الفصل

2

طرق العـــد
Counting Methods

من الأمور الهامة في دراستنا للاحتمالات هي تحديد فضاء العينة S للتجربة العشـــوائية الــتي نكون بصددها ومعرفة عدد العناصر في فضاء العينة وكذلك معرفة عدد العناصر في الأحــداث المختلفة التي نتعامل معها في التجربة العشوائية . وفى هذا الفصل نقدم مراجعة على نظريـــات الترتيب والتباديل والتوافيق لنتعرف على بعض الطرق والقواعد التي تساعدنا في العد وبالتــالي في تحديد عدد العناصر في مجموعة معينة بدون الحاجة إلى العد المباشر وهذه الطرق تسمى أحيانا بالتحليل التوافقي **Combinatorial Analysis** ومن هذه الطرق والقواعـــد نســتطيع بالتالي تحديد عدد عناصر فضاء العينة وكذلك معرفة عدد العنـــاصر في الأحــداث المختلفــة للتجربة العشوائية .

١ - قاعدة الضرب Multiplication Rule

إذا كانت التجربة E_1 تحدث في n من الطرق ، ومع كل طريقة من هذه الطرق كانت التجربة E_2 تحدث في m من الطرق فإن التجربتان تحدثان معاً في $m \times n$ من الطرق .

مثـــال ١ :

في أحد المعاهد العلمية أراد طالب أن يسجـــل في مقررين أحدهما في الرياضيات والآخـــر في الكومبيوتر ، فإذا كان مطروحا أربعة مقررات في الرياضيـــات وثلاثة مقررات في الكومبيوتـــر فأوجد عدد الطرق التي يتمكن الطالب من التسجيل فيها .

الحل :

الطالب لديه 4 اختيارات في مقررات الرياضيـــات ومع كـــل اختيـــار يكـــون لديـــه 3 اختيـــارات في مقررات الكومبيوتـــر وبتطبيق قاعدة الضرب يكون ما لديه من اختيارات هـــو 4×3 أي 12 اختيار .

ويمكن تعميم قاعدة الضرب لتشمل k من التجارب كالآتي :

إذا كانت التجربة E_1 تحدث في n_1 من الطرق ولكل واحدة من هــذه الطــرق كــانت التجربة E_2 تحدث في n_2 من الطرق ولكل واحدة من هذه الطرق كانت التجربة E_3 تحدث في n_3 من الطرق ... وهكذا حتى التجربة E_k التي تحدث في n_k من الطــرق فإن التجــارب $E_1 , E_2 , \ldots , E_k$ تحـدث معـاً بعـدد مـن الطــرق يســاوى $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ ومن ذلك يمكن استنتاج القاعدة الأساسية للعد .

القاعدة الأساسية للعد:

> إذا أمكن إجراء عملية ما بعدد n_1 من الطرق المختلفة وإذا تلــت هــذه العملية عملية ثانية يمكن إجراؤها بعدد n_2 من الطرق المختلفة وإذا تلــت هذه العملية عملية ثالثة يمكن إجراؤها بعدد n_3 مــن الطــرق المختلفــة ، وهكذا فإن عدد الطرق التي يمكن إجراء هذه العمليات معاً بالترتيب المذكـور هو حاصل الضرب $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots$.

مثـــال ٢ :

كم خط تليفون يمكن تركيبه في مدينة ما إذا تألف رقم التليفون من سبعة أرقام أولها فردي ؟

الحل :

حيث أن الرقم الأول فردى أي إنه ينتمي في المجموعة { 1,3,5,7,9 } فإن عدد طرق كتابـة الرقم الأول يكون 5 أما الأرقـــام الســتة الأخــرى فكــل منــها ينتمــي في المجموعــة { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 } وبالتالي فإن عدد طرق كتابة كل منها يكون 10 طرق

5	10	10	10	10	10	10

وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد يكون عدد خطوط التليفونات التى يمكن تركيبها في المدينة هو

$$5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 5000000$$

مثـــال ٣ :

إذا كانت اللوحة المعدنية لرقم السيارة تحتوى على حرفين مختلفين من الحروف الأبجدية العربية يتبعهما أربعة أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول صفراً .

١ – أوجد عدد اللوحات المعدنية المختلفة التى يمكن طبعها لأرقام السيارات .

٢ – أوجد عدد اللوحات المعدنية المختلفة التى تبدأ بالحرف ب .

الحل :

١ – حيث أن عدد الحروف الأبجدية العربية يساوى 28 حرف وحيث أن اللوحة المعدنية للسيارة تحتوى على حرفين مختلفين من الحروف الأبجدية العربية ، إذن يمكن كتابة الحرف الأبجدي الأول بعدد 28 طريقة مختلفة والحرف الثاني بعدد 27 طريقة مختلفة ، وحيث انه يتبعهما أربعة أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول صفراً . إذن يتم اختيار الرقم الأول بتسع طرق مختلفة وكل من الأرقام الثلاثة الأخرى يتم اختيارها بعشرة طرق مختلفة

مواضع الأرقام العددية				مواضع الحروف الأبجدية	
10	10	10	9	27	28

وبالتالي يكون عدد اللوحات المعدنية المختلفة التى يمكن طبعها لأرقام السيارات هو

$$28 \times 27 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 6804000$$

٢– حيث أن اللوحة المعدنية تبدأ بالحرف ب إذن يمكن كتابة الحرف الأبجدي الأول بطريقة واحدة والحرف الثاني بعدد 27 طريقة مختلفة ، وحيث انه يتبعهما أربعة أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول صفراً ، إذن يتم اختيار الأرقام كما سبق

مواضع الأرقام العددية				مواضع الحروف الأبجدية	
10	10	10	9	27	1

وبالتالي يكون عدد اللوحات المعدنية المختلفة التى يمكن طبعها لأرقام السيارات هو

$$1 \times 27 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 243000$$

مثــال ٤ :

امتحان بنظام الاختيار من متعدد Multiple – choice يحتوى على 10 أســئلة ولكــل سؤال أربع إجابات منها واحدة فقط صحيحة . أحد الطلاب لم يكن مستعد للامتحان وأجـاب على كل أسئلة الامتحان بالتخمين

١ – بكم طريقة يمكن للطالب إجابة الامتحان ؟

٢ – بكم طريقة تكون إجابة الطالب خطأ في جميع أسئلة الامتحان ؟

٣ – بكم طريقة يوفق الطالب في الإجابة بالصواب على نصف الأسئلة ؟

الحل :

١ – حيث أن عدد أسئلة الامتحان 10 وحيث أن لكل سؤال أربع إجابات منها واحدة فقـط صحيحة ، إذن يمكن الإجابة على السؤال الأول بطرق عددها 4 وبالمثل يمكن الإجابة علـى السؤال الثاني بطرق عددها 4 وهكذا حتى السؤال العاشر يمكن الإجابة عليه بطرق عددها 4 وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق الإجابة على الامتحان يكون

$$4^{10} = 1048576$$

٢ – تكون إجابة الطالب خطأ في جميع أسئلة الامتحان إذا اختار الطالب إجابته علـــى كـــل سؤال من الاختيارات الثلاث الخطأ ، أي انه يستبعد دائما الاختيار الصواب وبالتـــالي يمكــن الإجابة خطأ على السؤال الأول بطرق عددها 3 وبالمثل يمكن الإجابة على السؤال الثاني خطأ بطرق عددها 3 وهكذا حتى السؤال العاشر يمكن الإجابة عليه خطـــأ بطـــرق عددهـــا 3 وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق الإجابة خطأ في جميع الأسئلة يكون

$$3^{10} = 59049$$

٣ – يوفق الطالب في الإجابة بالصواب على نصف الأسئلة إذا اختار الإجابـــة الصـــواب في خمسة أسئلة وعدد طرق اختيار الإجابة صواب في كل منها هو طريقة واحدة فقط والأســـئلة الخمسة الباقية يتم الإجابة على كل منها خطأ بطرق عددها 3 وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق الإجابة بالصواب على نصف الأسئلة يكون

$$3^5 = 243$$

٢ – قاعدة الجمع Addition Rule

إذا كانت تجربتان مانعتان لبعضهما البعض ، أي أن حدوث إحداهما يلغي حدوث الأخرى ، وكانت التجربة الأولى تحدث في n من الطرق ، وكانت التجربة الثانية تحدث في m من الطرق فإن واحدة منهما أو الأخرى تحدث في $m + n$ من الطرق .

ويمكن تعميم قاعدة الجمع لتشمل k من التجارب كالآتي :

> إذا كان هناك k من التجارب بحيث لا يحدث أي أثنين منها في نفس الوقت وكان عدد الطرق التي تحدث فيها التجربة الأولى n_1 وعدد الطرق التي تحدث فيها التجربة الثانية n_2 وهكذا حتى التجربة رقم k فإن عدد الطرق التي تحدث فيها واحدة من هذه التجارب يكون $n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

مثال ٥ :

إذا كان لدى الطالب فرصة في تسجيل مقرر واحد فقط من بين ثلاثة مقررات في الرياضيات وأربعة مقررات في الكومبيوتر ومقررين في الفيزياء ، فأذكر عدد الاختيارات التي لدى الطالب للتسجيل في مقرر واحد .

الحل :

الطالب لديه 3 اختيارات في مقررات الرياضيات

و لديه 4 اختيارات في مقررات الكومبيوتر

و لديه 2 اختيار في مقررات الفيزياء

وحيث أن الطالب لديه فرصة في تسجيل مقرر واحد فقط . إذن بتطبيق قاعدة الجمع فإن عدد الاختيارات التي لدى الطالب للتسجيل في مقرر واحد يكون

$$3 + 4 + 2 = 9$$

٣ - التباديل Permutations

تبديل عدد من الأشياء يعنى وضع أو تنظيم هذه الأشياء في ترتيب معين ، فإذا كـــان لدينا n من الأشياء وتم وضعهم جميعاً في ترتيب معين فإن هذا يسمى تبديل n من الأشياء مأخوذة جميعها كل مرة أما إذا أخذنا فقط أي عدد r من هذه الأشياء (حيث $r \leq n$) وتم وضعها في ترتيب معين فإن هذا يسمى تبديل n من الأشياء مأخوذة r في كل مـــرة ، وسوف يرمز لعدد التباديل من n من الأشياء المأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_{n}P_{r}$.

وبفرض مجموعة الحروف a , b , c , d فإننا نلاحظ أن :

- $abcd$, $bcad$, $dacb$ هي أمثلة لتباديل من الحروف الأربعة مأخوذة جميعها كل مـــرة
- bcd , cad , dab هي أمثلة لتباديل من الحروف الأربعة مأخوذة ثلاثة حروف كل مرة
- bc , ad , db هي أمثلة لتباديل من الحروف الأربعة مأخوذة اثنان كل مرة

مثـــال ٦ :

بكم طريقة يمكن ترتيب الحروف a , b , c معاً .

الحل :

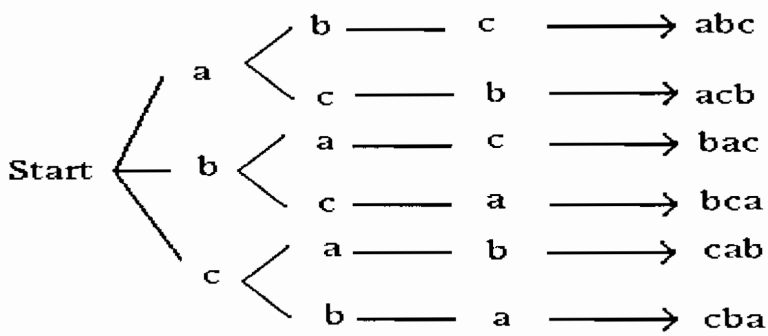
نفرض أن الحروف الثلاثة تمثل بثلاثة مربعات

$$\boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{}$$

في المربع الأول من جهة اليسار يمكن وضع الحرف الأول بثلاث طرق مختلفة (a أو b أو c) وبعد ذلك في المربع الثاني يمكن وضع الحرف الثاني بطريقتين وهـــذا يعتمد على الحرف الـــذي سيوضع بالمربع الأول فإذا وضع بالمربع الأول الحرف a يتبقى للمربع الثاني إمـــا b أو c وفى حالة إذا وضع بالمربع الأول الحرف b يتبقى للمربع الثاني إما a أو c وهكذا في حالة إذا وضع بالمربع الأول الحرف c يتبقى للمربع الثاني إما a أو b وبعد ذلـــك في المربـــع الثالث يمكن وضع الحرف الثالث بطريقة واحدة فقط ، وبالتالي يمكن كتابة عدد طرق اختيـــار الحرف في المربع الذي يمثل هذا الحرف كما يلي

$$\boxed{3} \quad \boxed{2} \quad \boxed{1}$$

ومن القاعدة الأساسية للعد يكون عدد طرق ترتيب الحروف الثلاثة (عدد تباديل الحـــروف الثلاثة مأخوذة معاً) يساوى $3 \times 2 \times 1 = 6$ ويمكن تمثيل التباديل الستة السابقة بشـــكل الشجرة البيانية كما موضح بالشكل



<u>والآن نحاول الإجابة على السؤال الآتى :</u>

ما هو عدد تباديل n من عناصر مميزة مأخوذة معاً ؟ أي ما هو $_nP_n$ ؟

وبمعنى آخر

إذا كان لدينا n من عناصر مميزة فما هو عدد طرق ترتيبها كلها معاً في خط ؟

وللإجابة على هذا التساؤل نفرض n من الأماكن كما بالشكل

المكان الأول	المكان الثانى	...	المكان n
↑ n	↑ $(n-1)$		↑ 1

وحيث أن العناصر جميعها مميزة ، إذن يتم مراعاة الترتيب وبالتالي فإنه يكون لدينا n من الاختيارات لنملأ المكان الأول وبعد أخذ عنصر وتخصيصه للمكان الأول يتبقى لدينا عدد $(n-1)$ من الاختيارات لنملأ المكان الثاني ، وبعد أخذ عنصر وتخصيصه للمكان الثاني يتبقى لدينا عدد $(n-2)$ من الاختيارات لنملأ المكان الثالث ، وهكذا حتى يبقى لدينا اختيار واحد لملء آخر مكان وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد يكون عدد تباديل n من العناصر المميزة مأخوذة معاً يساوى $n\times(n-1)\times(n-2)\times \ldots \times3\times2\times1$ وعادة يستخدم الرمز $n!$ ويقرأ " مضروب n " ليدل على حاصل الضرب السابق ، وبالتالي

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times \ldots \times3\times2\times1$$

نظرية ١ : عدد تباديل n من العناصر المميزة المأخوذة معاً ، وبمعنى آخر
عدد طرق ترتيب n من العناصر المميزة المأخوذة معاً هو

$$_nP_n = n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times \dots \times3\times2\times1$$

فمثلاً ، عدد طرق ترتيب الحروف الأربعة a , b , c , d معاً يكون

$$_4P_4 = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$$

وذلك لإن الحروف الأربعة مختلفة (مميزة) .

مثـــال ٧ :

مجموعة من 3 صور فوتوغرافية مختلفة لمنطقة الأهرامات بالجيزة . بكم طريقة يمكن ترتيبهم ؟

الحل :

حيث أن الصور مختلفة ، إذن عدد طرق ترتيبهم هو $_3P_3 = 3! = 3\times2\times1 = 6$.

والآن نحاول الإجابة على السؤال الآتي :

ما هو عدد تباديل n من عناصر مميزة مأخوذة r في كل مرة ؟ أي ما هو $_nP_r$ ؟

وبمعنى آخر ، ما هو عدد طرق اختيار r عنصر من n من العناصر المميزة ؟

وللإجابة على هذا التساؤل نفرض r من الأماكن كما بالشكل

المكان r	...	المكان الثاني	المكان الأول
↑		↑	↑
$(n-r+1)$		$(n-1)$	n

حيث أن العناصر جميعها مميزة ، إذن يتم مراعاة الترتيب وبالتالي فإنه يكون لدينـــا n مـــن الاختيارات لنملأ المكان الأول وبعد أخذ عنصر وتخصيصه للمكان الأول يتبقى لدينا $(n-1)$ من الاختيـــارات لنملأ المكان الثاني ، وبعد اخذ عنصر وتخصيصه للمكان الثاني يتبقى لدينـــا $(n-2)$ من الاختيارات لنملأ المكان الثالث ، وهكذا حتى يتبقى لدينا $(n-r+1)$

من الاختيارات لملئ المكان الأخير رقم r وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد يكون عـــدد طـــرق اختيار r من العناصر من n من العناصر المميزة يساوى

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$$

وباستخدام الرمز ${}_nP_r$ ليدل على عدد تباديل n من العناصر المميزة تؤخذ r في كل مرة فإن

$${}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$$

وبالضرب في $\dfrac{(n-r)!}{(n-r)!}$ فإن

$${}_nP_r = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وبذلك نصل إلى النظرية الآتية:

نظرية ٢ : عدد تباديل n من العناصر المميزة المأخوذة r في كل مرة هو

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ملاحظة هامة : عند حساب عدد التباديل يتم مراعاة الترتيب

مثـــال ٨ :

بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين أخذا من الحروف a, b, c, d, e .

الحل : حيث أن عدد الحروف 5 وهى مختلفة (مميزة) ونريد ترتيبها مأخوذة 2 فى كل مرة .

إذن عدد الطرق يكون

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times (3!)}{(3!)} = 20$$

مثـــال ٩ :

نفرض مجموعة الأرقام الفردية $\{1,3,5,7,9\}$ وبفرض عدم السماح بالتكرار احسب :

١ - كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من هذه المجموعة ؟

٢ - كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام قيمته اقل من 600 يمكن تكوينه من هذه المجموعة ؟

٣ - كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام قيمته تكون مضاعف للعدد 5 ؟

الحل : عدد الأرقام الفردية في المجموعة المعطاة يساوى 5 وغير مسموح بالتكرار

١ - الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام ويمكن تكوينها من هذه المجموعة عددها يساوى

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

٢ – لكي يكون العدد الذي يتم تكوينه ، من المجموعة المعطاة ، مكونا من ثلاثة أرقام وقيمته أقل من 600 فإن خانة المئات مسموح أن يوضع فيها الرقم 1 أو الرقم 3 أو الرقم 5 ، أي أن خانة المئات مسموح أن تملأ بطرق عددها 3 ونظراً لأنه غير مسموح بالتكرار فإنه بعد حجز رقم لخانة المئات يتبقى أربعة أرقام وبالتالي فإن خانة العشــرات تملأ بطرق عددها 4 ثم خانة الآحاد تملأ بطرق عددها 3 وبذلك يوجد $36 = 3\times4\times3$ عدداً مختلفاً قيمته أقل من 600 .

٣ – لكي يكون العدد الذي يتم تكوينه من المجموعة المعطاة مكوناً من ثلاثة أرقــام وقيمتــه تكون مضاعف للعدد 5 فإن رقم الآحاد يجب أن يقبل القسمة على 5 وبالتـــالي يجـــب أن يكون 5 أي أن خانة الآحاد تملأ بطريقة واحدة فقط ونظراً لأنه غير مسموح بالتكرار فــإن خانة المئات تملأ بطرق عددها 4 ثم خانة العشرات تملأ بطرق عددهـــا 3 وبذلــك يوجــد $12 = 1\times3\times4$ عدداً مختلفاً قيمته مضاعف للعدد 5 .

مثـــال ١٠:

بكم طريقة يمكن أن يجلس ثلاثة أولاد وبنتان في صف به خمسة مقاعد إذا كان

١ – الجلوس بدون أي قيود ؟

٢ – يجلس الأولاد معاً والبنتان معاً ؟

٣ – تجلس البنتان معاً ؟

الحل :

١ – عدد طرق جلوس خمسة أشخاص على خمسة مقاعد بدون أي قيود يكون $5!=120$.

٢ – يوجد طريقتان لجلوس الأولاد معاً وجلوس البنات معاً وهما bbbgg , ggbbb حيث الرمز b يعنى ولد والرمز g يعنى بنت وفى كل حالة يمكن للأولاد أن يجلسوا بطـــرق عددها $3!$ ويمكن للبنتين أن تجلسا معاً بطرق عددها $2!$ ، إذن وفقاً لقاعدة الضرب فـــإن عدد الطرق في كل حالة يكون $12 = 2!\times3!$ وبجمع الحالتين وفقاً لقاعدة الجمع فإن عـــدد الطرق الكلية يكون $24 = 12 + 12$.

٣ – يوجد أربع طرق لجلوس البنتين معاً وهما bbbgg , bbggb , bggbb , ggbbb وفى كل حالة يمكن للأولاد أن يجلسوا بطرق عددها $3!$ ويمكن للبنتين أن تجلسا معاً بطـــرق عددها $2!$.إذن وفقاً لقاعدة الضرب فإن عدد الطرق في كل حالة يكـــون $12 = 2!\times3!$ وبجمع الحالات الأربعة وفقاً لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الكلية يكون 48 .

مثـــال ١١ :

خمسة رجال وزوجاتهم يريدون الجلوس على عشرة مقاعد مصفوفة بحيث يجلس الرجال متجاورين وتجلس النساء متجاورات . بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك ؟

الحل :

لتحقيق المطلوب يمكن للرجال أن يشغلوا المقاعد الخمسة الأولى أو المقاعد الخمسة الأخيرة وفى كل حالة تشغل النساء المقاعد الخمسة الأخرى وذلك على النحو التالي :

الحالة	مقاعد النساء					مقاعد الرجال				
الأولى	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

الحالة	مقاعد الرجال					مقاعد النساء				
الثانية	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

في كل حالة فإن عدد الطرق التي يشغل بها الرجال مقاعدهم يساوى $5! = 120$ وعدد الطرق التي تشغل بها النساء مقاعدها يساوى $5! = 120$. إذن وفقاً لقاعدة الضرب فإن عدد الطرق في كل حالة يكون $5!\times5! = 14400$ وبجمع الحالتين وفقاً لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الكلية الممكنة يساوى $14400 + 14400 = 28800$.

مثـــال ١٢ :

خمسة طلاب بالفرقة الثالثة وخمسة طلاب بالفرقة الرابعة يريدون الجلوس على عشرة مقاعد مصفوفة في قاعة امتحان بحيث لا يجلس طالبان متجاوران ومن نفس الفرقة . بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك ؟

الحل :

نفرض أن المقاعد العشرة مرقمة من 1 إلى 10 ولتحقيق المطلوب يمكن لطلاب الفرقة الثالثة أن يشغلوا المقاعد ذات الأرقام الفردية وطلاب الفرقة الرابعة يشغلوا المقاعد ذات الأرقام الزوجية أو العكس وذلك على النحو التالي :

الحالة الأولى	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

الحالة الثانية	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة	ثالثة	رابعة
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

وفي كل حالة فإن عدد الطرق التى يشغل بها طلاب الفرقة الثالثة مقاعدهم $5!$ وعدد الطرق التي يشغل بها طلاب الفرقة الرابعة مقاعدهم $5!$. إذن وفقاً لقاعدة الضرب فـــإن عـــدد الطرق في كل حالة يكون $5!\times5! = 14400$ وبجمع الحالتين وفقاً لقاعدة الجمع فإن عـــدد الطرق الكلية الممكنة يساوى $14400 + 14400 = 28800$.

نظريـــة ٣:

عدد تباديل n من الأشياء المختلفة حول دائرة يساوي $(n-1)!$

مثـــال ١٣:

بكم طريقة يمكن لمجموعة من خمسة أشخاص في حفل أن يرتبوا أنفسهم بحيث يجلسون

(أ) – في صف به خمسة مقاعد ؟ (ب) – حول مائدة مستديرة ؟

الحل :

(أ) – يمكن للأشخاص الخمسة أن يجلسون في صف بطرق عددها

$$5\times4\times3\times2\times1 = 5! = 120$$

(ب) – يمكن لشخص واحد أن يجلس في أي مكان من المائدة المستديرة وبعد ذلك يمكن للأشخاص الأربعة الأخريين أن يرتبوا أنفسهم حول المائدة بطرق عددها

$$(5-1)! = 4! = 24$$

٤ - التوافيق Combinations

في كثير من الحالات نحتاج إلى اختيار عدداً معيناً من عناصر مجموعة معينة دون النظر إلى ترتيب العناصر ، والطرق التي يتم بها مثل هذا الاختيار تسمى توافيق ، وعندما تعرفنا على التباديل أكدنا على ضرورة مراعاة الترتيب ولكن في التوافيق لا يتم مراعاة الترتيب وبالتالي يمكننا القول أن التوافيق هي الطرق التي نختار بها عدداً معيناً من عناصر مجموعة معينة دون النظر إلى الترتيب . والمثال الآتي يوضح الفرق الأساسي بين التباديل والتوافيق حتى لا يحدث أي التباس أو غموض بين المفهومين .

مثال ١٤ :

عدد الطرق الممكنة لاختيار رئيس ووكيل لمجلس إدارة أحد الأندية الرياضية من بين أربعة أشخاص a , b , c , d يساوى $12 = {}_4P_2 = \frac{4\,!}{(4-2)\,!}$ وهنا استخدمنا التباديل لأنه لابد من مراعاة الترتيب فالاختيار (a, b) يعنى انه تم اختيار الشخص a رئيساً لمجلس الإدارة واختيار الشخص b وكيلاً لمجلس الإدارة وهذا بالتأكيد يختلف تماما عن الاختيار (b , a) الذي يعنى انه تم اختيار الشخص b رئيساً لمجلس الإدارة واختيار الشخص a وكيلاً لمجلس الإدارة . أما إذا أردنا تعيين عدد الطرق الممكنة لاختيار شخصين من الأشخاص الأربعة فإن الوضع هنا يختلف تماماً حيث أن الاختيار (a, b) لا يختلف عن الاختيار (b , a) فالترتيب هنا غير مهم ويكون عدد الطرق الممكنة في هذه الحالة يساوى 6 وهى $(a,b) , (a,c) , (a,d) , (b,c) , (b,d) , (c,d)$ وتعرف بتوافيق 4 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة ويرمز لذلك ${}_4C_2$ ونلاحظ أن

$${}_4C_2 = \frac{{}_4P_2}{2!} = \frac{4\times 3}{2} = 6$$

إذن التباديل يتم فيها مراعاة الترتيب بينما التوافيق يهمل فيها الترتيب .

نظرية ٤ : عدد توافيق n من العناصر مأخوذة r في كل مرة ، وبمعنى آخر ، عدد طرق اختيار r من العناصر من بين n من العناصر دون مراعاة الترتيب يرمز له ${}_nC_r$ ويعرف بالصورة

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

وكثيراً ما يستخدم الرمز $\binom{n}{r}$ ويقرأ " n فوق r " بدلاً من الرمز ${}_nC_r$ للتعبير عـن توافيق n من العناصر مأخوذة r في كل مرة . أي أن

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث n , r أعداد صحيحة موجبة بحيث يكون $r \le n$ ومن التعريف يمكن استنتاج أن

$$\binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{n-r} = \binom{n}{r} \quad , \quad \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

وباستخدام توافيق n من العناصر مأخوذة r في كل مرة يمكن حساب المفكوك الجبري لمقدار مثل $(x+y)^n$ وهذا يعتبر من التطبيقات الهامة للتوافيق ، ولذلك فإن التوافيق $\binom{n}{r}$ تسمى أيضاً بمعاملات ذات الحدين وذلك تبعاً للنظرية الآتية :

نظرية ٥ : (مفكوك ذات الحدين Binomial Expansion)

لأي عدد صحيح $n \ge 0$ فإن

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

مثـــال ١٥ : أثبت أن

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

الحل :

من مفكوك ذات الحدين بوضع $x = y = 1$ نحصل على

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i}\, 1^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

إذن

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

مثـــال ١٦ :

إذا كان X مجموعة تحتوى على n من العناصر فأوجد عدد المجموعات الجزئية من X .

الحل :

عدد المجموعات الجزئية من المجموعة X والتي تتكون من r عنصر هو $\binom{n}{r}$ حيث $r \leq n$

أي أن العدد الكلى للمجموعات الجزئية من المجموعة X يكون

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ \dots\ +\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n} = 2^n$$

إذن عدد المجموعات الجزئية من المجموعة X يساوى 2^n ونلاحظ أن المجموعة الخالية تنـاظر المجموعة الجزئية التي تتكون من 0 عنصر أي لا يوجد فيها أي عنصر وعدد طـرق تكوينهـا يكون $1 = \binom{n}{0}$ والمجموعة الشاملة تناظر المجموعة الجزئية التي تتكون من n عنصر أي هي المجموعة X نفسها وعدد طرق تكوينها يكون $1 = \binom{n}{n}$.

مثـــال ١٧ :

في أحد المطاعم وضع إعلان يتيح للزبائن إمكانية الاختيار من تشكيلة من 1000 نوع مـن البيتزا . فإذا علمت انه بالإضافة إلى المكون الأساسي وهو الجبن يوجد بالمطعم 10 مكـونات إضافية يمكن الدمج بين أياً منها لعمل مجموعة متنوعة من البيتزا . والسؤال هو ، هـل هـذا الإعلان صادق أم هو إعلان كاذب ؟

الحل :

حيث أن أي تركيبة من المكونات العشرة الإضافية يمكن وضعها مع المكون الأساسي للبيـتزا . إذن عدد الأنواع المختلفة من البيتزا التي يمكن أن يقدمها المطعم يسـاوي عـدد المجموعـات الجزئية من مجموعة المكونات العشرة الإضافية ، أي انه يســاوى $2^{10} = 1024$ ، إذن الإعلان يكون صادق . ونلاحظ أن المجموعة الخالية من مجموعة المكونات العشرة تناظر تقـديم وجبة بيتزا بالمكون الأساسي فقط وهو الجبن والمجموعة الشاملة تناظر تقديم وجبة بيتزا بـالمكون الأساسي بالإضافة إلى المكونات العشرة الإضافية .

مثـــال ١٨ :

مجموعة من 40 طالب في أحد المدارس

١ – بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من أربعة طلاب ؟

٢ – بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من أربعة طلاب بحيث أن أحد الطلاب لابد أن يكون في هذه اللجنة ؟

الحل :

١ – المطلوب هو إيجاد عدد طرق اختيار أربعة طلاب من 40 طالب وواضح أن الترتيب غير مهم أي أن المطلوب هو عدد توافيق 40 من العناصر مأخوذة 4 في كل مرة

$$\binom{40}{4} = \frac{(40!)}{(4!)\times(36!)} = 91390$$

٢ – إذا كان أحد الطلاب لابد أن يكون في هذه اللجنة فإن اختيار باقي أعضاء اللجنة يتـــم باختيار 3 طلاب من 39 ويتم ذلك بطرق عددها

$$\binom{39}{3} = \frac{(39!)}{(3!)\times(36!)} = 9139$$

مثـــال ١٩ :

بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من 3 طلاب على الأقل من بين خمسة طلاب ؟

الحل :

المطلوب هو حصر عدد الطرق الممكنة لتشكيل لجنة من 3 طلاب على الأقل يتم اختيارها مـــن بين خمسة طلاب وهذا يعنى أن اللجنة يمكن أن تكون من 3 طلاب أو 4 طلاب أو 5 طلاب .

عدد طرق تشكيل لجنة من 3 طلاب من الطلاب الخمسة هو $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(3!)\times(2!)} = 10$

عدد طرق تشكيل لجنة من 4 طلاب من الطلاب الخمسة هو $\binom{5}{4} = \frac{5!}{(4!)\times(1!)} = 5$

عدد طرق تشكيل لجنة من 5 طلاب من الطلاب الخمسة هو $\binom{5}{5} = \frac{5!}{(5!)\times(0!)} = 1$

ووفقاً لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الممكنة لتشكيل لجنة من 3 طلاب على الأقل مـــن بـــين الطلاب الخمسة يساوى $10 + 5 + 1 = 16$.

مثـــال ٢٠:

من بين 4 رجال و 5 نساء يراد تكوين لجنة مؤلفة من 3 أشخاص . بكم طريقة يمكن تكويـــن اللجنة في الحالات الآتية :

١ – بـــدون أي قيـــود في اختيار أعضاء اللجنة .

٢ – اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة واحدة .

٣ – اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة واحدة بشرط أن أحد الرجال يجب أن يكون باللجنة .

الحل :

١– إذا تم اختيار اللجنة بدون أي قيود فإن عدد طرق اختيار 3 أشخاص من 9 أشخاص هو

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{(3!)\times(6!)} = 84$$

٢– عدد طرق اختيار رجلين من أربعة رجال هو $\binom{4}{2} = \frac{4!}{(2!)\times(2!)} = 6$

وعدد طرق اختيار امرأة من خمس نســـاء هو $\binom{5}{1} = \frac{5!}{4!} = 5$

إذن وفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق اختيار رجلين وامرأة واحدة هو

$$\binom{4}{2} \times \binom{5}{1} = 6 \times 5 = 30$$

٣ – في حالة أن اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة واحدة بشرط أن أحد الرجـــال يجـــب أن يكون باللجنة فإن عدد طرق اختيار رجل من ثلاثة رجـــال هو

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{2!} = 3$$

عدد طرق اختيار امرأة من خمس نســـاء هو

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{4!} = 5$$

إذن وفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق اختيار رجلين وامرأة واحـــدة بشـــرط أن أحد الرجال يجب أن يكون في هذه اللجنة هو

$$\binom{3}{1} \times \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15$$

مثـــال ٢١:

في أحد المدارس من بين 6 معلمين لمادة الرياضيات ، 10 طلاب متفوقين في مادة الرياضيـــات يراد اختيار 3 معلمين ، 4 طلاب متفوقين لتكوين جمعية الرياضيات بالمدرسة .

١ – أوجد عدد الطرق التي يمكن بها تشكيل هذه الجمعية .

٢ – أوجد عدد الطرق التي يمكن بها تشكيل هذه الجمعية إذا كان المــــدرس الأول في مـــادة الرياضيات يجب أن يكون في اللجنة .

٣ – إذا كان يوجد طالبان متخاصمان ولا يرغبان أن يشاركا في اللجنة معاً فبكم طريقة يمكـــن بها تشكيل هذه الجمعية ؟

الحل :

١ – تمثيل المعلمين يتم باختيار 3 معلمين من 6 وتمثيل الطلاب يتم باختيار 4 طلاب مـــن 10 وحيث أن الترتيب في اختيار المعلمين أو الطلاب غير مهم لذلك نستخدم التوافيق ، إذن

عدد طرق اختيار 3 معلمين من 6 معلمين يكون $\binom{6}{3} = \frac{(6!)}{(3!)\times(3!)} = 20$

عدد طرق اختيار 4 طلاب من 10 طلاب يكون $\binom{10}{4} = \frac{(10!)}{(4!)\times(6!)} = 210$

ووفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد الطرق الكلية لتشكيل الجمعية $4200 = 20\times210$.

٢– إذا كان المدرس الأول في مادة الرياضيات يجب أن يكون في اللجنة فإن تمثيل باقي المعلمين يتم باختيار 2 معلمين من 5 بينما تمثيل الطلاب لن يتأثر أي اختيار 4 طلاب من 10 . إذن

عدد طرق اختيار 2 معلمين من 5 معلمين يكون $\binom{5}{2} = \frac{(5!)}{(2!)\times(3!)} = 10$

ووفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد الطرق الكلية لتشكيل الجمعية $2100 = 10\times210$.

٣– حيث انه يوجد طالبان متخاصمان ولا يرغبان أن يشاركا في اللجنة معاً لذلك نســتبعدهم من مجموع الطلاب ليتبقى 8 وعدد طرق اختيار 4 طلاب من 8 يساوى $\binom{8}{4}$ ومع كل مـن الطالبان المتخاصمان يمكن اختيار 3 من الثمانية المتبقين ويتم ذلك بطرق عددها $\binom{8}{3}$ ووفقـــاً لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الكلية لاختيار الطلاب يساوى $\binom{8}{4} + \binom{8}{3} + \binom{8}{3} = 182$

وتمثيل المعلمين لن يتأثر وبالتالي فإن عدد الطرق الكلية لتشكيل الجمعية $3640=20\times182$.

مثـــال ٢٢:

شخص له عشرة أصدقاء من الجنسين ، ويرغب في دعوة خمسة منهم ألي حفل . أوجد عدد الطرق الممكنة لدعوتهم في الحالات الآتية :

١ – بدون أي قيود .

٢ – اثنان من أصدقائه متزوجان ولابد أن يحضرا معاً .

٣ – اثنان من أصدقائه متخاصمان ولا يمكنهما الحضور معاً .

الحل :

١ – عدد طرق اختيار خمسة أصدقاء من عشرة أصدقاء $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \times 5!} = 252$

٢ – حيث أن اثنان من أصدقائه متزوجان ولابد أن يحضران معاً ، لذلك بـعد اســتبعادهم يتبقى 8 أصدقاء وعدد طرق اختيار خمسة أصدقاء من الثمانية المتبقين يكون $\binom{8}{5}$ وعنــد دعوة الاثنان المتزوجان للحضور يتبقى اختيار ثلاثة من الثمانية المتبقين بطرق عددها $\binom{8}{3}$ إذن وفقاً لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الكلية يكون

$$\binom{8}{5} + \binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \times 3!} + \frac{8!}{3! \times 5!} = 56 + 56 = 112$$

٣ – حيث أن اثنان من أصدقائه متخاصمان ولا يمكنهما الحضور معاً ، لذلك بعد اســتبعادهما يتبقى 8 أصدقاء وعدد طرق اختيار خمسة أصدقاء من الثمانية المتبقين يكون $\binom{8}{5}$ ومع كـل شخص من الاثنان المتخاصمان يمكن اختيار أربعة من الثمانية المتبقين بطرق عددهـا $\binom{8}{4}$ إذن وفقاً لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الكلية يكون

$$\binom{8}{5} + \binom{8}{4} + \binom{8}{4} = \frac{8!}{5! \times 3!} + 2 \times \frac{8!}{4! \times 4!} = 196$$

مثـــال ٢٣ :

امتحان لمادة الرياضيات به عشرة أسئلة ومطلوب من الطلاب الإجابة على ثمانية أسئلة فقـــط ، أوجد ما يأتي :

١ – بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها ؟

٢ – بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية ؟

٣ – بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها إذا كان مـــن الضـــروري أن يجيب عن ثلاثة أسئلة من الأسئلة الأربعة الأولى ؟

٤ – إذا وضعت الأسئلة في مجموعتين في كل مجموعة خمسة أسئلة ومطلـــوب مـــن الطـــلاب الإجابة على أربعة أسئلة فقط من كل مجموعة فبكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها ؟

٥ – إذا وضعت الأسئلة في مجموعتين في كل مجموعة خمسة أسئلة ومطلـــوب مـــن الطـــلاب الإجابة على أربعة أسئلة فقط من كل مجموعة وكان الســـؤال الأول في كـــل مجموعـــة إجباري فبكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها ؟

الحل :

١ – عدد طرق اختيار ثمانية أسئلة من عشرة أسئلة هو عدد توافيق 10 من الأسئلة مأخوذة 8 في كل مرة ونلاحظ هنا أن الترتيب في اختيار الأسئلة غير مهم لذلك استخدمنا التوافيق ، إذن عدد الطرق يكون

$$\binom{10}{8} = \frac{(10!)}{(8!)\times(2!)} = 45$$

٢ – إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية فإنه يتبقى للطالب 7 أسئلة يختار منها 5 وبالتـــالي فإن عدد الطرق في هذه الحالة هو عدد طرق اختيار 5 أسئلة من 7 أسئلة . إذن عدد الطرق يكون

$$\binom{7}{5} = \frac{(7!)}{(5!)\times(2!)} = 21$$

٣- عدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها ثلاثة أسئلة من الأسئلة الأربعة الأولى يكون

$$\binom{4}{3} = \frac{(4!)}{(3!)\times(1!)} = 4$$

وعدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها الخمسة أسئلة المتبقية من بين الستة أسئلة المتبقيـــة الأخرى يكون

$$\binom{6}{5} = \frac{(6!)}{(5!)\times(1!)} = 6$$

ووفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد الطرق الكلية لاختيار الثمانية أسئلة يكون

$$4 \times 6 = 24$$

٤- إذا وضعت الأسئلة في مجموعتين في كل مجموعة خمسة أسئلة ، إذن

عدد طرق اختيار 4 من 5 أسئلة بالمجموعة الأولى يكون $\binom{5}{4} = \frac{(5!)}{(4!)\times(1!)} = 5$

عدد طرق اختيار 4 من 5 أسئلة بالمجموعة الثانية يكون $\binom{5}{4} = \frac{(5!)}{(4!)\times(1!)} = 5$

ووفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد الطرق الكلية لاختيار الثمانية أسئلة يكون

$$5\times5 = 25$$

٥ - إذا كان السؤال الأول في كل مجموعة إجباري ، فإنه يتبقى للطالب في كل مجموعة 4 أسئلة يختار منها 3 ، إذن

عدد طرق اختيار 3 من 4 أسئلة بالمجموعة الأولى يكون $\binom{4}{3} = \frac{(4!)}{(3!)\times(1!)} = 4$

عدد طرق اختيار 3 من 4 أسئلة بالمجموعة الثانية يكون $\binom{4}{3} = \frac{(4!)}{(3!)\times(1!)} = 4$

ووفقا للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد الطرق الكلية لاختيار الثمانية أسئلة يكون

$$4\times4 = 16$$

مثـــال ٢٤ :

في أحد الأندية الرياضية يوجد 25 لاعبا مسجلين في فريق كرة القدم منهم 3 لاعبـــين في حراسة المرمى ، 9 لاعبين في خط الدفاع ، 7 لاعبين في خط الوسط ، 6 لاعبين في خـــط الهجوم . بكم طريقة يمكن تشكيل فريق للعب أحد المباريات ويتكون من 11 لاعبـــا منـــهم واحد لحراسة المرمى وأربعة لخط الدفاع وثلاثة لخط الوسط وثلاثة لخط الهجوم علما بأن كابتن الفريق يلعب في خط الهجوم ولابد من اختياره ضمن الفريق . وإذا كان كابتن الفريق يلعب في خط الدفاع فكم يكون عدد طرق تشكيل الفريق .

الحل : يتم اختيار الفريق عن طريق

اختيار واحـــد من ثلاثة لحراســـة المرمى بطرق عددها $\binom{3}{1}$

واختيار 4 من 9 لاعبين لخط الدفاع بطرق عددها $\binom{9}{4}$

واختيار 3 من 7 لاعبين لخط الوسط بطرق عددها $\binom{7}{3}$

واختيار 3 من 6 لاعبين لخط الهجوم ولكن حيث أن كابتن الفريق يلعب في خط الهجـــوم ولابد من اختياره ضمن الفريق ، إذن يتم اختيار 2 من 5 لاعبين فقط لخط الهجوم بطرق عددها $\binom{5}{2}$ ووفقا للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق تشكيل فريق للعب المباراة يكون

$$\binom{3}{1}\times\binom{9}{4}\times\binom{7}{3}\times\binom{5}{2} = \frac{3!}{1!\times 2!}\times\frac{9!}{4!\times 5!}\times\frac{7!}{3!\times 4!}\times\frac{5!}{2!\times 3!}$$
$$= 3\times 126\times 35\times 10 = 132300$$

وإذا كان كابتن الفريق يلعب في خط الدفاع ولابد من اختياره ضمن الفريق ، إذن يتم اختيـــار 3 من 8 لاعبين فقط لخط الدفاع بطرق عددها $\binom{8}{3}$ وبالتالي فإن عدد طرق تشـــكيل الفريق يكون

$$\binom{3}{1}\times\binom{8}{3}\times\binom{7}{3}\times\binom{6}{3} = 3\times 56\times 35\times 20 = 117600$$

مثـــال ٢٥ :

يوجد n من النقاط في المستوى $\{(x_i , y_i)\}_{i=1}^{n}$ بحيث لا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد .

١ – كم عدد المستقيمات التي يمكن أن تحددها هذه النقاط ؟

٢ – كم مستقيم منها لا يمر بالنقطة (x_1,y_1) أو (x_2,y_2) ؟

٣ – كم عدد المثلثات التي يمكن تحديدها بهذه النقاط ؟

٤– كم مثلث من هذه المثلثات تحتوى النقطة (x_1,y_1) كرأس فيها ؟

٥ – كم مثلث من هذه المثلثات يكون أحد أضلاعه هو الخط الواصل بين النقطتين (x_1,y_1) , (x_2,y_2) ؟

الحل : حيث أن النقاط عددها n ولا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد وحيث أن المستقيم يتحدد بنقطتين ، إذن

١ – عدد المستقيمات التي يمكن أن تحددها هذه النقاط يكون هو عدد طرق اختيار نقطتين من n من النقاط ويساوى $\binom{n}{2}$.

٢ – لإيجاد عدد المستقيمات التي لا تمر بالنقطة (x_1,y_1) أو (x_2,y_2) نستبعد النقطتين فيكون لدينا $n - 2$ من النقاط نختار منها نقطتين ويكون ذلك بطرق عددها $\binom{n-2}{2}$.

٣ – حيث أن المثلث له ثلاثة رؤوس ، إذن عدد المثلثات التي يمكن تحديدها بهذه النقاط يكون هو عدد طرق اختيار ثلاثة نقاط من n من النقاط ويساوى $\binom{n}{3}$.

٤– لإيجاد عدد المثلثات التي تحتوى النقطة (x_1,y_1) فإننا نحجز هذه النقطة كرأس للمثلث فيتبقى لدينا $n - 1$ من النقاط نختار منها نقطتين كرأسين آخرين للمثلث ويكون ذلك بطرق عددها $\binom{n-1}{2}$.

٥ – لإيجاد عدد المثلثات التي تحتوى النقطتين (x_2,y_2) , (x_1,y_1) كرأسين للمثلث فإننا نحجز هاتين النقطتين ، وبالتالي يتبقى $n - 2$ من النقاط نختار منها نقطة واحدة لتمثل الرأس الثالث ويكون ذلك بطرق عددها $n - 2$.

٥ - التبادبل مع التكرار

Distinguishable Permutations

في بعض الأحيان يكون مطلوب معرفة عدد تباديل مجموعة من العناصر بعضها متمـــاثلا والصيغة العامة لمثل هذا العدد من التباديل نحصل عليه من النظرية الآتية :

نظرية ٦ :

إذا كان ضمن n من العناصر يوجد n_1 من العناصر المتشابهة ، n_2 من العنـــاصر المتشـــابهة والمختلفة عن النوع الأول ، n_3 من العناصر المتشابهة والمختلفة عن النوعين الأولين وهكـــذا إلى n_k من العناصر المتشابهة والمختلفة عن جميع العناصر من الأنواع السابقـــة فـــإن عـــدد تباديل العناصر التي عددها n (أي أن عدد طرق ترتيب العناصر n) يســـاوي

$$\frac{n!}{(n_1!)\times(n_2!)\times\ \dots\ \times(n_k!)}$$ ويرمز له بالرمز $$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

ويمكن تفسير هذه النظرية على أنها تعطينا عدد الطرق التي يمكننا بها تقسيم مجموعة فيها n من العناصر إلى k من المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها على التوالي $n_1, n_2, \dots, n_k$

بحيث أن $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ فيكون عدد الطرق $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$

مثـــال ٢٦: بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الاسم RAAFAT ؟

الحل : عدد الحروف $n = 6$ كالآتي (1R , 3A , 1F , 1T)

إذن عدد طرق الترتيب .

$$\frac{6!}{(1!)\times(3!)\times(1!)\times(1!)} = \frac{720}{6} = 120$$

مثـــال ٢٧ :

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف STATISTICS بشرط أن يبدأ كل عنصر في الترتيب بالمقطع STA ؟

الحل : بعد حجز المقطع STA فإن الحروف المتبقية $n = 7$ كالآتي (2T ,2I , 2S ,1 C)

إذن عدد طرق الترتيب

$$\frac{7!}{(2!)\times(2!)\times(2!)\times(1!)} = \frac{5040}{8} = 630$$

مثـــال ٢٨ :

صف دراسي به خمسة عشر طالباً ، بكم طريقة يمكن توزيع ثلاثة نماذج للامتحان على هـــؤلاء الطلاب إذا أخذ كل خمسة طلاب نفس نموذج الامتحان ؟

الحل :

عدد طرق تجزي 15 طالب إلى ثلاث مجموعات بحيث تتكون كل مجموعة من 5 طلاب يكون

$$\frac{(15)!}{(5!)\times(5!)\times(5!)}=756756$$

ويمكن حل المثال بأسلوب آخر كالآتي :

عدد طرق اختيار 5 طلاب من خمسة عشر طالبا للإجابة على النمـــوذج الأول للامتحـــان يكون

$$\binom{15}{5}=\frac{(15!)}{(5!)\times(10!)}=3003$$

وعدد طرق اختيار 5 طلاب من الطلاب العشرة المتبقين للإجابة علـــى النمـــوذج الثـــاني للامتحان يكون

$$\binom{10}{5}=\frac{(10!)}{(5!)\times(5!)}=252$$

وعدد طرق اختيار 5 طلاب من الطلاب الخمسة المتبقين للإجابة علـــى النمـــوذج الثـــالث للامتحان يكون

$$\binom{5}{5}=\frac{(5!)}{(5!)\times(0!)}=1$$

وهذا واضح لان الطلاب الخمسة المتبقون يكون لهم النموذج الثالث .

ووفقاً للقاعدة الأساسية للعد فإن عدد الطرق الكلية لتوزيع ثلاثة نماذج للامتحان على 15 طالب إذا أخذ كل خمسة طلاب نفس نموذج الامتحان يكون

$$3003\times252\times1=756756$$

مثـــال ٢٩ :

بكم طريقة يمكن توزيع 7 أشخاص على 3 غرف في فندق حيث أن غرفتين من ذات سريرين وغرفة ذات ثلاث أسِـــرَّة ؟

الحل : عدد الأسِـــرَّة $n = 7$ وحيث أنه يوجد غرفتين من ذات سريرين وغرفة ذات ثلاث أسِـــرَّة ، إذن عدد طرق الترتيب

$$\frac{7!}{(2!)\times(2!)\times(3!)} = 210$$

مثـــال ٣٠ :

بكم طريقة يمكن تقسيم مجموعة من 12 طالب إلى ثلاثة مجموعات متساوية ؟

الحل :

كل مجموعة تحتوى على 4 طلاب

إذن عدد طرق التقسيم $$\frac{(12)!}{(4!)\times(4!)\times(4!)} = 34650$$

مثـــال ٣١ :

بكم طريقة يمكن تقسيم مجموعة من 12 طالب إلى ثلاثة مجموعات مكونة من 5 , 4 , 3 طلاب ؟

الحل :

عدد طرق التقسيم $$\frac{(12)!}{(3!)\times(4!)\times(5!)} = 27720$$

مثـــال ٣٢ :

بكم طريقة يمكن ترتيب 3 مصابيح حمراء و 4 مصابيح صفراء و 5 مصابيح زرقاء على واجهة أحد المحلات التجارية ؟

الحل :

عدد المصابيح $n = 12$ كالآتي (3 حمراء ، 4 صفراء ، 5 زرقاء)

إذن عدد طرق الترتيب $$\frac{(12)!}{(3!)\times(4!)\times(5!)} = 27720$$

٦ - طرق سحب العينات Sampling Methods

تدور الكثير من مسائل التحليل التوافقي وبصفة خاصة في الاحتمالات حول سحب أو اختيار كرة من صندوق به n من الكرات أو سحب ورقة من مجموعة من الأوراق أو اختيار شخص من مجتمع ما ، وعملية اختيار كرة من الصندوق r من المرات تسمى عينة حجمها r ، وسوف ندرس حالتين مختلفتين لسحب العينات :

الحالة الأولى : السحب مع الإرجاع (المعاينة مع الإحلال)

في هذه الحالة يعاد كل عنصر بعد سحبه وقبل سحب العنصر التالي ، وبذلك يظل عدد العناصر n ثابت في كل مرة يتم فيها السحب ، وحيث أنه يوجد n طريقة مختلفة لسحب كل عنصر ، إذن بتطبيق القاعدة الأساسية للعد يكون عدد طرق سحب r من العناصر من n من العناصر بحيث يتم الإرجاع في كل مرة هو

$$\underbrace{n\times n\times n\times \;\dots\; \times n}_{r} = n^r$$

الحالة الثانية : السحب بدون إرجاع (المعاينة بدون إحلال)

في هذه الحالة لا يعاد العنصر المسحوب قبل سحب العنصر التالي وبذلك يتناقص العدد في كل مرة يجري فيها السحب ، وإذا كانت العناصر مميزة فإن عدد طرق سحب r من العناصر من n من العناصر (بدون إرجاع) هو $_nP_r$ حيث يتم مراعاة الترتيب بينما إذا كانت العناصر غير مميزة فإن عدد طرق سحب r من العناصر من n من العناصر (بدون إرجاع) هو $\binom{n}{r}$ حيث لا يراعى الترتيب .

مثال ٣٣ :

في تجربة سحب ورقتان عشوائيا من أوراق اللعب (الكوتشينة) مع الإرجاع فإن عدد عناصر فضاء العينة لهذه التجربة يكون $52 \times 52 = 2704$ أما إذا كان السحب بدون إرجاع مع مراعاة الترتيب فإن عدد عناصر فضاء العينة يكون $_{52}P_2 = 2652$ بينما إذا كان السحب بدون إرجاع وبدون مراعاة الترتيب فإن عدد عناصر فضاء العينة يكون $\binom{52}{2} = 1326$.

مثــال ٣٤ : صندوق يحتوى على9 كرات بيضاء ، 6 كرات سوداء ، 5 كــرات حمـراء ونريد اختيار مجموعة من الكرات بطريقة عشوائية

١ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات ؟

٢ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من كرتين بيضاء وكرة سوداء ؟

٣ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من ثلاث كرات من نفس اللون ؟

٤ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات مختلفة الألوان ؟

الحل :

اختيار أي مجموعة من كرات يعنى أن يتم سحب الكرات معاً بدون إرجـــاع ودون مراعـاة للترتيب ، وحيث أن عدد الكرات بالصندوق يساوى 20 كرة ، إذن

١ – يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات بطرق عددها

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{(3!)\times(17!)} = 1140$$

٢ – يمكن اختيار مجموعة من كرتين بيضاء وكرة سوداء بطرق عددها

$$\binom{9}{2}\times\binom{6}{1} = 36\times 6 = 216$$

٣ – يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات من نفس اللون بأن تكون الكرات الثلاث بيضاء ويتم ذلك بطرق عددها $84 = \binom{9}{3} = \frac{9!}{(3!)\times(6!)}$ أو أن تكون الكرات الثلاث سوداء ويتـم ذلك بطرق عددها $20 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{(3!)\times(3!)}$ أو أن تكون الكرات الثلاث حمراء ويتـم ذلك بطرق عددها $10 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(3!)\times(2!)}$ ومن قاعدة الجمع فإنه يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات مختلفة الألوان بطرق عددها $84+20+10 = 114$.

٤ – يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات مختلفة الألوان بأن نختار كرة من كل لون ويتم ذلــك بطرق عددها

$$\binom{9}{1}\times\binom{6}{1}\times\binom{5}{1} = 9\times 6\times 5 = 270$$

مثـــال ٣٥ : في هذا المثال نوضح عدد عناصر فضاء العينـــة لبعض التجارب العشوائية :

١ – في تجربة اختيار 4 كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات والسحب مع الإرجاع

فإن عدد عناصر فضاء العينـــة S_1 للتجربة $n(S_1) = (10)^4 = 1000$

٢ – في تجربة اختيار 4 كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة والسحب بــــدون الإرجاع فإن عدد عناصر فضاء العينـــة S_2 للتجربة

$$n(S_2) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{(6!)\times(4!)} = \frac{5040}{24} = 210$$

٣ – في تجربة اختيار 4 كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات مميزة والسحب بدون إرجاع فإن عدد عناصر فضاء العينـــة S_3 للتجربة

$$n(S_3) = {}_{10}P_4 = \frac{10!}{6!} = 5040$$

٤– في تجربة سحب أربعة أوراق من الكوتشينة مع الإحلال ، فإذا أعيدت كـــل ورقـــة إلى الكوتشينة قبل سحب الورقة التالية فيكون سحب كل ورقة بطرق عددها 52 وبذلك فإن عدد عناصر فضاء العينـــة S_4 للتجربة يكون

$$n(S_4) = 52\times52\times52\times52 = (52)^4 = 7311616$$

وكل عنصر يمثل عينة تتكون من 4 أوراق تم سحبها بالإحلال .

٥ – في تجربة سحب أربعة أوراق من الكوتشينة على التوالي وبدون إحلال فإن الورقـــة الأولى يمكن سحبها بطرق مختلفة عددها 52 والورقة الثانية يمكن سحبها بطرق مختلفة عددهـــا 51 والورقة الثالثة يمكن سحبها بطرق مختلفة عددها 50 والورقة الرابعـــة والأخـــيرة يمكن سحبها بطرق مختلفة عددها 49 وبذلك فإن عدد عنـــاصر فضـــاء العينـــــة S_5 للتجربة في هذه الحالة يكون

$$n(S_5) = {}_{52}P_4 = 52\times51\times50\times49 = 6497400$$

وكل عنصر يمثل عينة مرتبة مختلفة تتكون من 4 أوراق تم سحبها بدون إحـــلال مـــع مراعاة الترتيب أما في حالة عدم مراعاة الترتيب فإن عدد عناصر فضـــاء العينـــــة S_6 للتجربة في هذه الحالة يكون $n(S_6) = \binom{52}{4} = 270725$.

٦ – في تجربة سحب عينة من أربعة أوراق من الكوتشينة بدون إحلال فإن الحدث أن تكـــون العينة جميعها صور يحدث بطرق عددها

$$_{12}P_4 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$$

وذلك لان عدد الأوراق الصور في الكوتشينة يساوى 12 .

٧ – في تجربة تحديد أعياد ميلاد n من الأشخاص وبفرض أن جميع السنوات 365 يومـــا وإذا أخذنا في الاعتبار أن يوم الميلاد لأي شخص منهم يمكن أن يكون أي يوم في الســـنة فإن عدد عناصر فضاء العينـــة S_7 للتجربة في هذه الحالة ، أي أن عدد الطرق الممكنة لتحديد أعياد الميلاد لهؤلاء الأشخاص يكون

$$n(S_7) = (365)^n$$

وإذا كانت أيام الميلاد لهؤلاء الأشخاص مختلفة فيمكن اختيار يوم عيد الميلاد للشـــــخص الأول بطرق عددها 365 ويمكن اختيار يوم عيد الميلاد للشخص الثاني بطرق عددهـــا 364 ويمكن اختيار يوم عيد الميلاد للشخص الثالث بطرق عددها 363 وهكـــــذا .
إذن عدد عناصر فضاء العينـــة S_8 للتجربة في هذه الحالة ، أي أن عدد الطرق الممكنة لتحديد أيام أعياد ميلاد مختلفة لهؤلاء الأشخاص يكون

$$n(S_8) = 365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times (365 - n + 1)$$

٨ – في تجربة تحديد جنس الطفل (ولد أو بنت) وتسلسل ميلاده في العائلات التى لديها ثلاثة أطفال فإن عدد عناصر فضاء العينـــة S_9 يكون

$$n(S_9) = (2)^3 \times (365)^3 = 389017000$$

٩ – في تجربة تسجيل تاريخ ميلاد 6 من الأشخاص إذا علم تاريخ ميلاد كل من الشخص الأول والشخص الثاني فإن عدد عناصر فضاء العينة S_{10} يكون

$$n(S_{10}) = 1 \times 1 \times (365)^4 = 17748901000$$

الفصل 2

تمارين

١ – من حروف كلمة HISTORY أوجد عدد الكلمات ذات الأربعة حروف والتي يمكن تكوينها في كل من الحالات الآتية :

أ – بدون أي قيود .

ب – كل كلمة تبدأ بالمقطع ST .

ج – كل كلمة تبدأ بحرف متحرك من الحروف المتحركة في كلمة HISTORY .

د – كل كلمة تحتوى الحرف R .

٢ – في أحد النوادي الرياضية أراد أحد الأشخاص أن يشترك في لعبتين إحداهما لعبة جماعية والأخرى لعبة فردية . أوجد عدد الطرق الممكنة للاشتراك إذا علمت أن النادي به أربع العاب جماعية وثلاث العاب فردية . أوجد كذلك عدد الطرق الممكنة للاشتراك في لعبة واحدة جماعية أو فردية .

٣ – كم خط تليفون يمكن تركيبه في مدينة ما إذا تألف رقم التليفون من سبعة أرقام

أ – أولها الرقم 8 ؟

ب – تبدأ برقم زوجي ؟

ج – تبدأ برقم اكبر من 6 ؟

د – تبدأ بثلاثة أرقام متساوية غير صفرية ؟

٤ – إذا كانت اللوحة المعدنية لرقم السيارة تحتوى على حرفين مختلفين من الحروف الأبجدية الإنجليزية يتبعهما ستة أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول صفرا .

أ – أوجد عدد اللوحات المعدنية المختلفة التى يمكن طبعها لأرقام السيارات .

ب – أوجد عدد اللوحات المعدنية المختلفة التى تبدأ بالحرف R .

٥ – نفرض مجموعة الأرقام { 9 , 8 , 7 , 6 , 4 , 3 , 2 } . كم عددا مكوناً من خمسة أرقام يمكن تكوينه من هذه المجموعة ؟ ومن هذه الأعداد كم منها يكون به أرقام مكررة ؟

٦ – مكتبة بها 800,000 كتاب ، يراد عمل كود لكل كتاب يتكون من ثلاث حروف أبجدية يتبعها رقمين . هل يمكن عمل كود بهذه الطريقة لجميع الكتب ؟

٧ – نفرض مجموعة الأرقام الزوجية { 8 , 6 , 4 , 2 } وبفرض السماح بالتكرار احسب :

١ – كم عددا مكونا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من هذه المجموعة ؟

٢ – كم عددا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من هذه المجموعة وقيمته اقل من 6000 ؟

٣ – كم عددا من ثلاثة أرقام قيمته اكبر من 500 يمكن تكوينه من هذه المجموعة ؟

٨ – بكم طريقة يمكن ترتيب الأرقام 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 للحصول على عدد x بحيث أن $5000 < x \leq 7000$ ؟

أ – مع السماح بالتكرار . ب – بدون السماح بالتكرار .

٩ – كم عدد المصفوفات من رتبة $m \times n$ التي يمكن تكوينها بحيث يكون عناصرها 0 أو 1 ؟

١٠– بكم طريقة يمكن أن يجلس ثلاثة أولاد وثلاثة بنات في صف به ستة مقاعد إذا كان

أ – الجلوس بدون أي قيود ؟ ب – يجلس الأولاد معاً والبنات معاً ؟

ج – تجلس البنات معاً ؟ د – يجلس الأولاد معاً ؟

١١ – خمسة رجال وزوجاتهم يريدون الجلوس على عشرة مقاعد مصفوفة في صف واحد بحيث تجلس النساء متجاورات . بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك ؟

١٢ – خمسة طرق مزدوجة تؤدى إلى تقاطع (دوران) في أحد المدن . بكم طريقة يمكن لسائق سيارة أن يتجه إلى الدوران من أياً من الطرق ويخرج من طريق آخر ؟ وإذا أراد السائق أن يتجه إلى الدوران من أحد الطرق ويخرج من أي طريق بما في ذلك طريق الدخول فبكم طريقة يتم ذلك ؟

١٣ – أربعة طلاب بالفرقة الثالثة و أربعة طلاب بالفرقة الرابعة يريدون الجلوس على ثمانية مقاعد مصفوفة في قاعة امتحان بحيث لا يجلس طالبان متجاوران ومن نفس الفرقة ، بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك ؟

١٤ – بكم طريقة يمكن لمجموعة من سبعة أشخاص في حفل أن يرتبوا أنفسهم بحيث يجلسون
أ – في صف به سبعة مقاعد ؟ ب – حول مائدة مستديرة بها سبعة مقاعد ؟

١٥ – أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار رئيس ووكيل وأمين صندوق لمجلس إدارة أحد الأندية الرياضية من بين عشرة أشخاص .

١٦ – في أحد النوادي الاجتماعية تقدم 25 عضوا للترشيح في مجلس إدارة النادي لاختيار رئيس للنادي ونائب للرئيس ووكيل وأمين صندوق . فإذا علمت أن هناك 5 أعضاء لا يرغبون في الترشيح لمنصب وكيل للنادي أو أمين صندوق فبكم طريقة يمكن اختيار المناصب الأربعة ؟

١٧ – في أحد المؤتمرات العلمية كان هناك 6 من الأساتذة كل منهم سيلقى بحثاً أمام الحضور . بكم طريقة يتم تنظيم إلقاء الأبحاث ؟ وإذا علمت أن أحد الأبحاث لابد أن يلقى في بداية المؤتمر فبكم طريقة يتم تنظيم إلقاء الأبحاث في هذه الحالة ؟

١٨ – قاعة للاجتماعات لها أربعة أبواب مختلفة . بكم طريقة يمكن لشخص الدخول إلى القاعة من أحد الأبواب والخروج من باب آخر ؟ بكم طريقة يمكن ذلك إذا كان الدخول والخروج من أي باب ؟

١٩ – فصل به 24 طالب وفى أحد الحصص الدراسية أراد مدرس الرياضيات إخراج 8 طلاب بطريقة عشوائية إلى السبورة وذلك للإجابة على مسائل الرياضيات . بكم طريقة يمكن للمدرس عمل ذلك ؟ وبكم طريقة يمكن للمدرس في خلال ثلاث حصص دراسية بمعدل 8 طلاب في كل حصة ، أن ينتهي من إخراج جميع الطلاب ؟

٢٠– في أحد المدارس من بين 5 طلاب بالفرقة الأولى ، 10 طلاب بالفرقـــة الثانيـــة ، 15 طالب بالفرقة الثالثة يراد اختيار لجنة ثقافية بالمدرسة تتكون من 9 طلاب ، أوجـــد عدد الطرق التى يمكن بها تشكيل هذه اللجنة في كل من الحالات الآتية :

١ – بدون أي قيود في اختيار أعضاء اللجنة .

٢ – أحد طلاب الفرقة الرابعة لابد أن يكون في هذه اللجنة .

٣ – أحد طلاب الفرقة الأولى لابد ألا يكون في هذه اللجنة .

٤ – اللجنة تشمل أعداد متساوية من الطلاب في الفرق الدراسية الثلاث .

٥ – اللجنة تشمل 2 بالفرقة الأولى , 3 بالفرقة الثانية , 4 بالفرقة الثالثة .

٦ – اللجنة تشمل 5 طلاب بالفرقة الثانية .

٧ – اللجنة لا تشمل أياً من طلاب الفرقة الأولى .

٨ – اللجنة تشمل طلاب الفرقة الثالثة فقط .

٩ – اللجنة تشمل على الأكثر 3 طلاب من الفرقة الثانية .

١٠ – اللجنة تشمل على الأقل 6 طلاب من الفرقة الثالثة .

٢١– امتحان لمادة الرياضيات به ثمانية أسئلة ومطلوب من الطلاب الإجابة على ستة أســـئلة فقط .

١ – بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها ؟

٢ – بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة إذا كان السؤال الأول إجباري ؟

٣ – بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية ؟

٤ – إذا وضعت الأسئلة في مجموعتين في كل مجموعة أربعة أسئلة ومطلوب من الطلاب الإجابة على ثلاثة أسئلة فقط من كل مجموعة فبكم طريقة يمكن للطالب أن يختـار الأسئلة التي يجيب عنها ؟

٥ – إذا وضعت الأسئلة في مجموعتين في كل مجموعة أربعة أســـئلة ومطلـــوب مـــن الطلاب الإجابة على ثلاثة أسئلة فقط من كل مجموعة وكان الســـؤال الأول في كل مجموعة إجباري فبكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة التي يجيب عنها ؟

٢٢– امتحان بنظام الاختيار من متعدد Multiple – choice يحتوى على 20 سؤال ولكل سؤال ثلاثة إجابات منها واحدة فقط صحيحة . أراد أحد الطلاب الإجابة على كل أسئلة الامتحان بالتخمين

١ – بكم طريقة يمكن للطالب إجابة الامتحان ؟

٢ – بكم طريقة يمكن للطالب الإجابة بالصواب على نصف الأسئلة ؟

٣ – بكم طريقة تكون إجابة الطالب خطأ في جميع أسئلة الامتحان ؟

٤ – بكم طريقة تكون إجابة الطالب صواب في جميع أسئلة الامتحان ؟

٢٣ – امتحان في مقرر التاريخ به 20 سؤال بنظام الاختيار من متعدد Multiple – choice وخمسة أسئلة مقاليه والمطلوب أن يجيب الطالب على 15 سؤال من أسئلة الاختيار من متعدد وثلاثة أسئلة مقاليه . بكم طريقة يمكن للطالب إجابة الامتحان ؟ وإذا كان الأسئلة الخمسة الأولى في الاختيار من متعدد إجبارية والسؤال الأول في أسئلة المقال إجباري فبكم طريقة يمكن للطالب إجابة الامتحان ؟

٢٤ – فريق يتكون من 3 أولاد ، 4 بنات يتم اختياره من مجموعة تتكون من 7 أولاد ، 9 بنات . فإذا علمت أن بنتان من المجموعة لا ترغبان في اللعب في نفس الفريق ، بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك ؟

٢٥ – في أحد المطاعم وضع إعلان يتيح للزبائن إمكانية الاختيار من تشكيلة من 200 نوع من البيتزا . فإذا علمت انه بالإضافة إلى المكون الأساسي وهو الجبن يوجد بالمطعم 7 مكونات إضافية يمكن الدمج بين أياً منها لعمل مجموعة متنوعة من البيتزا . والسؤال هو ، هل هذا الإعلان صادق أم هو إعلان كاذب ؟

٢٦ – أحد المطاعم تقوم بأعداد وجبات جاهزة للزبائن . فإذا علمت انه يوجد بالمطعم 3أنواع من الخبز ، 5 أنواع من الخضراوات ، 6 أنواع من اللحوم ، 10 أنواع من السلطات ، 4 أنواع من المشروبات . وإذا كانت الوجبة تشمل نوع واحد من كل من الخبز والخضار واللحوم ومشروب واحد ونوعين من السلطات . بكم طريقة يمكن تقديم أنواع مختلفة من هذه الوجبات الجاهزة ؟

٢٧ – أحد المطاعم تقوم بأعداد ساندويتشات جاهزة للزبائن . فإذا علمت انه يوجد بــالمطعم نوعان من الخبز ، 6 أنواع من اللحوم ، 5 أنواع من الجبن وثلاثــة أنــواع مــن السلطات . وبفرض أن السندوتش يحتاج بالضرورة إلى نوع واحد من الخبز ونــوع واحد من اللحوم أو الجبن ونوعان على الأقل من السلطات بكم طريقة يمكن تقــديم أنواع مختلفة من هذه الساندويتشات ؟

٢٨ – شخص له تسعة أصدقاء من الجنسين ويرغب في دعوة أربعة منهم إلى العشاء . أوجـد عدد الطرق الممكنة لدعوتهم في الحالات الآتية :

١ – بدون أي قيود .

٢ – اثنان من أصدقائه متزوجان ولابد أن يحضران معاً .

٣ – اثنان من أصدقائه متخاصمان ولا يمكنهما الحضور معاً .

٢٩ – في أحد الأندية الرياضية يوجد 30 لاعبا مسجلين في فريق كرة القدم منهم 4 لاعبين في حراسة المرمى ، 10 لاعبين في خط الدفاع ، 7 لاعبين في خط الوسط ، 9 لاعبين في خط الهجوم . بكم طريقة يمكن تشكيل فريق للعب أحد المباريات بحيث يتكون مـن حارس للمرمى وأربعة لخط الدفاع وأربعة لخط الوسط واثنان لخط الهجـــوم وأربعـة لاعبين احتياطي منهم حارس للمرمى ولاعب احتياطي لكل خط من خطوط الدفـــاع والوسط والهجوم علما بأن كابتن الفريق يلعب في خط الهجوم ولابد من اختياره ضمـن الفريق . وإذا كان كابتن الفريق يلعب في خط الدفاع فكم يكون عدد طرق تشـــكيل الفريق .

٣٠ – إذا كان عدد الطلاب الذين تم قبولهم في أحد الأقسام بالكلية 30 طـــالب ، بكـم طريقة يمكن تقسيم هؤلاء الطلاب

١ – إلى مجموعتان متساويتان من الطلاب .

٢ – إلى ثلاثة مجموعات متساوية من الطلاب .

٣ – إلى أربعة مجموعات مكونة من 9 , 8 , 7 , 6 طالب .

٣١ – يوجد 10 من النقاط A , B , C , D , E , F, G , H , I , J في المستوى بحيث لا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد .

١ – كم عدد المستقيمات التي يمكن أن تحددها هذه النقاط ؟

٢ – كم مستقيم منها لا يمر بالنقطة A أو F أو G ؟

٣ – كم عدد الأشكال الرباعية التي يمكن تحديدها بهذه النقاط ؟

٤ – كم من هذه الأشكال الرباعية يحتوى النقطة B كرأس فيها ؟

٥ – كم من هذه الأشكال الرباعية يكون أحد أضلاعه هو الخط الواصل بين النقطتين A , C ؟

٣٢ – يوجد n من النقاط في المستوى $\{(x_i , y_i)\}_{i=1}^{n}$ بحيث لا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد .

١ – كم عدد الدوائر التي يمكن أن تحددها هذه النقاط ؟

٢ – كم دائرة منها لا تمر بالنقطة (x_1, y_1) ؟

٣ – كم دائرة منها لا تمر بالنقطة (x_1, y_1) أو (x_2, y_2) ؟

٤ – كم دائرة منها تمر بالنقطة (x_1, y_1) ؟

٥ – كم دائرة منها تمر بالنقطة (x_1, y_1) أو (x_2, y_2) ؟

٦ – كم دائرة منها تمر بالنقطة (x_1, y_1) و (x_2, y_2) ؟

٣٣ – قطيع من الأغنام به 10 أغنام سليمة و 5 أغنام مصابة . بكم طريقة يمكن أخذ عينة من ثلاث أغنام في الحالات الآتية :

١ – بدون أي قيود في اختيار العينة .

٢ – العينة تحتوي على ثلاث أغنام سليمة .

٣ – العينة تحتوي على ثلاث أغنام مصابة .

٤ – عدد الأغنام السليمة في العينة اكبر من عدد الأغنام المصابة .

٥ – العينة تحتوى على أغنام سليمة ومصابة .

٣٤ – بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من 4 طلاب على الأقل من بين سبعة طـــلاب ؟ وإذا علمت أن أحد الطلاب لابد من وجوده ضمن هذه اللجنة فبكـــم طريقـــة يتـــم تشكيل اللجنة بحيث تتكون من 4 طلاب على الأقل من بين الطلاب السبعة ؟

٣٥ – بكم طريقة يمكن لستة أشخاص الوقوف في صف من اجل الصعود إلى حافلـــة ؟ وإذا أصر ثلاثة أشخاص من الستة على أن يكون الواحد تلو الآخر في ترتيـــب الصعـــود بالحافلة ، فبكم طريقة يتم صعود الأشخاص الستة في هذه الحالة ؟

٣٦ – أوجد عدد الطرق التى يمكن أن يجلس بها خمسة أشخاص في صـــف بشـــرط إصـــرار شخصين منهما أن يجلسا متجاورين .

٣٧– ألقي حجر نرد أربعة مرات على التوالي ، أوجد عدد طرق الحصول على أربعة أرقـــام مختلفة .

٣٨– ألقيت أربعة أحجار نرد ، أوجد عدد طرق الحصول على أربعة أرقام مختلفة في كل مـــن الحالات الآتية :

١ – الأحجار الأربعة متماثلة .

٢ – الأحجار الأربعة متميزة .

٣٩ – أوجد عدد التباديل المختلفة لحروف كلمة **MISSISSIPPI** ؟ كم تبديل منـــهم يبدأ بالمقطع **SSSS** ؟

٤٠– بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب حروف كل من الكلمات الآتية :

1 – ALGEBRA **2 – CALCULUS**
3 - STATISTICS **4 - SCIENCE**

٤١– بكم طريقة يمكن ترتيب حروف **RIZKALLA** بحيث يكون حرفي **A** متتاليين .

٤٢ – فصل به عشرون طالبا ، بكم طريقة يمكن توزيع خمسة اختبارات مختلفة علـــى هـــؤلاء الطلبة إذا أخذ كل أربعة من الطلبة نفس الاختبار ؟

٤٣ –أوجد عدد طرق ترتيب حروف كلمة PROBABILITY لكل من الحالات الآتية :

١ – بدون أي قيود .

٢ – كل ترتيب يبدأ بالمقطع PROB .

٣ – كل ترتيب ينتهي بالمقطع LITY .

٤ – كل ترتيب يبدأ بالمقطع PROB وينتهي بالمقطع LITY .

٥ – كل ترتيب يبدأ بالمقطع PROB أو ينتهي بالمقطع LITY .

٦ – كل ترتيب يحتوى المقطع BB .

٤٤ – بكم طريقة يمكن ترتيب 10 مصابيح حمراء و 9 مصابيح صفراء و 8 مصابيح زرقاء و 7 مصابيح خضراء على واجهة أحد المحلات التجارية ؟

٤٥ – أشترى رجل 9 العاب مختلفة لتوزيعها على أولاده الأربعة . بكم طريقة يمكن أن يعطى أحدهم ثلاثة العاب والباقين كل منهم لعبتين ؟

٤٦ – ترغب شركة مقاولات في بناء 10 نماذج مختلفة لناطحات سحاب في أحد الشوارع الشهيرة بالعاصمة بحيث يكون 4 نماذج على الجانب الأيمن ، 8 نماذج على الجانب الأيسر للشارع . بكم طريقة يتم ذلك ؟

٤٧ – مجموعة تتكون من 5 كتب هندسة ، 4 كتب جبر ، 3 كتب تفاضل ، 5 كتب فيزياء ، 3 كتب كيمياء ، 4 كتب أحياء يراد وضعها معاً على رف . أوجد ما يأتي :

١ – عدد طرق ترتيب الكتب معاً على الرف .

٢ – عدد طرق ترتيب الكتب بحيث تكون كتب كل مقرر معاً .

٣ – عدد طرق ترتيب الكتب بحيث تكون كتب الرياضيات معاً وكتب العلوم معاً .

٤ – عدد طرق ترتيب الكتب بحيث تكون كتب الهندسة معاً .

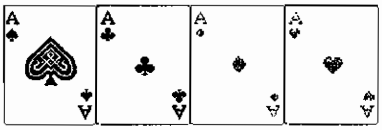
٤٨ – بكم طريقة يمكن توزيع 50 شخص على 24 غرفة في فندق به 10 غرف من ذات سريرين و 8 غرف ذات ثلاث أسِرَّة و 6 غرف مفردة ذات سرير واحد .

٤٩ – صندوق يحتوى على 10 كرات، أوجد عدد العينات المرتبة في كل من الحالات الآتية:

أ – حجم العينة 3 مع الإرجاع .

ب – حجم العينة 3 بدون إرجاع .

٥٠ – بكم طريقة يمكن سحب عينة من 7 ورقات الواحدة بعد الأخـــرى مـــن الكوتشـــينة وبدون إرجاع وبحيث يكون أربعة أوراق من الأوراق المسحوبة تحمل الرقم ١ .



٥١ – صندوق يحتوى على6 كرات بيضاء ، 5 كرات حمراء ، 3 كرات سوداء

١ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات ؟

٢ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من كرتين بيضاء وكرة حمراء ؟

٣ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من كرتين حمراء وكرة بيضاء ؟

٤– بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من ثلاث كرات من نفس اللون ؟

٥ – بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات مختلفة اللون ؟

٥٢ –في تجربة سحب ورقتان عشوائياً على التوالي من الكوتشينة أوجد عدد عناصر فضـــاء العينة لهذه التجربة في الحالات الآتية :

١ – السحب مع الإرجاع .

٢ – السحب بدون إرجاع مع مراعاة الترتيب .

٣ – السحب بدون إرجاع وبدون مراعاة للترتيب .

٥٣ – بكم طريقة يمكن سحب عينة من 5 ورقات مـــن أوراق اللعـــب (الكوتشـــينة) في الحالات الآتية :

أولا : السحب مع الإرجاع .

ثانيا : السحب بدون إرجاع .

٥٤ – أوجد عدد عناصر فضاء العينـــة لكل من التجارب الآتيـــة :

١ – سحب 5 كرات من صندوق يحتوي على 12 كرة والسحب مع الإرجاع .

٢ – سحب 5 كرات من صندوق يحتوي على 12 كرة متماثلة والسحب بدون الإرجاع.

٣ – سحب 5 كرات من صندوق يحتوي على 12 كرة مميزة والسحب بدون إرجاع .

٤ – اختيار مجموعة من 5 كرات من صندوق يحتوى على 8 كرات حمراء ، 4 سوداء .

٥ – اختيار كرتان مختلفتا اللون من صندوق يحتوى على 8 كرات حمراء ، 4 سوداء .

٦ – اختيار مجموعة من 3 كرات حمراء ، 3 كرات سوداء من صندوق يحتوى علـــى 8 كرات حمراء ، 4 سوداء .

٧ – تسجيل جنس الطفل وتسلسل ميلاده في العائلات التي لديها طفلان .

٨ – تسجيل تاريخ ميلاد خمسة أشخاص بينهم اثنان لهما نفس تاريخ الميلاد .

٩ – تسجيل تاريخ ميلاد خمسة أشخاص إذا علم تاريخ ميلاد اثنان منهم .

١٠ – تسجيل جنس الطفل وتسلسل ميلاده في العائلات التي لديها أربعة أطفال .

٥٥ – في تجربة سحب أربعة ورقات من أوراق اللعب (الكوتشينة) على التـــوالي وبـــدون إرجاع ، أوجد عدد عناصر كل من الأحداث الآتية :

١ – الأوراق الأربعة جميعها صور .

٢ – الأوراق الأربعة ليس بها صور .

٣ – الأوراق الأربعة ليس بها صور وكلها أرقام اكبر من 5 .

٤ – الأوراق الأربعة ليس بها صور وكلها أرقام زوجية .

٥ – الأوراق الأربعة ليس بها صور وكلها أرقام فردية .

٦ – الأوراق الأربعة بها ورقتان صور وورقتان لأرقام اكبر من 8 .

٧ – الأوراق الأربعة ليس بها صور وجميعها أرقام مختلفة .

٨ – الأوراق الأربعة ليس بها صور وجميعها أرقام متساوية .

٩ – الأوراق الأربعة ليس بها صور وليس بها أرقام تقبل القسمة على 3 .

١٠ – الأوراق الأربعة بها صورة وثلاثة أرقام متساوية .

٥٦ –إذا علمت أن معاملات المعادلة التربيعية $x^2 + b\,x + c = 0$ تم تعيينـــها عـــن طريق إلقاء حجر نرد مرتين على التوالي والعدد الذي يظهر في الرمية الأولى يمثل المعـــامل b بينما العدد الذي يظهر في الرمية الثانية يمثل العدد c .

١– أوجد عدد المعادلات التربيعية التي يمكن تكوينها .

٢– أوجد عدد المعادلات التربيعية التي يمكن تكوينها بشرط أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

٣– أوجد عدد المعادلات التربيعية التي يمكن تكوينها بشرط أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

٤– أوجد عدد المعادلات التي يمكن تكوينها بشرط أن يكون للمعادلة جذران مركبان .

٥٧– إذا علمت أن معاملات المعادلة التربيعية $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ يتم تعينها عـــن طريق إلقاء حجر نرد ثلاث مرات على التوالي والعدد الذي يظهر في الرمية الأولى يمثـــل المعامل a والعدد الذي يظهر في الرمية الثانية يمثل المعامل b بينما العدد الذي يظـــهر في الرمية الثالثة يمثل العدد c . أوجد عدد المعادلات في الحالات الأربعة في التمرين السابق .

٥٨– نفرض $A = \{ a_1 , a_2 \}$, $B = \{ b_1 , b_2 , b_3 \}$

١ – كم عدد الدوال $f : A \to B$ التي يمكن تعريفها ؟

٢ – كم عدد الدوال $f : A \to B$ التي يمكن تعريفها بحيث تكون أحادية (1-1) ؟

٣ – إذا كان $b_2 = b_3$ فكم عدد الدوال $f : A \to B$ التي يمكن تعريفها بحيث تكون فوقية (onto) ؟

٥٩– نفرض $A = \{ a_1 , a_2 , \dots , a_n \}$, $B = \{ b_1 , b_2 , \dots , b_m \}$

١ – أثبت أن عدد الدوال $f : A \to B$ التي يمكن تعريفها يساوى m^n .

٢ – إذا كان $m \geq n$ فأثبت أن عدد الدوال $f : A \to B$ التي يمكن تعريفها بحيث تكون أحادية (1-1) يساوى ${}_mP_n$.

٣ – إذا كان $m = n$ فأثبت أن عدد الدوال $f : A \to B$ التي يمكن تعريفها بحيث تكون فوقية (onto) يساوى $n!$.