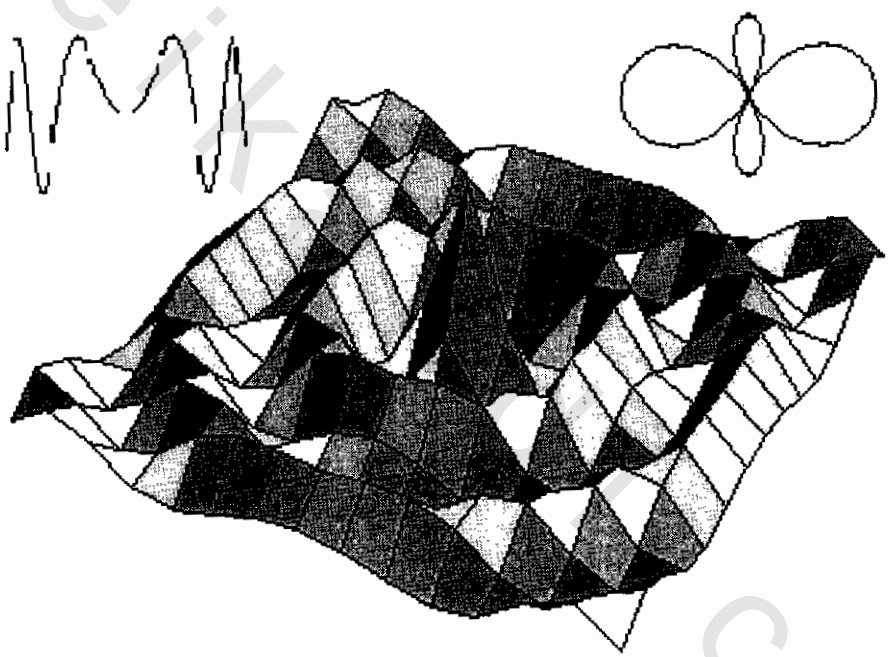
الباب الخامس

ماثيماتيكا ورسم الدوال



في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الأتية :

١. رسم الدوال في المستوى Two-Dimensional Plotting

٢. رسم الدوال فى الفراغ Three-Dimensional Plotting

٣. رسم الدوال البارامترية Parametric Plots

obeikandl.com

الباب الخامس

ماثيماتيكا ورسم الدوال

يستطيع برنامج ماثيماتيكا أداء دور كبير فى عمليات رسم الدوال فى المستوى والفراغ وكذلك الدوال فى الصورة البارامترية ولتنفيذ عملية رسم الدوال فى ماثيماتيكا نحتاج الى تحديد ثلاث أشياء أساسية هى :

- تعريف الدالة المطلوب رسمها
- تعريف المتغير المستقل Independent variable
- تعريف نطاق المتغير المستقل Domain

ويحتوى ماثيماتيكا على العديد من الاختيارات Options التى تتحكم فى شكل ومواصفات الرسم graph وبعض هذه الاختيارات يكون فعال Default بمعنى أن ماثيماتيكا يقوم بتنفيذها أوتوماتيك Automatic عند بداية التشغيل فمثلا الاختيارات

- تحديد مقياس رسم مناسب scale
- تحديد عدد النقط التى يتم حساب قيم الدالة عندها
- اختيار المدى Range للمتغير التابع Dependent variable
- تحديد وترقيم محاور الإحداثيات

تعتبر من الاختيارات الفعالة فى ماثيماتيكا وكل اختيار له اسم محدد ويمكن للمستخدم تغيير الاختيارات الفعالة فى ماثيماتيكا وإضافة آي اختيارات أخرى حسب طبيعة الرسم المطلوب .

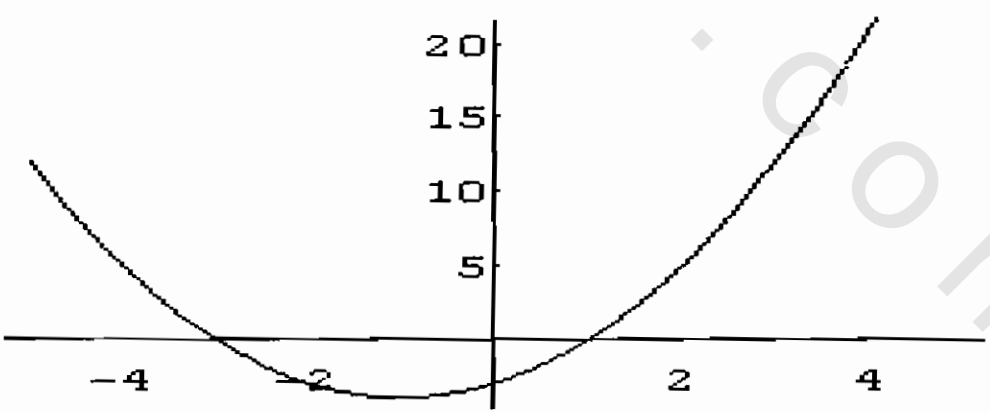
١. رسم الدوال فى المستوى Two-Dimensional Plotting

الدالة ذات المتغير الواحد يرمز لها $y = f(x)$ حيث x يسمى بالمتغير المستقل ، y يسمى بالمتغير التابع ونطاق الدالة يقع على محور x والمدى يقع على محور y وترسم الدالة فى المستوى ويمثلها مجموعة النقط (x,y) فى المستوى التى تحقق $y = f(x)$ ، ومن أهم أوامر رسم الدوال فى ماثيماتيكا هو الأمر Plot وله الصيغة العامة الآتية :

Plot[f, {x, xmin, xmax}]
رسم الدالة f كدالة فى المتغير x فى النطاق من x = xmin الى x = xmax
Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]
رسم مجموعة دوال ... , f2 , f1 فى المتغير x فى النطاق من x = xmin الى x = xmax

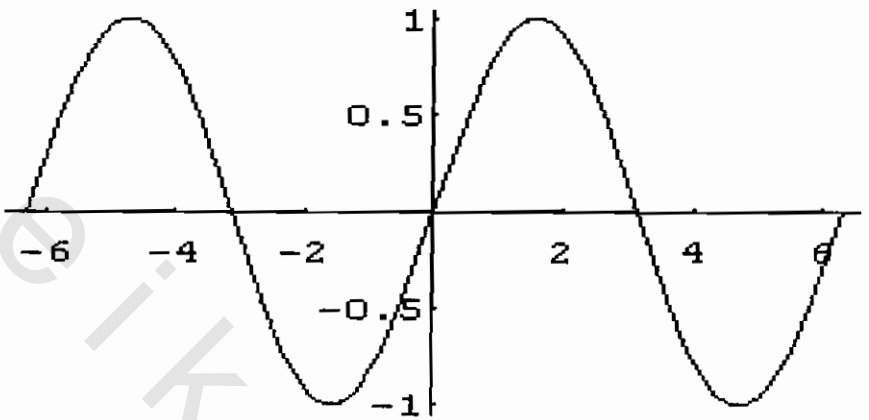
والناتج من تنفيذ أمر Plot يكون صورة مرسومة " " Graphics Object للدالة أو لمجموعة الدوال المعطاة وفقا للاختيارات الفعالة .

رسم الدالة x^2+2x-3 فى الفترة [-5,5] In[1]:=Plot[x^2+2x-3,{x,-5,5}]



Out[1]=-Graphics-

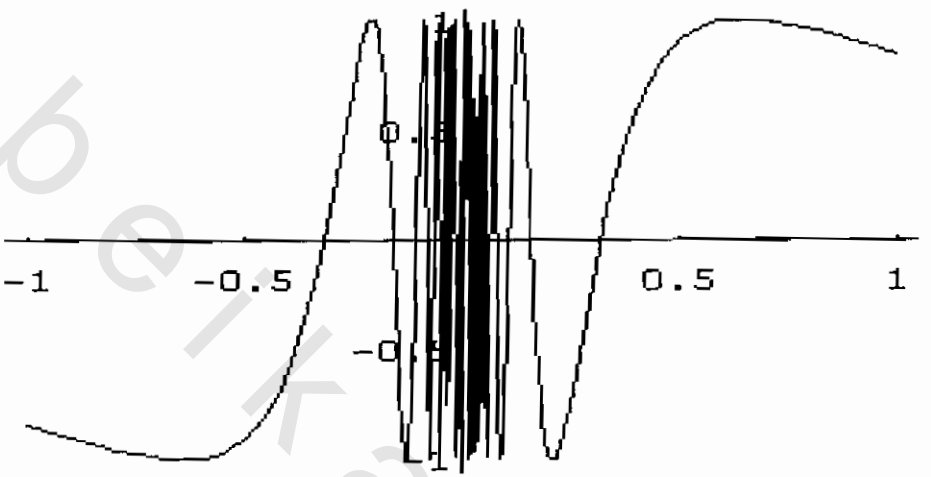
رسم الدالة **sin x** في الفترة [-2π ,2π] **In[2]:= Plot[Sin[x],{x,-2Pi,2Pi}]**



والأمر **Plot** في ماثيماتيكا قادر على رسم دوال لها نقاط شاذة في نطاق التعريف حيث يقوم ماثيماتيكا باختيار مقياس رسم مناسب .

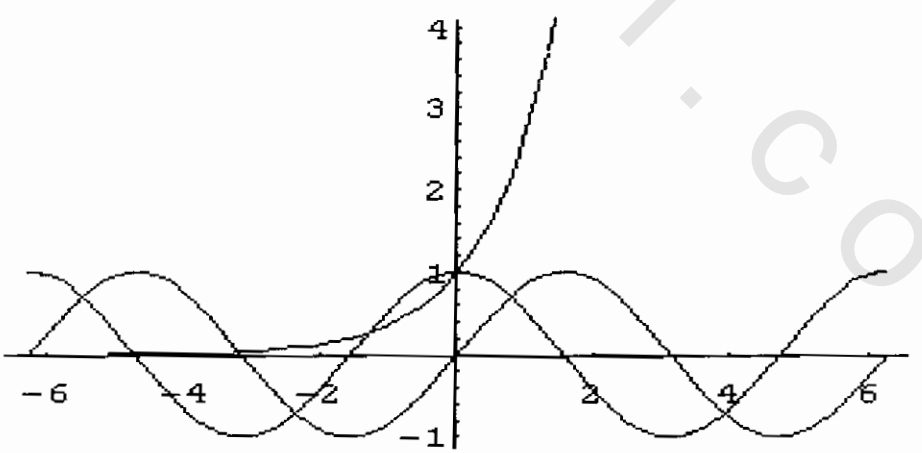
رسم الدالة **Tan(x)** في الفترة **[-3,3]** **In[3]: =Plot[Tan[x],{x,-3,3}**

الدالة sin(1/x) لها نقطة شـــاذة عند x=0 **In[4]:=Plot[Sin[1/x],{x,-1,1}]**



In[5]:=Plot[{Sin[x],Cos[x],Exp[x]},{x,-2Pi,2Pi}]

لرسم مجموعة من الدوال على نفس النطاق



ونلاحظ فى الأمثلة السابقة انه تم رسم الدوال بدون إضافة أي اختيارات Options الى أمر الرسم Plot بمعنى أن الرسوم تم تنفيذها بالاختيارات الفعالة default الموجودة داخل ماثيماتيكا ، ولكن كان من الممكن إضافة أي اختيارات للرسم حيث أن كل اختيار له اسم Name ويأخذ قيمة Value ويتم وضع الاختيار Option داخل أمر الرسم Plot فى صورة قاعدة

Name -> Value

ويمكن وضع اكثر من اختيار داخل أمر الرسم Plot بحيث يفصل كل منها علامة الفاصلة "," ومن القيم Value المستخدمة فى هذه الاختيارات

Automatic	وتعنى أن يتم الاختيار اتوماتيك وفقا لأسلوب ماثيماتيكا
All	وتعنى عمل كل ما هو متاح من ماثيماتيكا فى هذا الاختيار
None	وتعنى عدم استخدام ما هو متاح من ماثيماتيكا فى هذا الاختيار
True	وتعنى تنفيذ الاختيار
False	وتعنى عدم تنفيذ الاختيار

وفى حالة عدم تحديد قيمة خاصة لاختيار ما للأمر Plot فإن ماثيماتيكا يقوم أوتوماتيك باستخدام القيمة الفعالة لهذا الاختيار وبصفة عامة يمكن الاستعلام عن القيم الفعالة للاختيارات المتاحة لدالة function باستخدام الأمر Option فى الصورة

Option[function]

للتعرف على القيم الفعالة للاختيارات الخاصة بالأمر Plot **In[6]:=Option[Plot]**

Out[6]={ AspectRatio -> GoldenRatio^(-1) , Axes -> Automatic , AxesLabel -> None, AxesOrigin -> Automatic, AxesStyle -> Automatic, Background -> Automatic ColorOutput -> Automatic, Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic, Epilog -> {}, Frame -> False, FrameLabel -> None, FrameStyle -> Automatic, FrameTicks -> Automatic, GridLines -> None, MaxBend -> 10. PlotDivision>20., PlotLabel -> None, PlotPoints -> 25, PlotRange -> Automatic, PlotRegion -> Automatic, PlotStyle -> Automatic, Prolog -> {}, RotateLabel -> True, Ticks -> Automatic, DefaultFont :> $DefaultFont, DisplayFunction :> $DisplayFunction }

وإذا تم تحديد قيم خاصة لاختيارات دالة function وأردنا استخدام هذه القيم الجديدة اكثر من مرة بعد ذلك فإنه يمكن جعلها قيم فعالة باستخدام الأمر SetOptions فى الصورة

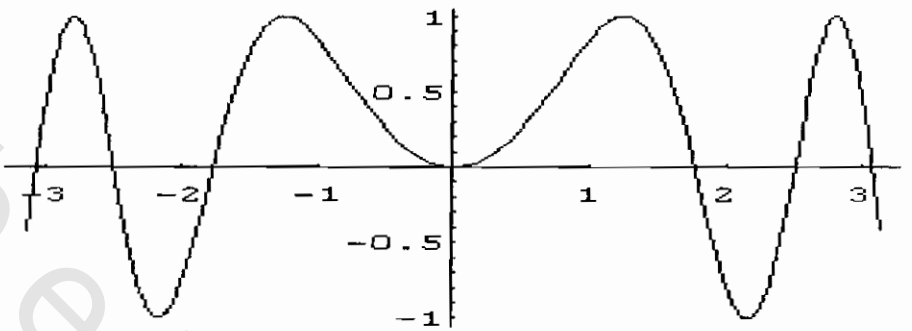
SetOptions[function,Name1->value1,Name2->value2,...]

وسوف نتعرف الآن على بعض الاختيارات Options المستخدمة مع الأمر Plot والقيم الفعالة لكل منها وقيم أخرى بديلة للتحكم فى مواصفات الرسم وكيفية تغيرها .

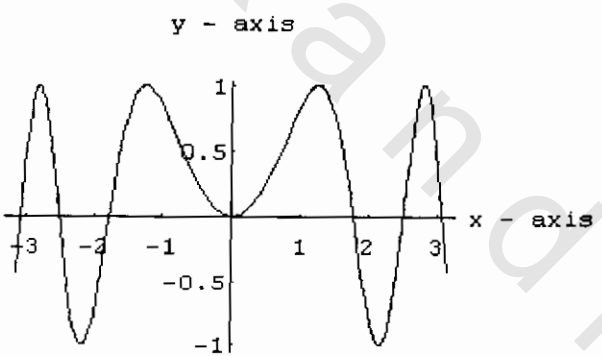
Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيـــــم أخرى للاختيار Another values
PlotRange -> Automatic	تحديـــد مـــدى الإحداثيات التى يتم التعامل معهـــا فـــى الرسم	PlotRange -> {ymin,ymax} PlotRange>{{xmin,xmax}, {ymin,ymax}} PlotRange -> All
PlotLabel -> None	كتابة عنوان علـــى الرسم	PlotLabel -> "expr" حيث "expr" تعنى أي عنوان يتم كتابته على الرسم
Frame -> False	إمكانية عمل إطار حول الرسم	عمل إطار حول الرسم Frame -> True
FrameLabel -> None	إمكانية كتابة عنوان على الإطار حـــول الرسم	FrameLabel ->"graph(1)" كتابة العنوان graph(1) على الإطـــار حول الرسم
AxesOrigin -> Automatic	تحديد نقطة الأصل	AxesOrigin -> {x0,y0} تحديد النقطة (x0,y0) كنقطة اصل
Axes -> Automatic	رســـم محـــاور الإحداثيات	Axes -> None عدم رسم محاور للإحداثيات
AxesLabel -> None	كتابة عناوين علـــى المحاور	AxesLabel -> {"y-axes"} كتابة العنوان y-axes على محور y فقط AxesLabel -> { "x-label", "y-label"} كتابة العنوان x-label على محور x والعنوان y-label غلى محور y
GradLines -> None	لعمل رسم شـــبكى يحتوى بداخله علـــى رسم الدالة	GradLines -> Automatic

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيـــــم أخرى للاختيار Another values
AspectRatio -> $\frac{1}{\text{GoldenRatio}}$ حيث GoldenRatio ≅ 1.61803	تمثل نسبة واجهـــة الرسم وهى النســبة بين ارتفاع وعــرض الرسم	AspectRatio-> Automatic AspectRatio->n اختيار عدد n يمثل النسبة بـــين ارتفـــاع وعرض منطقة الرسم
Ticks -> Automatic	ترقيـــم محـــاور الإحداثيات	عدم ترقيم المحاور Ticks -> None Ticks -> {Automatic,None} ترقيم محور x فقط Ticks -> { None,Automatic} ترقيم محور y فقط
Plot Points -> 25	اختيار عدد n يمثل عدد النقط فى العينة والتى يتم حســـاب قيم الدالة عندها	Plot Points -> n
MaxBend -> 10	اختيارعدد n يمثـــل اكبر زاوية التواء بين القطع المتعاقبة علـــى المنحنى	MaxBend -> n
PlotDivison -> 20	اكبر معامل يتم بـــه تقسيم الفترةالمعطـــاة الى فترات جزئية	PlotDivison -> n اختيار عدد n يمثل اكبر تقســـيم ممكن من الفترات الجزئية للفترة المعطاة
Background -> Automatic	اختيار لون خلفيـــة الرسم	Background -> GrayLevel[x] جعل الخلفية باللون الرمادى بمستوى تلوين x يتراوح بين 0,1
DisplayFunction-> $DisplayFunction	إظهار رسم الدالة	DisplayFunction-> Identity منع ظهور رسم الدالة

In[7]:= Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}] رسم الدالة $\sin x^2$ فى الفترة $[-\pi,\pi]$

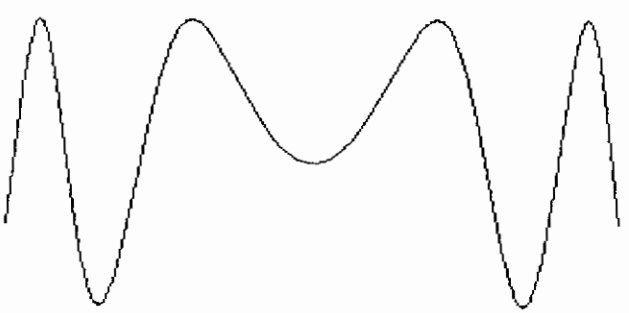


In[8]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}, AxesLabel->{"x - axis","y - axis"}]



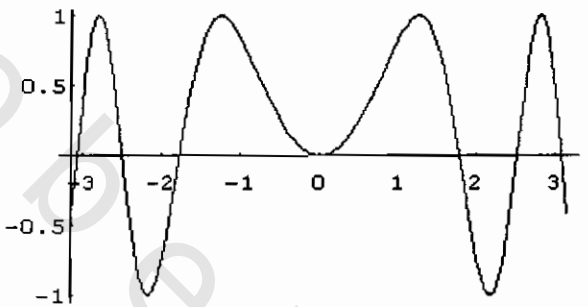
ولوضع العنوان " **x - axis** " على المحور الأفقي والعنـــــوان "**y - axis** " على المحور الرأسي

In[9]:= Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Axes->None]



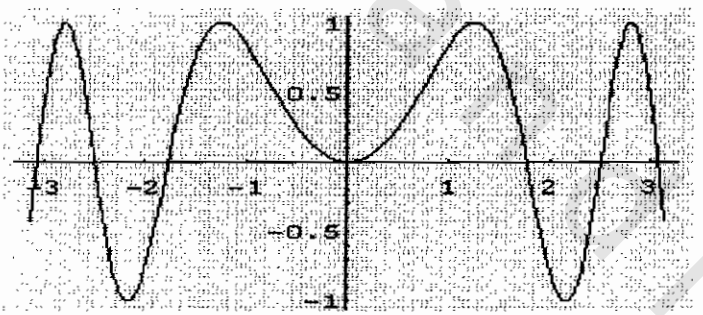
رسم الدالة $\sin x^2$ فى الفترة $[-\pi,\pi]$ وحذف المحاور من الرسم

```
In[10]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}, AxesOrigin->{-Pi,0}]
```



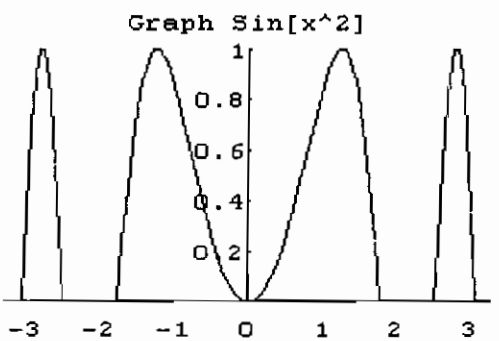
لرسم الدالة $\sin x^2$ فى الفترة $[-\pi,\pi]$ وجعل نقطة الأصل هى النقطة $(-\pi,0)$

```
In[11]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Background->GrayLevel[0.5]]
```



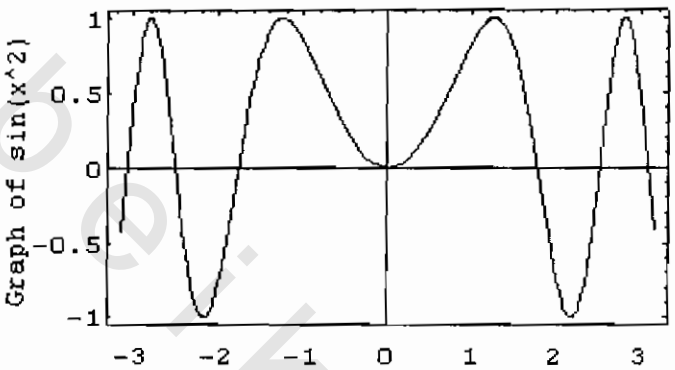
لرسم الدالة $\sin x^2$ فى الفترة $[-\pi,\pi]$ مع جعل خلفية الرسم باللون الرمادى

```
In[12]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},PlotRange->{0,1},
PlotLabel->"Graph Sin[x^2]"]
```



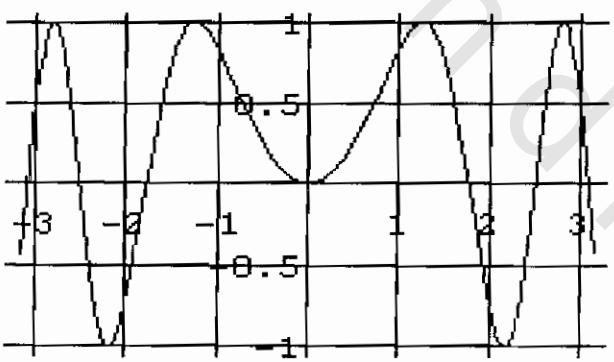
لرسم الدالة $\sin x^2$ فى الفترة $[-\pi,\pi]$ وفى المدى من 0 الى 1 وكتابة عنوان على الرسم

```
In[13]:= Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Frame->True,
          FrameLabel->"Graph of sin(x^2)" ]
```



رسم الدالة $\sin x^2$ في الفتـــــرة $[-\pi,\pi]$ مع عمل إطار خارجي حول الرســـم وكتـابة عنوان على هذا الإطار

```
In[14]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},GridLines->Automatic]
```



رسم الدالة $\sin x^2$ في الفتـــــرة $[-\pi,\pi]$ مع عمل خطوط شـــبكية على الرسم

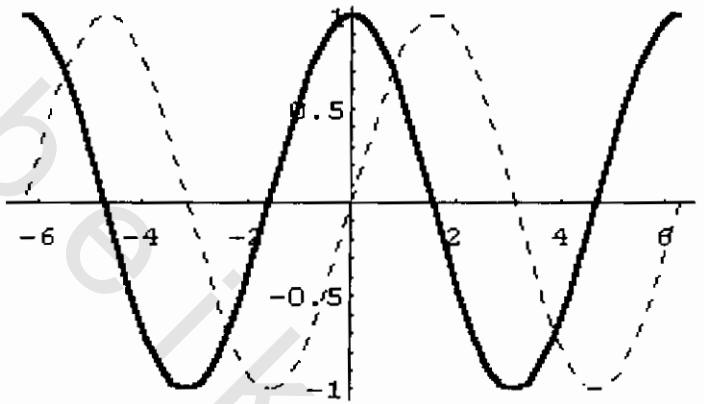
وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن استخدام الرســـوم الأولية فى توضيح النقط والخطوط والمنحنيات بأساليب مختلفة **different styles** ويتم ذلك بواسطة الاختيار **PlotStyle** مـــع الأمـــر **Plot** وقيمته الفعالة **Automatic** ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار **PlotStyle** كالآتي :

PlotStyle->style تحديد الأسلوب **style** لرسم جميع المنحنيات للدوال الموجودة بالأمر **Plot**
PlotStyle->{{style1},{style2},...} تحديد الأساليب **style1, style2, ...** للاستخدام بصورة دورية مع منحنيات الدوال الموجودة فى الأمر **Plot** فمنحنى الدالة الأولى يرسم بالأسلوب **style1** ومنحنى الدالة الثانية يرسم بالأسلوب **style2** ... الخ

ونعرض الآن بعض الأساليب **styles** الموجودة فى ماثيماتيكا ووظيفة كلا منها .

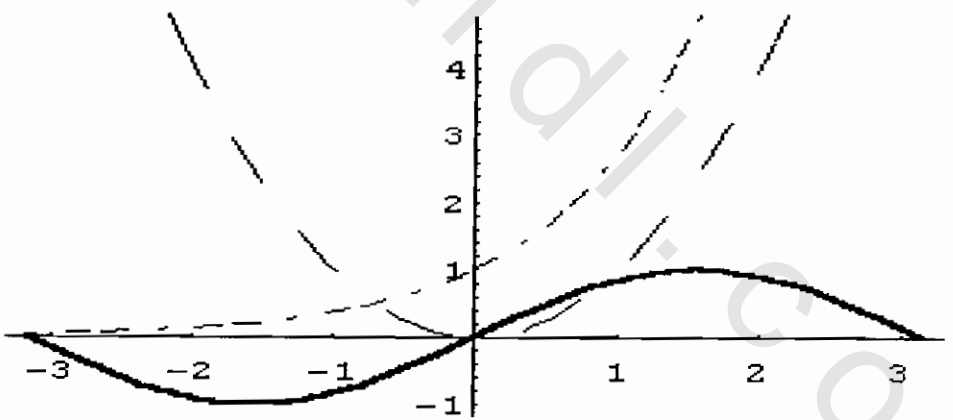
الأسلوب style	الوظيفة
Thickness[x]	رسم المنحنى بحيث يكون سمك الخط المستخدم يساوى x حيث x تمثل كسر من العرض الكلى للرسم فمثلا لجعل الخط كثيف Thickness[0.05]
Dashing[{d}]	رسم المنحنى متقطع بأجزاء متعاقبة طولها d حيث d تمثل كسر من العرض الكلى للرسم ، فمثلا لرسم المنحنى متقطع بالصورة --- يكتب Dashing[{0.25}]
Dashing[{d1,d2,d3,...}]	رسم المنحنى متقطع بأجزاء متعاقبة طولها d1,d2,... وبصورة دورية حيث كلا من di يمثل كسر من العرض الكلى للرسم
GrayLevel[x]	رسم المنحنى باللون الرمادى بمستوى تلوين x يتراوح بين 0 , 1 حيث لون اسود black GrayLevel[0] لون ابيض white GrayLevel[1] لون رمادى gray GrayLevel[0.5]
RGBColor[r,g,b]	رسم المنحنى ملون حيث r,g,b تمثل الألوان الأحمر red والأخضر green والأزرق blue على الترتيب وكل منها يأخذ قيم بين 0 , 1 وفقا لدرجة اللون المطلوب

```
In[15]:= Plot[{Sin[x],Cos[x]},{x,-2Pi,2Pi},
          PlotStyle->{Dashing[{0.02}],Thickness[0.007]}]
```



رسم منحنى الدالتين
$\sin x$, $\cos x$
على نفس النطـــــاق
$[-2\pi, 2\pi]$
وبحيث يكون منحنـــى
$\sin x$ متقطع ومنحنى
$\cos x$ سميك

```
In[16]:=Plot[{x^2,Sin[x],Exp[x]},{x,-Pi,Pi},PlotStyle->{{Dashing[{0.08}]},
          {Thickness[0.007]},{Dashing[{0.01,0.03,0.03}]}}]
```



رسم الدالة x^2 على صورة خطوط متقطعة ---

ورسم الدالة $\sin x$ بخط سميك

ورسم الدالة e^x على صورة خطوط متقطعة ونقط --.--

والدوال الثلاثة مرسومة على نفس النطاق

ويمكن استخدام الرسوم الأولية graphics primitives لتحديد شكل محاور الإحداثيات فى الرسم الناتج ويتم ذلك باستخدام الاختيار AxesStyle مع أمر الرسم Plot وقيمته الفعالة Automatic ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار AxesStyle كالآتي :

AxesStyle ->style تحديد الأسلوب **style** فى رسم محاور الإحداثيات
AxesStyle ->{{stylex},{styley}} تحديد الأسلوب **stylex** فى رسم محور **x** والأسلوب **styley** فى رسم محور **y**

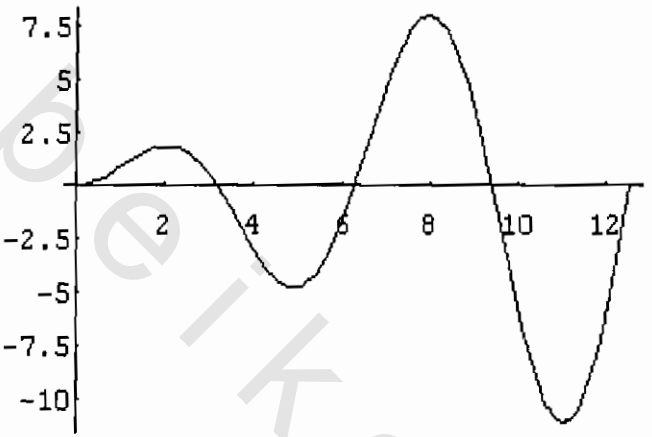
ويمكن أيضا استخدام الرسوم الأولية graphics primitives لتحديد شكل الإطار المرسوم حول الرسم ويتم ذلك باستخدام الاختيار FrameStyle مع أمر الرسم Plot وقيمته الفعالة Automatic ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار FrameStyle كالآتي :

FrameStyle ->style تحديد الأسلوب **style** فى رسم الأوجه الأربعة للإطار
FrameStyle ->{{xpstyle},{ypstyle},{ xnstyle},{ynstyle}} تحديد أربعة أساليب لرسم الأوجه الأربعة للإطار مبتدأ من الوجه الأفقي السفلى ويرسم بالأسلوب **xpstylex** والأوجه الباقية ترسم بالأساليب الباقية حسب دوران عقارب الساعة

وفى ماثيماتيكا يقوم الأمر Plot فى البداية بحساب قيم الدالة عند عينة من النقط المتساوية البعد ويتم تحديد عدد النقط فى العينة بواسطة الاختيار PlotPoints وقيمته الابتدائية الفعالة هى 25 ثم يقوم الأمر Plot بعد ذلك بأخذ عينات إضافية من النقط لعمل منحنى بحيث تكون زاوية الالتواء bend بين الأجزاء المتعاقبة على المنحنى اقل من القيمة الابتدائية الفعالة الموجودة فى الاختيار MaxBend وهى 10 ويتم تقسيم الفترة المعطاة الى فترات جزئية عددها (على الأكثر) يساوى القيمة الابتدائية الفعالة الموجودة فى الاختيار PlotDivision وهى 20 .

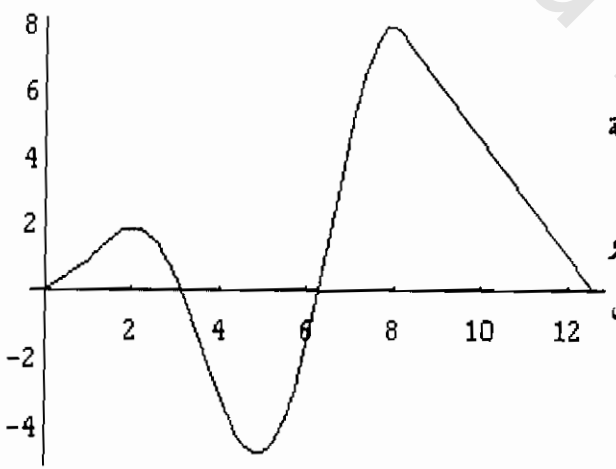
ويجب مراعاةانه إذا استخدمنا عدد صغير من النقط فى العينة فإن رسم المنحنى قد يبدو غير مكتمل ويمكن التحقق من ذلك عن طريق زيادة عدد نقط العينة فى الاختيار PlotPoints .

In[17]:= p1=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi},PlotPoints->30]



عند اخـــذ 30 نقطة فى العينة
فى الاختيار PlotPoints
فإن رسم الدالة x sin x
يكون كما هو موضح بالشكل

In[18]:= p2=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi},PlotPoints->4]



عند اخـــــذ 4 نقط فقط فى العينة
فى الاختيار PlotPoints
فإن رسم الدالة x sin x يبدو
غير مكتمل كما هو موضح بالشكل

openkandil.com

ويمكن التعرف على المعلومات التى يقوم ماثيماتيكا بحسابها عند تنفيذ أمر **Plot** لرسم الدالـــة وذلك باستخدام الأمر **InputForm** فى الصورة

InputForm [expr] للتعرف على البيانات التى ينفذها ماثيماتيكا على **expr**

فمثلا للتعرف على البيانات التى ينفذها ماثيماتيكا على الرسم **p2** فى جملة الإدخال الســـابقة يرسل الأمر

InputForm [p2]

وبرنامج ماثيماتيكا يقوم بحفظ المعلومات الخاصة بكل رسم يتم تنفيذه بحيث يمكن إعادة الرسم فى آي وقت بعد ذلك مع إمكانية تغيير بعض الاختيارات المستخدمة وذلك للنظـــر الى الرســـم بطرق مختلفة كما يمكن عرض اكثر من رسم معا ويتم ذلك باستخدام الأمر **Show** كالآتي :

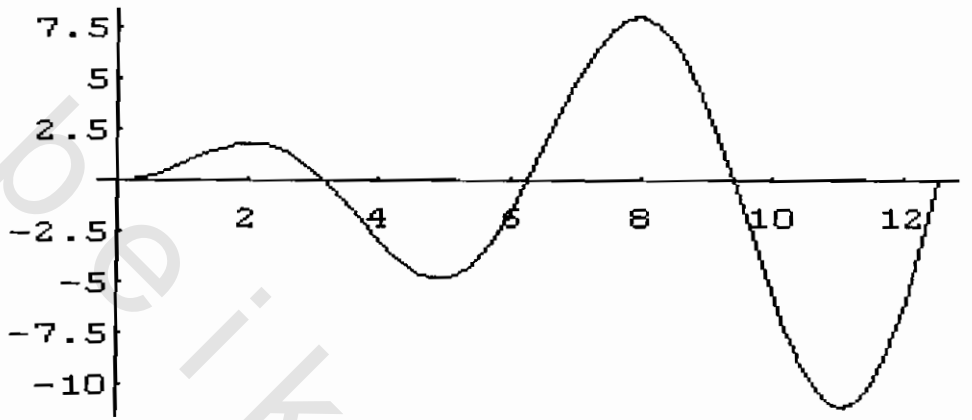
Show[p1]	إعادة عرض الرسم **p1** الناتج من **Plot**
Show[p1,option->value]	إعادة عرض الرسم **p1** الناتج من **Plot** مع تنفيذ الاختيار **Option -> value**
Show[plot1,plot2,...]	إعادة عرض رسم المنحنيات **p1,p2,...** الناتجة من **Plot** معا فى رسم واحد

وفى أمر إعادة الرسم **Show** يمكن استخدام اختيارات الأمر **Plot** ما عدا الاختيارات التى تغير من طبيعة وعدد النقط فى العينة المستخدمة لرسم الدالة مثل الاختيارات

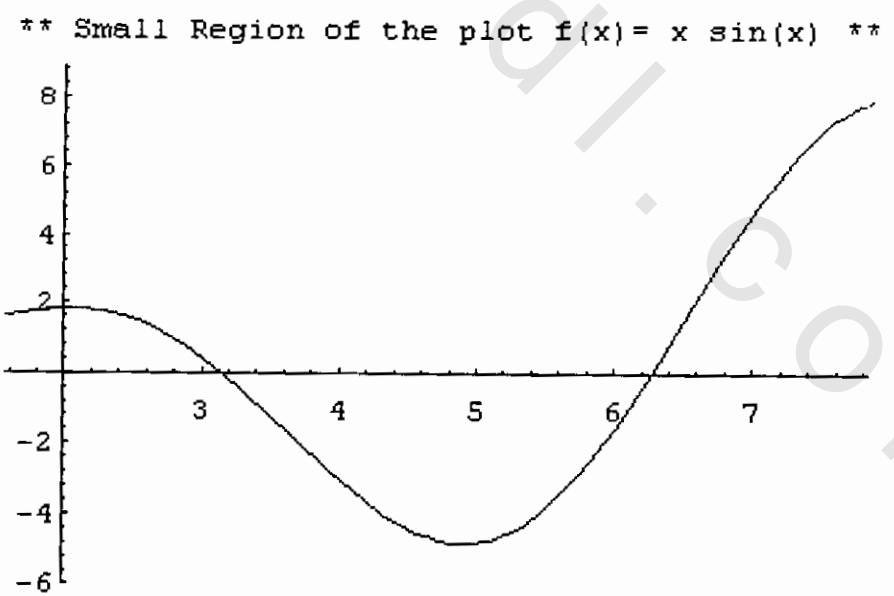
PlotStyle , PlotPoints , MaxBand , PlotDivision

والأمثلة الآتية توضح ذلك .

```
In[19]:= p3=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi}]
```

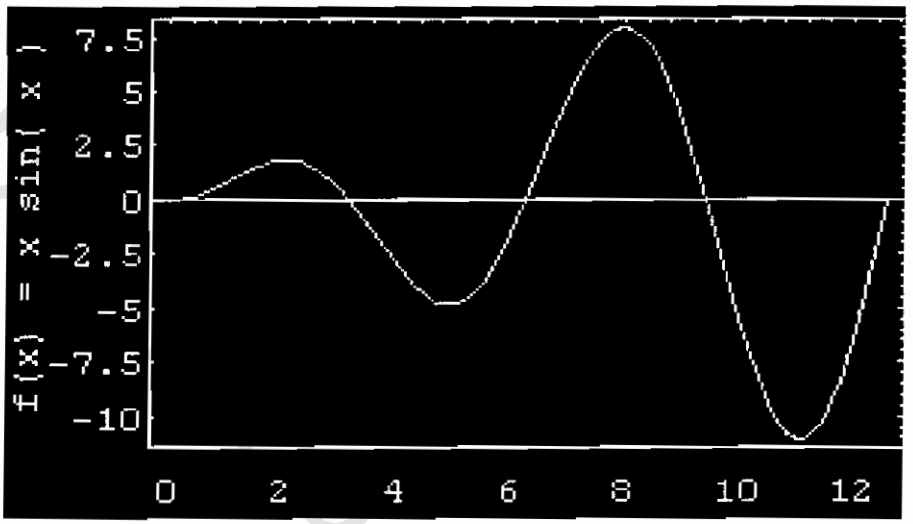



```
In[20]:= Show[p3,PlotRange->{{Pi/2,5Pi/2},{-6,9}},
  PlotLabel->" ** Small Region of the plot f(x)= x sin(x) **"]
```

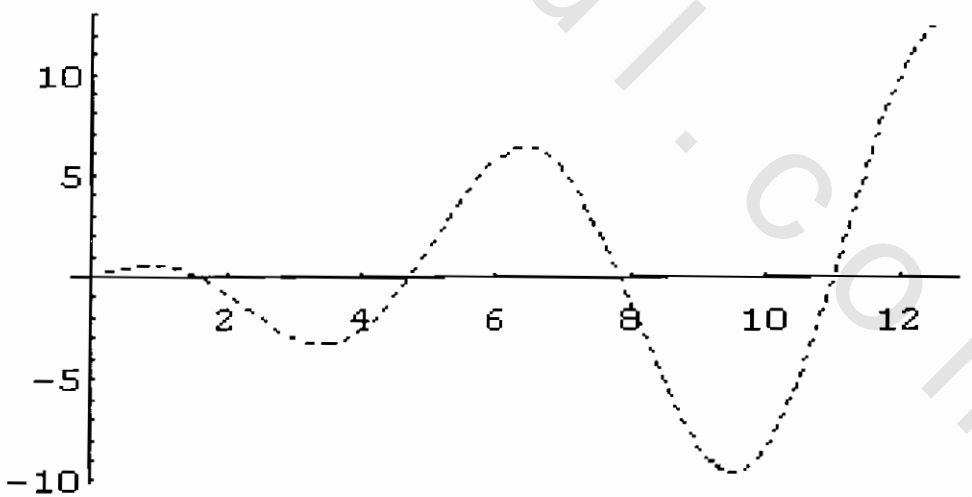


obeikandl.com

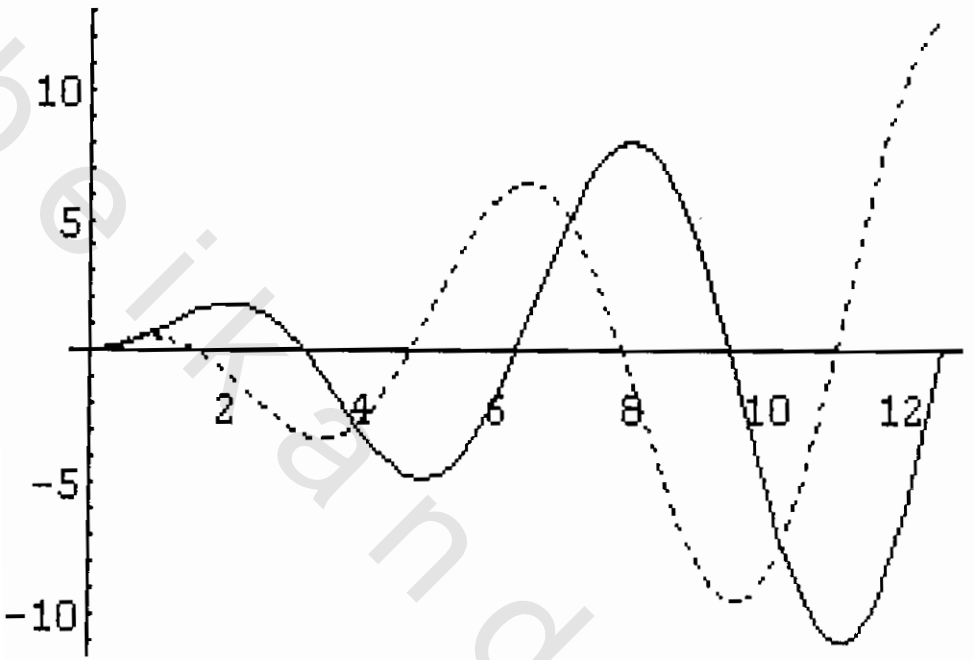
```
In[21]:= Show[p3,Frame->True,FrameLabel->" f(x) = x sin( x )",
                Background->GrayLevel0]
```




```
In[22]:=p4=Plot[x Cos[x],{x,0,4Pi},PlotStyle->Dashing[{0.01}]]
```



In[23]:= Show[p3,p4]



وفى برنامج ماثيماتيكا فإن جميع الرسوم الناتجة من الأمر **Plot** يتم تكوينها من قوائم من الرسوم الأولية **graphics primitives** المناسبة والموجودة داخل بنـــاء ماثيماتيكـــا وبعد ذلك يتم عرضها بالصـــورة التى نراها

والجدول التالي يوضح بعض الرسوم الأولية الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا .

Graphics Primitives الرسوم الأولية	الناتـــــــــج
Point[{x,y}]	رسم نقطة فى المستوى لها الإحداثيـــات (x,y)
Line[{{x1,y1},{x2,y2}}]	رسم خـــط مســتقيم يمــر بــالنقطتين (x1,y1) , (x2,y2)
Line[{{x1,y1},{x2,y2},{x3,y3},...}]	رسم خط منكسر يمر بالنقط المعطاة على الترتيب
Rectangle[{xmin,ymin},{xmax,ymax}]	رسم مستطيل إحداثيات رؤوســه علــى أحد القطرين هى (xmin,ymin) , (xmax,ymax)
Polygon[{{x1,y1},{x2,y2},...}]	رسم شكل كثير الأضلاع له الـــرؤوس المعطاة
Circle[{h,k},r]	رسم دائـــرة مركزهـــا النقطـــة (h,k) ونصف قطرها r
Circle[{h,k},{rx,ry}]	رسم قطع ناقص مركزه النقطـــة (h,k) وطول الجزء المقطوع من محور x يساوى rx وطول الجزء المقطوع من محـــور y يساوى ry
Circle[{h,k},r,{t1,t2}]]	رسم قطاع من دائرة مركزهـــا النقطـــة (h,k) ونصف قطرها r والقطاع يمتـــد من الزاويـــة t1 الى الزاويـــة t2 حيـــث الزوايا مقاسه بالتقدير الدائرى واتجاههـــا ضد دوران عقرب الساعة

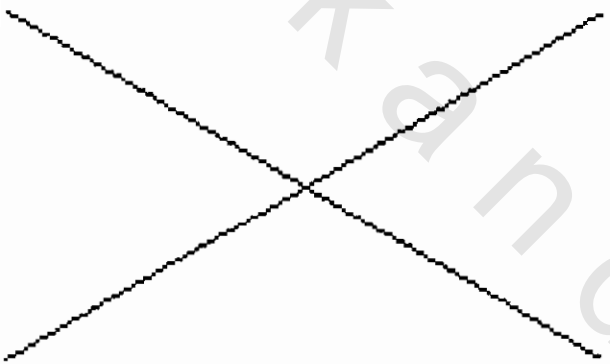
Graphics Primitives الرسوم الأولية	الناتـــــــــج
Disk[{h,k},r]	رسم قرص دائرى ممتلئ مركزه النقطـــة (h,k) ونصف قطره r
Disk[{h,k},{rx,ry}]	رسم قرص ممتلئ على هيئة قطع نـــاقص مركـــزه النقطة (h,k) وطول الجزء المقطوع من محـــور x يساوى rx وطول الجزء المقطوع مـــن محـــور y يساوى ry
Disk[{h,k},r,{t1,t2}]]	رسم قطاع من قرص دائرى ممتلئ مركزه النقطـــة (h,k) ونصف قطره r والقطاع يمتد من الزاويـــة t1 الى الزاوية t2 حيث الزوايا مقاســـه بـــالتقدير الدائرى واتجاهها ضد دوران عقرب الساعة
Text[expr,{x,y}]	كتابة النص expr متمركزا عند النقطة (x,y)
GrayLevel[i]	عرض الأشياء التالية له باللون الرمادى بمســـتوى تلوين i يتراوح بين 0 , 1
RGBCdor[r,g,b]	عرض الأشياء التالية له ملونة بمســـتوى تلويـــن يتراوح بين 0 , 1 للون الأحمر r والأخضـــر g والأزرق b
PintSize[s]	رسم النقطة التالية فى الأمر Plot كمناطق دائرية نصف قطرها s حيث s تمثل كسر مـــن العـــرض الكلى للرسم
Thickness[t]	رسم الخطوط بسمك t حيث t تمثل كسر مـــن العرض الكلى للرسم
Dashing[{d1,d2,...}]	رسم الخطوط على صورة أجزاء متقطعة أطوالهـــا d1,d2,... على التتابع حيث di تمثل كسر مـــن العرض الكلى للرسم

ويمكن للمستخدم التعامل مباشرة مع الرسوم الأولية باستخدام الأمر Graphics كالآتي :

```
Graphics[primitives,options]
Graphics[{primitive1,primitive2,...}]
```

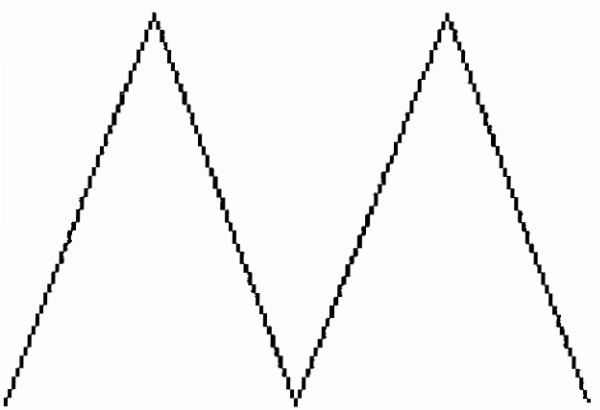
وناتج تنفيذ الأمر Graphics يكون رسالة على الصورة – Graphics – بدون ظهـــور الرسم ويتم إظهار الرسم باستخدام الأمر Show .

```
In[24]:= g1=Graphics[{Line[{{-1,-1},{1,1}}],Line[{{-1,1},{1,-1}}]}]; Show[g1]
```



استخدام الأمر Graphics في رسم خط مســـتقيم يصل بين النقطتين (1,1) , (-1,-1) وخط مستقيم يصـــل بين النقطتين (1,-1) , (-1,1) ثم إظهار الرسم باستخدام الأمر Show

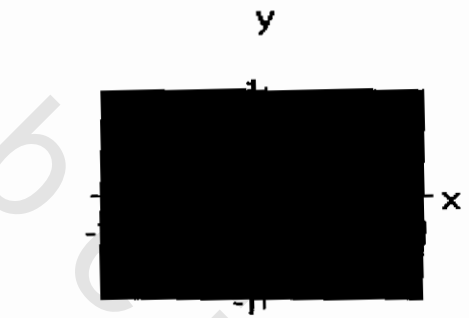
```
In[25]:= g2=Graphics[Line[{{0,0},{1,1},{2,0},{3,1},{4,0}}]];Show[g2]
```



استخدام الأمر Graphics في رسم خطوط منكسرة تصل النقط المعطاة (0,0),(1,1),(2,0) ,(3,1),(4,0) على الترتيب ثم إظهار الرســـم باستخدام الأمر Show

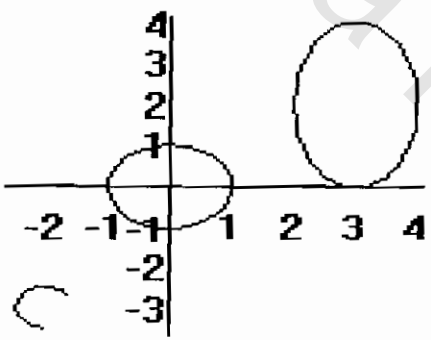
obeikandl.com

```
In[26]:= g3=Show[Graphics[Rectangle[{-1,-1},{1,1}]],
          Axes->True,AxesLabel->{"x","y"}]
```



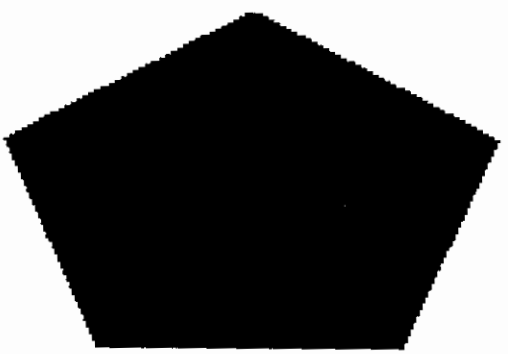
رســـــم مســـــتطيل إحداثيات رؤوس
قطر فيه هى (1,1) , (-1,-1)
وتم إضافة اختيـــــار عمل محـــــاور
وكتابة العنوان x على المحـــــور
الأفقي والعنوان y على الراسي

```
In[27]:=one=Graphics[Circle[{0,0},1]];two=Graphics[Circle[{3,2},{1,2}]];
        three=Graphics[Circle[{-2,-3},.5,{Pi/4,3Pi/2}]];
        Show[one,two,three,Axes->True,AspectRatio->1]
```



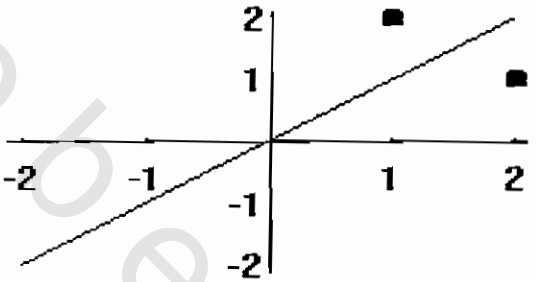
رسم دائرة مركزها النقطة (0,0) ونصف قطرها 1
وقطع ناقص مركزه النقطة (3,2)
وقطاع من دائرة مركزها النقطة (-2,-3) وممتد
من الزاوية Pi/4 الى الزاوية 3Pi/2
ثم إظهار الرسوم الثلاثة معا باستخدام الأمر Show

```
In[28]:= pentagon=Table[N[{Sin[2 n Pi/5],Cos[2 n Pi/5]}],{n,5}];
          Show[Graphics[Polygon[pentagon]]]
```



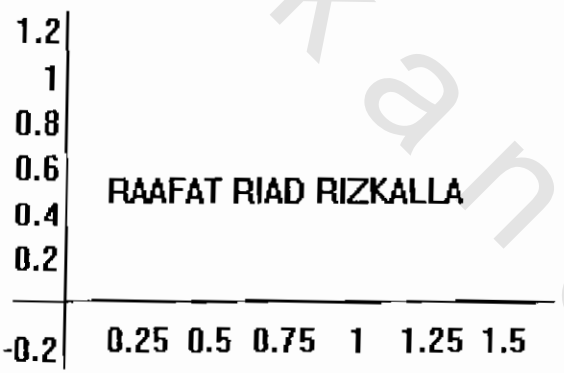
عمل قائمة pentagon تحتوى على
إحداثيات الشكل الخماسى ثم إظهار
الرسم باستخدام الأمر Show

```
In[29]:= Show[Graphics[{Line[{{-2,-2},{2,2}}],PointSize[0.03],
                Point[{2,1}],Point[{1,2}]}],Axes->True]
```



إظهار رسم الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (2,2) , (-2,-2) مع رسم نقط بالحجم 0.03 عند الإحداثيات (2,1) , (1,2)

```
In[30]:= text1=Graphics[Text[RAAFAT RIAD RIZKALLA, {0.75,0.5}]];
         Show[text1,Axes->True]
```



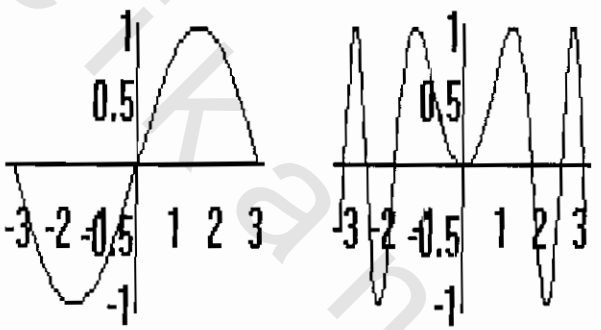
كتابة النص
RAAFAT RIAD RIZKALLA
متمركزا عند النقطة (0.75,0.5)

وفى ماثيماتيكا يمكن تكوين مصفوفة من أي بعد عناصرها أشكال مرسومة وذلك باستخدام الأمر **GraphicsArray** كالآتي :

GraphicsArray[{graph1,graph2,...}] عمل صف من الأشكال المرسومة graph1,graph2,...
GraphicsArray[{graph11,graph12,...}, **{graph21,graph22,...},...]** عمل مصفوفة من الأشكال المرسومة graph11,graph12,... الصف الأول به الرسوم graph21,graph22,... والصف الثانى به الرسوم

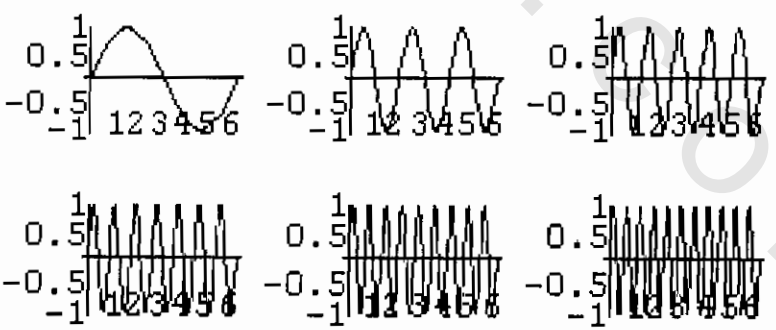
والأشكال المرسومة داخل المصفوفة GraphicsArray يتم عرضها بواسطة الأمـــر Show حيث تظهر الرسوم فى مناطق مستطيلة مرتبة فى صفوف ومع الأمر GraphicsArray يمكن إضافة اختيارات الأمر Plot بالإضافة الى الاختيار GraphicsSpacing وقيمته الفعالة 0.1 وهو يستخدم للتحكم فى الفراغ بين مناطق الرسم المستطيلة المرسوم داخلها عناصر المصفوفة .

```
In[31]:= p1one=Plot[Sin[x],{x,-Pi,Pi},DisplayFunction->Identity];
         p2two=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},DisplayFunction->Identity];
         Show[GraphicsArray[{p1one,p2two}]]
```



رســـم الدالة $\sin x$ ورسم الدالة $\sin x^2$ ووضع الناتج فى مصفوفة على صورة صف واحد ثم إظهار رسم الدالتين معا

```
In[32]:= psin[n_]:=Plot[Sin[n x],{x,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
         a=Partition[Table[psin[n],{n,1,11,2}],3];
         Show[GraphicsArray[a]]
```



رسم الدالة Sin(nx) فى النطاق $[0,2\pi]$ وذلك لقيم n = 1,3,5,7,9,11

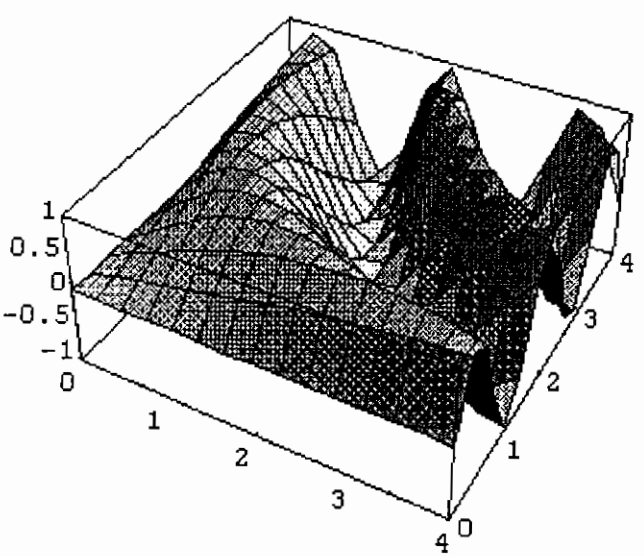
ثم وضع الرسوم فى مصفوفة وعرضها فى صفين بحيث يحتوى كل صف على ثلاثة رسوم

٢. رسم الدوال فى الفراغ Three-Dimensional Plotting

الدالة فى متغيرين يرمز لها z=f(x,y) حيث x,y متغيرات مستقلة , z متغير تابع ونطاق الدالة f(x,y) يقع فى المستوى xy ويمثله مجموعة النقط (x,y) المعرف عندها الدالة بينما مدى الدالة f(x,y) يقع على محور z فى الفراغ ورسم الدالة z = f(x,y) هو عبارة عن سطح فى الفراغ يمثله مجموعة النقط (x,y,z) التى تحقق المعادلة z = f(x,y) . وفى ماثيماتيكا يمكن رسم الدوال فى الفراغ باستخدام الأمر Plot3D كالآتي :

Plot3D[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]

In[1]:=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4}]



رســـم الدالة

Sin (x y)

على المنطقة المستطيلة الشكل

$0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$

وكما فى حالة الأمر **Plot** للرسم فى المستوى فإنه يوجد العديد من الاختيارات التى تتحكم فى شكل الرسم فى الفراغ ويمكن الاستعلام عن الاختيارات الفعالة للأمر **Plot3D** باستخدام الأمر **Options** كالآتي :

```
In[2]:=Options[Plot3D]
```

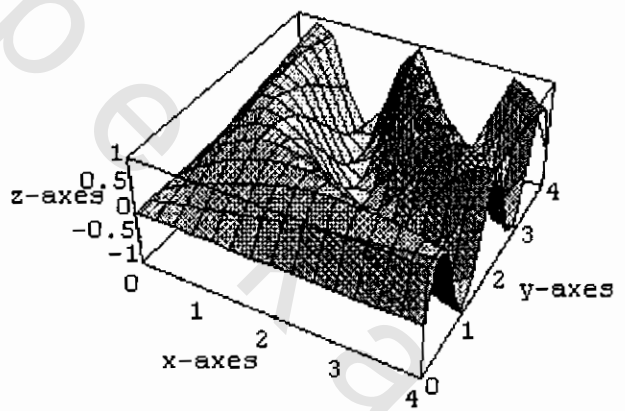
```
{AmbientLight -> GrayLevel[0], AspectRatio -> Automatic, Axes ->
True, AxesEdge -> Automatic, AxesLabel -> None, AxesStyle ->
Automatic, Background -> Automatic, Boxed -> True, BoxRatios -> {1,
1, 0.4},. BoxStyle -> Automatic, ClipFill -> Automatic, ColorFunction
-> Automatic, ColorOutput -> Automatic, Compiled -> True,
DefaultColor -> Automatic, Epilog -> {}, FaceGrids -> None,
HiddenSurface -> True, Lighting -> True, LightSources -> {{{1., 0.,
1.}, RGBColor[1, 0, 0]}, {{1., 1., 1.}, RGBColor[0, 1, 0]}, {{0., 1., 1.},
RGBColor[0, 0, 1]}}, Mesh -> True, MeshStyle -> Automatic, PlotLabel
-> None, PlotPoints -> 15, PlotRange -> Automatic, PlotRegion ->
Automatic, Plot3Matrix -> Automatic, Prolog -> {}, Shading -> True,
SphericalRegion -> False, Ticks -> Automatic, ViewCenter ->
Automatic, ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.}, ViewVertical -> {0., 0., 1.},
DefaultFont :> $DefaultFont, DisplayFunction :> $DisplayFunction}
```

والآن نعرض بالتفصيل بعض الاختيارات المستخدمة مع الأمر **Plot3D** والقيمة الفعالة لكل منها بالإضافة الى قيم أخرى بديلة للتحكم فى مواصفات الرسم فى الفراغ وهذه الاختيارات يمكن استخدامها أيضا مع أمر إعادة الرسم **Show** .

اسم الاختيار Option Name وقيمته الفعالة Default value	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
Axes->True	رسم محاور الإحداثيات x , y , z	Axes->False
AxesLabel->None	كتابة عناوين على المحاور	AxesLabel->"z-label" -AxesLabel >{"x","y","z"}
PlotLabel->None	كتابة عنوان على الرسم	PlotLabel->" any label "
PlotPoints->15	عدد نقط العينة فى الاتجاهين x,y والتى يتم عندها حساب قيم الدالة وهذا الاختيار لا يستخدم مع الأمر Show	PlotPoints->n PlotPoints->{nx,ny}
PlotRange->Automatic	مدى الإحداثيات المستخدمة فى الرسم	PlotRange->{zmin,zmax} PlotRange->{{xn,xx}, {yn,yx},{zn,zx}} PlotRange->All
Ticks->Automatic	ترقيم محاور الإحداثيات	Ticks->None Ticks->{xt,yt,zt} حيث xt , yt , zt يمكن أن تأخذ القيم None أو Automatic

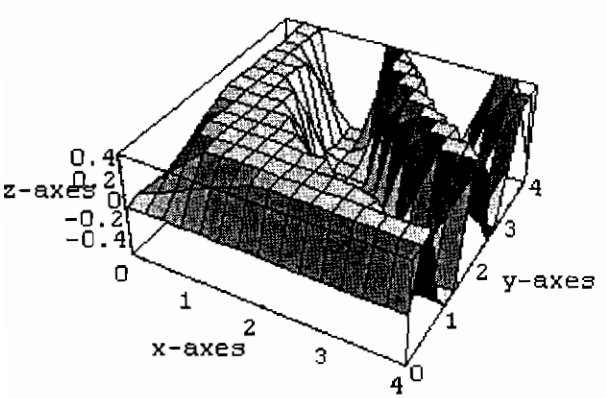
```
In[3]:=rp1=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},
        AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```

استخدام المتغير **rp1** كمخزن
لرســـــــــم الدالة
Sin(x y)
على المنطقة المستطيلة الشكل
$0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$
مع كتابة العناوين
x-axes , y-axes , z-axes
على محاور الإحداثيات

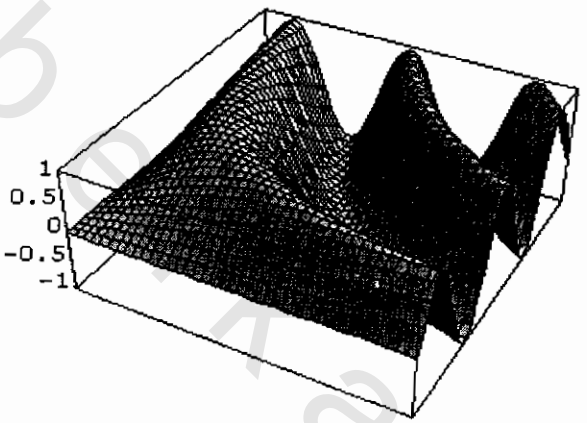



```
In[4]:=rp2=Show[rp1,PlotRange->{-0.5,0.5}]
```

استخدام المتغير **rp2** كمخزن
يوضع داخله أمر إعادة الرسم
Show للشكل السابق **rp1**
مع تغيير مدى الرسم بالاختيار
PlotRange->{-0.5,0.5}



```
In[5]:=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},PlotPoints->40,
        Ticks->{None,None,Automatic}]
```

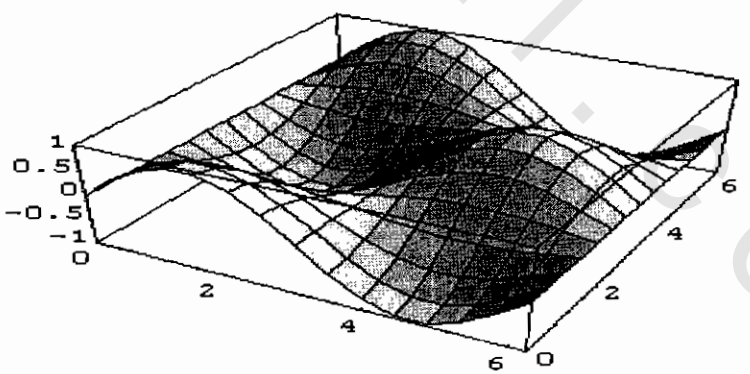


رســـــــم الدالة
Sin(x y)
على المنطقة المستطيلة الشكل
$0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$
مع استخدام الاختيار
PlotPoints->40
وترقيم محور الإحداثيات z فقط

والأشكال الناتجة من الأمر **Plot3D** يمكن النظر أليها على أنها صور فوتوغرافيـــة للســـطوح وتوجد بعض الاختيارات مع الأوامر **Plot3D, Show** يمكن من خلالها فحص السطوح من مواضع مختلفة ومن أهم هذه الاختيارات هو الاختيار **ViewPoint** لتحديد إحداثيات النقطة فى الفراغ التى يتم وضع آلة التصوير عندها لالتقاط صور للسطح وبالتالى يمكن التعـــرف علـــى الملامح المختلفة للسطح عن طريق وضع الكاميرا فى أماكن مختلفة . ويقوم ماثيماتيكـــا بوضـــع السطح داخل صندوق باستخدام الاختيار **Boxed** وأبعاد هذا الصندوق يمكن التحكم فيهـــا بواسطة الاختيار **BoxRatios** .

اسم الاختيار Option Name وقيمته الفعالة Default value	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
ViewPoint->{1.3,-2.4,2}	تحديد إحداثيات نقطة في الفراغ يتم النظر من عندها الى السطح وهذه الإحداثيات تكون بالنسبة الى مركز الصندوق	ViewPoint->{xv,yv,zv} تحديد آي نقطة (xv,yv,zv) في الفراغ
Boxed->True	رسم صندوق حول السطح	Boxed->False
BoxRatios->{1,1,0.4}	تحديد النسبة بين أطوال اوجه الصندوق في اتجاه المحاور x,y,z على الترتيب	BoxRatios->{nx,ny,nz} جعل النسبة nx:ny:nz بين أطوال اوجه الصندوق

```
In[6]:=rp3=Plot3D[Sin[x] Cos[y],{x,0,2Pi},{y,0,2P}]
```



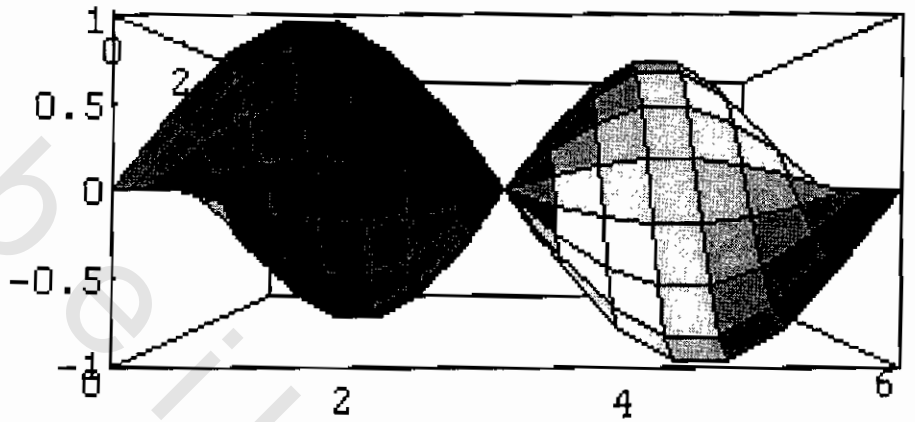
استخدام المتغير rp3 كمخزن لرسم سطح الدالة sin(x) cos(y) في النطاق

$$0 \le x \le 2\pi \quad , \quad 0 \le y \le 2\pi$$

حيث يتم النظر الى السطح من آلة تصوير تم وضعها عند الإحداثيات الفعالة 2 , 2.4- , 1.3)

)

```
In[7]:=Plot3D[Sin[x] Cos[y],{x,0,2Pi},{y,0,2Pi},ViewPoint->{0,-2,0}]
```

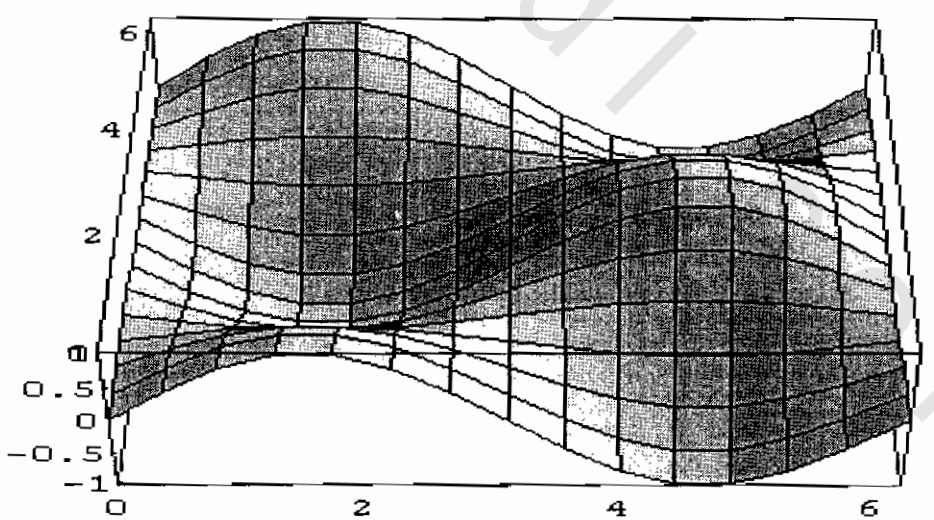


رســـــم سطح الدالة $\sin(x)\cos(y)$ فى النطاق

$$0 \le x \le 2\pi \quad , \quad 0 \le y \le 2\pi$$

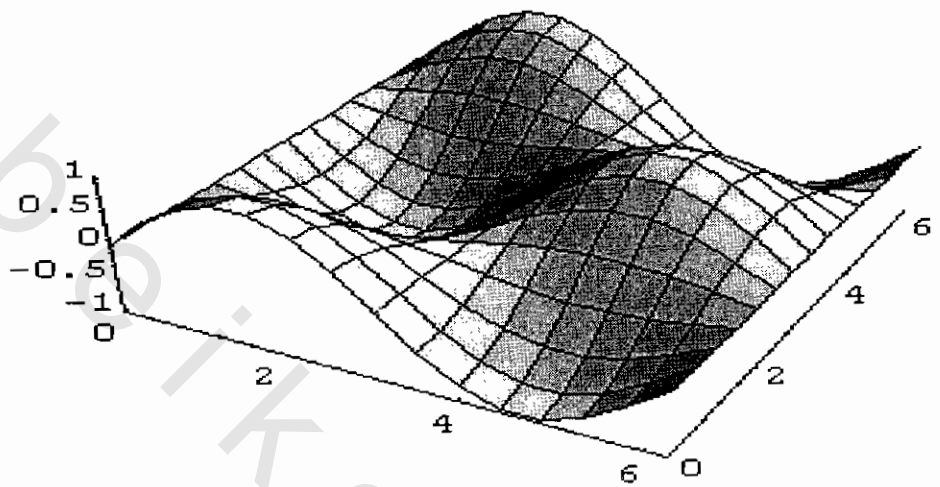
حيث يتم النظر الى السطح من آلة تصوير تم وضعها عند الإحداثيات (0, -2, 0)

```
In[8]:=Show[rp3,ViewPoint->{0,-4,4}]
```



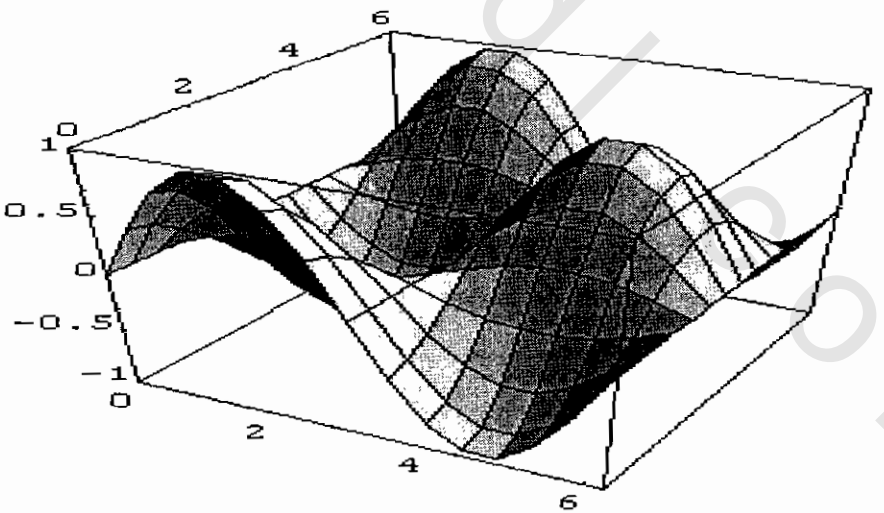
استخدام الأمر Show فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير rp3 حيث يتم تغيير موضع آلة التصوير الى الإحداثيات (0 , -4 , 4)

In[9]:=Show[rp3,Boxed->False]



استخدام الأمر **Show** في إعادة الرسم المخزون في المتغير **rp3** حيث يتم عرض السطح فقط وبدون رسم صندوق من حوله وذلك عن طريق الاختيار **Boxed->False**

In[10]:=Show[rp3,BoxRatios->{1,1,1}]

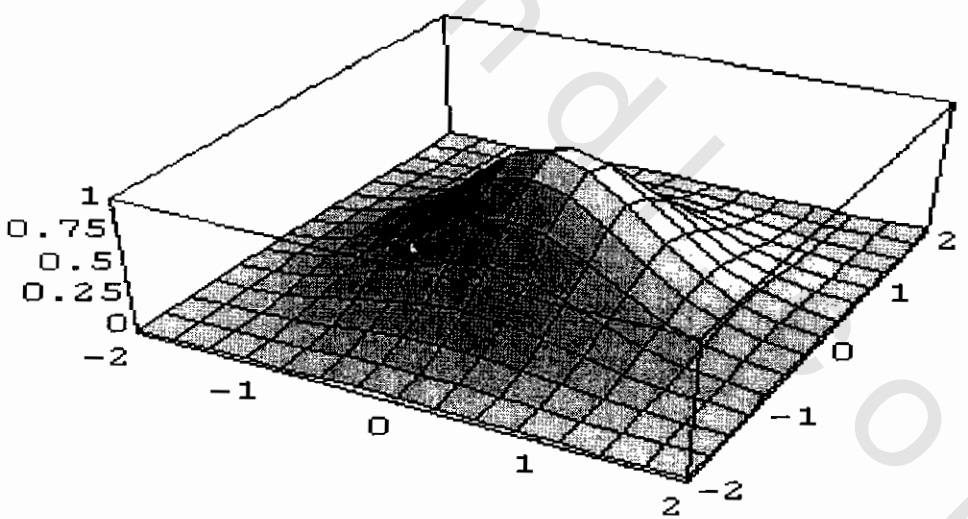


استخدام الأمر **Show** في إعادة الرسم المخزون في المتغير **rp3** حيث يتم عرض السطح داخل صندوق مكعب الشكل وذلك عن طريق الاختيار **BoxRatios->{1,1,1}**

وعند رسم السطوح فى الفراغ يمكن التحكم فى الأجزاء المختفية من السطح باستخدام الاختيار HiddenSurface كما يمكن عمل ظلال للسطح باستخدام الاختيار Shading أو عمل شبكة على السطح فى اتجاه المحاور x,y وذلك باستخدام الاختيار Mesh

اسم الاختيار Option Name وقيمته الفعالة Default value	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
HiddenSurface->True	منع ظهور الأجزاء المختفية من السطح	HiddenSurface->False
Shading->True	عمل ظلال للسطح	Shading->False
Mesh->True	رسم شبكة على السطح فى اتجاه المحاور x,y	Mesh->False

```
In[11]:=rp4=Plot3D[Exp[-x^2-y^2],{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

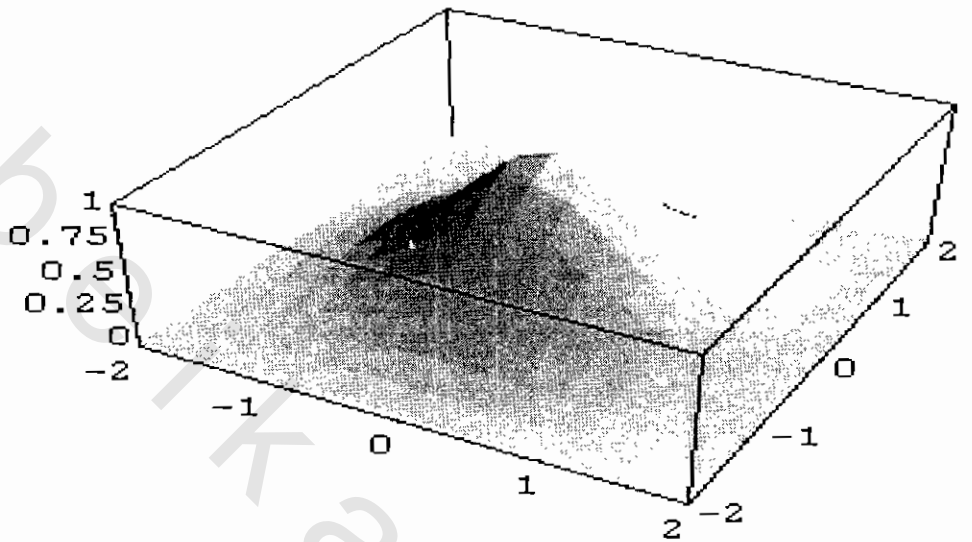


رســـــم سطح الدالة $e^{-x^2-y^2}$ فى النطاق

$$-2 \le x \le 2 \ , \ -2 \le y \le 2$$

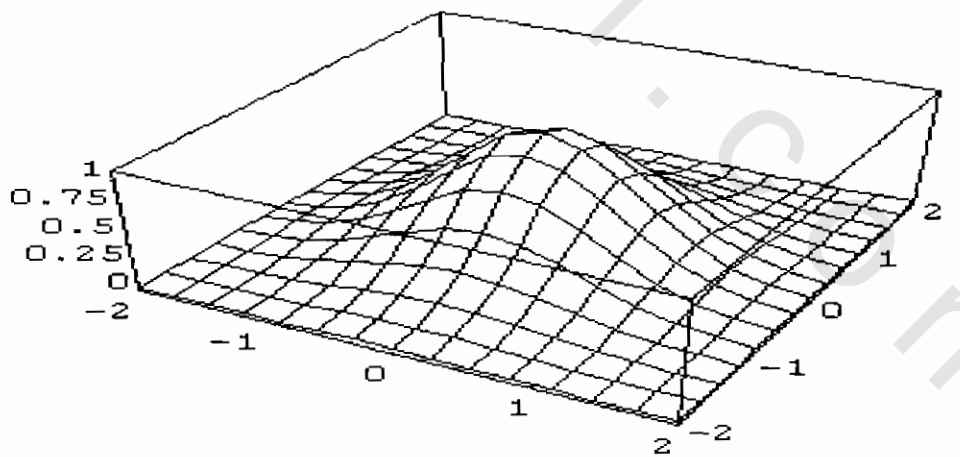
ونلاحظ وجود شبكة على السطح فى اتجاه المحاور وذلك نتيجة الاختيار الفعال Mesh->True

In[12]:=Show[rp4,Mesh->False]



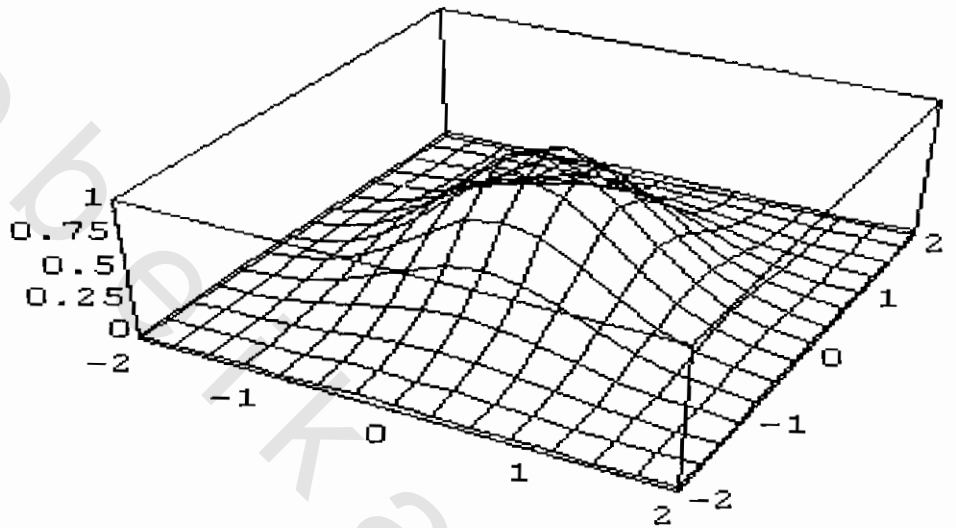
استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير **rp4** حيث يتم العرض بدون رسم شبكة على السطح فى اتجاه المحاور وذلك نتيجة الاختيار **Mesh->False**

In[13]:=Show[rp4,Shading->False]



استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير **rp4** حيث يتم العرض بدون تظليل السطح وذلك نتيجة الاختيار **Shading->False**

In[14]:=Show[rp4,HiddenSurface->False]

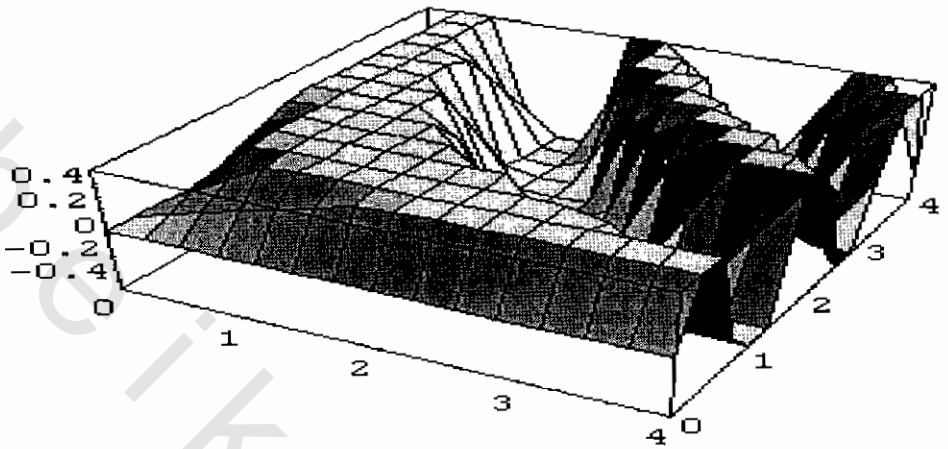


استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير **rp4** حيث يتم إظهار الأجزاء المختفية من السطح وذلك نتيجة الاختيار **HiddenSurface->False**

وعند رسم السطوح فى الفراغ يقوم ماثيماتيكا بقطع أجزاء السطح الخارجة عن الصندوق ويمكن توضيح الأماكن التى تم فيها قطع السطح باستخدام الاختيار **ClipFill** كالآتي :

اسم الاختيار **Option Name** وقيمته الفعالة **Default value**	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
ClipFill->Automatic	توضيح الأماكن التى تم عندها قطع السطح وفقا للمواصفات الفعالة للرسم	**ClipFill->None** **ClipFill->GrayLevel[i]** **ClipFill->RGBColor[r,g,b]** **ClipFill->{bootom,top}**

```
In[15]:= rp5=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},PlotRange->{-0.5,0.5}]
```

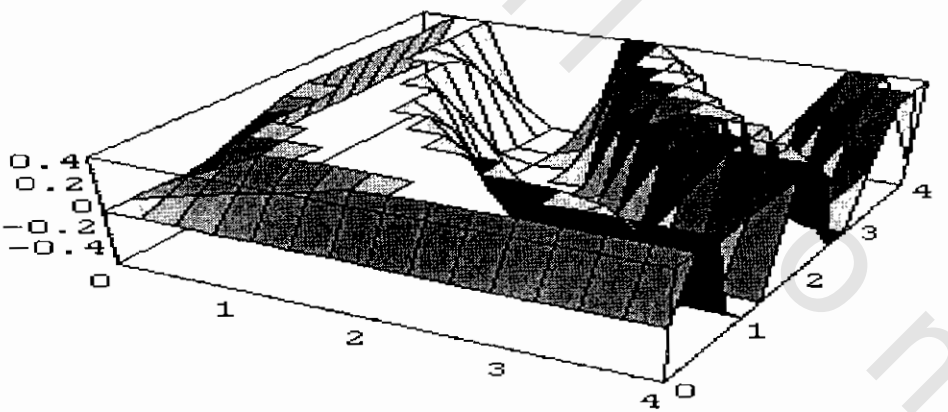


استخدام المتغير **rp5** كمخزن لرسم الدالة **Sin(x y)** على المنطقة المستطيلة الشكل

$$0 \le x \le 4 \quad , \quad 0 \le y \le 4$$

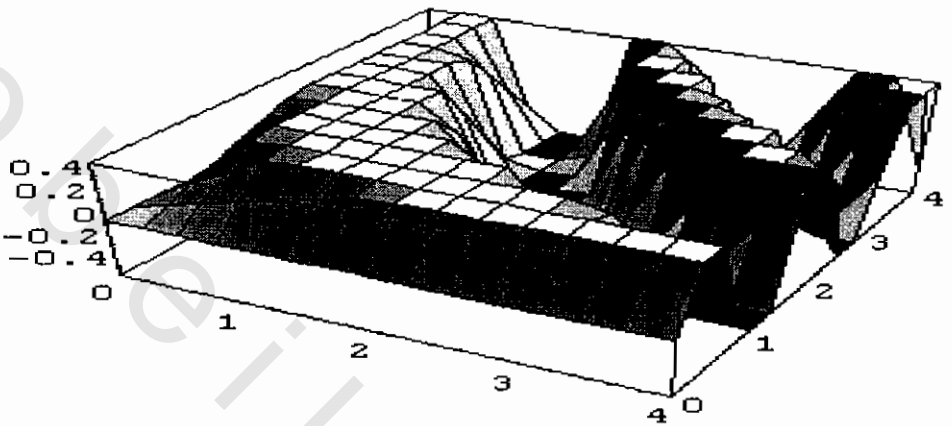
مع تغيير مدى الرسم بالاختيار **PlotRange->{-0.5,0.5}**

```
In[16]:= Show[rp5,ClipFill->None]
```



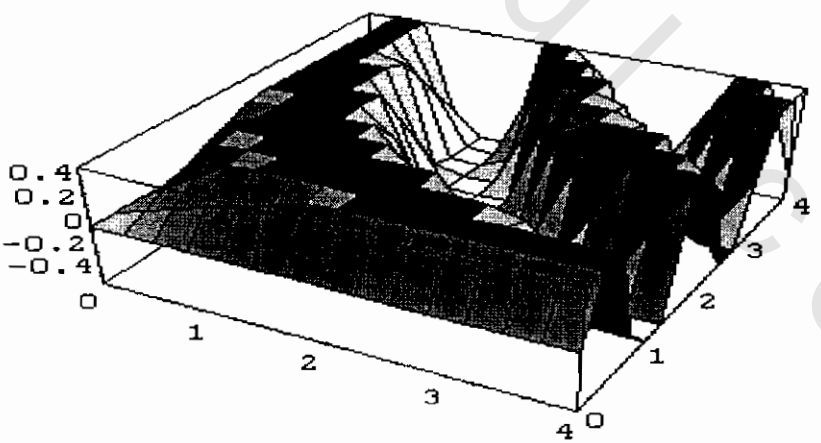
استخدام الأمر **Show** في إعادة الرسم المخزون في المتغير **rp5** حيث يتم عرض السطح بحيث تترك الأجزاء المقطوعة من السطح واضحة بدون تظليل وذلك نتيجة الاختيار **ClipFill->None**

In[17]:= Show[rp5,ClipFill->{GrayLevel[0],GrayLevel[1]}]



استخدام الأمر **Show** في إعادة الرسم المخزون في المتغير **rp5** حيث يتم عرض السطح بحيث تظهر الأجزاء المقطوعة للسطح من اسفل باللون الأسود ومن أعلى باللون الأبيض وذلك نتيجة الاختيار **ClipFill->{GrayLevel[0],GrayLevel[1]}**

In[18]:=Show[rp5,ClipFill->{GrayLevel[1],GrayLevel[0]}]



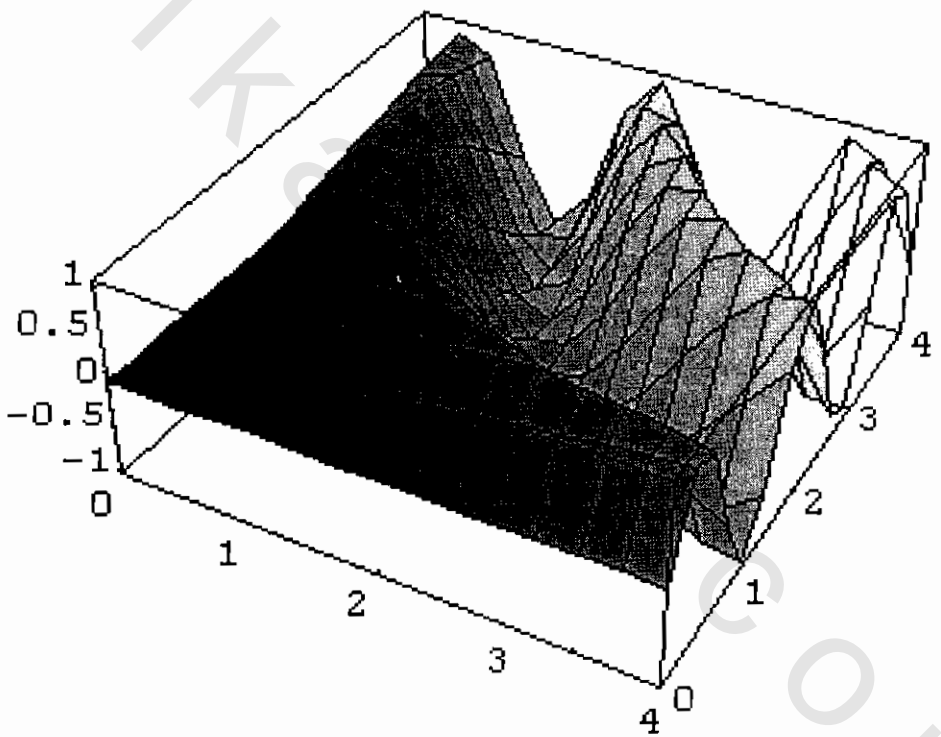
استخدام الأمر **Show** في إعادة الرسم المخزون في المتغير **rp5** حيث يتم عرض السطح بحيث تظهر الأجزاء المقطوعة للسطح من اسفل باللون الأبيض ومن أعلى باللون الأسود وذلك نتيجة الاختيار **ClipFill->{GrayLevel[1],GrayLevel[0]}**

ويستطيع ماثيماتيكا تظليل كل جزء من سطح الدالة وفقا لموصفات معينة وذلك باستخدام الأمر Plot3D فى الصورة الآتية :

Plot3D[{f(x,y),s},{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]

رسم سطح الدالة **f(x,y)** مع تظليل السطح وفقا للدالة **s**

In[19]:=Plot3D[{Sin[x y],GrayLevel[(x+y)/8]},{x,0,4},{y,0,4}]



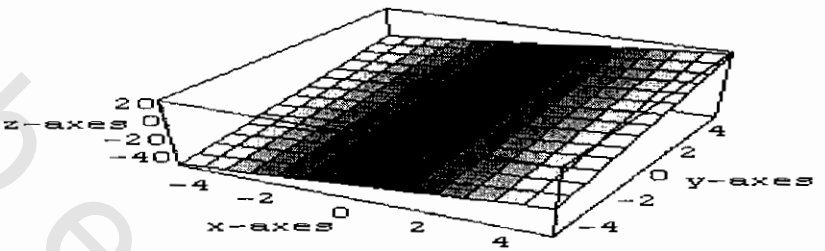
رسم الدالة **Sin(x y)** على المنطقة المستطيلة الشكل

$$0 \le x \le 4 \quad , \quad 0 \le y \le 4$$

وبحيث يتم تظليل سطح الدالة وفقا للدالة **GrayLevel[(x+y)/8]**

حيث تتغير قيم x , y على المنطقة المعطاة ونلاحظ فى الرسم تدرج التظليل للسطح

```
In[20]:=Plot3D[{3x+4y-9,GrayLevel[Abs[x]/5]},{x,-5,5},{y,-5,5},
        AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```



رســـــــــم المستوى $z= 3x+4y-9$ على المنطقة المستطيلة الشكل

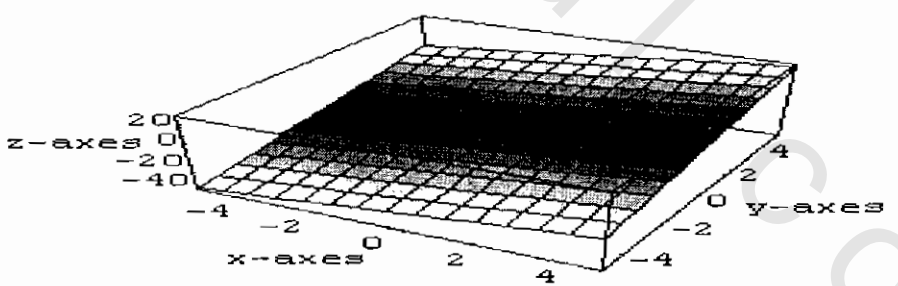
$$-5 \le x \le 5 \quad , \quad -5 \le y \le 5$$

وبحيث يتم تظليل ســـــطح المســـــتوى وفقا للدالة GrayLevel[Abs[x]]/5

حيث تتغير قيم x , y على المنطقة المعطاة ونلاحظ فى الرسم تدرج التظليل لسطح المستوى

فى اتجاه محور x كما نلاحظ كتابة عناوين على المحاور نتيجة للاختيار AxesLabel

```
In[21]:=Plot3D[{3x+4y-9,GrayLevel[Abs[y]/5]},{x,-5,5},{y,-5,5},
        AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```



رســـــــــم المستوى $z= 3x+4y-9$ على المنطقة المستطيلة الشكل

$$-5 \le x \le 5 \quad , \quad -5 \le y \le 5$$

وبحيث يتم تظليل ســـــطح المســـــتوى وفقا للدالة GrayLevel[Abs[x]]/5

حيث تتغير قيم x , y على المنطقة المعطاة ونلاحظ فى الرسم تدرج التظليل لسطح المستوى

فى اتجاه محور y كما نلاحظ كتابة عناوين على المحاور نتيجة للاختيار AxesLabel

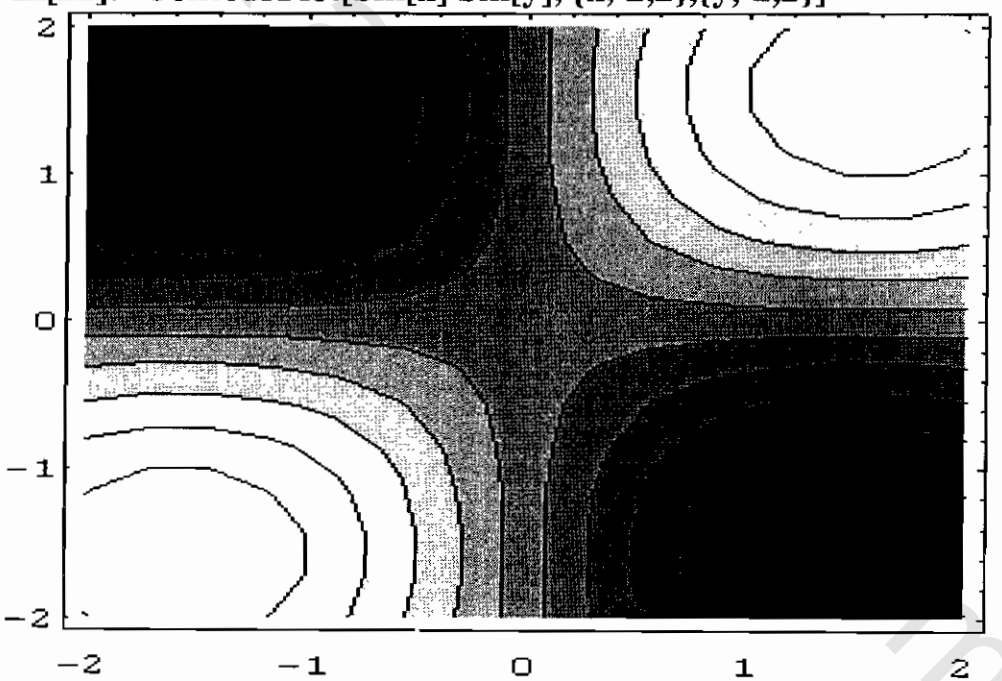
وعندما نحاول التعمق فى فهم طبيعة سطح خاص فانه يكون من المفيد النظر الى السطح بطرق مختلفة والأمر **Plot3D** يقدم لنا صورة فى الفراغ للسطح وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن الحصول على خريطة لمقاطع السطح بطريقة خطوط الكونتور التى تربط النقط الواقعة على السطح والتى لها نفس الارتفاع ويتم ذلك عن طريق الأمر **ContourPlot** كالآتي:

ContourPlot[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]

رسم خطوط الكونتور للدالة **f (x,y)** فى النطاق من **x = xmin** الى **x = xmax**

ومن **y = ymin** الى **y = ymax**

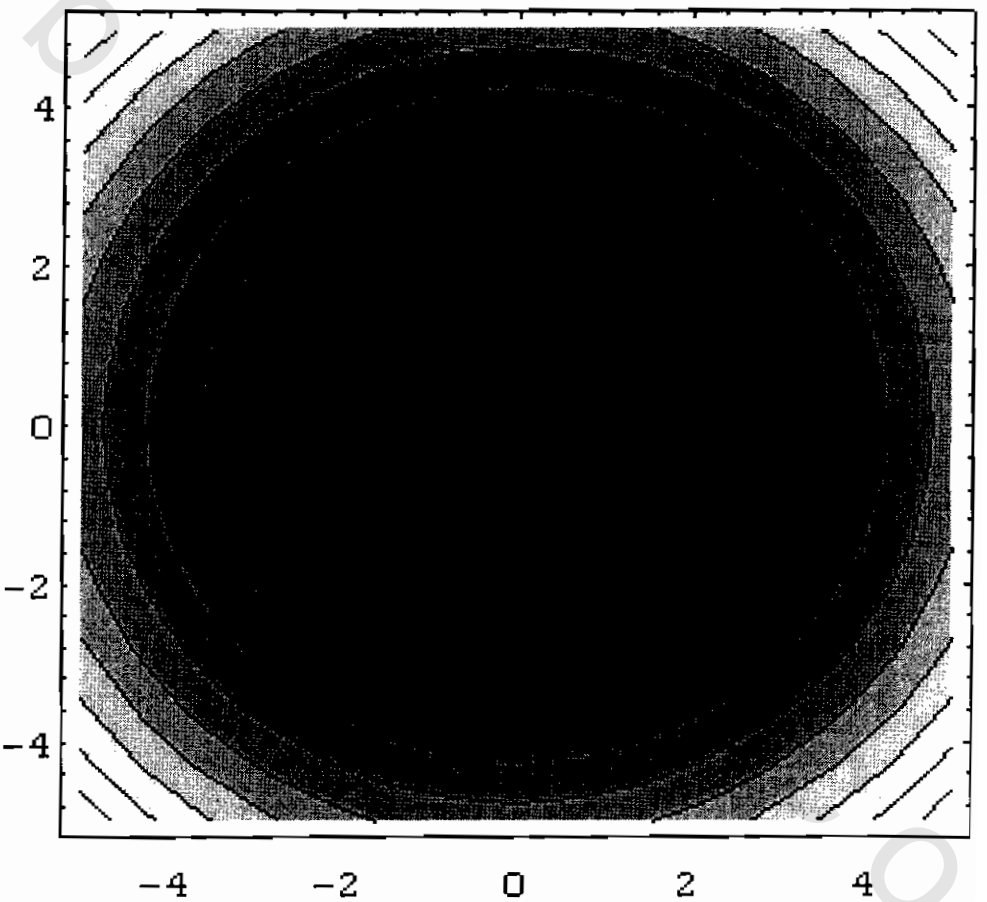
In[22]:=ContourPlot[Sin[x] Sin[y], {x,-2,2},{y,-2,2}]



رسم مقاطع سطح الدالة **f(x,y) = Sin(x) Sin(y)** بطريقة خطوط الكونتور فى المنطقة

$-2 \le x \le 2 \quad , \quad -2 \le y \le 2$

```
In[23]:= ContourPlot[x^2+y^2, {x,-5,5},{y,-5,5}]
```



رسم مقاطع سطح الدالة $f(x,y)=x^2+y^2$ بطريقة خطوط الكونتور فى المنطقة

$$-5 \le x \le 5 \quad , \quad -5 \le y \le 5$$

٣ ٠ رسـم الدوال البارامتريـة Parametric Plots

إذا كان f(x) دالة وحيدة القيمة single valued فإن المعادلات التى علـى الصـورة y = f(x) تصف منحنيات فى المستوى يقطعها أي خط رأسي مرة واحدة فقـط فـى نطـاق التعريف ، والإحداثى y لكل نقطة يكون دالة فى الإحداثى x ولكن توجد منحنيات اكـثر تعقيدا تضاعف نفسها ومثل هذه المنحنيات يمكن دراستها بسهوله باستخدام الصورة البارامترية ويتم ذلك بجعل المتغيرات x , y دوال فى متغير آخر t مثل x = g(t) , y = h(t) وكل قيمة للمتغير t تعين قيمة للمتغيرات x , y يمكن اعتبارها إحداثيات نقطة فى المستوى xy وفئة جميع النقط (g(t),h(t)) تكون منحنى والمعادلتان x = g(t) , y = h(t) تسـميان المعادلتان البارامتريتان للمنحنى والمتغير t يسمى بارامتر ، وبرنامج ماثيماتيكا قادر على رسـم الدوال فى المستوى بالصورة البارامترية وذلك باستخدام الأمر ParametricPlot كالآتي :

ParametricPlot[{fx, fy}, {t, tmin, tmax}]

رسم الدالة المعطاة بالصورة البارامترية

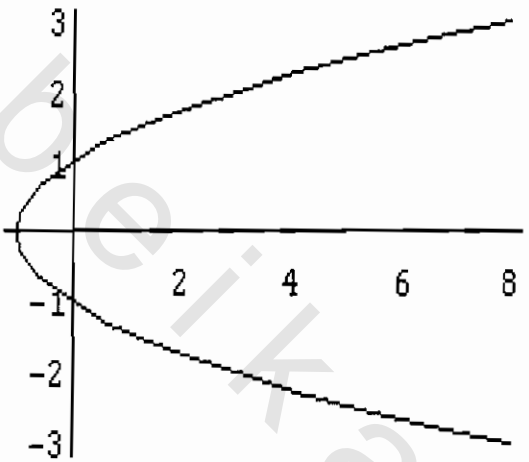
x=fx , y=fy , tmin≤ t ≤ tmax

حيث fy , fx دوال فى البارامتر t

ParametricPlot[{{fx, fy}, {gx, gy}, ...}, {t, tmin, tmax}]

رسم اكثر من دالة معطاة بالصورة البارامترية

In[1]:=ParametricPlot[{t^2-1,t},{t,-3,3}]



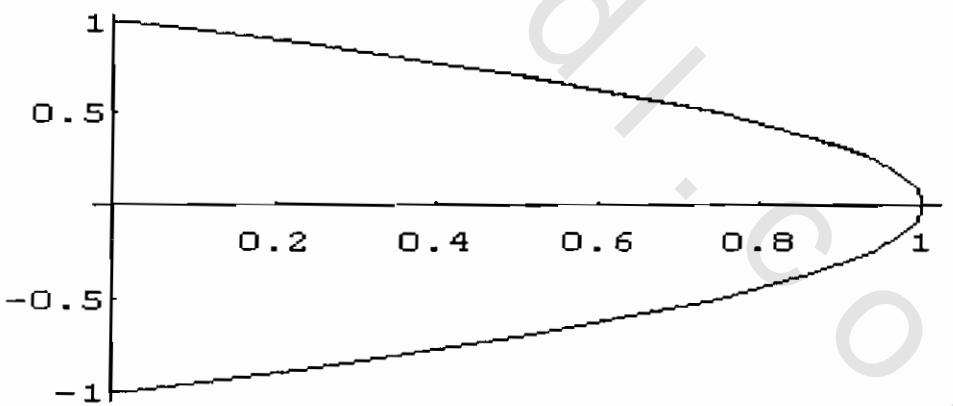
رسم المنحنى الذى معادلتاه البارامتريتان

$x=t^2-1$, $y=t$, $-3\le t\le 3$

والمنحنى فى الصورة الكارتيزية يكون

$x^2=x+1$, $-1\le x\le 8$

In[2]:=ParametricPlot[{Cos[t]^2,Sin[t]},{t,0,2Pi}]



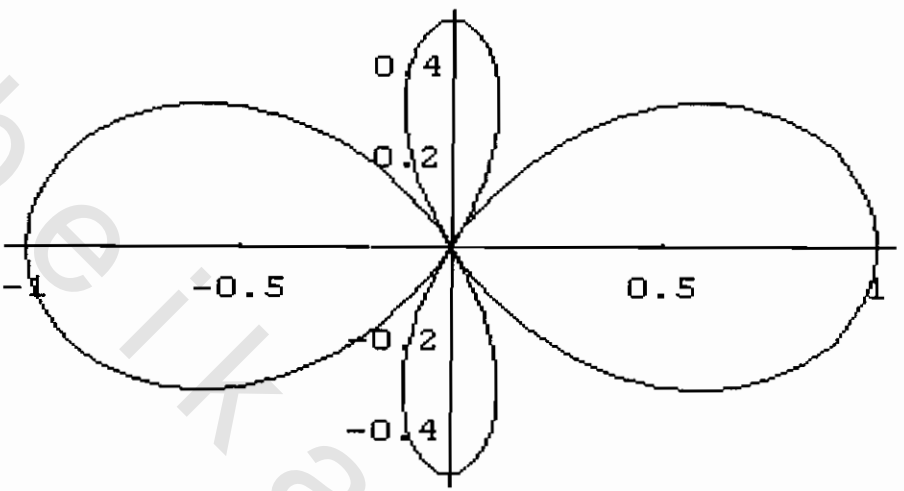
رسم المنحنى الذى معادلتاه البارامتريتان

$x=\cos^2(t)$, $y=\sin(t)$, $0\le t\le 2\pi$

والمنحنى فى الصورة الكارتيزية يكون

$y^2=1-x$, $0\le x\le 1$

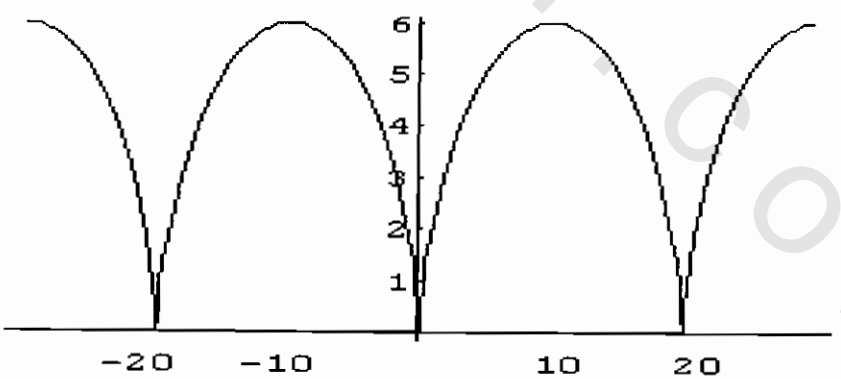
```
In[3]:=r[t_]:=(3Cos[t]^2-1)/2;
       ParametricPlot[{r[t]Cos[t],r[t]Sin[t]},{t,0,2Pi}]
```



رسم المنحنى فى الصورة القطبية

$$r=\frac{3\cos^2(t)-1}{2}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

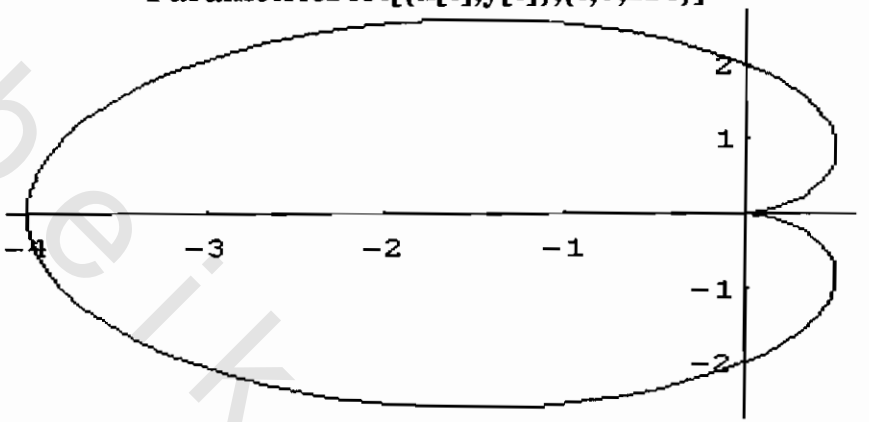
```
In[4]:=ParametricPlot[{3(t-Sin[t]),3(1-Cos[t])},{t,-3Pi,3Pi}]
```



رسم منحنى الدويرى (السيكلويد)

$$x = 3(t-\sin(t))$$
$$y = 3(1-\cos(t)) \quad , \quad -3 \le t \le 3$$

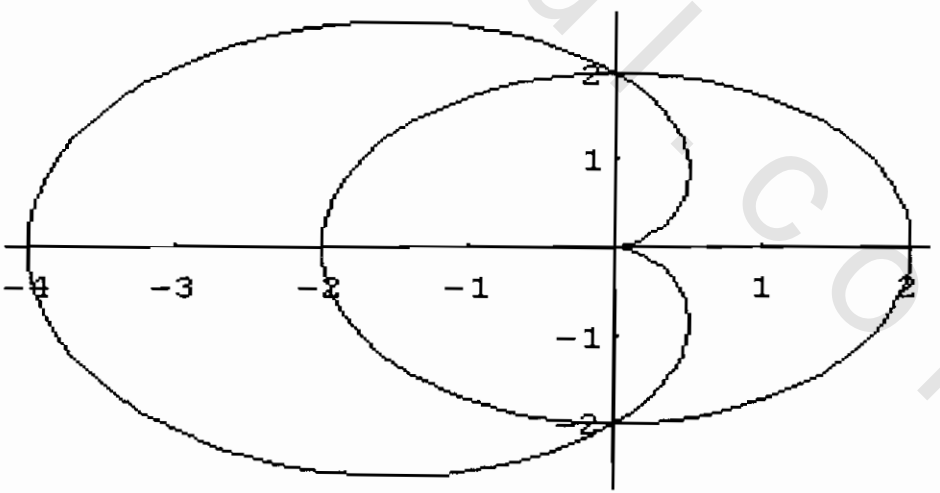
```
In[5]:=x[t_]:=2(Cos[t]-Cos[t]^2);
       y[t_]:=2(Sin[t]-Sin[t] Cos[t]);
       ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,2Pi}]
```



رسم منحنى الكارديويد المعطى بالصورة البارامترية

$$x(t) = 2 \cos(t) [1 - \cos(t)]$$
$$y(t) = 2 \sin(t) [1 - \cos(t)]$$

```
In[6]:=ParametricPlot[{{x[t],y[t]},{2Cos[t],2Sin[t]}},{t,0,2Pi}]
```



رسم منحنى الكارديويد السابق مع الدائرة المعطاة بالصورة القطبية

$$x(t) = 2 \cos(t)$$
$$y(t) = 2 \sin(t)$$