

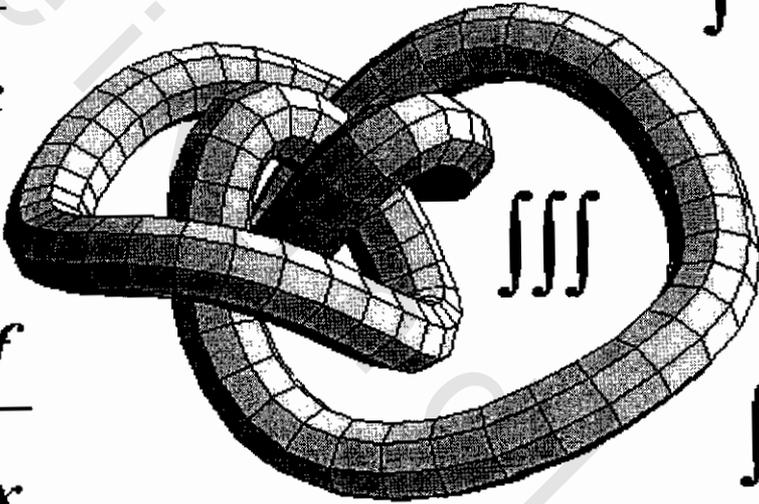
الباب الرابع
ماثيماتيكما والتفاضل والتكامل

df

dx

$\frac{\partial f}{\partial x}$

∂x



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكما
والخاصة بالموضوعات الآتية :

Defining Functions

Limits

Differentiation

Integration

Differential Equations

١. تعريف الدوال

٢. النهايات

٣. التفاضل

٤. التكامل

٥. المعادلات التفاضلية

obeikandi.com

الباب الرابع

ماثيماتيك والتفاضل والتكامل

نعلم أن برنامج ماثيماتيك يستطيع التعامل مع التعبيرات الرمزية **Symbolic expressions** بنفس المقدرة على التعامل مع الأعداد و لذلك يمكن استخدام ماثيماتيك في حساب النهايات **Limits** وحساب التفاضل والتكامل **Calculus** للدوال المختلفة والحصول على النتائج في صورة رمزية سواء كانت هذه الدوال من الدوال الأساسية الموجودة داخل بناء ماثيماتيك **built-in** أو دوال تقوم بتعريفها ، وكذلك يمكن استخدام ماثيماتيك في حل المعادلات التفاضلية .

١ . تعريف الدوال **Defining Functions**

إلى جانب العديد من الدوال الموجودة داخل بناء ماثيماتيك فإنه يمكن للمستخدم إضافة أي دوال جديدة يحتاج إليها وبأسماء يقترحها بنفسه وسوف نستخدم الحروف الصغيرة **lower case - letters** في كتابة أسماء هذه الدوال الجديدة حتى لا يحدث تداخل بين أسماء الدوال الموجودة في بناء ماثيماتيك وبين أسماء الدوال الجديدة التي يقوم المستخدم بتعريفها وفقا لقواعد معينة . فمثلا تعريف الدالة $f(x)=x^2$ في ماثيماتيك يكتب في الصورة $f [x]=x^2$ والعلامة _ الموجودة في الطرف الأيسر بجانب المتغير x تسمى الفراغ الخالي **blank space** وهي هامة في تعريف الدالة حيث النمط **x_ pattern** يرمز الى أي تعبير أو متغير وبذلك فإن تعريف الدالة بهذه الصورة يصف قاعدة تحويل **Transformation Rule** لجميع التعبيرات التي على الصورة $f[anything]$ حيث **anything** يشير الى المتغير x أو أي متغير آخر

وعندما يظهر تعبير على الصورة $f[\text{anything}]$ فإنه يستبدل بالقيمة anything^2 والتى تمثل ناتج تعريف الدالة f .

In[1]:=f[x_]=x^2

تعريف الدالة $f(x)=x^2$

Out[1]=x^2

In[2]:=f[3]

عند حساب قيمة الدالة $f(x)$ عند $x = 3$

Out[2]= 9

فإن الناتج يكون 3^2 ويساوى 9

In[3]:=f[a+1]

لحساب قيمة الدالة $f(x)$ عند $x = a+1$

Out[3]=(a+1)^2

In[4]:=f[x]+f[y]

عند حساب قيمة $f(x) + f(y)$

Out[4]=x^2 + y^2

وفي حالة عدم كتابة العلامة $_$ بالطرف الأيسر في تعريف الدالة فإن $f[x]$ سوف تمثل تعبير خاص وليس قاعدة تحويل فمثلا إذا أدخلنا في ماتيماتيكا التعريف $g[x]=x^3$ فإنه عند ظهور التعبير $g[x]$ يتم استبداله بالقيمة x^3 لكن التعريف لا يعطينا أي معلومات إذا استبدلنا المتغير x بقيمة عددية أو بمتغير آخر فمثلا $g[3]$ ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وبالمثل $g[a]$ ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وهذا حدث نتيجة لعدم استخدام النمط $_$ في تعريف الدالة g .

In[5]:=g[x]=x^3

تعريف $g(x)=x^3$ بدون استخدام النمط $_$

Out[5]= x^3

In[6]:=g[3]

عند حساب قيمة $g(x)$ عند $x = 3$ فإن الناتج

Out[6]= g[3]

يكون $g[3]$ أي أن $g(x)$ لا تمثل قاعدة تحويل

In[7]:=g[a]

لحساب قيمة $g(x)$ عند $x = a$ فإن الناتج

Out[7]= g[a]

يكون $g[a]$ أي أن $g(x)$ لا تمثل قاعدة تحويل

In[8]:=g[x]+g[y]

عند حساب قيمة $g(x) + g(y)$ نلاحظ أن الناتج

Out[8]= $x^3 + g[y]$

$x^3 + g[y]$ لأن $g(x)=x^3$ بينما $g(y)$ ليست معلومة

ونتيجة لذلك يجب مراعاة الآتي عند تعريف الدوال في ماتيماتكا :

تمثل تعريف لتعبير خاص وليس قاعدة تحويل	$f[x] = \text{value}$
تمثل تعريف دالة وهي قاعدة تحويل لاي متغير x	$f[x_] = \text{value}$

وفي ماتيماتكا يمكن الاستعلام عن تعريف الدوال أو حذف التعريف من الذاكرة كالاتي :

?f	f للاستعلام عن تعريف الدالة
Clear[f]	لحذف تعريف الدالة f من الذاكرة

In[9]:=?f

للاستعلام عن تعريف الدالة f التي سبق

Out[9]= Global`f

إدخالها في جملة الإدخال In[1]

$f[x_] = x^2$

In[10]:=Clear[f]

لحذف تعريف الدالة f من الذاكرة

In[11]:=?f

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة f

Out[11]= Global`f

نلاحظ أن التعريف قد حذف من الذاكرة

وفي برنامج ماتيماتيكا يمكن تعريف دوال في اكثر من متغير ويتم ذلك بتحديد أسم للدالة واستخدام النمط _ لكل متغير في الدالة .

تعريف الدالة r1 في متغيرين

In[12]:=r1[x_,y_]=x^2+x y+y^2

Out[12]=x² + x y + y²

حساب قيمة الدالة r1(x,y)

In[13]:=r1[2,3]

Out[13]=19 عند x=2 , y=3

تعريف الدالة r2 في أربعة متغيرات

In[14]:=r2[x_,y_,z_,t_]=(x-z)^2+(y-t)^2

Out[14]=(x-z)² + (y-t)²

وفي برنامج ماتيماتيكا عند تعريف دالة كجمللة إحلال hs = rhs فإنه يوجد مؤثرين للإحلال assignment operators

= المؤثر الأول هو علامة التساوى

:= والمؤثر الثانى هو علامة

والفرق الأساسى بين المؤثرين يكون وفقا لطريقة حساب الطرف الأيمن rhs لجمللة الإحلال كالتالى :

المؤثر = يستخدم فى كتابة جملة الإحلال بالصورة lhs = rhs إذا كان الطرف

الأيمن rhs يتم حسابه مباشرة ليمثل القيمة النهائية للطرف الأيسر lhs

المؤثر := يستخدم فى كتابة جملة الإحلال بالصورة lhs := rhs إذا كان الطرف

الأيمن rhs يتم حسابه كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الطرف الأيسر

lhs بمعنى إذا كان الطرف الأيمن rhs يمثل أمر أو برنامج يتم تنفيذه عند

السؤال عن الطرف الأيسر lhs

والأمثلة الآتية توضح الفرق بين المؤثر = والمؤثر :=

عند استخدام المؤثر = في تعريف الدالة $r3(x)$ التي تقوم بحساب مفكوك $(1+x)^2$ فإن المفكوك بالطرف الأيمن يتم حسابه مباشرة

```
In[15]:=r3[x_]=Expand[(1+x)^2]
Out[15]= 1+2x+x^2
```

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة $r3(x)$ نلاحظ أن التعريف يحتوى على الطرف الأيمن بعد تنفيذه في صورة مفكوك

```
In[16]:=?r3
Out[16]=Global`r3
r3[x_] = 1 + 2*x + x^2
```

ولحساب قيمة الدالة $r3(x)$ عند $x = a + b$ يتم التعويض عن $a + b$ في المفكوك الموجود بالفعل وهو $1 + 2x + x^2$

```
In[17]:=r3[a+b]
Out[17]=1 + 2 (a + b) + (a + b)^2
```

عند استخدام المؤثر := في تعريف الدالة $r4(x)$ التي تقوم بحساب مفكوك $(1+x)^2$ فإن المفكوك بالطرف الأيمن يعاد حسابه في كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الدالة $r4(x)$

```
In[18]:=r4[x_]:=Expand[(1+x)^2]
```

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة $r4(x)$ نلاحظ أن التعريف هو نفسه الطرف الأيمن ويحتوى على أمر المفكوك Expand جاهز للتنفيذ

```
In[19]=?r4
Out[19]=Global`r4
r4[x_] := Expand[(1 + x)^2]
```

ولحساب قيمة الدالة $r4(x)$ عند $x = a + b$ يتم التعويض عن $a + b$ في أمر المفكوك $Expand[(1+a+b)^2]$ ثم يتم تنفيذه

```
In[20]:=r4[a+b]
Out[20]=1 + 2 a + a^2 + 2 b + 2 a b + b^2
```

وكمثال آخر نفرض أننا نريد تصميم دالة لحساب
مضروب أي عدد صحيح Factorial function من القاعدة

$$n! = n (n-1) (n-2) \dots 3 \times 2 \times 1$$

تعريف دالة المضروب تحت اسم fa
In[21]:=fa[1]=1;fa[n_]:=n fa[n-1]

نلاحظ انه في جملة الإحلال الأولى fa[1]=1 استخدمنا المؤثر = لأن الطرف الأيمن قيمته
محسوبة بينما في جملة الإحلال الثانية fa[n]:=n fa[n-1] استخدمنا المؤثر := لأن
الطرف الأيمن يتم حسابه كل مرة تنفيذ والقيمة المحسوبة بالطرف الأيسر lhs يتم استخدامها
في حساب الطرف الأيمن rhs في كل مرة لذلك فإن المؤثر := ضروري في تعريف هذه
الدالة .

In[22]:=fa[4] حساب 4!
Out[22]=24

In[23]:=fa[6] حساب 6!
Out[23]=720

In[24]:=?fa للاستعلام عن الدالة fa
Out[24]=Global`fa
fa[1] = 1
fa[n_] := n*fa[n - 1]

In[25]:=Clear[fa]

لحذف تعريف الدالة fa من ذاكرة ماتيماتكا

In[26]:=?fa

للاستعلام عن الدالة fa بعد حذفها ونلاحظ

Out[26]=Global`fa

اختفاء التعريف

وماتيماتكا عند تنفيذه هذه الدالة لحساب fa[6] يستخدم التعريف المعطى للدالة بالصورة fa[6]=6 fa[5] وبعد ذلك يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحساب fa[5] من العلاقة fa[5]=5 fa[4] وبالمثل يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحساب fa[4] وهكذا حتى يصل الى fa[1] وقيمه معطاة ونلاحظ أن ماتيماتكا عند حسابه لقيمة fa[6] لم يستخدم قيمة fa[4] المحسوبة من قبل ، ويمكن جعل الدوال المعرفة تذكر القيم التى يتم حسابها من قبل وذلك بتعريف الدوال بالصورة الآتية :

تعريف دالة f يث تحفظ القيم التى يتم إيجادها $f[x_]:=f[x] = rhs$

In[27]:=fa[1]=1;fa[n_]:=fa[n]=n fa[n-1]

تعريف دالة المضروب تحت اسم fa

بميت تحفظ القيم التى يتم إيجادها

In[28]:=?fa

للاستعلام عن الدالة fa

Out[28]=Global`fa

fa[1] = 1

fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]

In[29]:=fa[4]

لحساب 4! بواسطة fa[4]

Out[29]=24

In[30]:=?fa

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم

Out[30]=Global`fa

حفظ جميع قيم الدالة fa التي تم إيجادها

fa[1] = 1

fa[2] = 2

fa[3] = 6

fa[4] = 24

fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]

In[31]:=fa[6]

لحساب 6! بواسطة fa[6]

Out[31]=720

In[32]:=?fa

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم

Out[32]=Global`fa

حفظ جميع قيم الدالة fa التي تم إيجادها

fa[1] = 1

fa[2] = 2

fa[3] = 6

fa[4] = 24

fa[5] = 120

fa[6] = 720

fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]

٢ . النهايات Limits

فى بعض الحسابات الرياضية نحتاج الى تعويض أو إحلال لمتغير داخل التعبير الرياضى عندما يأخذ المتغير قيمة معينة فمثلا عند وضع جملة الإحلال $x = 3$ فهذا يعنى أن يقوم ماتيماتيكا باستبدال المتغير x بالقيمة 3 فى أي مكان بالبرنامج يظهر فيه المتغير x إلا إذا تم تغير قيمة x أو حذفها ، ولكن فى بعض الأحيان يكون المطلوب هو استبدال المتغير x بالقيمة 3 فى تعبير خاص **particular expression** ، ويمكن عمل ذلك فى ماتيماتيكا باستخدام المؤثر `!` أو المؤثر `//`. كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	الوظيفة التى يقوم بها الأمر
<code>expr /. x->value</code>	استبدال المتغير x بالقيمة <code>value</code> فى التعبير <code>expr</code> ويتم تطبيق القاعدة <code>x->value</code> مرة واحدة فقط
<code>expr /. {x->xval,y->yval}</code>	استبدال المتغير x بالقيمة <code>xval</code> والمتغير y بالقيمة <code>yval</code> فى التعبير <code>expr</code> ويتم تطبيق القاعدة <code>x->xval , y->yval</code> مرة واحدة فقط
<code>expr /. rules</code>	تطبيق القاعدة <code>rules</code> فى التعبير <code>expr</code> مرة واحدة فقط حيث القاعدة <code>rules</code> تكون بالصورة <code>lhs->rhs</code>
<code>expr//.rules</code>	تطبيق القاعدة <code>rules</code> على كل أجزاء التعبير <code>expr</code> بصورة متكررة حتى نصل الى الناتج النهائى
<code>Replace[expr,rules]</code>	تطبيق القاعدة <code>rules</code> كوحدة متكاملة على التعبير <code>expr</code> دون تطبيقها على الأجزاء الفرعية من <code>expr</code>

In[1]:=1+x^2/.x->3

استبدال المتغير x بالقيمة 3 في التعبير الرياضي

Out[1]=10

$$x^2 + 1$$

In[2]:=x

عند الاستعلام عن قيمة x نلاحظ أن استخدام

Out[2]=x

المؤثر /. في استبدال المتغير x بالقيمة 3 لا

يؤثر في قيمة المتغير x داخل البرنامج

In[3]:=x^2+2x y+y^2/.{x->1,y->2}

استبدال المتغير x بالقيمة 1 والمتغير

Out[3]=9

y بالقيمة 2 في التعبير الرياضي

$$x^2 + 2xy + y^2$$

In[4]:=t=x^2+2x+1;t/.x->5

إحلال قيمة $x^2 + 2x + 1$ في المتغير

Out[4]=36

t ثم حساب قيمة t عندما $x \rightarrow 5$

In[5]:=f[5]/.f[x_]->x

تطبيق القاعدة lhs->rhs لحساب f[5]

f[x-1]

Out[5]=5 f[4]

ونلاحظ أن المؤثر /. يقوم بتطبيق القاعدة

مرة واحدة فقط

In[6]:=f[5]//.{f[1]->1,f[x_]->x f[x-1]}

عند استخدام المؤثر //. يتم تطبيق القاعدة

Out[6]=120

لحساب f[5] بصورة متكررة حتى نصل

الى الناتج النهائي

In[7]:=f[x]^2+2f[x] /. f[x]->a

عند استخدام المؤثر /. يتم تطبيق القاعدة

Out[7]=2a + a²

على كل الأجزاء في التعبير الرياضي

عند حساب قيمة $\frac{\sin(x)}{x}$ لقيم x التي تقترب من الصفر نلاحظ ما يأتي :

In[8]:=Sin[x]/x /.x->0.6 Out[8]=0.941071	In[12]:=Sin[x]/x /.x->0.2 Out[12]=0.993347
In[9]:=Sin[x]/x /.x->0.5 Out[9]=0.958851	In[13]:=Sin[x]/x /.x->0.1 Out[13]=0.998334
In[10]:=Sin[x]/x /.x->0.4 Out[10]=0.973546	In[14]:=Sin[x]/x /.x->0.01 Out[14]=0.999983
In[11]:=Sin[x]/x /.x->0.3 Out[11]=0.985067	In[15]:=Sin[x]/x /.x->0.001 Out[15]=1.

ولحساب قيمة $\frac{\sin(x)}{x}$ عندما $x = 0$ فإن الناتج يكون كمية غير معينة

In[16]:=Sin[x]/x /.x->0

Out[16]=Power::infy: Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered.

Infinity::indet:

Indeterminate expression

وفي برنامج ماثياتيكا يمكن حساب النهايات $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ وذلك باستخدام

الدالة Limit كالآتي :

Limit[expr, x->x₀]

حساب نهاية الدالة expr عندما

تقترب x من x₀

في الجدول الآتي نضع أمثلة متعددة على النهايات لبعض الدوال

النهاية بلغة ماثيماتيكا	النهاية بلغة الرياضيات
In[17]:=Limit[x^2+3x-7,x->2] Out[17]=3	$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x - 7$
In[18]:=Limit[(x^2-1)/(x-1),x->1] Out[18]=2	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
In[19]:=Limit[(x^2-9)/(x^2-4x+3),x->3] Out[19]=3	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$
In[20]:=Limit[(x^2+x-6)/(x^2-4),x->2] Out[20]= $-\frac{5}{4}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$
In[21]:=Limit[(Sqrt[x]-2)/(x-4),x->4] Out[21]= $\frac{1}{4}$	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
In[22]:=Limit[Sqrt[x^2-4]/(x-2),x->2] Out[22]=Infinity	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$
In[23]:=Limit[x^2(x+h)/(2x+h),h->0] Out[23]= $\frac{x^2}{2}$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 (x + h)}{2x + h}$
In[24]:=Limit[x/Sqrt[x-1],x->1] Out[24]= Infinity	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x - 1}}$

النهاية بلغة ماثيماتيك	النهاية بلغة الرياضيات
In[25]:=Limit[Sin[x]/x,x->0] Out[25]=1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$
In[26]:=Limit[(Cos[x]-1)/x^2,x->0] Out[26]= $-\frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$
In[27]:=Limit[x^2/(Sec[x]-1),x->0] Out[27]=2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sec(x) - 1}$
In[28]:=Limit[Sin[x-Pi/4]/(x-Pi/4)^2, x->Pi/4] Out[28]=Infinity	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}$
In[29]:=Limit[Tan[3x]/(2x^2+5x),x->0] Out[29]= $\frac{3}{5}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{2x^2 + 5x}$
In[30]:=Limit[(2x^2-3x) / (3x^2+2),x->Infinity] Out[30]= $\frac{2}{3}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 + 2}$
In[31]:=Limit[x^2 Sin[1/x^2],x->Infinity] Out[31]=1	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
In[32]:=Limit[(1+1/n)^n,n->Infinity] Out[32]=E	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

3 . التفاضل Differentiation

يستطيع برنامج ماتيماتيكا إجراء عمليات التفاضل للدوال الرياضية المختلفة في صورتها الرمزية في متغير واحد أو متغيرات متعددة ويتم الحصول على النتائج بصورة رمزية سواء كان التفاضل كلي Total أو تفاضل جزئي Partial ويتم ذلك في ماتيماتيكا باستخدام الأمر D كالتالي :

الصيغة العامة للأمر في ماتيماتيكا	الوظيفة التي يقوم بها الأمر
$D[f,x]$	حساب المشتقة الأولى $\frac{df}{dx}$ إذا كانت الدالة f في متغير واحد أو حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ إذا كانت الدالة f في أكثر من متغير
$D[f,\{x,n\}]$	حساب المشتقة $\frac{d^n f}{dx^n}$ إذا كانت الدالة f في متغير واحد أو حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ إذا كانت الدالة f في أكثر من متغير
$D[f,x_1,x_2,\dots]$	حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots f$
$D[f,x,NonConstants-\{v_1,v_2,\dots\}]$	حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ مع اعتبار أن المتغيرات v_1,v_2,\dots دوال تعتمد على المتغير x

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتفاضل بعض الدوال

التفاضل بلغة ماثيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[1]:=D[x^n,x] Out[1]= n x ⁿ⁻¹	$\frac{d}{dx} x^n$
In[2]:=D[x^5+4x^3-2x+6,x] Out[2]= -2 + 12 x ² + 5 x ⁴	$\frac{d}{dx} (x^5 + 4x^3 - 2x + 6)$
In[3]:=D[x^5+4x^3-2x+6,{x,2}] Out[3]=24 x + 20 x ³	$\frac{d^2}{dx^2} (x^5 + 4x^3 - 2x + 6)$
In[4]:=D[x^n,{x,3}] Out[4]=(-2 + n) (-1 + n) n x ⁿ⁻³	$\frac{d^3}{dx^3} x^n$
In[5]:=D[Sin[x],x] Out[5]=Cos[x]	$\frac{d}{dx} \sin(x)$
In[6]:=D[Tan[x],x] Out[6]=Sec ² [x]	$\frac{d}{dx} \tan(x)$
In[7]:=D[x^3 Cos[x],x] Out[7]=3 x ² Cos[x] - x ³ Sin[x]	$\frac{d}{dx} x^3 \cos(x)$
In[8]:=D[4x^2 Sec[x^3],x] Out[8]=8x ² Sec[x ³] + 12 x ⁴ Sec[x ³] Tan[x ³]	$\frac{d}{dx} 4x^2 \sec(x^3)$

التفاضل بلغة ماتيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[9]:=D[ArcSin[x],x] Out[9]= $\frac{1}{\text{Sqrt}[1-x^2]}$	$\frac{d}{dx} \sin^{-1}(x)$
In[10]:=D[ArcTan[x^2],x] Out[10]= $\frac{2x}{1+x^4}$	$\frac{d}{dx} \tan^{-1}(x^2)$
In[11]:=D[Sin[t]/t,t] Out[11]= $\frac{\text{Cos}[t]}{t} - \frac{\text{Sin}[t]}{t^2}$	$\frac{d}{dx} \frac{\sin(t)}{t}$
In[12]:=D[Log[x]^2,x] Out[12]= $\frac{2\text{Log}[x]}{x}$	$\frac{d}{dx} (\text{Log}(x))^2$
In[13]:=D[f[x],x] Out[13]=f'[x]	$\frac{d}{dx} f(x)$
In[14]:=D[f[x^2],x] Out[14]=2 x f'[x]	$\frac{d}{dx} f(x^2)$
In[15]:=D[x^2+y[x]^3,x] Out[15]= 2x + 3 (y[x])^2 y'[x]	$\frac{d}{dx} \left(x^2 + (y(x))^3 \right)$
In[16]:=D[x^2+y^3,x,NonConstants->{y}] Out[16]= 2x + 3 y^2 D[y, x, NonConstants -> {y}]	$\frac{d}{dx} \left(x^2 + y^3 \right)$ مع اعتبار أن y دالة في x

التفاضل بلغة ماتيماتكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[17]:=D[x^2 y+Cos[x y],x] Out[17]=2 x y - y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 y + \cos(xy))$
In[18]:=D[x^2 y+Cos[x y],y] Out[18]=x^2 - x Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 y + \cos(xy))$
In[19]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x] Out[19]=2y - y^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 y + \cos(xy))$
In[20]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y] Out[20]= - x^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^2 y + \cos(xy))$
In[21]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y] Out[21]=2x - x y Cos[x y] - Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y + \cos(xy))$
In[22]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x,x] Out[22]= y^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial x^3} (x^2 y + \cos(xy))$
In[23]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y,y] Out[23]= x^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial y^3} (x^2 y + \cos(xy))$
In[24]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,x] Out[24]= 2 -2y Cos[x y] + x y^2 Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y + \cos(xy))$
In[25]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,y] Out[25]= - 2 x Cos[x y] + x^2 y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^2 y + \cos(xy))$

وعند إجراء التفاضل على دالة f في عدة متغيرات وبحيث يتم إدخالها بالرمز f نلاحظ أن ناتج التنفيذ يكون كالاتي :

In[26]:=D[f[x,y],x] Out[26]= $f^{(1,0)} [x, y]$	$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ تمثل $f^{(1,0)} [x, y]$
In[27]:=D[f[x,y],y] Out[27]= $f^{(0,1)} [x, y]$	$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ تمثل $f^{(0,1)} [x, y]$
In[28]:=D[f[x,y],x,x] Out[28]= $f^{(2,0)} [x, y]$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$ تمثل $f^{(2,0)} [x, y]$
In[29]:=D[f[x,y],x,y] Out[29]= $f^{(1,1)} [x, y]$	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ تمثل $f^{(1,1)} [x, y]$
In[30]:=D[f[x,y],x,y,y] Out[30]= $f^{(1,2)} [x, y]$	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$ تمثل $f^{(1,2)} [x, y]$
In[31]:=D[f[x,y,z],x] Out[31]= $f^{(1,0,0)} [x, y, z]$	$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$ تمثل $f^{(1,0,0)} [x, y, z]$
In[32]:=D[f[x,y,z],x,x,y,z, z,z] Out[32]= $f^{(2,1,3)} [x, y, z]$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^3}{\partial z^3} f(x, y, z)$ تمثل $f^{(2,1,3)} [x, y, z]$

نعلم أن إذا كانت $f = f(x,y)$ فإن التفاضلة الكلية (Total Differential) يرمز لها df وتعرف بالصورة

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

والأمر D كما رأينا في المثال $D[x^n, x]$ يقوم بحساب المشتقة الجزئية للدالة x^n بالنسبة الى x مع اعتبار أن n ثابت لا يعتمد على x وفي ماتيماتكا يوجد أمر آخر يرمز له Dt ويقوم بحساب المشتقة الكلية Total Derivative وعند تنفيذه فإنه يأخذ جميع المتغيرات في الاعتبار .

الصيغة العامة للأمر في ماتيماتكا	الوظيفة التي يقوم بها الأمر
$Dt[f]$	حساب التفاضلة الكلية df
$Dt[f,x]$	حساب المشتقة الكلية $\frac{df}{dx}$
$Dt[f,\{x,n\}]$	حساب المشتقة الكلية من رتبة n أي حساب $\frac{d^n f}{d x^n}$
$Dt[f,x,Constants-\>\{v1,v2,\dots\}]$	حساب المشتقة الكلية $\frac{df}{dx}$ مع اعتبار أن المتغيرات $v1,v2,\dots$ ثوابت لا تعتمد على المتغير x أي أن $dv1=0, dv2=0, \dots$

فى الجدول الآتى نضع أمثلة لتفاضلات بعض الدوال

التفاضلة بلغة ماتيماتيكا	التفاضلة بلغة الرياضيات
In[33]:=Dt[f[x]] Out[33]=Dt[x] f'[x]	$df = f'(x) dx$
In[34]:= Dt[x^n] Out[34]= $n x^{n-1} Dt[x] + x^n Dt[n] Log[x]$	$dx^n = nx^{n-1} dx + x^n Log[x] dn$
In[35]:=Dt[x^n, Constants->{n}] Out[35]= $n x^{n-1} Dt[x, Constants->{n}]$	$dx^n = nx^{n-1} dx$ حيث n ثابت
In[36]:=Dt[f[x,y]] Out[36]= Dt[y] f ^(0,1) [x,y] + Dt[x] f ^(1,0) [x,y]	$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$
In[37]:= Dt[x^2 Sin[y]+y^2,y] Out[37]= $2y+x^2 Cos[y]+2x Dt[x,y] Sin[y]$	$\frac{d}{dy} (x^2 \sin(y) + y^2) = 2y + x^2 \cos(y) +$ $2x \sin(y) \frac{dx}{dy}$
In[38]:=Dt[x^2+y^2+z^2,x] Out[38]= $2 x + 2 y Dt[y, x] + 2 z Dt[z, x]$	$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2 + z^2) = 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx}$
In[39]:= Dt[x^2+y^2+z^2,x, Constants->{z}] Out[39]= $2 x + 2 y Dt[y, x, Constants->{z}]$	$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2 + z^2) = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$ حيث z ثابت

٤ . التكامل Integration

برنامج ماتيماتيكا قادر على حساب أنواع عديدة من التكاملات لتعبيرات رياضية تحسب على كثيرات الحدود والدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية ... الخ ، ونتج التكامل يكون في صورة رمزية ويمكن حساب التكاملات المتعددة (الثنائية والثلاثية ... الخ) وكذلك التكاملات المحدودة سواء كان حدود التكامل أعداد ثابتة أو دوال ويتم ذلك باستخدام الأمر **Integrate** كالتالي:

الصيغة العامة للأمر في ماتيماتيكا	الوظيفة التي يقوم بها الأمر
Integrate[f,x]	حساب التكامل $\int f dx$
Integrate[f,{x,x0,x1}]	حساب التكامل المحدود $\int_{x0}^{x1} f dx$
Integrate[f,{x,x0,x1},{y, yo,y1}]	حساب التكامل الثنائي $\int_{x0}^{x1} \int_{yo}^{y1} f dy dx$
Integrate[f,{x,x0,x1},{y, yo,y1},...]	حساب التكامل $\int_{x0}^{x1} \int_{yo}^{y1} \dots f \dots dy dx$

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتكامل بعض الدوال

التكامل بلغة ماتيماتيكا	التكامل بلغة الرياضيات
In[1]:=Integrate[x^n,x] Out[1]= $\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int x^n dx$
In[2]:=Integrate[x^n,n] Out[2]= $\frac{x^n}{\text{Log}[x]}$	$\int x^n dn$
In[3]:=Integrate[1/x,x] Out[3]=Log[x]	$\int \frac{1}{x} dx$
In[4]:=Integrate[Log[x],x] Out[4]= -x + x Log[x]	$\int \text{Log}(x) dx$
In[5]:=Integrate[x^3 Exp[x],x] Out[5]= E^x (-6 + 6 x - 3 x^2 + x^3)	$\int x^3 e^x dx$
In[6]:=Integrate[1/(x^2+1),x] Out[6]=ArcTan[x]	$\int \frac{1}{x^2+1} dx$
In[7]:=Integrate[1/Sqrt[1-x^2],x] Out[7]=ArcSin[x]	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

التكامل بلغة ماتيماتيكا	التكامل بلغة الرياضيات
In[8]:=Integrate[1/Sqrt[9-x^2],x] Out[8]=ArcSin[$\frac{x}{3}$]	$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$
In[9]:=Integrate[1/Sqrt[1+x^2],x] Out[9]=ArcSinh[x]	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$
In[10]:=Integrate[x^2 Sin[x],x] Out[10]=2 Cos[x] - x^2 Cos[x] + 2 x Sin[x]	$\int x^2 \sin(x) dx$
In[11]:=Integrate[y x^2,x] Out[11]= $\frac{y x^3}{3}$	$\int yx^2 dx$
In[12]:=Integrate[x^2,{x,1,4}] Out[12]= 21	$\int_1^4 x^2 dx$
In[13]:=Integrate[x^2+y^2,{x,0,a},{y,0,3x}] Out[13]= 3 a^4	$\int_0^a \int_0^{3x} (x^2 + y^2) dy dx$
In[14]:=Integrate[xy+z,{z,0,1},{y,1,5z}, {x,y,3y+5z}] Out[14]= 286	$\int_0^1 \int_1^{5z} \int_y^{3y+5z} (x^2 + y^2) dy dx$
In[15]:=Integrate[xy+zw^2,{w,0,2}, {z,1,w},{y,0,z+w},{x,w,y^2+2w}] Out[15]= $\frac{37916}{315}$	$\int_0^2 \int_1^w \int_0^{z+w} \int_w^{y^2+2w} (xy+zw^2) dx dy dz dw$

5. المعادلات التفاضلية Differential Equations

المعادلة التفاضلية هي معادلة تربط بين المتغيرات المستقلة والداالة التابعة ومشتقات هذه الداالة ، وإذا كانت المعادلة التفاضلية تحتوي على متغير مستقل واحد فإنها تسمى معادلة تفاضلية عادية (Ordinary Differential Equation (ODE) وإذا كانت المعادلة تحتوي على متغيرين مستقلين أو اكثر فإنها تسمى معادلة تفاضلية جزئية (Partial Differential Equation PDE) .

ورتبة Order المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة موجودة بالمعادلة بينما درجة Degree المعادلة التفاضلية هي الأس المرفوع إليه المشتقة ذات اكبر رتبة . وفي الجدول الآتي نضع بعض الأمثلة للمعادلات التفاضلية .

الدرجة Degree	الرتبة Order	معادلات تفاضلية عادية (ODE)
الدرجة الأولى	الرتبة الأولى	$\frac{dy}{dx} = x + 5$
الدرجة الأولى	الرتبة الثانية	$\frac{d^2 y}{d x^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = x$
الدرجة الثانية	الرتبة الأولى	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x$
الدرجة الثانية	الرتبة الثانية	$\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = x^2$
الدرجة الأولى	الرتبة الثالثة	$y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos(x)$

الدرجة Degree	الرتبة Order	معادلات تفاضلية جزئية (PDE)
الدرجة الأولى	الرتبة الأولى	$\frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = f$
الدرجة الأولى	الرتبة الثانية	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2$

يقال للمعادلة التفاضلية (عادية ODE أو جزئية PDE) أنها معادلة تفاضلية خطية **Linear Differential Equation** إذا كان كل متغير تابع وكذلك المشتقات الموجودة بالمعادلة جميعها من الدرجة الأولى وأيضا المعادلة التفاضلية لا تحتوى على حواصل ضرب لمتغيرات تابعة أو مشتقات أو خليط من حاصل ضربهما ، وإذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فإنها تسمى معادلة تفاضلية غير خطية ، والمعادلة التفاضلية تسمى مسألة القيمة الابتدائية **Initial Value Problem** إذا كان الحل يحقق شروط ابتدائية معطاة

ويستطيع برنامج ماتيماتيكا إيجاد حل أنواع متعددة من المعادلات التفاضلية وذلك بواسطة الأمر **Dsolve** كالاتي :

حل المعادلة التفاضلية eqn وإيجاد المتغير التابع $y[x]$ بدلالة المتغير المستقل x

DSolve[eqn, y[x], x]

المعادلة التفاضلية بلغة ماتيماتيكا	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[1]:=DSolve[y'[x]==y[x],y[x],x] Out[1]={{y[x] -> E ^x C[1]}}	$\frac{dy}{dx} = y$
In[2]:=DSolve[y'[x]==Cos[x],y[x],x] Out[2]={{y[x] -> C[1] + Sin[x]}}	$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$
In[3]:=DSolve[y'[x]+(1/x)y[x]==1,y[x],x] Out[3]={{y[x] -> $\frac{x}{2} + \frac{C[1]}{x}$ }}	$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 1$
In[4]:=DSolve[{y'''[x]+y[x]==x^2 - x+2}, y[x],x] Out[4]= {{y[x] -> -x + x ² + C[2] Cos[x] - C[1] Sin[x]}}	$y'' + y = x^2 - x + 2$
In[5]:= DSolve[x^2y''[x]-2x y'[x]+2y[x] == x^4 Exp[x],y[x],x] Out[5]= {{y[x] -> x (-2 E ^x + E ^x x + C[1] + x C[2])}}	$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x^4 e^x$

$\frac{d^3 y}{d x^3} + 3 \frac{d^2 y}{d x^2} - 4y = x e^{-2x}$	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
<p>In[6]:=DSolve[y'''[x]+3y''[x]-4y[x]==x Exp[-2x],y[x],x] Out[6]=</p> $\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -\frac{1}{18} (x^2 + x^3) e^{-2x} + (C[1] + x C[2]) e^{-2x} + e^x C[3] \right\} \right\}$	المعادلة التفاضلية بلغة ماتيماتكا

$\frac{d^4 y}{d x^4} + 2 \frac{d^3 y}{d x^3} - 3 \frac{d^2 y}{d x^2} = 3e^{2x} + 4\sin(x)$	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
<p>In[7]:=DSolve[y''''[x]+2y'''[x]-3y''[x]==3Exp[2x]+4Sin[x],y[x],x] Out[7]=</p> $\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{C[1]}{e^{3x}} + C[2] + x C[3] + e^x C[4] + \frac{1}{180} (27e^{2x} + 72 \cos[x] + 144 \sin[x]) \right\} \right\}$	المعادلة التفاضلية بلغة ماتيماتكا

$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 9)y = 0$ <p style="text-align: center;">معادلة بيسل</p>	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
<p>In[8]:=DSolve[x^2y''[x]+x y'[x]+(x^2-9) y[x]==0,y[x],x] Out[8]={{y[x] -> BesselY[3, x] C[1] + BesselJ[3, x] C[2]}}</p>	المعادلة التفاضلية بلغة ماتيماتكا

حل المعادلة التفاضلية eqn والتي تحقق الشرط الابتدائي $y[x_0]=a$

`DSolve[{eqn,y[x_0]==a}, y[x], x]`

المعادلة التفاضلية بلغة ماتيماتيكا	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
<p>In[9]:=DSolve[{y'[x]==y[x],y[0]=3},y[x],x]</p> <p>Out[9]={{y[x]->3 E^x}}</p>	$\frac{dy}{dx} = y$, $y[0]=3$
<p>In[10]:=</p> <p>DSolve[{y'[x]==Cos[x],y[0]==2},y[x],x]</p> <p>Out[10]={{y[x]->2 + Sin[x]}}</p>	$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$, $y[0]=2$
<p>In[11]:=</p> <p>Dsolve[{y'[x]+(2/x)y[x]==y[x],</p> <p style="padding-left: 150px;">y[1]=-2},y[x],x]</p> <p>Out[11]= $\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -\text{Sqrt}\left[\frac{18}{5x^4} + \frac{2x}{5} \right] \right\} \right\}$</p>	$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = y$, $y[1]=-2$
<p>In[12]:=</p> <p>Dsolve[{y''[x] - 3y'[x]+2y[x]==Exp[x] +</p> <p style="padding-left: 150px;">Exp[2x],y[0]==1,y'[0]==1},y[x],x]</p> <p>Out[12]={{y[x]->E^x - E^x x + E^{2x} x}}</p>	$\frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^x + e^{2x}$ $y[0]=1$, $y'[0]=1$