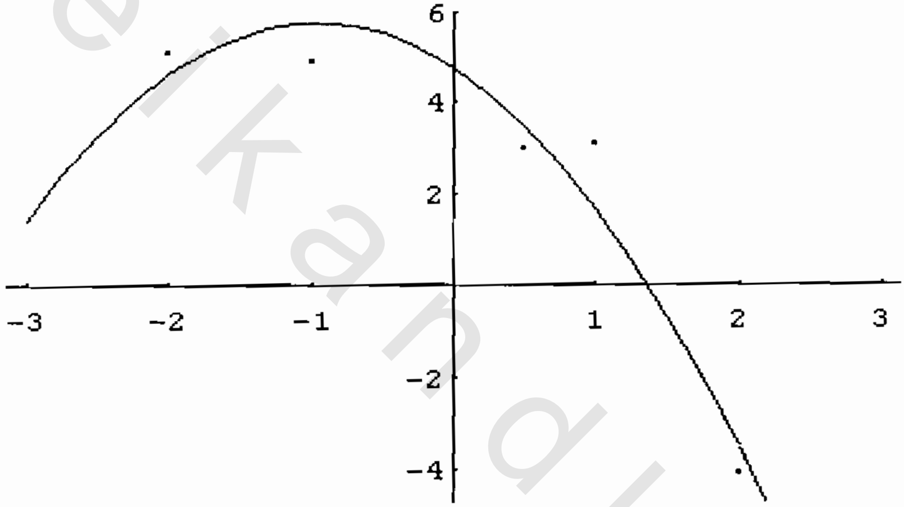
الباب السادس
ماثيماتيكا والتحليل العددى



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الأتية :

١. الحل العددى لمعادلات كثيرات الحدود
Numerical Solution of Polynomial Equations

٢. إيجاد جذر تقريبى — Numerical Root Finding

٣. إيجاد القيم الصغرى — Numerical Minimization

٤. الحســـــاب العددى للمجموع وحواصل الضرب
Numerical Sum and Product

٥. التكــامل العــددى — Numerical Integration

٦. التقريب بالمربعات الصغرى — Least - squares

البـــاب الســـادس

ماثيماتيكا والتحليـل العـددى

التحليل العددى Numerical Analysis هو أحد فروع الرياضيات التى تعتمـــد بقوة على التطورات الحديثة فى علم الكومبيوتر وعلى التطبيقات فى استخدام الطرق العدديـــة لحل المسائل الرياضية المختلفة ، ومن اكثر مميزات ماثيماتيكا هو المقدرة على الحصول على نتائج مضبوطة وفى صورة رمزية Exact Symbolic Results للحسابات الرياضية المختلفة وفى بعض الحسابات يكون من غير الممكن الحصول على النتائج المضبوطة ولمثل هذه الحسابات فـــإن ماثيماتيكا يقدم العديد من الدوال والأوامر للحصول على قيم عددية تقريبية للنتائج وكما علمنا من قبل فإن الدالة N والتى تستخدم بالصورة

expr//N أو N[expr]

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية expr والدالة

N[expr,n]

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية expr مقربة الى n من الأرقام العشرية وفى هذا الباب سوف نتعرف على بعض أوامر ماثيماتيكا الخاصة بالحصول على قيم تقريبيـــة لنتـــائج العمليات الرياضية فى مجالات مختلفة من التحليل العددى ،

١. الحل العددى لمعادلات كثيرات الحدود
Numerical Solution of Polynomial Equations

فى برنامج ماثيماتيكا يمكن حل معادلات كثيرات الحدود باستخدام الأمر Solve كما عرفنا فى الباب الثالث وفى حالة عدم الحصول على حل صريح للمعادلة أو مجموعة المعادلات يمكن استخدام الدالة N للحصول على حلول عددية تقريبية

باستخدام الأمر Solve يمكن حل معادلة كثيرة الحدود $x^2 - 3x + 2 = 0$ والحصول على الجذور

```
In[1]:= Solve[x^2-3x+2==0,x]
Out[1]={{x -> 1}, {x -> 2}}
```

الأمر Solve لم يتمكن من إيجاد حل معادلة كثيرة الحدود $x^5 + 7x + 1 = 0$

```
In[2]  := Solve[x^5+7x+1==0,x]
Out[2] = ToRules[Roots[7 x + x^5  == -1, x]
```

باستخدام الدالة N نحصل على قيمة عاددية تقريبية للحل

```
In[3]  :=N[%]
Out[3] ={{x -> -1.11308 - 1.15173 I},
         {x -> -1.11308 + 1.15173 I},
         {x -> -0.142849},
         {x -> 1.1845 - 1.15139 I}, {x -> 1.1845 + 1.15139 I}}
```

ويمكن إيجاد حلول عددية تقريبية بطريقة مباشرة لمعادلات كثيرات الحدود بـدون الحاجـة الى إيجاد الحل المضبوط أولا وذلك باستخدام الأمر NRoots كالآتي :

للحصول على حـل عددى تقريبى لمعـادلة كثيرة الحدود poly = 0 بالنسبة الى المتغير x	NRoots[poly= = 0 ,x]
للحصول على حـل عددى تقريبى لمعـادلة كثيرة الحدود poly = 0 بالنسـبة الى المتغير x وبدقة n رقم عشرى	NRoots[poly= = 0,x,n]

للحصول على حل عددى تقريبى لمعادلة كثيرة الحدود $x^5 + 7x + 1 = 0$

```
In[4]:=NRoots[x^5+7x+1==0,x]
Out[4]=
    x = = -1.11308 - 1.15173 I ||
    x = = -1.11308 + 1.15173 I || x = = -0.142849 ||
    x = = 1.1845 - 1.15139 I || x = = 1.1845 + 1.15139 I
```

لجعل الحل الناتج من جملة الإدخال In[4] فى صورة قائمة بدلا من الصورة المنطقية

```
In[5]:=ToRules[%]
Out[5]=
    Sequence[{x -> -1.11308 - 1.15173 I},
             {x -> -1.11308 + 1.15173 I},
             {x -> -0.142849},
             {x -> 1.1845 - 1.15139 I},
             {x -> 1.1845 + 1.15139 I}]
```

٢. إيجاد جذر تقريبى Numerical Root Finding

الأمر **NRoots** يقدم طريقة لإيجاد حلول عددية تقريبية لمعادلات كثيرات الحدود لكن إيجاد حلول عددية لمعادلات عامة (تحتوى على دوال مثلثية أو أسية أو لوغاريتمية ...) يكون اكثر صعوبة ، وبرنامج ماثيماتيكا يحتوى على الأمر **FindRoot** الذى يقدم طريقة عددية للبحث عن أي جذر للمعادلة أو لمجموعة من المعادلات بالقرب من نقطة بداية x_0 وذلك باستخدام طريقة نيوتن **Newton's method** فى إيجاد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ مبتدئا من نقطة البداية x_0 وبمعلومية قيمة المشتقة $f'(x)$ يتم الحصول على متتابعة من القيم x_n حتى نصل الى اقرب جذر من نقطة البداية ويتم طباعة هذا الجذر فقط حتى إذا كان للمعادلة اكثر من جذر ، ومتتابعة القيم x_n تحسب من العلاقة التكرارية

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0, 1, \ldots$$

وفى حالة إذا كان من الصعب الحصول على مشتقة الدالة بصورة رمزية فإنه يتم حساب المشتقة $f'(x)$ بصورة عددية تقريبية من العلاقة

$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

ويتم حساب جذر للمعادلة $f(x) = 0$ باستخدام طريقة القاطع **secant method** من العلاقة

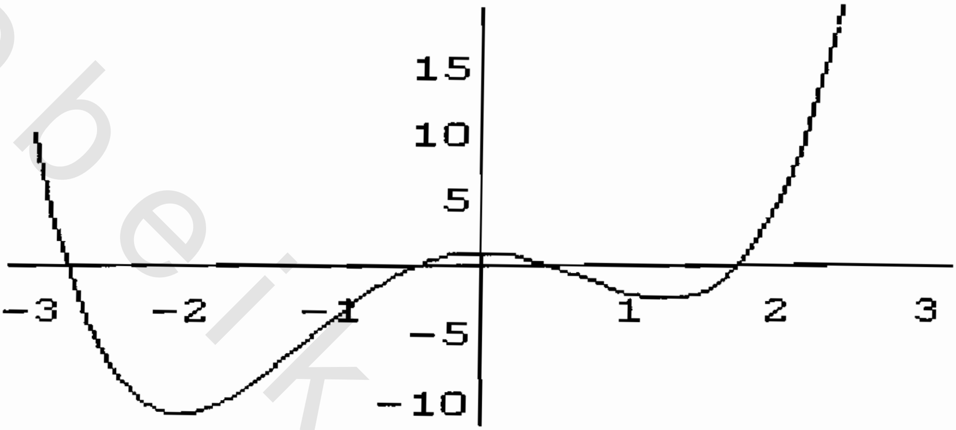
$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \right) f(x_n) \qquad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

حيث x_0 , x_1 قيم ابتدائية يتم تحديدها .

وفى الجدول الآتي نعرض الصيغ المختلفة للأمر **FindRoot**

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
البحث عن جذر للمعادلة **lhs= =rhs** مبتدئا من النقطة $x = x_0$	**FindRoot[lhs= =rhs,{x,x0}]**
البحث عن جذر للمعادلة **lhs= =rhs** مبتدئا من النقطة **x = xstart** وبحيث يتم البحث داخل النطاق من **x = xmin** الى **x = xmax** ويتـــم إيقاف البحث عن الجذر خارج هذا الإطار	**FindRoot[lhs==rhs, {x,xstart,xmin,xmax}]**
البحث عن جذر للمعادلة **lhs= =rhs** مبتدئا من القيـــــم الابتدائية x_1 , x_0 باستخدام طريقة القاطع	**FindRoot[lhs==rhs,{x,{x0,x1}}]**
البـــحث عن جذر لمجموعة المعــــادلات **eqn1 , eqn2 , ...** فى وقت واحد مبتدئا من نقط البداية x_0 , y_0 , ...	**FindRoot[{eqn1,eqn2,...},{x,x0}, {y,y0},...]**

```
In[1]:=f[x_]:=1-5 x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-3,3}]
```



تعريف الدالة f(x) وهى كثيرة حـــدود من الدرجـــة الرابـــعة ثم رســـم الدالـــة فى الفترة (-3,3)

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة f(x) = 0 بالقرب من نقطة البداية x=-2.5

```
In[2]:=FindRoot[f[x]= =0,{x,-2.5}]
Out[2]={x -> -2.76251}
```

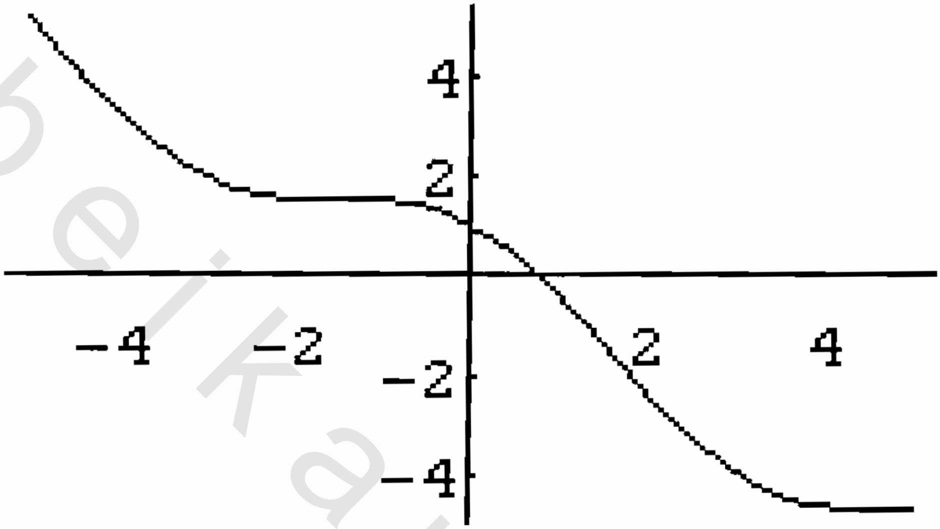
للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة f(x) = 0 بالقرب من نقطة البداية x=0.1

```
In[3]:=FindRoot[f[x]= =0,{x,0.1}]
Out[3]={x -> 0.483179}
```

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة f(x) = 0 بالقرب من نقطة البداية x = 2

```
In[4]:=FindRoot[f[x]==0,{x,2}]
Out[4]={x -> 1.71594}
```

In[5]:= Plot[Cos[x]-x,{x,-5,5}]



رسم الدالة cos(x) - x في الفترة [-5,5]

للحصول على جـــذر عددى تقريبي للمعادلة cos x=x بالقرب من x=0

In[6]:=FindRoot[Cos[x]==x,{x,0}]
Out[6]={x -> 0.739085}

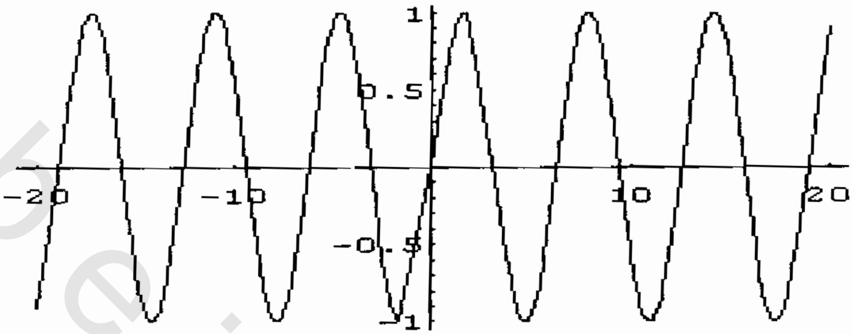
للحصول على جذر عددى تقريبي للمعادلة مبتدئا من نقط البداية $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

In[7]:=FindRoot[Cos[x]= =x,{x,{0,1}}]
Out[7]={x -> 0.739085}

للحصول على جذر عددى تقريبي للمعادلة $x^2 -1 = 0$ بالقرب من نقطة بداية يتم اختيارها عشوائيا داخل الفترة (0,1)

In[8]:=FindRoot[x^2-1==0,{x,Random[]}]
Out[8]={x -> 1.}

In[9]:=Plot[Sin[x],{x,-20,20}]



منحنى الدالة $\sin(x)$ يقطع محور x في عدد لانهائي من النقط

$$x = n\pi,\ \ n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ .....$$

للحصول على جـــذر عددى تقريبي للمعادلة $\sin x = 0$ بالقرب من نقطة البداية $x=3$

In[10]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,3}]
Out[10]={x -> 3.14159}

المعادلة $\sin x = 2$ ليس لها حل حقيقي ولكن لها حل مركب لذلك تظهر رسالة تفيد بأن طريقة نيوتن لا تقترب من الجذر

In[11]:=FindRoot[Sin[x]==2,{x,1}]
Out[11]=FindRoot::cvnwt:
Newton's method failed to converge to the prescribed accuracy after 15 iterations.

للحصول على جـــذر عددى تقريبي للمعادلة $\sin x = 2$ بالقرب من نقطة البداية $x=I$

In[12]:=FindRoot[Sin[x]= =2,{x,I}]
Out[12]={x -> 1.5708 + 1.31696 I}

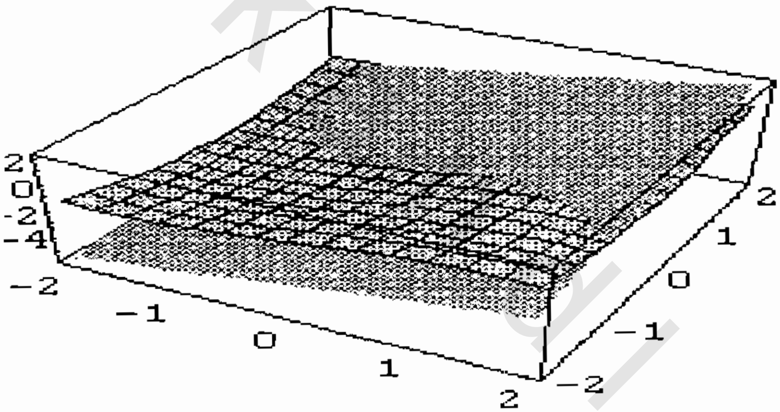
الدالة **FindRoot** تقوم بالبحث عن جذر عددى تقريبي للمعادلة $\sin x = 0$ بالقرب من نقطة البداية $x=3$ وداخل الفترة **[2.5,3.5]** فقط ونلاحظ في هذا المثال انه يوجد جذر في هذه الفترة

In[13]:=FindRoot[Sin[x]= =0,{x,3,2.5,3.5}]
Out[13]={x -> 3.14159}

الدالة FindRoot تقوم بالبحث عن جذر عددى تقريبى للمعادلة $\sin x = 0$ مبتدئا من النقطة x=1 وداخل الفترة [0.5,1.5] فقط ونلاحظ فى هذا المثال انه لا يوجد جذر فى هذه الفترة

```
In[14]:=FindRoot[Sin[x]= =0,{x,1,0.5,1.5}]
Out[14]=FindRoot::regex:
Reached the point {-0.557408}
which is outsidethe region {{0.5, 1.5}}.
{x -> -0.557408}
```

```
In[15]:=p1=Plot3D[Sin[x]-Cos[y],{x,-2,2},{y,-2,2},
DisplayFunction->Identity];
p2=Plot3D[x+y-1,{x,-2,2},{y,-2,2},Mesh->False,
        DisplayFunction->Identity];
                              Show[p1,p2]
```



فى هذا المثال تم استعراض رسم الدالة sin (x) - cos(x) وتخطيط السطح الناتج بخطوط شبكية مع رسم الدالة x + y - 1 بدون تخطيط السطح الناتج وقد تم رسم الدالتين معا فى شـــــكل واحد لتوضيح تقاطع السطحين . ولإيجاد حــــــل عددى تقريبى للمعادلتين معا فى آن واحد مبتدئا من نقط البداية $x = 0.1$, $y = 0.2$

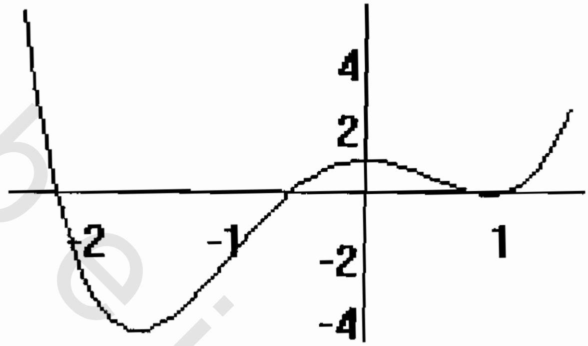
```
In[16]:=FindRoot[{Sin[x]==Cos[y],x+y==1},{x,0.1},{y,0.2}]
Out[16]={x -> 1.2854, y -> -0.285398}
```

٣ . إيجاد القيم الصغرى Numerical Minimization

فى برنامج ماثيماتيكا الأمر **FindRoot** يقدم لنا طريقة عددية لإيجاد نقط تنعدم عندها الدالة وفى بعض الأحيان يكون من المهم إيجاد نقط تكون عندها الدالة $f(x)$ اصغر ما يمكن آي إيجاد نقط نهايات صغرى محلية **local minimum** للدالة $f(x)$ ويمكن الحصول على هذه النقط عن طريق تطبيق الأمر **FindRoot** على مشتقة الدالة $f(x)$ ، وماثيماتيكا يقدم الأمر **FindMinimum** لحساب نقط نهايات صغرى للدالة $f(x)$ بطريقة مباشرة وكذلك القيم الصغرى للدالة عند هذه النقط وباستخدام العلاقة $\max(f) = -\min(-f)$ يمكن إيجاد نقط النهايات العظمى للدالة $f(x)$.

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة f بالقرب من نقطة البداية x_0 وحساب القيمة الصغرى للدالة.	**FindMinimum[f,{x,x0}]**
البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة f بالقرب من نقطة البداية **x=xstart** وبحيث يتم البحث فقط داخل النطاق من **x=xmin** الى **x=xmax** وحساب القيمة الصغرى للدالة .	**FindMinimum[f,{x,xstart,xmin, xmax}]**
البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة f بالقرب من القيم الابتدائية x_0 , x_1 وحساب القيمة الصغرى للدالة ويستخدم الأمر **FindMinimum** بهذه الصورة عندما يكون من الصعب إيجاد التفاضل للدالة f	**FindMinimum[f,{x,{x0,x1}}]**
البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية لدالة فى اكثر من متغير $f(x , y , ...)$ بالقرب من القيم الابتدائية $x=x_0$, $y=y_0$, ... وحساب القيمة الصغرى للدالة .	**FindMinimum[f,{x,x0},{y,y0},...]**

In[1]:= f[x_]:=1-3x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-2.5,1.5}]



تعريف الدالة

$f(x) = 1 - 3x^2 + x^3 + x^4$

ثم رسمها فى الفترة [-2.5,1.5]

ونلاحظ أن الدالـــــة لها نقطتى نهاية صغرى محلية فى نطاق التعريف

In[2]:=FindMinimum[f[x],{x,-2}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من

Out[2]={-4.24791, {x -> -1.65587}} النقطة $x = -2$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

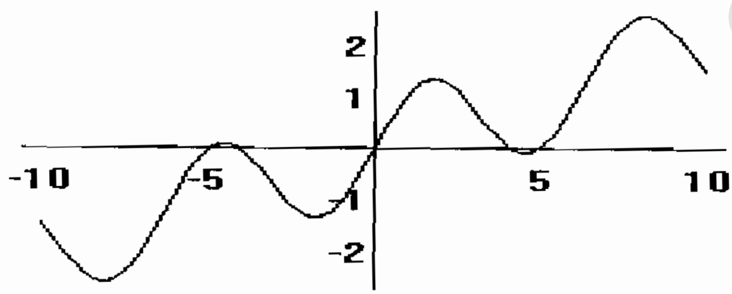
In[3]:=FindMinimum[f[x],{x,0.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من

Out[3]={-0.0450589, {x -> 0.905869}} النقطة $x = 1$ اد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[4]:=maxf=-FindMinimum[-f[x],{x,.5}] للبحث عن نقطةنهاية عظمى محلية للدالة بالقرب

Out[4]= {1. , { - { x->9.54982 10^{-13} }} من النقطة $x = .5$ إيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

In[5]:= Plot[Sin[x]+x/5,{x,-10,10}]



رسم الدالة

sin x + x/5

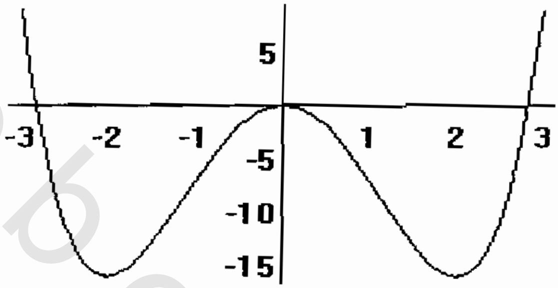
على الفترة [-10,10]

ونلاحظ أن الدالة لها اكثر من نقطة نهاية صغرىمحلية فى نطاق التعريف .

In[6]:=FindMinimum[Sin[x]+x/5,{x,1}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب

Out[6]={-1.33423, {x -> -1.77215}} من النقطة $x = 1$ جاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[7]:= r3[x_]:=x^4-8x^2;Plot[r3[x],{x,-3,3}]



تعريف الدالة

$r3(x) = x^4 - 8x^2$

ثم رسمها فى الفــــــترة [3 , 3-]

ونلاحظ أن الدالة لها نقطتى نهاية صغرى محلية فى نطاق التعريف .

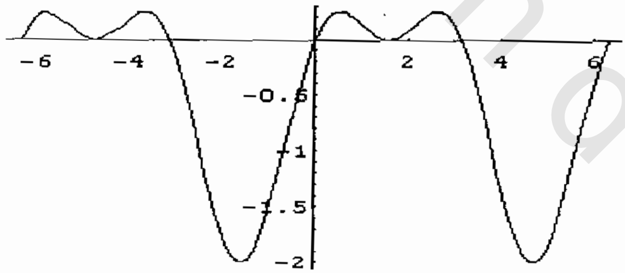
للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من النقطة x = 1.5 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[8]:=FindMinimum[r3[x],{x,1.5}]
Out[8]={-16., {x -> 2.}}

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالــة بالقرب من النقطة x = -1 وفى النطاق [-2.5,0] وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[9]:=FindMinimum[r3[x],{x,-1,-2.5,0}]
Out[9]={-16., {x ->- 2.}}

In[10]:= r4[x_]:=Sin[x]-Sin[x]^2; Plot[r4[x],{x,-2Pi,2Pi}]



تعريف الدالة

$r4(x) = \sin(x) - \sin^2(x)$

ثم رسمها فى الفـــترة $[-2\pi, 2\pi]$

ونلاحظ أن الدالة لها اكثر من نقطة نهاية صغرىمحلية فى نطاق التعريف .

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالةr4[x]بالقرب من النقطة x = 6 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[11]:= FindMinimum[r4[x],{x,6}]
Out[11]={-2., {x -> 4.71239}}

للبحث عن نقطةنهايةصغرى محلية للدالةr4[x] بالقرب من النقطة x = -3 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[12]:= FindMinimum[r4[x],{x,-3}]
Out[12]={-2., {x -> -1.5708}}

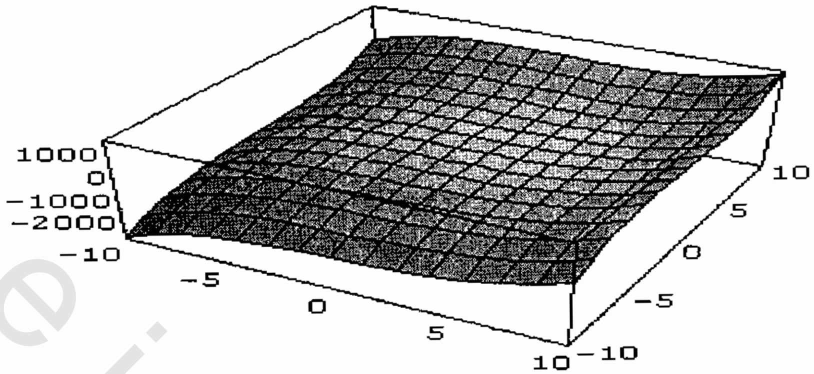
للبحث عن نقطةنهايةصغرى محلية للدالةr4[x] بالقرب من النقطة x = -4 وإيجادالقيمةالصغرى للدالةعندها

In[13]:= FindMinimum[r4[x],{x,-4}]
Out[13]={2.22045 10^{-16}, {x -> -4.71239}}

للبحث عن نقطةنهايةعظمى محليةللدالةr4[x]بالقرب من النقطة x = -4 وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

In[14]:=- FindMinimum[-r4[x],{x,-4}]
Out[14]={0.25, {-(x -> -3.66519)}}

In[15]:= f[x_,y_]:=x^3+y^3-3x y; Plot3D[f[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]



تعريف الدالة $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ثم رسمها فى الفراغ فى المنطقة

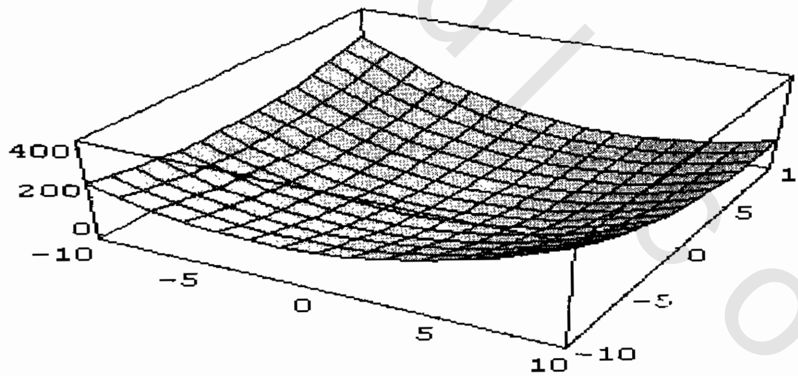
$-10 \le x \le 10 \quad , \quad -10 \le y \le 10$

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من $x=0.4$, $y=0.5$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها ،

In[16]:=FindMinimum[f[x,y],{x,0.4},{y,0.5}]

Out[16]={-1., {x -> 1., y -> 1.}}

In[17]:=h[x_,y_]:=2x^2+y^2-x y-7y; Plot3D[h[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]



تعريف الدالة $h(x,y) = 2x^2 + y^2 - x\,y - 7y$ ثم رسمها فى الفراغ فى المنطقة

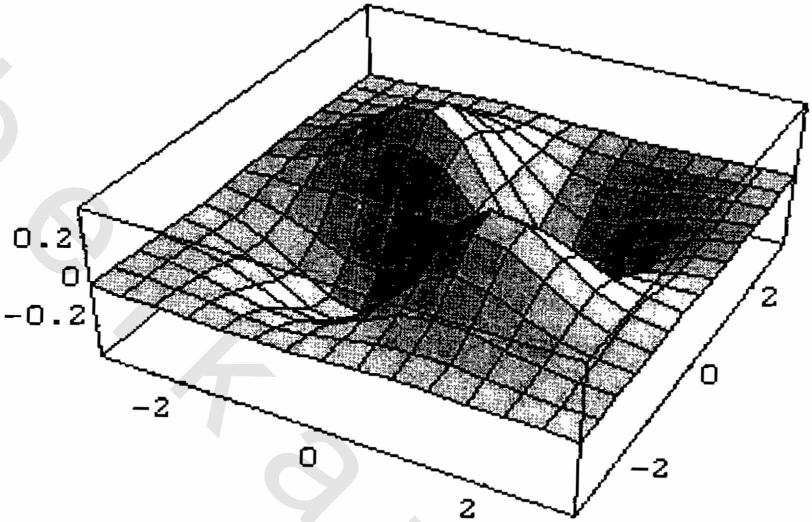
$-10 \le x \le 10 \quad , \quad -10 \le y \le 10$

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من $x=0.4$, $y=0.5$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها ،

In[18]:=FindMinimum[h[x,y],{x,2},{y,5}]

Out[18]={-14., {x -> 1., y -> 4.}}

In[19]:= g[x_,y_]:=-x y Exp[-(x^2+y^2)/2];
Plot3D[g[x,y],{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi}]



تعريف الدالة $g(x,y) =-x\ y\ Exp[-(x^2 + y^2)/2]$ ثم رسمها فى الفراغ فى المنطقة

$$-\pi \le x \le \pi \qquad , \qquad -\pi \le y \le \pi$$

In[20]:=FindMinimum[g[x,y],{x,0.6},{y,0.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة
Out[20]={-0.367879, {x -> 1., y -> 1.}} بالقرب من(0.6,0.5)وإيجادالقيمةالصغرى للدالةعندها

In[21]:=FindMinimum[g[x,y],{x,-1.5},{y,-0.5}] للبحث عن نقطةنهايةصغرى محليةللدالةبالقرب
Out[21]={-0.367879, {x -> -1., y ->-1.}} من (-1.5,-0.5) وإيجادالقيمةالصغرى للدالة عندها

In[22]:=-FindMinimum[-g[x,y],{x,-1.5},{y,0.5}] للبحث عن نقطةنهايةعظمى محليةللدالةبالقرب
Out[22]={0.367879, {-(x -> -1.), -(y -> 1.)}} من(-1.5,0.5)وإيجادالقيمةالعظمى للدالةعندها

In[23]:= -FindMinimum[-g[x,y],{x,1.5},{y,-0.5}] للبحث عن نقطةنهايةعظمى محليةللدالةبالقرب
Out[23]={0.367879, {-(x -> 1.), -(y ->-1.)}} من(1.5,-0.5)وإيجادالقيمةالعظمى للدالةعندها

٤. الحســــــاب العددى للمجموع وحواصل الضرب
Numerical Sum and Product

فى برنامج ماثيماتيكا أمر المجموع Sum[f, {i, imin,imax}] يقوم بحساب قيمــة مضبوطة للمجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} f$ حتى إذا كان المجموع فى صورة رمزية symbolic وفى بعض الحالات لا يستطيع ماثيماتيكا حساب الناتج المضبوط للجمع عن طريق الدالـــة Sum خاصــة إذا كان $imax = \infty$ ولمثل هذه الحالات فإنه يمكن حساب قيمة عددية تقريبية للمجمـــوع باستخدام الدالة N بالصورة

N[Sum[f, {i, imin,imax}]] أو فى الصورة Sum[f,{i,imin,imax}]//N

وماثيماتيكا يقدم الأمر NSum لحساب قيمة عددية تقريبية للمجموع مباشرة دون الحاجة الى حساب القيمة المضبوطة والتى تتطلب العديد من العمليات وبالمثل يوجد فى ماثيماتيكا الأمر NProduct لحساب قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=1}^{i\,max} f$	NSum[f, {i, imax}]
إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} f$	NSum[f, {i, imin, imax}]
إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} f$ من i=imin الى i=imax بخطوة مقدارها step	NSum[f, {i,imin, imax, step}]
إيجادقيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} \sum_{j=j\,min}^{j\,max} f$	NSum[f, {i, imin, imax}, {j,jmin, jmax}, ...]
إيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$	NProduct[f, {i, imin, imax}]

ماثيماتيكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة للمجموع باستخدام دالة Sum فقط

In[1]:=Sum[1/i^3,{i,1,Infinity}]

Out[1]=Sum[i^{-3} , {i, 1, Infinity}]

وعنـــــد تطبيق الدالة N أمكن الحصول على قيمة عددية تقريبية للمجموع

In[2]:=Sum[1/I^3,{I,1,Infinity}]//N

Out[2]=1.20206

باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع

In[3]:=NSum[1/i^3,{i,1,Infinity}]

Out[3]=1.20206

ماثيماتيكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة للمجموع باســتخدام دالة Sum بالرغم من أن imax = 5 فقط

In[4]:=Sum[Exp[-n],{n,0,5}]

Out[4]=$1 + E^{-5} + E^{-4} + E^{-3} + E^{-2} + E^{-1}$

باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد قيمة عدديـــة تقريبية للمجموع حتى مالانهاية

In[5]:=NSum[Exp[-n],{n,0,Infinity}]

Out[5]=1.58198

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

```
In[6]:=NSum[1/n!,{n,0,Infinity}]
Out[6]=2.71828
```

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

```
In[7]:=NSum[1/(n(n+1)(n+2)),{n,1,Infinity}]
Out[7]=0.25
```

لإيجاد قيمةعددية تقريبيةلمجموع المتسلسلة $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10}\frac{1}{i^2+j^2}$

```
In[8]:=NSum[1/(i^2+j^2),{i,1,5},{j,1,10}]
Out[8]=2.39932
```

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب $\prod_{i=1}^{5}\frac{1}{i^2}$

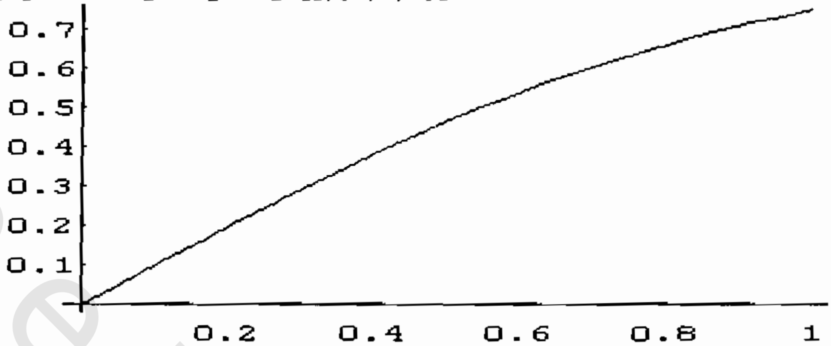
```
In[9]:=Nproduct[1/i^2,{i,1,5}]
Out[9]=0.0000694444
```

٥ . التكــامل العــددى Numerical Integration

دالة التكامل **Integrate** تقوم بحساب التكامل $\int f(x)\,dx$ بصورة رمزية **symbolic** حيث يتعامل برنامج ماثيماتيكا مع دالة التكامل **f(x)** ويقوم بإجراء متتابعة من القواعد والتحويلات الرمزية وصولا الى القيمة المضبوطة للتكامل فى صورة رمزية وتوجـــد بعض الدوال لا تستطيع دالة **Integrate** الحصول على قيم مضبوطة لتكاملاتها المحــــددة **definite** وفى هذه الحالة يمكن استخدام الدالة **N** لحساب قيمة عددية للتكامل . وفـــى ماثيماتيكا يوجد الدالة **NIntegrate** لحساب قيمة عددية تقريبية للتكـــامل مباشـــرة دون الحاجة الى حساب القيمة المضبوطة حيث يتم حساب متتابعة من القيم العددية لدالة التكامل عند نقط خاصة فى نطاق التكامل ثم تستخدم هذه القيم فى الوصول الى قيمة عددية تقريبية جيـــدة للتكامل .

N[Integrate[f,{x,xmin,xmax}]]	لحساب قيمة مضبوطة للتكامل $\int_{xmin}^{xmax} f(x)\,dx$ أولا ثم ايجاد قيمة عددية تقريبية بعد ذلك
NIntegrate[f,{x,xmin,xmax}]	لحساب قيمة عددية تقريبيةمباشرة للتكامل $\int_{xmin}^{xmax} f(x)\,dx$
NIntegrate[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},...]	لحساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل المتعدد $\int_{xmin}^{xmax}\int_{ymin}^{ymax} f(x,y)\,dx\,dy$
NIntegrate[f,{x,xmin,x1,x2,...,xmax}]	حساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل $\int_{xmin}^{xmax} f(x)\,dx$ مع مراعاة النقط الشاذة **x1,x2,...,** لدالة التكامل

In[1]:= Plot[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]



ماثيماتيكا لا يستطيع الحصول على قيمة مضبوطة للتكامل

In[2]:=Integrate[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]

Out[2]= On::none: Message SeriesData::

csa not found

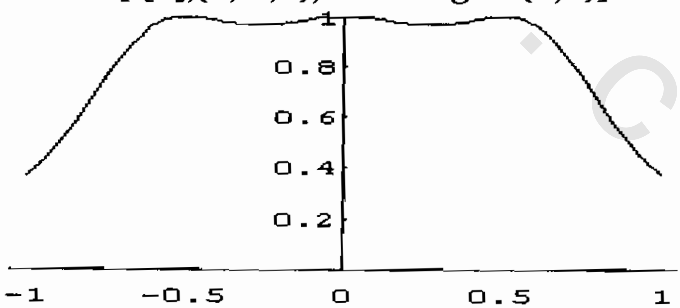
$$\int_0^1 \sin(\sin(x))\, dx$$

بواسطة الدالة N يمكن إيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

In[3]:=N[%]

Out[3]=0.430606

In[4]:=f[x_]:=Exp[-x^2 Cos[Pi x]^2];
Plot[f[x],{x,-1,1},PlotRange->{0,1}]



لحساب قيمة عددية تقريبيةمباشرة للتكامل

In[5]:= NIntegrate[f[x],{x,-1,1}]

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2 \cos^2(\pi x)}\, dx$$

Out[5]=1.71167

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx$$

In[6]:=NIntegrate[Exp[-2x],{x,0,Infinity}]

Out[6]=0.5

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^{3} \sqrt{4+x^3}\, dx$$

In[7]:=NIntegrate[Sqrt[4+x^3],{x,0,3}]

Out[7]=9.27972

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x+\pi}\, dx$$

In[8]:=NIntegrate[Sin[x]/(Pi+x),{x,0,Pi}]

Out[8]=0.433785

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^{2} e^{-x^2}\, dx$$

In[9]:=NIntegrate[Exp[-x^2],{x,0,2}]

Out[9]=0.882081

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_{-1}^{1} \cos(x^2)\, dx$$

In[10]:=NIntegrate[Cos[x^2],{x,-1,1}]

Out[10]=1.80905

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

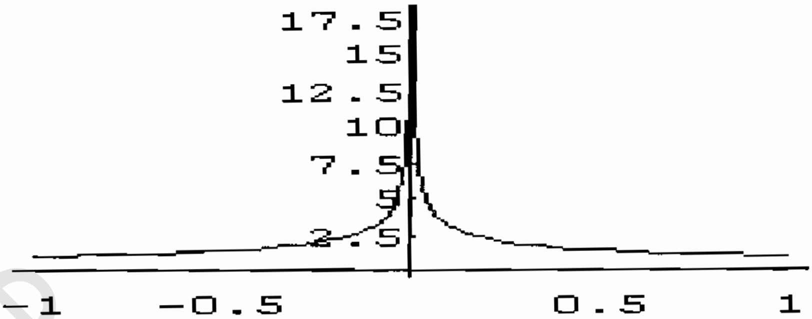
$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\, dx$$

مع مراعاة النقطة الشاذة x=1

In[11]:=NIntegrate[1/(x-1)^(1/3),{x,-2,1,2}]

Out[11]=3.06006 - 2.70211 I

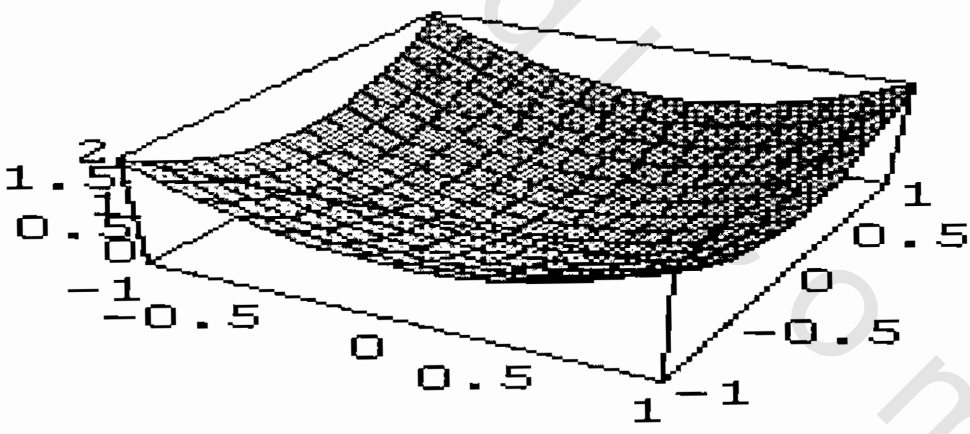
In[12]:=Plot[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,1}]



لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$ مع مراعاة النقطة الشاذة $x=0$

In[13]:=NIntegrate[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,0,1}]
Out[13]=4.

In[14]:=Plot3D[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]



لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائى $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$

In[15]:=NIntegrate[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]
Out[15]=2.66667

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائى

$$\int_{-5}^{5}\int_{-3}^{3} e^{\frac{-(x-y)^2}{1+(x+y)^2}}\, dx\, dy$$

```
In[16]:=NIntegrate[Exp[-(x-y)^2]/(1+(x+y)^2),{x,-3,3},{y,-5,5}]
Out[16]=2.48738
```

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائى

$$\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x} \left(2x^2 + y^2\right) dy\, dx$$

```
In[17]:=NIntegrate[2 x^2+y^2,{x,0,1},{y,x^2,x}]
Out[17]=0.135714
```

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثى

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{z}\int_{0}^{y+z} x\, y\, z\;\; dx\, dy\, dz$$

```
In[18]:= NIntegrate[x y z,{z,0,1},{y,0,z},{x,0,y+z}]
Out[18]=0.118056
```

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثى

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\;\; dz\, dx\, dy$$

```
In[19]:=NIntegrate[ zSqrt[x^2+y^2+z^2],{y,0,3},{x,0,Sqrt[9-y^2]},
                                        {z,0,Sqrt[9-x^2-y^2]}]

Out[19]=38.1704
```

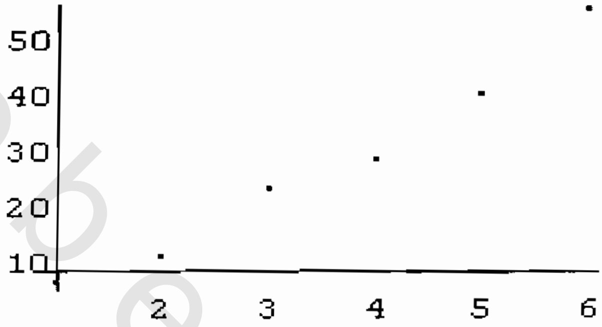
٦ . التقريب بالمربعات الصغرى Least - squares

فى داخل بناء ماثيماتيكا **built-in** يوجد إمكانات متعددة للحصول على كثيرة حدود المربعات الصغرى التى تلائم قائمة من البيانات والفكرة الأساسية التى يعتمد عليها ماثيماتيكا لملائمة البيانات هو اخذ قائمة من الدوال التى نقوم بتحديدها ثم محاولة إيجاد تركيبة خطية من هذه الدوال معا لتقريب البيانات المعطاة باستخدام قاعدة المربعات الصغرى ويتم ذلك عن طريق جعل المقدار $\sum_i |y_i - f_i|^2$ اصغر ما يمكن حيث y_i من البيانات المعطاة , f_i هى القيمة من التركيبة الخطية للدوال التى قام المستخدم بتحديدها ويتم ذلك باستخدام الدالة Fit والصيغة العامة لها كالآتي :

Fit[data,funs,vars]	ملائمة البيانات **data** باستخدام تركيبة خطية من الدوال **funs** فى المتغيرات **vars**
Fit[{y1,y2,...},{f1,f2,...},x]	إيجاد افضل تركيبة خطية من الدوال **f1 , f2,...** تلائم النقط **(1,y1),(2,y2),...** حيث تم اعتبار قيم **x** المناظرة لقيم **yi** هى **xi = i**
Fit[{{x1,y1},{x2,y2},...},{f1,f2,...},x]	إيجاد افضل تركيبة خطية من الدوال **f1,f2,...** تلائم النقط **(x1,y1),(x2,y2),...**

Fit[{y1,y2,...},{1,x},x]	إيجاد افضل خط مستقيم **linear fit** يلائم البيانات **(1,y1),(2,y2), ...**
Fit[{y1,y2,...},{1,x,x^2},x]	إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية **Quadratic fit** تلائم البيانات **(1,y1),(2,y2), ...**
Fit[data,Table[x^i,{i,0,n},x],x]	إيجاد افضل كثيرة حدود من درجة **n** تلائم البيانات **data**

In[1]:=data1={6,11,23,28,40,55}; m1=ListPlot[data1]



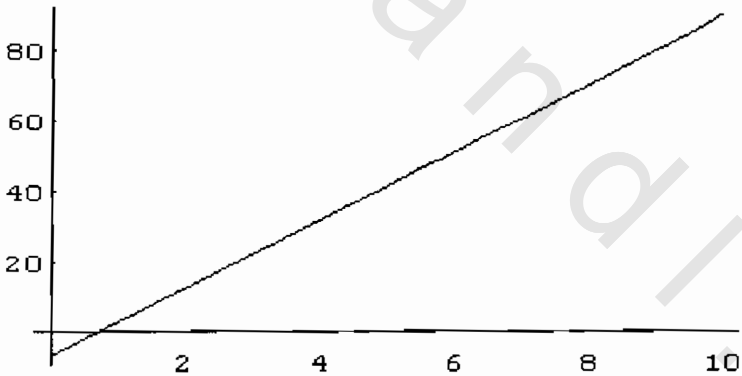
تعريف قائمة **data1** من الأعداد
ثم تحديد مواضع هذه الأعداد
فى المستوى

In[2]:= f1=Fit[data1,{1,x},x]

Out[2]=-6.53333 + 9.62857 x

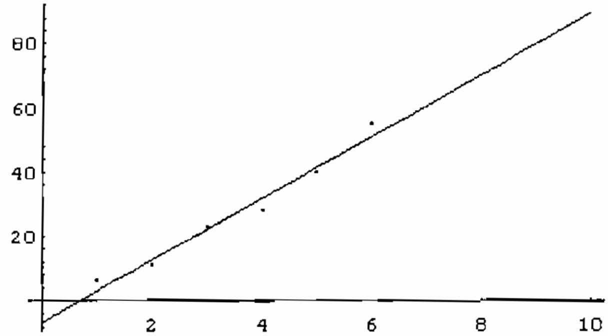
إيجاد معادلة افضل خط مستقيم
يلائم قائمة البيانات **data1**

In[3]:=s1=Plot[f1,{x,0,10}]



رسم الخط المستقيم **f1**
الناتج من الدالة **Fit**

In[4]:=Show[s1,m1]



إظهار رسم الخط المستقيم الناتج من
الدالة Fit مع رسم القائمة data1

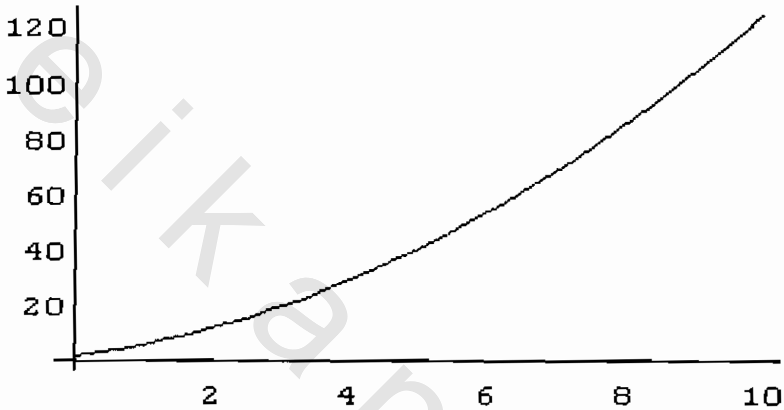
إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية تلائم قائمة البيانات **data1**

In[5]:= f2=Fit[data1,{1,x,x^2},x]

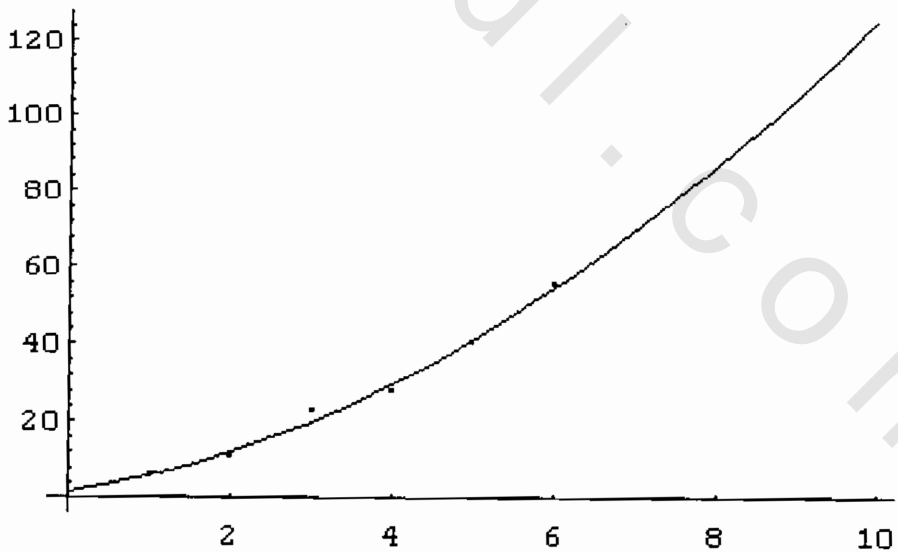
Out[5]=3.37857+1.8x+ 0.892857 x^2

رسـم كثيرة الحدود **f2** الناتجـة من الدالة **Fit**

In[6]:= s2=Plot[f2,{x,0,10}]



In[7]:= Show[m1,s2]



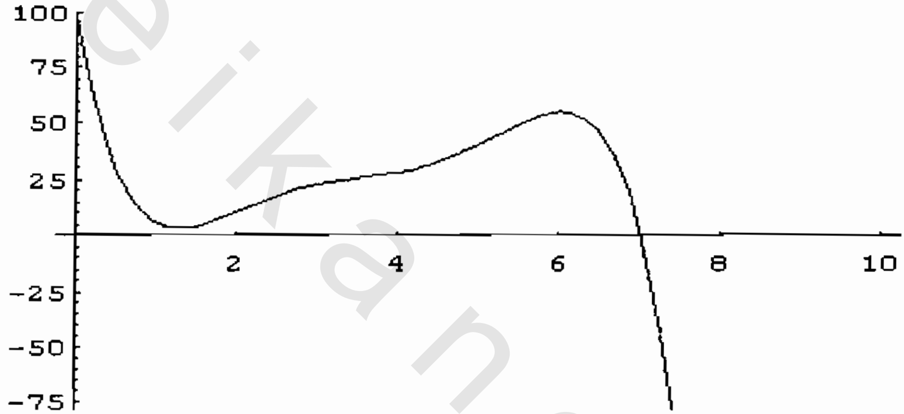
إظهار رسم كثيرة الحدود **s2** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data1**

إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الخامسة تلائم قائمة البيانات **data1** ثم رسم كثيرة الحدود **f3** الناتجة من الدالة **Fit**

```
In[8]:= f3=Fit[data1,Table[x^i,{i,0,5}],x]
```

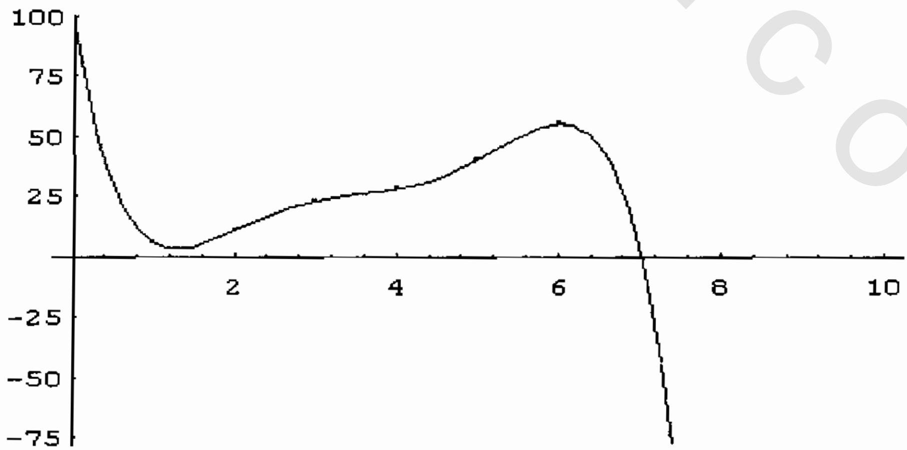
Out[8]= $96. - 194.533\,x + 144.583\,x^2 - 46.5833\,x^3 + 6.91667\,x^4 - 0.383333\,x^5$

```
In[9]:=s3=Plot[f3,{x,0,10}]
```



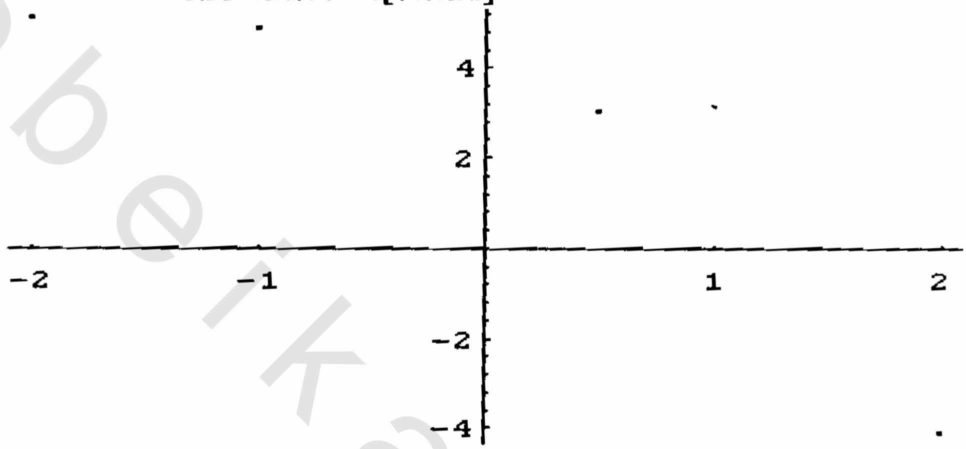
إظهار رسم كثيرة الحدود **s3** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data1**

```
In[10]:= Show[m1,s3]
```



تعريف قائمة **data2** من الأعداد ثم تحـــديد مواضع هذه الأعداد في المستوى

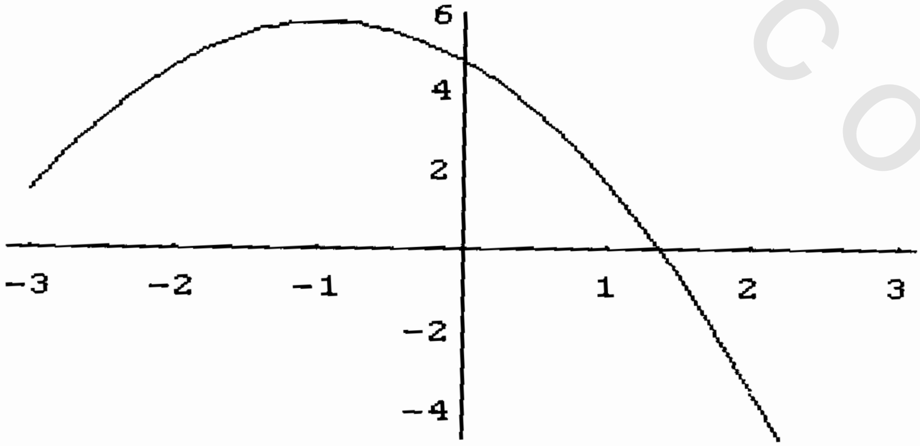
In[11]:= data2={{-2,5.1},{-1,4.9},{0.5,3},{1,3.1},{2,-4.1}};
m2=ListPlot[data2]



إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية تلائم قائمة البيانات **data2** ثم رســم كثــيرة الحدود **f4** الناتجــة من الدالة **Fit**

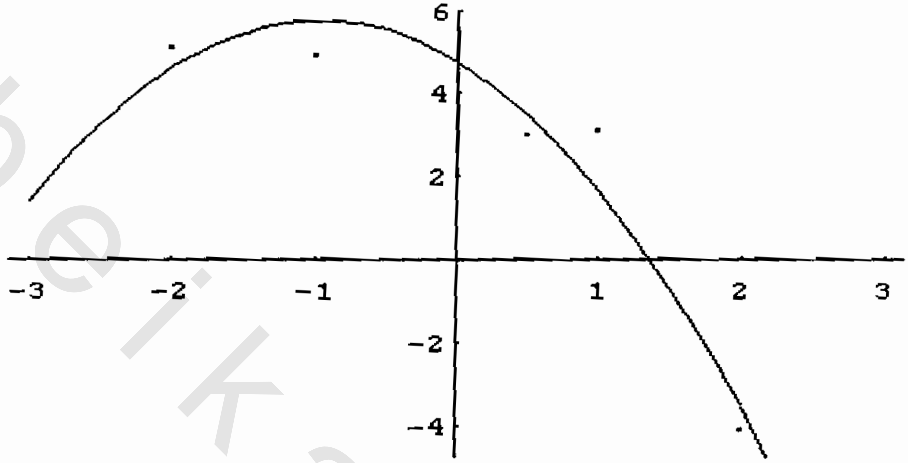
In[12]:= f4=Fit[data2,{1,x,x^2},x]
Out[12]=4.75476 - 2.04354 x - 1.04898 x^2

In[13]:= s4=Plot[f4,{x,-3,3}]



إظهار رسم كثيرة الحدود **s4** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data2**

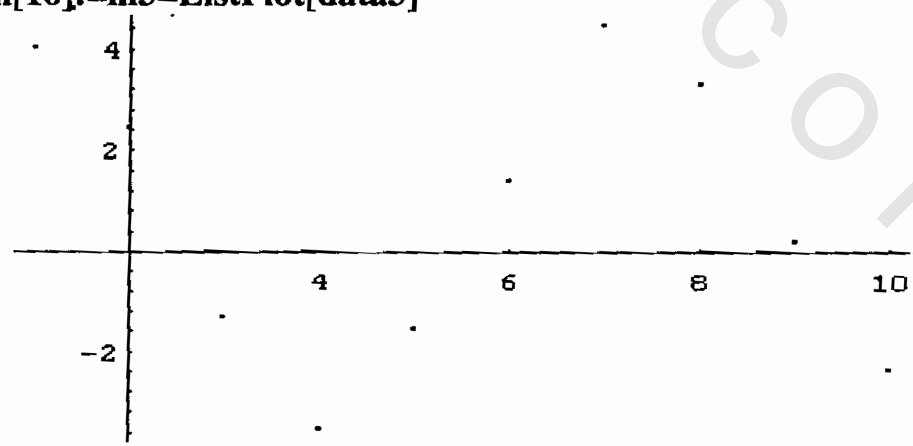
In[14]:= Show[m2,s4]



وتعتبر كثيرات الحدود هى الأكثر استخداما مع دالة **Fit** ولكن يمكن استخدام أي دوال أخرى في قائمة الدوال نرى أنها مناسبة للبيانات مثل الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية والزائدية ... الخ .

تعريف قائمة **data3** من الأعداد ثم تحـــديد مواضع هذه الأعداد في المستوى

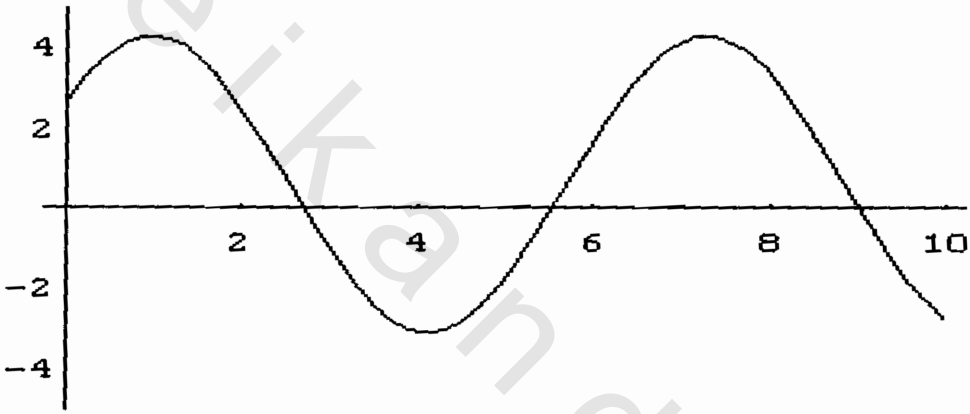
```
In[15]:=data3=Table[N[Random[]+2Cos[x]+3Sin[x]],{x,1,10}]
Out[15]={4.02232, 2.45486, -1.32769, -3.54897, -1.54028,
         1.4028, 4.47493, 3.28246, 0.177847, -2.3534}
In[16]:=m3=ListPlot[data3]
```



إيجاد افضل تركيبة خطية من مجموعة الدوال {1,Cos(x),Sin(x)} بحيث تلائم قائمة البيانات **data3** ثم رسم المعادلة **f5** الناتجة من الدالة **Fit**

In[17]:=f5=Fit[data3,{1,Cos[x],Sin[x]},x]
Out[17]=0.56281 + 2.04344 Cos[x] + 3.05647 Sin[x]

In[18]:=s5=Plot[f5,{x,0,10},PlotRange->{-5,5}]



إظهار رسم المعادلة **s5** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data3**

In[19]:=Show[m3,s5]