقى الى صورة صريحة ويتم ذلك باستخدام الدالة **ToRules**

لتحويل حل eqns الناتج من الأمر Roots من الصورة المنطقية الى متابعة من القوائم تحتوى على قواعد صريحة للحل	**ToRules[eqns]**
لتحويل حل eqns الناتج من الأمر Roots من الصورة المنطقية الى قائمة تحتوى على قواعد صريحة للحل	**{ToRules[eqns]}**

لتحويل الحل الناتج من جملة 3 الى متابعة تحتوى على قواعد صريحة للحل

In[4]:=ToRules[%3]

Out[4]=

$$\text{Sequence}[\{x->\frac{-3-\text{Sqrt}[17]}{2}\},\{x->\frac{-3+\text{Sqrt}[17]}{2}\}]$$

ولتحويل الكسور الاعتيادية فى الحل إلى كسور عشرية والحصول على قيم عددية نستخدم الدالة N

In[5]:={ToRules[Roots[x^2+3x= =2,x]]}// N

Out[5]={{x -> -3.56155}, {x -> 0.561553}}

ويمكن حل المعادلة والحصول على جذورها باستخدام الأمر **Solve** كالآتي :

Solve[eqn, var]	حل المعادلة **eqn** بالنسبة للمتغير **var**

وتعتبر معادلات كثيرات الحدود **polynomial equations** من أهم المعادلات التـي يتـم حلها باستخدام الأمر **Solve** .

للحصول على جـــذور المعــــادلة $x^2 + 3x = 2$ بالنسبة للمتغير x

In[6]:=Solve[x^2+3x= =2,x]

Out[6]= $\{x- > \dfrac{-3 - Sqrt[17]}{2}\},\{x- > \dfrac{-3 + Sqrt[17]}{2}\}$

لحساب قيمة عددية تقريبية للحل الناتج من جملة الإدخال رقم 6

In[7]:= N[%6]

Out[7]={{x -> -3.56155}, {x -> 0.561553}}

للحصول على جـــذور المعـــادلة $a\,x + b = c$ بالنسبة للمتغير x

In[8]:=Solve[a x+b= =c,x]

Out[8]= $\{\{x -> -(\dfrac{b-c}{a})\}\}$

للحصول على جذور المعادلة $a x^2 + b x + c = 0$ بالنسبة الى المتغير x

In[9]:=Solve[a x^2+b x+c==0,x]

$$\text{Out[9]=}\ \left\{\left\{x->\frac{-b-Sqrt[b^2-4ac]}{2a}\right\},\left\{x->\frac{-b+Sqrt[b^2-4ac]}{2a}\right\}\right\}$$

للحصول على جـــذور المعـــادلة $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ بالنسبة الى المتغير x

In[10]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2= =0,x]

$$\text{Out[10]=}\{\{x->-2\},\{x->\frac{-1-I\,Sqrt[3]}{2}\},\{x->\frac{-1+I\,Sqrt[3]}{2}\}\}$$

ولحساب قيمة عددية تقريبية للحل الناتج من جملة الإدخال رقم 10

In[11]:=N[%]
Out[11]={{x -> -2.}, {x -> -0.5 - 0.866025 I}, {x -> -0.5 + 0.866025 I}}

ويمكن الحصول على جذور معينة من حل المعادلة باستخدام الأقواس المزدوجة [[ ]]

In[12]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2= =0,x][[1]] للحصول على الجذر الأول من حل

Out[12]={x -> -2} المعادلة $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

In[13]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2= =0,x][[2]]//N للحصول على قيمة عددية للجذر

Out[13]={x -> -0.5 - 0.866025 I} الثانى من حل المعادلة $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

والأمر Solve قادر على إيجاد حلول جبرية صريحة للعديد من معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات العالية خاصة المعادلات التي يمكن تحليلها

تعريف كثيرة حدود من الدرجة الخامسة

In[14]:=equ1=Expand[Product[x-i,{i,5}]]

Out[14]=-120 + 274 x - 225 x^2 + 85 x^3 - 15 x^4 + x^5

حل معادلة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة

In[15]:=Solve[equ1= =0,x]

Out[15]={{x -> 1}, {x -> 2}, {x -> 3}, {x -> 4}, {x -> 5}}

نلاحظ أننا حصلنا على حل صريح لمعادلة كثيرة الحدود equ1=0 من الدرجة الخامسة . وإذا كان ماثيماتيكا قادر على إيجاد حلول معادلة كثيرة حدود من درجة n فإنه يعطى n من الجذور حتى فى حالة وجود جذور مكررة كما فى المثال الآتي :

In[16]:=Solve[(x+3)(x-1)^2= =0,x]

Out[16]={{x -> -3}, {x -> 1}, {x -> 1}}

وفى حالة عدم استطاعة ماثيماتيكا الحصول على حلول جبرية صريحة فإن ماثيماتيكا تترك المعادلة فى صورتها الرمزية ويمكن فى هذه الحالة استخدام الدالة N للحصول على حلول عددية

In[17]:=Solve[x^5-130x+11= =0,x]

Out[17]={ToRules[Roots[-130 x + x^5 == -11, x]]}

In[18]:= Solve[x^5-130x+11= =0,x]//N

**Out[18]={{x -> -3.39748}, {x -> -0.0211456 - 3.37698 I},
{x -> -0.0211456 + 3.37698 I}, {x -> 0.0846154}, {x -> 3.35515}}**

وفى ماثيماتيكا يمكن استخدام الأمر Solve لحل بعض المعادلات التى ليست على صورة كثيرات حدود

```
In[19]:=Solve[Sqrt[1-x]+Sqrt[1+x]= =4,x]//N
Out[19]={{x -> -6.9282 I}, {x -> 6.9282 I}}
```

وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن استخدام الأمر Solve لحل مجموعة من المعادلات فى وقت واحد كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى جميع المتغيرات الموجودة فيها حيث eqns تكتب فى صورة قائمة {lhs1= =rhs1,lhs2= =rhs2,...}	Solve[eqns]
حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى المتغيرات vars حيث vars تكتب فى صورة قائمة {x1,x2,...}	Solve[eqns,vars]
حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى المتغيرات vars فقط وحذف المتغيرات elims من النتائج	Solve[eqns, vars, elims]

لحل المعادلتين بالنسبة الى جميع المتغيرات الموجودة وهى x , y

In[20]:=Solve[{x+y= =1,x-3y= =2}]

Out[20]= $\{\{x->\frac{5}{4}, y->-\frac{1}{4}\}\}$

للحصول على قيمة عددية لحل المعادلتين بالنسبةإلى جميع المتغيرات

```
In[21]:=Solve[{x^2+y^2= =5,x+3y= =1}]//N
Out[21]={{x -> -2., y -> 1.}, {x -> 2.2, y -> -0.4}}
```

تعريف القائمة **eqns1** وتحتوى على معادلتين فى ثلاث مجاهيل هم **x , y , z** ثم حساب الحل بالنسبة الى **x , y** فقط

In[22]:=eqns1={y-2x= =9,x+3z= =1}; Solve[eqns1,{x,y}]
Out[22]={{y -> 9 - 2 (-1 + 3 z), x -> 1 - 3 z}

حساب حل مجموعة المعادلات **eqns1** بالنسبة الى **y , z** فقط

In[23]:=Solve[eqns1,{y,z}]

Out[23]={{y -> 9 + 2 x, z -> $\frac{1-x}{3}$ **}}**

تعريف القائمة **eqns2** وتحتوى على ثلاث معادلات فى خمسة مجاهيل هم **x , y , z , w , t** ثم حساب الحل بالنسبة الى المتغيرات **x , y , z** فقط

In[24]:=eqns2={x+2y= =z,y+2z= =w,z+2w= =t};
Solve[eqns2,{x,y,z}]

Out[24]={{x -> t - 2 w + 2 (-w - 2 (-t + 2 w)),
y -> w + 2 (-t + 2 w), z -> t - 2 w}}

حساب حل مجموعة المعادلات **eqns1** بالنسبة الى المتغير **x** مع حذف المتغير **z**

In[25]:=Solve[eqns1,{x},{z}]

Out[25]={{x− > $\frac{-9+y}{2}$ **}}**

حساب حل مجموعة **eqns1** بالنسبة إلى المتغير **y** مع حذف المتغير **z**

In[26]:=Solve[eqns1,{y},{z}]

Out[26]={{y -> 9 + 2 x}}

حساب حل مجموعة المعادلات eqns2 بالنسبة إلى المتغير x مع حذف المتغيرات t,w

```
In[27]:=Solve[eqns2,{x},{t,w}]
Out[27]={{x -> -2 y + z}}
```

حساب حل مجموعة المعادلات eqns2 بالنسبة إلى المتغير w مع حذف المتغيرات x,y

In[28]:=Solve[eqns2,{w},{x,y}]

Out[28]= $\{\{w->\dfrac{t-z}{2}\}\}$

وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن حذف عدد من المتغيرات من مجموعة المعادلات وإعـــادة كتابتها ويتم ذلك باستخدام الأمر Eliminate كالآتي :

Eliminate[eqns,elims] لحذف المتغيرات**elims** من مجموعة المعادلات **eqns**

لحذف المتغير x من مجموعة المعادلات eqns1

```
In[29]:=Eliminate[eqns1,x]
Out[29]=y = = 11 - 6 z
```

لحذف المتغير x من مجموعة المعادلات eqns1

```
In[30]:=Eliminate[eqns1,z]
Out[30]=y = = 9 + 2 x
```

لحذف المتغيرات x,y من مجموعة المعادلات eqns2

```
In[31]:= Eliminate[eqns2,{x,y}]
Out[31]=t = = 2 w + z
```

لحذف المتغيرات w,t من مجموعة المعادلات eqns2

```
In[32]:=Eliminate[eqns2,{w,t}]
Out[32]=x = = -2 y + z
```

٤ . الجبر الخطى Linear Algebra

يعتبر الجبر الخطى جزء اساسى وهام فى دراسة الرياضيات والهندسة والفيزياء وعلوم أخرى ، وبرنامج ماثيماتيكا يقدم العديد من الأوامر للعمليات الجبرية الخاصة بالتعامل مع القوائم Lists والمصفوفات Matrices وحلول الأنظمة الخطية Linear Systems وحساب القيم المميزة والمتجهات المميزة لمصفوفة .

أولا : القوائم Lists

من خلال دراستنا للعديد من الأوامر فى ماثيماتيكا مثل

Sum , Product , Series , ...

نلاحظ أن نطاق العمل فى هذه الأوامر يكتب باستخدام الأقواس { } على صورة قائمة List وتستخدم القوائم فى ماثيماتيكا بشكل كبير وبصفة خاصة عند عمل الحسابات عندما يكون هناك حاجة لتنظيم عدد كبير من القيم بغرض التعامل معها كوحدة واحدة ولذلك فإن ماثيماتيكا غنى بالعمليات التى يمكن تنفيذها على القوائم ، ولكى نتعرف على هذه العمليات نبدأ بتعريف قائمتين s1 , s2 كل قائمة تحتوى على خمسة عناصر

```
In[1]:=s1= { a , b , c , d , e }; s2= { 2 , 3 , 4 , 5 , 6};
```

وتنفيذ العمليات الحسابية من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة على قائمتين يتم على العناصر المتناظرة فى القائمتين بشرط أن يكون القائمتين بهما نفس العدد من العناصر ونـاتج العملية الحسابية يكون قائمة جديدة .

جمع القائمتين s1 , s2 يتم بجمع العناصر المتناظرة فى القائمتين

```
In[2]:= s1+s2
Out[2]={2 + a ,  3 + b ,  4 + c ,  5 + d , 6 + e}
```

طرح القائمتين s1 , s2 يتم بطرح
العناصر المتناظرة فى القائمتين

```
In[3]:= s1-s2
Out[3]={-2 + a, -3 + b, -4 + c, -5 + d, -6 + e}
```

ضرب القائمتين s1 , s2 يتم بضرب
العناصر المتناظرة فى القائمتين

```
In[4]:=s1 s2
Out[4]={2 a, 3 b, 4 c, 5 d, 6 e}
```

قسمة القائمتين s1 , s2 يتم بقسمة
العناصر المتناظرة فى القائمتين

In[5]:=s1/ s2

Out[5]= $\{\frac{a}{2},\frac{b}{3},\frac{c}{4},\frac{d}{5},\frac{e}{6}\}$

ويمكن إجراء أي عملية حسابية بين قائمة
وعدد ثابت فمثلا جمع القائمة s1 على العدد
الثابت 2 يتم بإضافة العدد الثابت 2 الى
كل عنصر فى القائمة

```
In[6]:= s1+2
Out[6]: {a+2 , b+2 , c+2 , d+2 , e+2}
```

ضرب القائمة s1 فى العدد الثابت 3 يتم بضرب
العدد الثابت 3 فى كل عنصر من القائمة

```
In[7]:=3s1
Out[7]= {3 a, 3 b, 3 c, 3 d, 3 e}
```

ويمكن رفع القائمة الى أس عددى حيث يتم رفع
كل عنصر فى القائمة الى هذا الأس العددى

```
In[8]:=s2^2
Out[8]={4,9,16,25,36}
```

ويمكن رفع أي قيمة عددية الى أس عبارة عن قائمة

In[9]:= 2^s1

Out[9]= $\{ 2^a , 2^b , 2^c , 2^d , 2^e \}$

ويمكن رفع قائمة الى أس عبارة عن قائمة أخرى

In[10]:=s1^s2

حيث يتم رفع كل عنصر فى القائمة الأساس الى أس يساوى العنصر المناظر له فى القائمة الأس

Out[10]= $\{a^2, b^3, c^4, d^5, e^6\}$

ويمكن تطبيق الدوال على القوائم حيث يتم تطبيق الدالة على كل عنصر فى القائمة

إيجاد الجذر التربيعى للقائمة s2 حيث يتم حساب الجذر التربيعى لكل عنصر فى القائمة

In[11]:=Sqrt[s2]//N
Out[11]= {1.41421, 1.73205, 2., 2.23607, 2.44949}

تطبيق دالة الجيب sin على القائمة s2

In[12]:=Sin[s2]//N
Out[12]={0.909297, 0.14112, -0.756802, -0.958924, -0.279415}

وماثيماتيكا قادر على أجراء عمليات الفئات Sets على القوائم من خلال العديد من الأوامر والجدول الآتي يوضح بعض الأوامر المستخدمة .

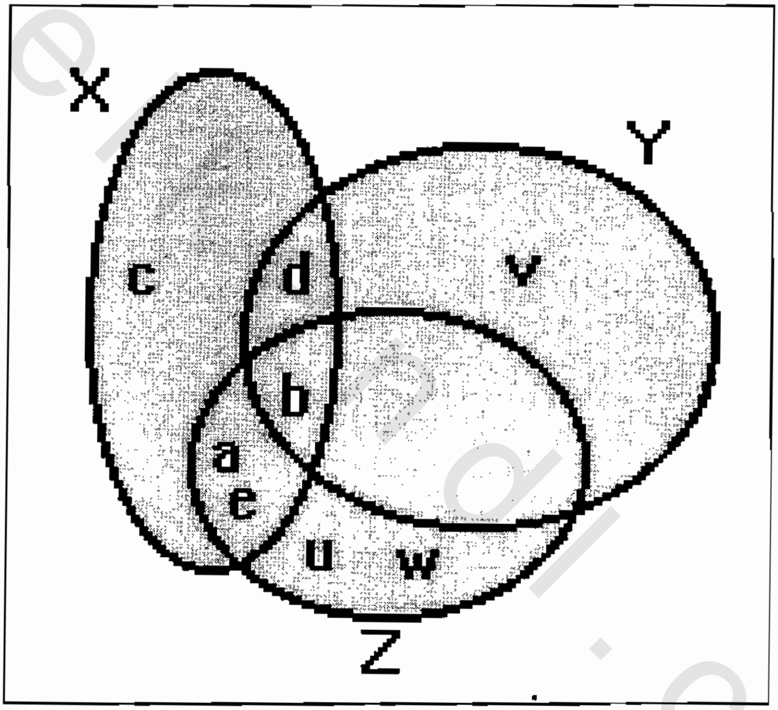
العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
إيجاد عدد العناصر فى القائمة list	Length[list]
ترتيب عناصر القائمة list حيث يتم أولا ترتيب الأعداد تصاعديا ثم ترتيب الحروف أبجديا	Sort[list]
إضافة القوائم ... ,list1 , list2 على بعضها بحيث تحتوى القائمة الناتجة على عدد من العناصر يساوى مجموع أعداد العناصر فى كل قائمة	Join[list1, list2, ...]
اتحاد الفئات $list1 \cup list2 \cup list3 \cup ...$ حيث يتم حذف العناصر المكررة فى القوائم	Union[list1, list2, ...]
تقاطع الفئات $list1 \cap list2 \cap list3 \cap ...$	Intersection[list1, list2, ...]
إيجاد مكملة الفئة eall بالنسبة للفئات e1 , e2 , ... أي إيجاد العناصر فى الفئة eall والغير موجودة فيالفئات e1 , e2 , ...	Complement[eall, e1, e2, ...]
تجزئ القائمة list الى قوائم فرعية متباعدة كل منها يحتوى على n من العناصر	Partition[list, n]

ولتوضيح أوامر الفئات نفرض القوائم X , Y , Z

In[13]:=X={a,b,c,d,e};Y={b,d,v};Z={a,b,e,u,w};

لمعرفة عدد العناصر فى X

In[14]:=Length[X]
Out[14]=5

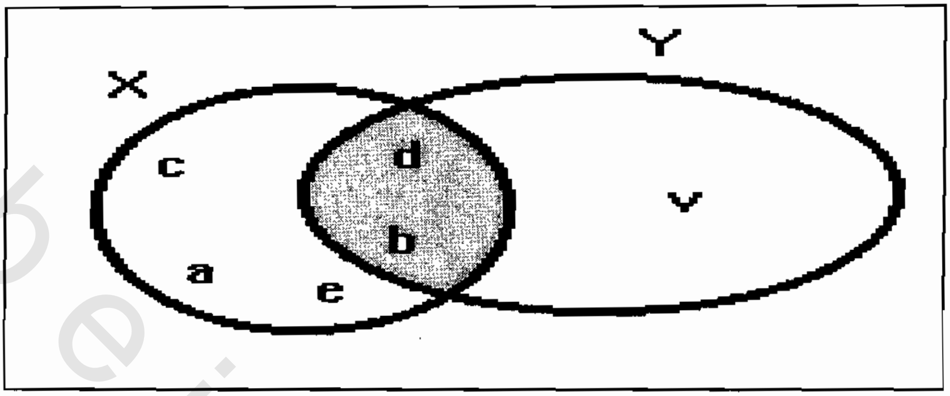


اضافة القوائم Z , Y , X معا بحيث تحتوى القائمة الناتجة على عدد من العناصر يساوى مجموع أعداد العناصر فى كل قائمة

In[15]:=Join[X,Y,Z]
Out[15]={a, b, c, d, e, b, d, v, a, b, e, u, w}

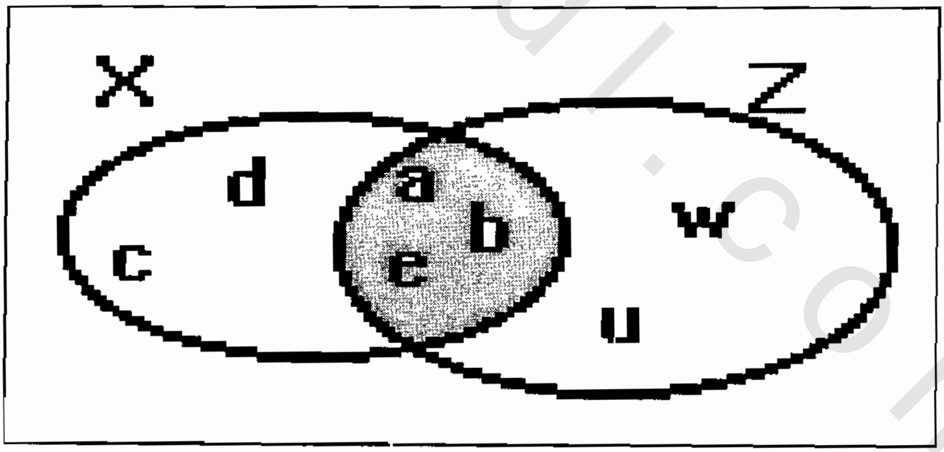
اتحاد الفئات $X \cup Y \cup Z$ حيث يتم حذف العناصر المكررة فى القوائم

In[16]:=Union[X,Y,Z]
Out[16]={a, b, c, d, e, u, v, w}



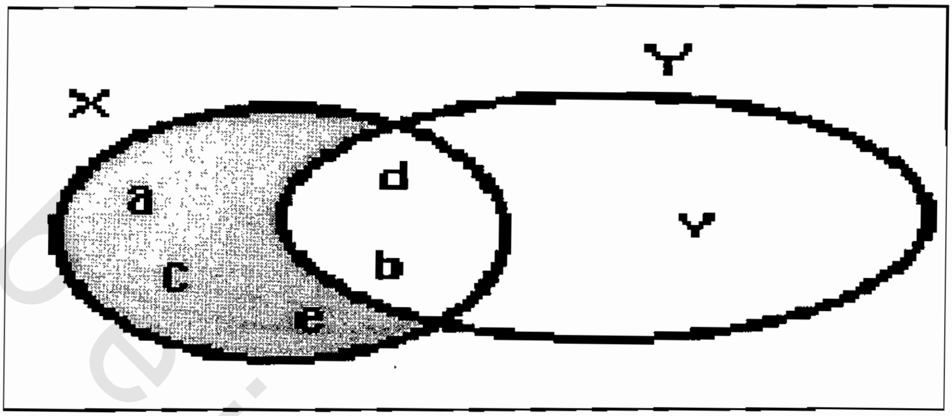
تقاطع الفئتان $X \cap Y$ وتمثل فئة العناصر المشتركة فى الفئتان X , Y

In[17]:=Intersection[X,Y]
Out[17]={b, d}



تقاطع الفئتان $X \cap Z$ وتمثل فئة العناصر المشتركة فى الفئتان X , Z

In[18]:=Intersection[X,Z]
Out[18]={a, b, e}



إيجاد مكملة الفئة X بالنسبة للفئة Y أي إيجاد العناصر فى الفئة X والغيرموجودة فيالفئة Y

In[19]:=Complement[X,Y]
Out[19]={a, c, e}

تجزئ الفئة Z الى قوائم فرعية كل منها يحتوى على عنصرين

In[20]:=Partition[Z,2]
Out[20]={{a, b}, {e, u}}

تجزئ الفئة Y الى قوائم فرعية كل منها يحتوى على عنصر واحد فقط

In[21]:=Partition[Y,1]
Out[21]={{b}, {d}, {v}}

ترتيب عناصر القائمة حيث يتم أولا ترتيب الأعـــداد تصاعديا ثم ترتيب الحروف أبجديا

In[22]:=Sort[{r,4,9,p,e,a,-7}]
Out[22]={-7, 4, 9, a, e, p, r}

ويمكن إضافة عناصر جديدة الى القوائم باستخدام الأوامر الآتية :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
إضافة العنصر **elem** فى بداية القائمة **list**	**Prepend[list, elem]**
إضافة العنصر **elem** فى نهاية القائمة **list**	**Append[list, elem]**
إضافة العنصر **elem** الى القائمة **list** فى الموضع رقم **n**	**Insert[list, elem, n]**

تعريف القائمة rrr

In[23]:=rrr={a,b,c,d,e};

إضافة العنصر x فى بداية القائمة rrr

In[24]:=Prepend[rrr,x]
Out[24]={x, a, b, c, d, e}

إضافة العنصر y إلى نهاية القائمة rrr

In[25]:=Append[rrr,y]]
Out[25]={a, b, c, d, e, y}

إدخال العنصر z فى الموضع رقم 2 من القائمة rrr

In[26]:=Insert[rrr,z,2]
Out[26]={a, z, b, c, d, e}

ويمكن حذف عناصر من القوائم باستخدام الأمر Drop كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Drop[list, n]	حذف n من العناصر من بداية القائمة list
Drop[list, -n]	حذف n من العناصر من نهاية القائمة list
Drop[list,{n}]	حذف العنصر رقم n من القائمة list
Drop[list, {m, n}]	حذف عناصر من القائمة list ابتداء من العنصر رقم m الى العنصر رقم n

حذف ثلاثة عناصر من بداية القائمة rl

```
In[27]:=r1={a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7};
        Drop[r1,3]
Out[27]={a4, a5, a6, a7}
```

حذف عنصران من نهاية القائمة rl

```
In[28]:=Drop[r1,-2]
Out[28]={a1, a2, a3, a4, a5}
```

حذف العنصر الرابع من القائمة rl

```
In[29]:=Drop[r1,{4}]
Out[29]={a1, a2, a3, a5, a6, a7}
```

حذف العناصر من العنصر الثالث الى العنصر السادس من القائمة rl

```
In[30]:=Drop[r1,{3,6}]
Out[30]={a1, a2, a7}
```

ويمكن تحديد عناصر معينة من القائمة وذلك باستخدام الأقواس المزدوجة [[ ]]

لتحديد العنصر الرابع من القائمة r1

```
In[31]:=r1[[4]]
Out[31]=a4
```

ولتحديد العنصران الرابع والسادس من القائمة r1

```
In[32]:=r1[[{4,6}]
Out[32]={a4, a6}
```

وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن توليد قوائم بناء على مواصفات نحددها له وذلك باستخدام الأمر **Table** كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
عمل قائمة تحتوى على نسخ من expr عددها imax	Table[expr, {imax}]
عمل قائمة تحتوى على قيم expr ابتداء من i=1 حتى i=imax	Table[expr, {i, imax}]
عمل قائمة تحتوى على قيم expr ابتداء من i=imin حتى i=imax	Table[expr, {i, imin,imax}]
عمل قائمة تحتوى على قيم expr ابتداء من i=imin حتى i=imax بخطوة step مقدارها di	Table[expr, {i, imin, imax, di}]
عمل جدول من القوائم يحتوى على قيم expr فى اكثر من بعد i , j , ...	Table[expr,{i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]
كتابة القائمة list فى الشكل التقليدى للمصفوفة	TableForm[list]

ولتوضيح عمل الأمر Table نعطى الأمثلة الآتية :

لتوليد قائمة تحتوى على أربعة نسخ من الرمز x

In[33]:=Table[x,{4}]

Out[33]= {x, x, x, x}

لتوليد قائمة تحتوى على خمسة أعداد عشوائية فى الفترة [0,1]

In[34]:=Table[Random[],5]

Out[34]=
{0.803812, 0.152706, 0.0624843, 0.59723, 0.192153}

لتوليد قائمة تحتوى على قيم i^2 من $i=1$ الى $i=7$

In[35]:=Table[i^2,{i,7}]

Out[35]= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49}

لتوليد قائمة تحتوى على المقدار الجبرى x^i+2ix من i=3 الى i = 6

In[36]:=Table[x^i + 2i x,{i,3,6}]

Out[36]=
$\{6x+x^3, 8x+x^4, 10x+x^5, 12x+x^6\}$

لتوليد قائمة عناصرها هى مكعبات الأعداد الزوجية المحصورة بين 2 , 8

In[37]:=Table[i^3 ,{i,2,8,2}]

Out[37]= {8, 64, 216, 512}

لتوليد قائمة m تحتوى على قيم i^2 +2j حيث i=1,2,3 & j=2,3,4,5

In[38]:=m=Table[i^2+2j,{i,3},{j,2,5}]

Out[38]:=
{{5, 7, 9, 11}, {8, 10, 12, 14}, {13, 15, 17, 19}}

ولعرض القائمة m فى صورة جدول

In[39]:= TableForm[m]

Out[39]=

5	7	9	11
8	10	12	14
13	15	17	19

ثانيا : المصفوفات Matrices

المصفوفات والعمليات الخاصة بها تستخدم بشكل كبير فى الرياضيات ويمكن الاستفادة من ماثيماتيكا فى إجراء العمليات الرياضية الخاصة بالمصفوفات والتى كانت تستغرق الكثير من الوقت خاصة إذا كانت المصفوفات من أبعاد كبيرة . والمصفوفات فى ماثيماتيكا عبارة عن قوائم من قوائم lists of lists فمثلا

- القائمة {a,b,c} تمثل المتجه (a,b,c) وهى مصفوفة من صف واحد وثلاثة اعمدة
- والقائمة {{a,b},{c,d}} تمثل المصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ وهى مصفوفة من صفين وعمودين
- والقائمة $\{\{a_1,a_2,a_3\},\{b_1,b_2,b_3\}\}$ تمثل المصفوفة $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ وهى مصفوفة من صفين وثلاثة اعمدة وهكذا ،

وبالتالى فانه يمكن إدخال عناصر المصفوفة بصورة القوائم ، ويحتوى ماثيماتيكا على الأوامر Table , Array والخاصة بتكوين مصفوفات ذات أبعاد مختلفة والأمر Table هو الأكثر استخداما .

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
تكوين مصفوفة من البعد mxn حيث m تمثل عدد الصفوف ، n تمثل عدد الأعمدة ، f تمثل دالة فى i,j لتوليد عناصر المصفوفة	Table[f,{i,m},{j,n}]
تكوين مصفوفة على شكل صف به n من العناصر على الصورة f[i]	Array[f, n]
تكوين مصفوفة من البعد mxn على الصورة {f[i,j]} حيث f[i,j] يمثل العنصر فى الصف i والعمود j	Array[f, {m,n}]
طباعة القائمة list فى الشكل التقليدى للمصفوفة	MatrixForm[list]

وفى ماثيماتيكا يمكن اجراء العمليات الحسابية من جمع وطرح وضرب على المصفوفات ولتوضيح ذلك

تكوين مصفوفة على شكل صف به 6 عناصر

```
In[1]:= Array[h,6]
Out[1]={h[1], h[2], h[3], h[4], h[5], h[6]}
```

تكوين مصفوفة 2x2 عناصرها على صورة aij

```
In[2]:=Array[a,{2,2}]
Out[2]={{a[1, 1], a[1, 2]}, {a[2, 1], a[2, 2]}}
```

تكوين مصفوفة 3x3 عناصرها على الصورة $f_{ij} = 10i + j$ ثم عرض الناتج فى الشكل التقليدى للمصفوفة

```
In[3]:=f=Table[10i+j,{i,3},{j,3}]
        ;MatrixForm[f]

Out[3]=  11  12  13
         21  22  23
         31  32  33
```

تكوين مصفوفة 3x3 عناصرها على صورة m_{ij}

```
In[4]:=g=Array[m,{3,3}]

Out[4]={{m[1, 1], m[1, 2], m[1, 3]},
        {m[2, 1], m[2, 2], m[2, 3]},
        {m[3, 1], m[3, 2], m[3, 3]}}
```

حساب مجموع المصفوفتان g , f ثم عرض الناتـــج فى الشــــكل التقليدى للمصفوفة

In[5]:=MatrixForm[f+g]

Out[5]= 11 + m[1, 1] 12 + m[1, 2] 13 + m[1, 3]
21 + m[2, 1] 22 + m[2, 2] 23 + m[2, 3]
31 + m[3, 1] 32 + m[3, 2] 33 + m[3, 3]

حساب حاصل طرح المصفوفتان g , f ثم عرض الناتج فى الشكل التقليدى للمصفوفة

In[6]:=MatrixForm[f-g]

Out[6]= 11 - m[1, 1] 12 - m[1, 2] 13 - m[1, 3]
21 - m[2, 1] 22 - m[2, 2] 23 - m[2, 3]
31 - m[3, 1] 32 - m[3, 2] 33 - m[3, 3]

حساب حاصل ضرب المصفوفة g فى العدد 5

In[7]:=5g

Out[7]={ { 5 m[1, 1] , 5 m[1, 2] , 5 m[1, 3] },
{ 5 m[2, 1] , 5 m[2, 2] , 5 m[2, 3] },
{ 5 m[3, 1] , 5 m[3, 2] , 5 m[3, 3] } }

حساب خارج قسمة المصفوفة g على 3

In[8]:= g/3
Out[8]=

$$\{\{\frac{m(1,1)}{3},\frac{m(1,2)}{3},\frac{m(1,3)}{3}\},\{\frac{m(2,1)}{3},\frac{m(2,2)}{3},\frac{m(2,3)}{3}\},\{\frac{m(3,1)}{3},\frac{m(3,2)}{3},\frac{m(3,3)}{3}\}\}$$

حساب حاصل ضرب المصفوفتان f , g

In[9]:= f . g

```
Out[9]= {{11 m[1, 1] + 12 m[2, 1] + 13 m[3, 1],
          11 m[1, 2] + 12 m[2, 2] + 13 m[3, 2],
          11 m[1, 3] + 12 m[2, 3] + 13 m[3, 3]},
         {21 m[1, 1] + 22 m[2, 1] + 23 m[3, 1],
          21 m[1, 2] + 22 m[2, 2] + 23 m[3, 2],
          21 m[1, 3] + 22 m[2, 3] + 23 m[3, 3]},
         {31 m[1, 1] + 32 m[2, 1] + 33 m[3, 1],
          31 m[1, 2] + 32 m[2, 2] + 33 m[3, 2],
          31 m[1, 3] + 32 m[2, 3] + 33 m[3, 3]}}
```

تعريف المصفوفة f1 من رتبة 3x2 وتعريف المصفوفة f2 من رتبة 2x4 ثم حساب حاصل ضرب المصفوفتان f1 , f2 وعرض الناتج فى الشكل التقليدى للمصفوفة

```
In[10]:= f1={{2,-1},{1,0},{-3,4}};f2={{1,-2,3,0},{3,4,0,1}};
      MatrixForm[f1.f2]

Out[10]=    -1   -8    6   -1
             1   -2    3    0
             9   22   -9    4
```

وفى ماثيماتيكا يمكن أجراء العمليات الأساسية على المصفوفات كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب مدور المصفوفة m	Transpose[m]
حساب قيمة محدد المصفوفة m	Det[m]
حساب مصفوفة المحددات المصاحبة من رتبة kxk من المصفوفة m	Minors[m, k]
حساب معكوس المصفوفة المربعة m	Inverse[m]
حساب m^k	MatrixPower[m,k]

حساب مدور المصفوفة g ثم عرض الناتج فى الشكل التقليدى للمصفوفة

```
In[11]:=g1=Transpose[g];MatrixForm[g1]
Out[11]=  m[1, 1]   m[2, 1]   m[3, 1]
          m[1, 2]   m[2, 2]   m[3, 2]
          m[1, 3]   m[2, 3]   m[3, 3]
```

تعريف المصفوفة g2 من رتبة 2x2 ثم حساب قيمة المحدد

```
In[12]:=g2={{2,4},{1,7}};Det[g2]
Out[12]=10
```

حســـــــاب معكوس المصفوفة g2

In[13]:=Inverse[g2]

Out[13]= $\{\{\frac{7}{10}, -(\frac{2}{5})\}, \{-(\frac{1}{10}), \frac{1}{5}\}\}$

لحساب $(g2)^3$

In[14]:=MatrixPower[g2,3]

Out[14]={{52, 284}, {71, 407}}

تعريف المصفوفة g3 من رتبة 3x3 ثم حساب مصفوفة المـــحددات المصاحبة من رتبة 2x2 من المصفوفة g3

In[15]:=g3={{1,5,7},{2,4,3},{-1,6,0}}; Minors[g3,2]

Out[15]={{-6, -11, -13}, {11, 7, -42}, {16, 3, -18}}

حساب قيمة المحدد للمصفوفة g3

In[16]:=d=Det[g3] }}

Out[16]=279

حســـــــاب معكوس المصفوفة g3

In[17]:=Inverse[g3]

Out[17]=

$$\{\{-(\frac{18}{79}),\frac{42}{79},-(\frac{13}{79})\},\{-(\frac{3}{79}),\frac{7}{79},\frac{11}{79}\},\{\frac{16}{79},-(\frac{11}{79}),-(\frac{6}{79})\}\}$$

f[i]	لتحديد الصف رقم i في المصفوفة f
f[[i,j]]	لتحديد العنصر f_{ij} بالصف رقم i والعمود رقم j في المصفوفة f
Sum[f[[i,i]],{i,n}]	لحساب مجموع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة المربعة f من رتبة nxn
Transpose[f][[j]]	لتحديد العمود رقم j في المصفوفة f

تحديد الصف الثاني من المصفوفة g

```
In[18]:=g[[2]]
Out[18]={m[2, 1], m[2, 2], m[2, 3]}
```

لتحديد العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الأول في المصفوفة g

```
In[19]:=g[[3,1]]
Out[19]=m[3, 1]
```

لحساب مجموع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة g

```
In[20]:=Sum[g[[i,i]],{i,3}]
Out[20]=m[1, 1] + m[2, 2] + m[3, 3]
```

لتحديد العمود الثالث من المصفوفة g

In[21]:=Transpose[g][[3]]
Out[21]={m[1, 3], m[2, 3], m[3, 3]}

ويستطيع برنامج ماثيماتيكا تكوين مصفوفات من اشكال مختلفة كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
تكوين مصفوفة قطرية بحيث أن عناصر القائمـــة list توضع فى قطر المصفوفة وباقى العناصر أصفار	DiagonalMatrix[list]
تكوين مصفوفة الوحدة من البعد nxn	IdentityMatrix[n]
تكوين مصفوفة صفرية من البعد mxn	Table[0,{m},{n}]
تكوين مصفوفة مثلثية عليا Upper Triangular عناصرها فى أعلى القطر 1 وخلاف ذلك أصفار	Table[If[i<=j,1,0],{i,m},{j,n}]

تكوين مصفوفة قطرية من القائمة {a,b,c}

In[22]:=DiagonalMatrix[{a,b,c}]
Out[22]={{a, 0, 0}, {0, b, 0}, {0, 0, c}}

تكوين مصفوفة الوحدة من البعد 3x3

In[23]:=IdentityMatrix[3]
Out[23]={{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

تكوين مصفوفة صفرية من البعد 3x2

```
In[24]:=Table[0,{i,3},{j,2}]
Out[24]={{0,0},{0,0},{0,0}}
```

تكوين مصفوفة مثلثية عليا من البعد 3x3

```
In[25]:=Table[If[i<=j,1,0],{i,3},{j,3}]
Out[25]={{1, 1, 1}, {0, 1, 1}, {0, 0, 1}}
```

تكوين مصفوفة مثلثية سفلى من البعد 4x4

```
In[26]:=Table[If[i>=j,1,0],{i,4},{j,4}]
Out[26]=
{{1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 0}, {1, 1, 1, 0},{1, 1, 1, 1}}
```

لعرض المصفوفة الناتجة من جملة الإدخـــال In[26] فى الشكل التقليدى للمصفوفة

```
In[27]:=MatrixForm[%26]
Out[27]=  1   0   0   0
          1   1   0   0
          1   1   1   0
          1   1   1   1
```

ثالثا : حل الأنظمة الخطية Solving Linear Systems

نظرية المعادلات الخطية linear equations تلعب دورا هاما فى الجبر الخطى , وفى الحقيقة فإن دراسة مسائل عديدة فى الجبر الخطى يتم تحويلها الى دراسة نظام من المعادلات الخطية . والمعادلة الخطية هى معادلة لها الصورة $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$
حيث x_i تمثل متغيرات , a_i أعداد حقيقية وتمثل معاملات المتغيرات , b عدد حقيقى ويمثل الحد الثابت .

وكثيرا ما نحتاج الى إيجاد حلول أنظمة من المعادلات الخطية , وفى بعض الحالات يكون من الأفضل كتابة المعادلات ثم حلها باستخدام الأمر Solve وفى حالات أخرى يكون من المفيد تحويل نظام المعادلات الخطية الى شكل مصفوفات m . x = b حيث x يمثل متجه المتغيرات , m يمثل مصفوفة المعاملات , b يمثل متجه الثوابت .

حل المعادلتين باستخدام الأمر Solve مباشرة

```
In[1]:=Solve[{x+5y==1,2x+y==3},{x,y}]
```

Out[1]={{x->$\frac{14}{9}$, y->-($\frac{1}{9}$)}}

تعريف المصفوفة mat1 من رتبة 3x3

```
In[2]:=mat1={{2,1,-2},{3,2,2},{5,4,3}}
Out[2]={{2, 1, -2}, {3, 2, 2}, {5, 4, 3}}
```

تكوين نظام من ثلاث معادلات

```
In[3]:=mat1.{x,y,z}=={10,1,4}
Out[3]={2 x + y - 2 z, 3 x + 2 y + 2 z,
        5 x + 4 y + 3 z} ==  {10, 1, 4}
```

حل نظام المعادلات باستخدام الأمر Solve مباشرة

```
In[4]:=Solve[%,{x,y,z}]
Out[4]={{x -> 1, y -> 2, z -> -3}}
```

حل نظام المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة

```
In[5]:= {x,y,z}=Inverse[mat1].{10,1,4}
Out[5]={1, 2, -3}
```

وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حل نظام المعادلات الخطية فى صورة مصفوفة باســـــتخدام الأمــر LinearSolve كالآتي :

لايجاد متجه المتغيرات x الذى يحقق نظام المعادلات الخطية m . x = b	LinearSolve[m, b]

وعند التعامل مع مصفوفات من ابعاد كبيرة يكون من الافضل استخدام الأمر LinearSolve لحل نظام المعادلات .

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} 2x + \ y \ - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

فى صورة مصفوفة باستخدام الأمر LinearSolve يكون كالآتي:

```
In[6]:=LinearSolve[mat1,{10,1,4}]
Out[6]={1, 2, -3}
```

حيث mat1 هى مصفوفة المعاملات $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ فى نظام المعادلات المعرف فى جملة الإدخال In[3] والحل يكون

$$x = 1 \ , \ y = 2 \ , \ z = -3$$

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

فى صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي :

```
In[7]:=mat2={{1,2,-3},{2,-1,4},{4,3,-2}};
       LinearSolve[mat2,{6,2,14}]
Out[7]={2, 2, 0}
```

والحل يكون $x = 2 \ , \ y = 2 \ , \ z = 0$

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

فى صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي :

```
In[8]:=mat3={{1,-3,4,-2},{0,2,5,1},{0,1,-3,0}};
       LinearSolve[mat3,{5,2,4}]
```

Out[8]= $\{\frac{157}{11}, \frac{26}{11}, -(\frac{6}{11}), 0\}$

ونلاحظ أن نظام المعادلات يتكون من ثلاثة معادلات فى أربعة مجاهيل وله عدد لا نهائى من الحلول لأنه تم حساب ثلاث مجاهيل بدلالة المجهول الرابع وناتج الحل يمثل حل نظام المعادلات بعد اخذ قيمة عددية للمجهول الرابع .

وإذا كان m مصفوفة مربعة فإننا نعلم من دراستنا فى الجبر الخطى أن نظام المعادلات

$$m . x = b$$

يكون له حل وحيد لآي متجه ثوابت b إذا كان محدد المصفوفة m لا يساوى صفر بينما إذا كان محدد المصفوفة m يساوى صفر فهذا يعنى انه لا يوجد حل x يحقق نظام المعادلات $m . x = b$ لقيمة خاصة للمتجه b وبمعنى آخر أن المعادلات تعتمد على بعضها dependent وفى هذه الحالة فإن مجموعة المتجهات x التى تحقق $m . x = 0$ تسمى الفراغ الصفرى nullspace للمصفوفة m أو kernel m وماثيماتيكا قادر على حساب متجهات الأساس Basis للفراغ الصفرى لمصفوفة وذلك باستخدام الأمر NullSpace كالآتي :

NullSpace[m]

لإيجاد متجهات أساس basis vectors جميع تركيباتها الخطية linear combinations تحقق المعادلة $m . x = 0$ حيث 0 هو المتجه الصفرى

محدد المصفوفة mat4 يساوى صفر

```
In[9]:=mat4={{1,2,1},{2,4,2},{3,6,3}}
          ;Det[mat4]
Out[9]=0
```

الدالة LinearSolve لا تستطيع إيجاد حل نظام المعادلات

```
In[10]:=LinearSolve[mat4,{a,b,c}]
Out[10]=LinearSolve::nosol:
  Linear equation encountered which has no solution.
  LinearSolve[{{1, 2, 1}, {2, 4, 2}, {3, 6, 3}}, {a, b, c}]
```

أساس الفراغ الصفرى للمصفوفة mat4 يحتوى على متجهان

```
In[11]:=NullSpace[mat4]
Out[11]={{-1, 0, 1}, {-2, 1, 0}}
```

ومن المميزات الهامة للأمر LinearSolve والأمر NullSpace هو التعامل مع مصفوفات من أي رتبة .

رابعا : القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues and Eigenvectors

القيم المميزة لمصفوفة m هى قيم λ التى تحقق المعادلة $m . \lambda x = x$ حيث x متجه غير صفرى وفى هذه الحالة فإن المتجهات x التى تحقق هذه المعادلة تسمى المتجهات المميزة للمصفوفة m والتى تناظر القيمة المميزة λ ويمكن الحصول على القيم المميزة من حل كثيرة الحدود المميزة Characteristic polynomial وتعطى بالمعادلة

$$|m-\lambda J|=0$$

حيث J مصفوفة الوحدة ، وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حساب القيم المميزة والمتجهات المميزة لآي مصفوفة كالآتي :

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
تكوين قائمة تحتوى على جميع القيم المميزة للمصفوفة m	**Eigenvalues[m]**
تكوين قائمة تحتوى على جميع المتجهات المميزة للمصفوفة m	**Eigenvectors[m]**
تكوين قائمة تحتوى على جميع القيم المميزة و المتجهات المميزة للمصفوفة m وتكون بالصورة { eigenvalue,eigenvector }	**Eigensystem[m]**
تكوين قائمة تحتوى علىقيم عددية تقريبية للقيم المميزة للمصفوفة m	**Eigenvalues[N[m]]**

تعريف المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

```
In[1]:=m={{1,2},{3,2}}
Out1]= {{1, 2}, {3, 2}}
```

```
In[2]:=Eigenvalues[m]
Out[2]= Eigenvalues::eival:
  Unable to find all roots of the characteristic polynomial.
  Eigenvalues[{{1, 2}, {3, 2}}]
```

نلاحظ أن ماثيماتيكا لا يتمكن من حساب القيم المميزة للمصفوفة m لان عناصر المصفوفة أعداد صحيحة ويمكن التغلب على هذه المشكلة عن طريق كتابة الأعداد الموجودة فى المصفوفة بالصورة العشرية (فمثلا يكتب .3 بدلا من 3) كما يمكن عمل ذلك باستخدام الدالة N

القيم المميزة للمصفوفة m

```
In[3]:=Eigenvalues[N[m]]
Out[3]= {4., -1.}
```

المتجهات المميزة للمصفوفة m

```
In[4]:=Eigenvectors[N[m]]
Out[4]= {{-0.5547, -0.83205}, {-0.707107, 0.707107}}
```

تكوين قائمة تحتوى على جميع القيم المميزة و المتجهات المميزة للمصفوفة m

```
In[5]:={values,vectors}=Eigensystem[N[m]]
Out[5]= {{4., -1.}, {{-0.5547,-0.83205},
                    {-0.707107, 0.707107}}}
```

للتحقق من أن القيمة المميزة الأولى k_1 والمتجه المميز x يحقق المعادلة $m . x = k_1 \ x$

In[6]:=m.vectors[[1]]= =values[[1]] vectors[[1]]

Out[6]= True

لإيجاد المعادلة المميزة للمصفوفة m

In[7]:=po=Det[m-k IdentityMatrix[Dimensions[m][[1]]]]

Out[7]= $-4 - 3 k + k^2$

لحل المعادلة المميزة والحصول على القيم المميزة للمصفوفة m

In[8]:=Solve[po==0,k]

Out[8]= {{k -> -1}, {k -> 4}}