الفصل

3

دالة الاحتمال
Probability Function

١- تعريف الاحتمال Probability Definition

يوجد للاحتمال عدة تعاريف مختلفة كالآتي :

(أ) – التعريف الكلاسيكي (القديم) للاحتمالات
Classical definition of Probability

يعتمد هذا التعريف أساساً على أن نواتج التجربة العشوائية (الأحداث الأولية) جميعها متساوية الفرصة في الحدوث أو الوقوع أو الظهور . فإذا كان عدد الطرق التي يمكن أن تظهر بها نواتج التجربة العشوائية هو n طريقة وجميعها متساوية الفرصة في الحدوث وكان من بينها m طريقة يظهر بها حدث A حيث $m \leq n$ فإن احتمال وقوع الحدث A يرمز له $P(A)$ ويعرّف بالصورة

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

وهذا التعريف لا يمكن الاعتماد عليه في جميع الأحوال لأن هناك بعض التجارب أو المحاولات يكون لبعض النواتج فرص اكبر (أو اقل) في الظهور عن غيرها من النواتج ولمثل هذه التجارب لا يمكن استخدام هذا التعريف .

(ب) – التعريف التجريبي (التكراري) للاحتمالات
Experimental definition of Probability

التعريف التجريبي للاحتمالات لا يشترط تساوى فرص ظهور نواتج التجربة العشوائية كما في التعريف الكلاسيكي ولكنه يعتمد أساساً على أجراء التجربة عدد كبير جداً من المرات ومعرفة نتائجها وبعد ذلك نستنتج قيمة الاحتمال ، أي أن التعريف التجريبي للاحتمال مبنى على فكرة التكرار النسبي للتجربة فإذا أجرينا تجربة ما n من المرات تحت نفس الظروف

وكان عدد المرات من بينها والتي نلاحظ فيها وقوع حدث معين A هو $n(A)$ من المـرات حيث $n(A)$ بالطبع تعتمد على n فإن خارج القسمة $\frac{n(A)}{n}$ يسمى التكـــرار النســبي للحدث A ، أي أن

$$\text{التكرار النسبي للحدث } A = \frac{\text{عدد مرات وقوع الحدث } A}{\text{عدد مرات أجراء التجربة}}$$

وبالملاحظة وجد انه عندما يزداد عدد المحاولات أي عندما تزداد قيمة n فإن المقدار $\frac{n(A)}{n}$ والذي يمثل التكرار النسبي للحدث A يكتسب بعض الانتظام ويؤول إلى نهاية معينة يســتقر حولها وهذه النهاية تمثل احتمال الحدث A ويرمز لها $P(A)$ ، أي أن احتمال الحـــدث A يعرّف بالصورة

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

وهذا يمثل التعريف التجريبي للاحتمالات وهذا التعريف يعتبر مشكوك فيه رياضياً ولا يمكـــن الاعتماد عليه كأساس دقيق لدراسة الاحتمالات نظراً لوجود بعض الصعوبات التي يتضمنـــها وهذه الصعوبات نلخصها في الآتي :

أولا : من الناحية العملية فإن النهاية $\lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$ لا يمكن حسابها لأنه من المســتحيل إعادة أجراء التجربة عدد لا نهائي من المرات فهذا ليس له معنى ونضيف إلى ذلك انــه إذا اعتبرنا لقيم n الكبيرة أن $\frac{n(A)}{n}$ هو تقريب لاحتمال الحدث A فإنه لا يوجد أسلوب أو طريقة نحلل بها الخطأ في هذا التقريب .

ثانيا : لا يوجد مبرر أو سبب يجعلنا على ثقة أو يقين في أن النهاية $\lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$ تكـــون موجودة ونضيف إلى ذلك أيضاً انه حتى وان كانت هذه النهاية موجودة فإنه لا يوجـد مبرر أو سبب يجعلنا على ثقة أو يقين بأن هذه النهاية تكون وحيدة ووفقا لذلك فإنــه ليس مضموناً أن يكون احتمال وقوع الحدث A وحيد القيمة .

ثالثا : وفقاً للتعريف التجريبي للاحتمالات فإن الاحتمالات التي تعتمد في أساسها على مقـدار الثقة لدينا وعلى معلوماتنا الشخصية لا يمكن تبريرها ، فمثلاً التعبيرات

" احتمال أن تسقط أمطار غدا يكون بنسبة 30 % " أو

" احتمال النجاح في الامتحان اكبر من 90 % " أو

" يوجد احتمال لارتفاع أسعار النفط بنسبة 20% في الشهر القادم "

مثل هذه التعبيرات أو ما شابهها لن يكون لـــه معـــنى في ظـــل التعريـــف التجريـــبي للاحتمالات .

وبالتالي يمكننا القول أن كل من التعريف الكلاسيكي والتعريف التجريبي للاحتمـــالات لا يفي بموضوع دراســـة الاحتمالات ولتفادى العيوب في التعريفيـــين الســـابقين تم وضــــع التعريف الرياضي للاحتمالات **Mathematical definition of Probability** وهــو تعريف تم وضعه في صورة دقيقـــة مبنى على أساس افتراض بعض المسلمات والــــتي تسـمى بمسلمات نظرية الاحتمال **Axioms of Probability Theory** وهى تتفق وتتناسب مـع فكرتنا الإدراكية لمعنى الاحتمال ومن هذه المسلمات تم اشتقاق نظريات الاحتمالات وهذا هــو البناء الرياضي لعلم الاحتمالات وهو في ذلك لا يختلف عن الأبنية الرياضية المختلفــــة الـــتي درسناها من قبل ، تلك الأبنية التي تفترض وجود الأساس الذي نبدأ منه وننطلق نحو البنـــاء الرياضي بأكمله وسوف نتعرف على هذا الأساس في البند القادم بعنوان مســـلمات نظريـــة الاحتمال .

مثال ١ :

ألقي حجر نرد 100 مرة ، والجدول الآتي يوضح تكرار ظهور كل من الأعداد الستة في فضاء العينة

العدد	1	2	3	4	5	6
التكرار	14	17	20	18	15	16

أوجد التكرار النسبي للحدث

١ – ظهور العدد 3 .

٢ – ظهور العدد 4 .

٣ – ظهور عدد زوجي .

٤ – ظهور عدد أولي .

٥ – ظهور عدد أقل من 3 .

٦ – ظهور عدد أكبر من 3 .

الحل :

$$\text{التكرار النسبي للحدث } A = \frac{\text{عدد مرات وقوع الحدث } A}{\text{عدد مرات أجراء التجربة}}$$

١ – التكرار النسبي لظهور العدد 3 يساوى $\frac{20}{100} = 0.2$

٢ – التكرار النسبي لظهور العدد 4 يساوى $\frac{18}{100} = 0.18$

٣ – الحدث ظهور عدد زوجي هو $\{2,4,6\}$ وعدد مرات وقوعه $17+18+16 = 51$

إذن التكرار النسبي للحدث ظهور عدد زوجي يساوى $\frac{51}{100} = 0.51$

٤ – الحدث ظهور عدد أولي هو $\{2,3,5\}$ وعدد مرات وقوعه $17+20+15 = 52$

إذن التكرار النسبي للحدث ظهور عدد أولي يساوى $\frac{52}{100} = 0.52$

٥ – الحدث ظهور عدد أقل من 3 هو $\{1 , 2\}$ وعدد مرات وقوعه $14+17=31$

إذن التكرار النسبي للحدث ظهور عدد أقل من 3 يساوى $\frac{31}{100} = 0.31$

٦ – الحدث ظهور عدد أكبر من 3 هو $\{4,5,6\}$ وعدد مرات وقوعه $18+15+16 = 49$

إذن التكرار النسبي للحدث ظهور عدد أكبر من 3 يساوى $\frac{49}{100} = 0.49$

٣ - مسلمات نظرية الاحتمال Axioms of Probability Theory

الهدف من الأبحاث في الرياضيات هو الحصول على نتائج جديدة وإثبات صحتها وكذلك إعطاء براهين أبسط لنتائج مبرهنة من قبل واكتشاف وابتكار روابط بين الفروع المختلفة في الرياضيات وبناء وحل نماذج رياضية تتعلق بمشاكل حقيقية في العالم من حولنا وهكذا إلى ما شابه ذلك . ولاكتشاف نتائج جديدة فإن المهتمين بالرياضيات يستخدمون طرق عديدة منها المحاولة والخطأ والتحليل الاستقرائي ودراسة الحالات الخاصة والتخمين وهنا تتجلى الموهبة والإبداع بالإضافة إلى طرق أخرى . وبوجه عام فإن الكثير من القضايا التي نتعامل معها في حياتنا تكون بحاجة إلى إثبات وبدون تقديم الإثبات تبقى مثل هذه القضايا مجرد ادعاءات معلقة إلى أن يتم إثبات صحتها أو إثبات عدم صحتها ، وبالمثل في مجال الرياضيات فإنه عندما يتم اكتشاف نتيجة جديدة فإن صحتها تبقى موضوع مشكوك فيه إلى أن يتم إثباتها بوضوح . وفي بعض الأحيان يكون لدينا نتيجة جديدة ما ونحاول إثباتها ولكننا نفاجأ بوجود أمثلة تثبت فشل هذه النتيجة ، ومثل هذه الأمثلة تسمى بالأمثلة المضادة **Counter Examples** أما إذا كانت هذه النتيجة صائبة فإننا نحتاج إلى وضع برهان يثبت هذه النتيجة وقد يأخذ هذا البرهان أيام أو شهور أو سنين وربما قرون من الزمن .

وفي علم الاحتمالات فإن البراهين تتم في إطار طريقة تعرف باسم طريقة المسلمات ، ولتقديم فكرة مبسطة عن ما هو المقصود بطريقة المسلمات نعطي المثال التوضيحي التالي : نفرض أننا نريد أن نقنع شخص ما بأن العبارة L_1 صحيحة . في هذه الحالة سوف نحاول أن نوضح لهذا الشخص أن هذه العبارة تكون ناتجة بأسلوب منطقي من عبارة أخرى L_2 أقل تعقيداً وابسط من العبارة L_1 وقد تكون مقبولة لديه ولكن أن كانت العبارة L_2 غير مقبولة وغير كافية للإقناع فإنه يتوجب علينا أن نبرهن أو نقيم الدليل على أن العبارة L_2 يمكن استنتاجها منطقياً من عبارة ابسط L_3 فإذا كانت هذه العبارة الجديدة L_3 لا تزال موضع للنقاش وجدل من هذا الشخص فإن العملية يجب أن تستمر على هذا المنوال حتى نصل إلى عبارة تكون مقبولة لديه بدون الحاجة إلى أي إيضاحات إضافية وعندئذ فإن هذه العبارة الأخيرة التي وصلنا إليها تصبح أساساً للبرهان ووجودها ضروري لأنه بدونها تصبح عملية التوضيح عملية غير منتهية ومثل هذه العبارة تسمى مسلمة **Axiom** وتكون بمثابة نقطة انطلاق نحو البرهان ، وتعرف المسلمة أحياناً بأنها قضية أو عبارة بلغت في ذاتها حداً من البداهة

يجعلنا نعجز عن الاهتداء إلى قضايا أو عبارات أشد بداهة منها لنبرهن بها عليها ، وعلى ذلك يمكننا القول أن طريقة المسلمات تعتمد في أساسها على بعض العبارات المتناسقة والتي لا تحتاج إلى أي تبرير أو زيادة إيضاح وهذه العبارات تسمى مسلمات **Axioms** ومن هذه المسلمات يمكن الوصول إلى نتائج جديدة تسمى نظريات **Theorems** ويمكن إثباتها ومن هذه النظريات يمكن أيضاً اكتشاف نظريات جديدة وتستمر هذه العملية بهذه الطريقة لتضع لنا الجانب النظري من علم جديد . وفى موضوعنا الشاغل في هذا الكتاب وهو علم الاحتمالات يوجد ثلاث مسلمات أساسية تمثل الأساس الذي تم عليه بناء نظرية الاحتمال ، وقد حان الوقت الآن للتعرف على هذه المسلمات الثلاث وهى تعرف كالآتي :

نفرض أن S فضاء العينة لتجربة عشوائية ما ، لأي حدث A من فضاء العينة S يتعين عدد $P(A)$ يرافق الحدث A ويسمى احتمال الحدث A ويحقق المسلمات الآتية :

<u>المسلمة الأولى :</u> $P(A) \geq 0$

<u>المسلمة الثانية :</u> $P(S) = 1$

<u>المسلمة الثالثة :</u> إذا كان $A_1, A_2, \ldots$ متتابعة لانهائية من الأحداث المتنافية فإن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

نلاحظ أن المسلمة الأولى تخبرنا بأن احتمال وقوع أي حدث يكون دائما غير سالب والمسلمة الثانية تضمن لنا أن احتمال وقوع الحدث المؤكد S يساوى 1 بينما المسلمة الثالثة تخبرنا بأنه لأي متتابعة لانهائية من الأحداث المتنافية فإن احتمال وقوع حدث على الأقل منهم يساوى مجموع احتمالاتهم .

<u>تعريف ١:</u>

الحدثان A , B من فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما يقال أنهما متساويا الفرصة في الوقوع **equally likely** لنعنى انهما متساويا الاحتمال أي أن $P(A) = P(B)$ ويقال كذلك أن الحدثان الأوليان $s_1 , s_2 \in S$ متساويا الفرصة في الوقوع لنعنى انهما متساويا الاحتمال أي أن $P(\{s_1\}) = P(\{s_2\})$.

نظرية ١ :

احتمال الحدث المستحيل يساوى صفر ، أي أن $P(\Phi)=0$.

البرهان : نفرض أن $A_1 = S \quad , \quad A_i = \Phi \quad \forall\ i \geq 2$

إذن $A_1 , A_2 , \ \ldots$ تكون متتابعة من الأحداث المتنافية وتحقق $S=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ،

ومن المسلمة الثالثة

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i)$$

$$= P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\Phi)$$

ومن ذلك نحصل على $\sum_{i=2}^{\infty} P(\Phi) = 0$ وهذا يتحقق فقط إذا كان $P(\Phi)=0$.

نظرية ٢ :

إذا كان $A_1 , A_2 , \ \ldots \ , A_n$ أحداث متنافية فإن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

البرهان : نفرض أن $A_i = \Phi \quad \forall \quad i > n$

إذن $A_1 , A_2 , \ \ldots$ متتابعة من الأحداث المتنافية وتحقق $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ، ومن

المسلمة الثالثة

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

وفي الحالة الخاصة بوضع $n=2$ في نظرية (٢) نحصل على

إذا كان $A_1 \ , \ A_2$ حدثان متنافيان فإن

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

نظرية ٣ :

لأي حدث A من فضاء العينة S فإن $P(A) \leq 1$.

البرهان :

حيث أنه لأي حدث A فإن A , A' تجزيئا لفضاء العينة S ، أي أن

$$S = A \bigcup A' \quad , \quad A \bigcap A' = \Phi$$

إذن

$$P(A \bigcup A') = P(A) + P(A')$$

ومن المسلمة الثانية $P(A \bigcup A') = P(S) = 1$ وبالتالي ينتج أن

$$P(A) + P(A') = 1$$

ومن المسلمة الأولى وحيث أن $P(A') \geq 0$ إذن ينتج أن $P(A) \leq 1$.

مثال ٢ :

في تجربة إلقاء عملة معدنية متزنة مرة واحدة فإن فضاء العينة $S = \{H, T\}$ ويقصد بعملة معدنية متزنة أن ظهور وجه العملة الصورة أو الكتابة متساوية الفرصة في الحدوث وهذا يعنى انه عند إلقائها فإن احتمال ظهور وجه العملة الصورة H يساوى احتمال ظهور وجه العملة الكتابة T أي أن $P(\{H\}) = P(\{T\})$ وحيث أن $\{H\}, \{T\}$ أحداث متنافية اتحادها هو S ، ومن المسلمات الثانية والثالثة

$$\begin{aligned} 1 = P(S) = P(\{H, T\}) &= P(\{H\}) + P(\{T\}) \\ &= P(\{H\}) + P(\{H\}) = 2\,P(\{H\}) \end{aligned}$$

إذن

$$P(\{H\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{2} .$$

وإذا كانت العملة المعدنية غير متزنة وبحيث أن احتمال ظهور الصورة H ضعف احتمال ظهور الكتابة T أي أن $P(\{H\}) = 2\,P(\{T\})$ وبالتالي

$$\begin{aligned} 1 = P(S) = P(\{H, T\}) &= P(\{H\}) + P(\{T\}) \\ &= 2\,P(\{T\}) + P(\{T\}) = 3\,P(\{T\}) \end{aligned}$$

إذن

$$P(\{T\}) = \frac{1}{3} \quad , \quad P(\{H\}) = \frac{2}{3}$$

مثال ٣ :

في تجربة إلقاء حجر نرد متزن مرة واحدة فإن $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ويقصد بحجر نرد متزن أن عناصر فضاء العينة جميعها متساوية في الاحتمال ، أي أن

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$$

وحيث أن $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$ أحداث متنافية اتحادها هـو S إذن من المسلمات الثانية والثالثة

$$\therefore\ 1 = P(S) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$$
$$= 6\ P(\{1\})$$

إذن $P(\{1\}) = \frac{1}{6}$ وبالتالي نحصل على

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

مثال ٤ :

إذا كان احتمال أن يتخرج أحد الطلاب من الكلية بتقدير امتياز أو جيد جدا يســاوى 0.9 وإذا كان احتمال أن يتخرج هذا الطالب بتقدير جيد جدا يساوى 0.6 فأوجد احتمــال أن يتخرج هذا الطالب بتقدير امتياز .

الحل :

نفرض الحدث A هو أن يتخرج الطالب بتقدير امتياز ،

والحدث B هو يتخرج الطالب بتقدير جيد جدا .

إذن $A \cup B$ هو الحدث أن يتخرج الطالب بتقدير امتياز أو جيد جدا

$$P(B) = 0.6 \quad , \quad P(A \cup B) = 0.9$$

وحيث أن الحدثان A , B متنافيان لأن وقوع أياً منهما يلغى وقوع الآخر فالطالب لا يمكــن أن يتخرج بتقديرين وبالتالي

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \rightarrow \quad 0.9 = P(A) + 0.6$$

إذن احتمال أن يتخرج الطالب بتقدير امتياز هو

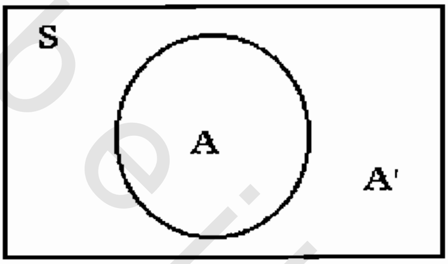
$$P(A) = 0.3$$

٣ – نظريات أساسية Basic Theorems

نظرية ٤ : لأي حدث A من فضاء العينة S فإن

$$P(A') = 1 - P(A)$$

البرهان :



الحدثان A' , A متنافيان لأن $A \cap A' = \Phi$ ومن المسلمة الثالثة لنظرية الاحتمال فإن

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

وحيث أن $A \cup A' = S$ إذن

$$P(S) = P(A) + P(A')$$

ومن المسلمة الثانية $P(S) = 1$ ، إذن $1 = P(A) + P(A')$

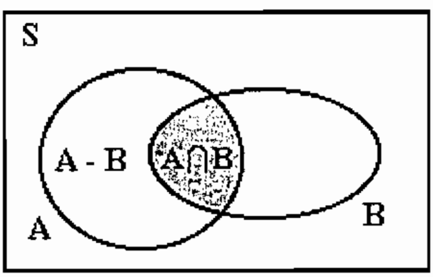
وبالتالي ينتج أن $P(A') = 1 - P(A)$.

نظرية ٥ :

لأي حدثان A , B من فضاء العينة S فإن

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

البرهان :



حيث أن الأحداث

$$A - B \;,\; A \cap B$$

أحداث متنافية واتحادها هو الحدث A

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

إذن من المسلمة الثالثة لنظرية الاحتمال فإن $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$

وبالتالي ينتج أن $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

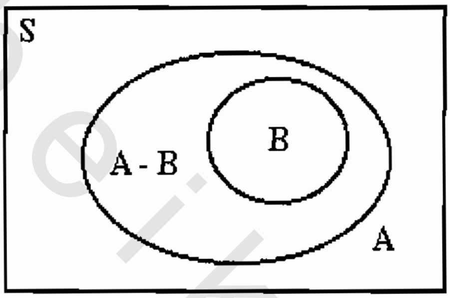
نظريـــة ٦ :

إذا كان B , A حدثان من فضاء العينة S بحيث أن $B \subseteq A$ فإن

$$1 - \quad P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$2 - \quad P(B) \leq P(A)$$

البرهان :



١ – الحدثان $A-B$, B متنافيـــــان

واتحادهما هو A وذلك لأن $B \subseteq A$

$$A = B \cup (A - B)$$

إذن من المسلمة الثالثة لنظرية الاحتمال

$P(A) = P(B) + P(A-B)$ وبالتالي

$$P(A-B) = P(A) - P(B)$$

٢ – من المسلمة الأولى لنظرية الاحتمال فـــإن دالـــة الاحتمـــال دالـــة موجبـــة ، إذن

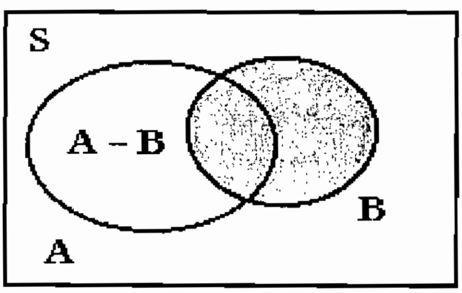
$P(A-B) \geq 0$ وحيث أن $P(A-B) = P(A) - P(B)$ إذن $P(A) - P(B) \geq 0$

وبالتالي ينتج أن $P(B) \leq P(A)$.

نظريـــة ٧ : لأي حدثان B , A من فضاء العينة S فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

البرهان :



حيث أن $A-B$, B أحداث متنافية

واتحادها هو $A \cup B$ إذن

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A-B)$$

وحيث أن

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

وبالتعويض ينتج أن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

تعريف ٢ : أرجحية الحدث

تعرف أرجحية حدث ما A بأنها النسبة بين احتمال الحدث A واحتمال مكملته A' أي أن أرجحية الحدث A هي النسبة

$$P(A) \; : \; 1 - P(A)$$

مثال ٥ :

أوجد الاحتمال p لحدث ما إذا علمت أن أرجحية الحدث هي النسبة $a : b$.

الحل :

حيث أن أرجحية حدث احتماله p هي النسبة $p : 1 - p$ إذن

$$\frac{p}{1-p} = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad pb = a - pa$$

$$\Rightarrow \qquad p = \frac{a}{a+b}$$

مثال ٦ :

أوجد احتمال ظهور الصورة في تجربة إلقاء عملة معدنية غير متزنة إذا علمت أن أرجحية ظهور الصورة هي النسبة $2 : 1$.

الحل :

نفرض أن احتمال ظهور الصورة يساوي p . وحيث أن أرجحية حدث احتماله p هي النسبة $p : (1 - p)$ وبالتالي

$$\frac{p}{1-p} = \frac{2}{1} \qquad \Rightarrow \qquad p = 2 - 2p$$

$$\Rightarrow \qquad p = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

إذن احتمال ظهور الصورة يساوي $\frac{2}{3}$.

مثال ٧ :

نفرض أن A , B حدثان بحيث أن $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A)=\frac{3}{8}$ أوجد :

1 - $P(A\cup B)$ 3 - $P(A'\cap B')$, $P(A'\cup B')$

2 - $P(A')$, $P(B')$ 4 - $P(A\cap B')$, $P(A\cup B')$

الحل :

1 - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

2 - $P(A')=1-P(A)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

$P(B')=1-P(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

3 - $P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

$P(A'\cup B')=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

4 - $P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

مثال ٨ :

احتمال أن ينجح طالب في مقرر الاحتمالات $\frac{8}{9}$ واحتمال أن ينجح في مقـــرر الجـــبر $\frac{2}{3}$ واحتمال أن ينجح في مقرر منهم على الأقل $\frac{4}{5}$ فما احتمال أن ينجح الطالب في المقررين معاً ؟

الحل :

نفرض أن A هو الحدث نجاح الطالب في مقرر الاحتمالات ، B هو الحدث نجاح الطـــالب في مقرر الجبر ، إذن $A\cup B$ هو الحدث أن ينجح الطالب في مقرر منهم على الأقل

$P(A)=\frac{8}{9}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$ والمطلوب هو حساب قيمة $P(A\cap B)$

وحيث أن $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ إذن

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{8}{9}+\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=\frac{34}{45}$

مثال ٩ :

نفرض A , B حدثان بحيث أن $A \subset B$ وكان $P(B)=0.8$, $P(A)=0.6$

فأوجد ما يأتي :

1- $P(A')$, $P(B')$ 3- $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$

2- $P(A-B)$ 4- $P(B \cap A')$

الحل :

١ –
$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$
$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.8 = 0.2$$

٢ – حيث أن $A \subset B$ ، إذن $A \cup B = B$, $A \cap B = A$ وبالتالي ينتج أن
$$P(A \cap B) = P(A) = 0.6 \quad , \quad P(A \cup B) = P(B) = 0.8$$

٣ – حيث أن $A \subset B$ ، إذن $A - B = \Phi$ وبالتالي $P(A-B) = 0$

٤ – $P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) = 0.8 - 0.6 = 0.2$

ملاحظة :

نظرية (٧) تعطينا صيغة لحساب احتمال وقوع حدث واحد على الأقل من حدثان A , B أي لحساب $P(A \cup B)$ ويمكن الاستفادة من ذلك في الحصول على صيغة لحساب احتمال وقوع حدث واحد على الأقل من ثلاثة أحداث A , B , C كما هو موضح في المثال الآتي :

مثال ١٠ :

لأي ثلاثة أحداث A , B , C أثبت أن
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

الحل :

نفرض أن $F = B \cup C$ ، إذن

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F) \qquad (1)$$

وحيث أن $P(F) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$ ومن قانون التوزيع
$$A \cap F = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

إذن $P(A \cap F) = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

وبالتعويض عن $P(A \cap F)$, $P(F)$ في المعادلة (1) ينتج المطلوب .

وبالمثل يمكن الحصول على صيغة لحساب احتمال وقوع حدث واحد على الأقل من أربعة أحداث A_1 , A_2 , A_3 , A_4 أي حساب $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ وتكون بالصورة

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\ & -P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) \\ & -P(A_2 \cap A_3) \quad - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ & + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ & - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{aligned}$$

أي في الصورة

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = {} & \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 4} P(A_i \cap A_j) \\ & + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right) \end{aligned}$$

وبوجه عام لحساب احتمال وقوع واحد على الأقل من الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ أي لحساب $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ نوجد أولا جميع التقاطعات الممكنة لأحداث من $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ونحسب احتمال كل منها ، وبعد ذلك نضيف احتمالات التقاطعات التي تتكون من عدد فردى من الأحداث ونطرح منها احتمالات التقاطعات التي تتكون من عدد زوجي من الأحداث ، أي أن

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = {} & \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) \\ & + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \end{aligned}$$

وتعرف هذه العلاقة بقاعدة التضمين والاستثناء **inclusion – exclusion principle**

مثال ١١ :

في أحد المدن يصدر ثلاث جرائد يومية A , B , C . تم اختيار شخص بطريقة عشوائية فإذا كان احتمال أن هذا الشخص يقرأ الجريدة A يساوى 0.45 واحتمال أنه يقرأ الجريدة B يساوى 0.4 واحتمال أنه يقرأ الجريدة C يساوى 0.33 واحتمال أنه يقرأ كل من A , B يساوى 0.3 واحتمال أنه يقرأ كل من A , C يساوى 0.28 واحتمال أنه يقرأ كل من B , C يساوى 0.25 واحتمال أنه يقرأ الجرائد الثلاث يساوى 0.14 أوجد احتمال أن هذا الشخص لا يقرأ أياً من الجرائد الثلاث .

الحل :

نفرض الحدث A هو أن الشخص الذي تم اختياره يقرأ الجريدة A

والحدث B هو أن الشخص الذي تم اختياره يقرأ الجريدة B

والحدث C هو أن الشخص الذي تم اختياره يقرأ الجريدة C

إذن

$$P(A) = 0.45 \quad , \quad P(B) = 0.4 \quad , \quad P(C) = 0.33$$
$$P(A \cap B) = 0.3 \quad , \quad P(A \cap C) = 0.28 \quad , \quad P(B \cap C) = 0.25$$
$$P(A \cap B \cap C) = 0.14$$

والحدث اختيار شخص لا يقرأ أياً من الجرائد الثلاث هو $(A \cup B \cup C)'$ واحتماله يكون

$$P\left((A \cup B \cup C)'\right) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

وحيث أن

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ & - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= 0.45 + 0.4 + 0.33 - 0.3 - 0.28 - 0.25 + 0.14 \\ &= 0.49 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن احتمال أن هذا الشخص الذي تم اختياره لا يقرأ أيا من الجرائد الثلاث يكون

$$P\left((A \cup B \cup C)'\right) = 1 - 0.49 = 0.51$$

مثال ١٢ :

نفرض مجموعة الأحداث A_1 , A_2 , A_3 , A_4 من فضاء عينة S لتجربة عشوائية مـــا بحيث أن

$$P(A_k) = 2^{-5}\, k! \quad \forall \quad 1 \le k \le 4 \qquad ,$$

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \qquad \forall \quad 1 \le i < j \le 4 \qquad ,$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \qquad \forall \quad 1 \le i < j < k \le 4 \qquad ,$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)$$

أوجد احتمال عدم وقوع A_k لكل $1 \le k \le 4$.

الحل :

المطلوب هو $P\left(\bigcap_{k=1}^{4} A'_k\right)$ وحيث أن

$$P(A_k) = 2^{-5}\, k! \quad \forall \quad 1 \le k \le 4$$

إذن

$$P(A_1) = \frac{1}{32} \quad , \quad P(A_2) = \frac{2}{32} \quad ,$$
$$P(A_3) = \frac{6}{32} \quad , \quad P(A_4) = \frac{24}{32}$$

وحيث أن

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \qquad \forall \quad 1 \le i < j \le 4$$

إذن

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{32} \quad , \quad P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{32} \quad ,$$
$$P(A_2 \cap A_3) = \frac{2}{32} \quad , \quad P(A_2 \cap A_4) = \frac{2}{32} \quad ,$$
$$P(A_1 \cap A_4) = \frac{1}{32} \quad , \quad P(A_3 \cap A_4) = \frac{6}{32}$$

وحيث أن

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \qquad \forall \qquad 1 \le i < j < k \le 4$$

إذن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{32} \quad , \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \frac{1}{32}$$

$$P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{32} \quad , \quad P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{2}{32}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) = \frac{1}{32}$$

ومن قاعدة التضمين والاستثناء فإن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 4} P\left(A_i \cap A_j\right)$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le 4} P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)$$

$$= \frac{1+2+6+24}{32} - \frac{1+1+1+2+2+6}{32}$$
$$+ \frac{1+1+1+2}{32} - \frac{1}{32}$$
$$= \frac{24}{32}$$

ومن قانون ديمورجان

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{4} A'_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{4} A_k\right)'$$
$$= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{4} A_k\right)$$
$$= 1 - \frac{24}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

٤ - فضاء الاحتمال Probability Space

يمكن النظر إلى الاحتمال على انه دالة P مجالها هو مجموعة جميع الأحداث الممكنة من فضاء العينة S للتجربة العشوائية (مجموعة القوى $\rho(S)$) ومداها هو الفترة $[0,1]$ أي أن $P : \rho(S) \rightarrow [0,1]$ وبالتالي فإنه لكل حدث A في مجال الدالة يتعين عدد p في مدى الدالة $p \in [0,1]$ وهـذا العدد يرافق الحدث A بحيث أن $P(A) = p$ ، وفضاء العينة S مع دالة الاحتمال P يكونان معاً ما يسمى بفضاء الاحتمال ويُرمز له بالزوج المرتب (S,P) . والموضوع الذي يهمنا الآن هو كيفية حساب العدد p الذي يرافق الحدث A والذي يُعبر عن احتمال الحدث A ، وحيث أن أي حدث A هو مجموعة جزئية من فضاء العينة S وبالتالي فهو عبارة عن عدد من الأحداث الأولية s_i حيث $s_i \in S$ أي أن الحدث A هو اتحاد الأحداث الأولية s_i المكونة له وهى أحداث متنافية ووفقا للمسلمة الثالثة لنظرية الاحتمال فإن احتمال الحدث A هو عبارة عن مجموع الأعداد التي ترافق الأحداث الأولية s_i المكونة للحدث A ، وسوف نوضح الآن كيفية تحديد هذه الأعداد التي ترافق الأحداث الأولية s_i في فضاء العينة S وبالتالي هذا سوف يمكننا من حساب احتمال أي حدث من فضاء العينة .

٤-١ : فضاء الاحتمال المنتهي Finite Probability Space

إذا كان فضاء العينة S فضاء منتهي ، مثلا $S = \{ s_1 , s_2 , \ldots , s_n \}$ فإنه يمكن في كل مسألة وفقا لظروفها أن نحصل على فضاء احتمال منتهي عن طريق تخصيص عدد حقيقي p_i لكل حدث أولى $s_i \in S$ وهذا العدد الحقيقي يسمى احتمال s_i أي أن

$$P(\{ s_i \}) = p_i$$

وهذه الأعداد تحقق الخواص الآتية :

١ – جميع الأعداد p_i غير سالبة ، أي أن

$$p_i \geq 0 \quad , \quad \forall\ 0 \leq i \leq n$$

٢ – مجموع الأعداد p_i يساوى الواحد الصحيح ، أي أن

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

ويكون الاحتمال $P(A)$ للحدث A هو مجموع احتمالات العناصر التي تنتمي إلى A .

مثـــال ١٣ :

نفرض أن فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما هو فضاء منتهى $S = \{ a,b,c,d \}$

وضح أياً من الدوال الآتية تُعرف دالة احتمال على فضاء العينة S .

1 - $P(a) = \frac{1}{2}$, $P(b) = \frac{1}{3}$, $P(c) = \frac{1}{4}$, $P(d) = \frac{1}{5}$

2 - $P(a) = \frac{1}{2}$, $P(b) = \frac{1}{3}$, $P(c) = \frac{-1}{3}$, $P(d) = \frac{1}{2}$

3 - $P(a) = \frac{1}{4}$, $P(b) = 0$, $P(c) = \frac{1}{4}$, $P(d) = \frac{1}{2}$

4 - $P(a) = \frac{1}{12}$, $P(b) = \frac{1}{6}$, $P(c) = \frac{1}{3}$, $P(d) = \frac{5}{12}$

الحل :

١ – حيث أن مجموع قيم الدالة على عناصر فضاء العينة أكبر من 1

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60} > 1$$

إذن هذه الدالة لا تعرف دالة احتمال على فضاء العينة S .

٢ – حيث أن $P(c) = \frac{-1}{3}$ أي أن $P(c)$ عدد سالب ، إذن هذه الدالة لا تعرف دالة احتمال على فضاء العينة S .

٣ – حيث أن قيم الدالة على عناصر فضاء العينة جميعها غير ســـــالبة ومجموع هذه القيم يساوى 1

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

إذن هذه الدالة تعرف دالة احتمال على فضاء العينة S .

٤ – حيث أن قيم الدالة على عناصر فضاء العينة جميعها غير ســـــالبة ومجموع هذه القيم يساوى 1

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = 1$$

إذن هذه الدالة تعرف دالة احتمال على فضاء العينة S .

مثـــال ١٤ :

يتسابق ثلاثة أشخاص A, B, C في سباق ، فإذا كان احتمال فوز A هو ضعف احتمال فوز B واحتمال فوز B هو ضعف احتمال فوز C فأوجد

١ – احتمال فوز كل شخص من الأشخاص الثلاثة .

٢ – احتمال فوز B أو C .

٣ – احتمال عدم فوز A .

الحل :

١ – نفرض أن $P(C) = k$ وحيث أن احتمال فوز B هو ضعف احتمال فوز C ، إذن

$$P(B) = 2\,P(C) = 2k$$

وحيث أن احتمال فوز A هو ضعف احتمال فوز B ، إذن

$$P(A) = 2\,P(B) = 2\,(2k) = 4k$$

ومن المسلمة الثانية لنظرية الاحتمال نعلم أن مجموع الاحتمالات يساوى ١ ، إذن

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \quad \rightarrow \quad k + 2k + 4k = 1 \quad \rightarrow \quad 7k = 1$$

$$\rightarrow \quad k = \frac{1}{7}$$

إذن

$$P(A) = 4k = \frac{4}{7} \quad , \quad P(B) = 2k = \frac{2}{7} \quad , \quad P(C) = k = \frac{1}{7}$$

٢ – احتمال فوز B أو C هو $P(\{B,C\})$ ومن التعريف فإن

$$P(\{B,C\}) = P(B) + P(C) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

٣ – الحدث عدم فوز A هو الحدث فوز B أو C إذن المطلوب هو $P(\{B,C\})$

$P(\{B,C\}) = \frac{3}{7}$ ويمكن أيضاً حساب احتمال عدم فوز A بإيجاد $P(A')$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

مثـــال ١٥:

في أحد المستشفيات وجد أن عدد المرضى في أحد الأيام والذين يترددون على عيادة الأسنان ثلاثة أمثال الذين يترددون على عيادة الباطنة وضعف الذين يترددون على عيادة الأنف والأذن والحنجرة وعشرة أمثال الذين يترددون على عيادة مرضى السكر . تم اختيار أحد المرضى في هذا اليوم بطريقة عشوائية وبفرض أن أياً من المرضى في هذا اليوم يذهب إلى عيادة واحدة فقط من هذه العيادات الأربعة . أوجد احتمال أن يكون هذا الشخص جاء إلى عيادة الأسنان . أوجد كذلك احتمال أن هذا الشخص جاء إلى أياً من العيادات الأخرى .

الحل : نفرض A هو الحدث أن المريض الذي تم اختياره عشوائياً جاء إلى عيادة الأسنان ، B هو الحدث انه جاء إلى عيادة الباطنة ، C هو الحدث انه جاء إلى عيادة الأنف والأذن والحنجرة وأن D هو الحدث انه جاء إلى عيادة مرضى السكر . إذن

$$P(A) = 3\,P(B) = 2P(C) = 10P(D)$$

وحيث أن $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$ إذن

$$P(A) + \frac{1}{3}\,P(A) + \frac{1}{2}\,P(A) + \frac{1}{10}\,P(A) = 1 \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{30}{58}$$

وبالتالي $P(B) = \frac{10}{58}$, $P(C) = \frac{15}{58}$, $P(D) = \frac{3}{58}$

مثـــال ١٦:

تقدم ثلاثة أشخاص لشغل وظيفة واحدة في أحد الشركات فإذا كانت فرصة الشخص الثاني للفوز بالوظيفة اكبر من فرصة الأول بنسبة 20% وأقل من فرصة الثالث بمقدار 10% أوجد احتمال الفوز لكل من الأشخاص الثلاثة علما بأنه سيتم اختيار شخص منهم للوظيفة .

الحل : نفرض A هو الحدث أن الشخص الأول يفوز بالوظيفة ، B هو الحدث أن الشخص الثاني يفوز بالوظيفة وأن C هو الحدث أن الشخص الثالث يفوز بالوظيفة . إذن

$$P(B) = P(A) + 0.2 = P(C) - 0.1 \rightarrow P(A) = P(B) - 0.2\,,\ P(C) = P(B) + 0.1$$

وحيث أن $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ إذن

$$P(B) - 0.2 + P(B) + P(B) + 0.1 = 1 \ \rightarrow\ 3P(B) = 1.1 \rightarrow P(B) = \frac{11}{30}$$

وبالتالي $P(A) = \frac{11}{30} - 0.2 = \frac{5}{30}$, $P(C) = \frac{11}{30} + 0.1 = \frac{14}{30}$

٤ – ٣ : فضاء الاحتمال المنتهى المنتظم

Equiprobable Finite Probability Space

في بعض الأحيان توجد خواص طبيعية لتجربة عشوائية ما بحيث أن هذه الخواص توحي بأن الأحداث الأولية المكونة لفضاء العينة للتجربة تكون جميعها متساوية الفرصة في الحدوث وبالتالي لها نفس الاحتمال ولمثل هذه التجارب فإن فضاء الاحتمال المنتهى يسمى بفضاء الاحتمال المنتهى المنتظم وصفة الانتظام هنا تعنى أن جميع عناصر فضاء العينة متساوية في احتمال حدوثها .

نظرية ٨ :

إذا كان فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما يحتوي على n من الأحداث الأولية المتساوية في الاحتمال فإن احتمال أي حدث أولي يساوي $\frac{1}{n}$.

البرهان :

نفرض أن فضاء العينة $S = \{ s_1 , s_2 , \; ... \; , s_n \}$ حيث جميع العناصر s_i متساوية الفرصة في الحدوث وبالتالي لها نفس الاحتمال ، أي أن

$$P(\{s_1\}) = P(\{s_2\}) = \; ... \; = P(\{s_n\})$$

وحيث أن $\{s_1\} , \{s_2\} \; ... \; \{s_n\}$ أحداث متنافية اتحادها هو S ، إذن باستخدام المسلمة الثانية والثالثة لنظرية الاحتمال

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{s_i\} \right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{s_i\}) = n\, P(\{s_1\})$$

إذن $P(\{s_1\}) = \frac{1}{n}$ وبالتالي نحصل على

$$P(\{s_i\}) = \frac{1}{n} \qquad \forall \;\; 1 \le i \le n$$

أي أن احتمال أي حدث أولي يساوي $\frac{1}{n}$.

وفي فضاء الاحتمال المنتهى المنتظم إذا كان A حدث ما عدد عناصره $n(A)$ فإن النظرية الآتية تقدم لنا صيغة لحساب احتمال الحدث A .

نظرية ٩ :

إذا كان فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما يحتوي على n من الأحداث الأولية المتساوية في الاحتمال وكان A حدث من S عدد عناصره $n(A)$ فإن احتمال الحدث A يكون

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

البرهان :

نفرض أن فضاء العينة $S = \{ s_1 , s_2 , \ \ldots \ , s_n \}$ حيث جميع العناصر s_i متساوية الفرصة في الحدوث ، إذن من النظرية السابقة $\forall \ 1 \le i \le n \qquad P(\{s_i\}) = \frac{1}{n}$.

نفرض الحدث $A = \{ s_{i_1} , s_{i_2} , \ \ldots \ , s_{i_{n(A)}} \}$

حيث $1 \le j \le n(A) \ \ \forall \ \ s_{i_j} \in S$ وبالتالي $\forall \ 1 \le j \le n(A) \qquad P(\{s_{i_j}\}) = \frac{1}{n}$

وحيث أن $\{s_{i_1}\} , \{s_{i_2}\} \ \ldots \ \{s_{i_{n(A)}}\}$ أحداث متنافية اتحادها هو A ، إذن باستخدام المسلمة الثالثة لنظرية الاحتمال

$$P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n(A)} \{s_{i_j}\} \right) = \sum_{j=1}^{n(A)} P\left(\{s_{i_j}\}\right) = n(A) \times P\left(\{s_{i_1}\}\right)$$

وبالتالي نحصل على $P(A) = \frac{n(A)}{n}$.

إذن النظرية السابقة تخبرنا أنه في فضاء الاحتمال المنتهى المنتظم إذا كان A حدث ما عدد عناصره $n(A)$ فإن احتمال الحدث A يكون

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } S}$$

وبصورة أخرى :

$$P(A) = \frac{\text{عدد طرق وقوع الحدث } A}{\text{عدد طرق وقوع فضاء العينة } S}$$

وهذه الصيغة للاحتمال لا تستخدم إلا في حالة فضاء العينة المنتهى المنتظم ، وتاريخيا فإن هـــذه الصيغة للاحتمال كانت تستخدم كتعريف للاحتمال وذلك حتى تم إدخال التعريف الريـــاضي للاحتمال باستخدام المسلمات بواسطة العالم A . N . Kolmogorov في عـــام 1933 وهذه الصيغة تعرف الآن بالتعريف الكلاسيكي للاحتمال كما سبق وأوضحنا في البنـــد الأول من هذا الفصل وسوف نستخدم التعبير " بطريقة عشوائية " فقط في حالة فضاء العينة المنتظـم فمثلا العبارة " اختيار نقطة بطريقة عشوائية من S أو سحب عنصر بطريقة عشوائية من S " تعنى أن S فضاء عينة منتظم أي أن جميع عناصر S متســـاوية في احتمال حدوثها .

مثـــال ١٧ :

في تجربة إلقاء حجر نرد متزن مرة واحدة فإن $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ وإذا كان A هـــو الحدث ظهور عدد زوجي فـــإن

$$A = \{2,4,6\} \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

وإذا كان B هو الحدث ظهور عدد يقبل القسمة على 3 فـــإن

$$B = \{3,6\} \quad \rightarrow \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

مثـــال ١٨ :

في تجربة سحب ورقة بطريقة عشوائية من أوراق اللعب " أوراق كوتشينة " إذا كان A هو الحدث ظهور صورة ولد فإن $P(A) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$ وذلك لان عدد أوراق الكوتشينة يساوى 52 ورقة وعدد الأوراق التي تحمل صورة ولد يساوى 4 أوراق وإذا كان B هـــو الحدث ظهور عدد زوجي فإن B يعنى ظهور عدد من مجموعة الأعـداد $\{2,4,6,8,10\}$ وحيث أن كل عدد يوجد في الكوتشينة في أربعة أوراق ، إذن $P(B) = \dfrac{20}{52}$

مثـــال ١٩ :

في تجربة سحب كرة من صندوق يحتوى على 3 كرات بيضاء ، 5 كرات حمراء ، 4 كـــــرات سوداء فإن عدد عناصر فضاء العينة يساوى 12 وهو عدد الكرات في الصندوق فـإذا كان A هو الحدث سحب كرة بيضاء فإن $P(A) = \dfrac{3}{12}$ وإذا كان B هو الحدث ســحب كرة حمراء فإن $P(B) = \dfrac{5}{12}$.

مثـــال ٢٠ :

في تجربـــة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات على التوالي أوجد

١ – احتمال ظهور الصورة مرتين فقط .

٢ – احتمال ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل .

٣ – احتمال ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر .

٤ – احتمال ظهور الصورة مرتين على الأكثر .

٥ – احتمال عدم ظهور الصورة .

الحل :

في تجربـــة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات على التوالي فإن فضاء العينـــة S يكون

$$S = \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$$

وعدد عناصره يساوى 8 .

١ – نفرض الحدث A_1 ظهور الصورة مرتين فقط ، إذن

$$A_1 = \{HHT, HTH, THH\} \quad , \quad P(A_1) = \frac{3}{8}$$

٢ – نفرض الحدث A_2 ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل ، إذن

$$A_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\} \quad , \quad P(A_2) = \frac{7}{8}$$

٣ – نفرض الحدث A_3 ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر ، إذن

$$A_3 = \{HTT, THT, TTH, TTT\} \quad , \quad P(A_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

٤ – نفرض الحدث A_4 ظهور الصورة مرتين على الأكثر ، إذن

$$A_4 = \{HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} \quad , \quad P(A_4) = \frac{7}{8}$$

٥ – نفرض الحدث A_5 عدم ظهور الصورة ، إذن

$$A_5 = \{TTT\} \quad , \quad P(A_5) = \frac{1}{8}$$

مثـــال ٢١ :

في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية 4 مرات على التوالي لملاحظة ظـــهور الصـــورة ، إذا كـــان الحدث A_i هو ظهور الصورة i من المرات حيث $0 \le i \le 4$.

١ – أوجد $P(A_i)$ لكل $0 \le i \le 4$.

٢ – إذا كان فضاء العينة S' للتجربة هو عدد مرات ظهور الصورة فهل (S', P) يمثـــل فضاء احتمال ؟

الحل :

في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية 4 مرات على التوالي فإن فضاء العينة S يكون

$$S = \{ HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT \}$$

الأحداث A_i حيث $0 \le i \le 4$ تكون

$A_0 = \{ TTTT \}$

$A_1 = \{ HTTT, THTT, TTHT, TTTH \}$

$A_2 = \{ HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH \}$

$A_3 = \{ HHHT, HHTH, HTHH, THHH \}$

$A_4 = \{ HHHH \}$

١ – الاحتمالات $P(A_i)$ تكون كالآتي :

$P(A_0)$	$P(A_1)$	$P(A_2)$	$P(A_3)$	$P(A_4)$
$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

٢ – إذا كان فضاء العينة S' للتجربة هو عدد مرات ظهور الصورة فإن $S' = \{0,1,2,3,4\}$ حيث الحدث الأولي ظهور i يعنى الحدث A_i وبالتالي $P(A_i) = P(i)$ لكـل $0 \le i \le 4$ وحيث أن $P(A_i) > 0$ لكل $0 \le i \le 4$ وكذلك

$$\sum_{i=0}^{4} P(A_i) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = 1$$

إذن (S', P) يمثل فضاء احتمال .

مثـــال٢٢ : في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين ومتميزين أوجـــد :

١ – احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين يساوي 10 .

٢ – احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين أكبر من 9 .

٣ – احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين أكبر من 2 .

٤ – احتمال ظهور الرقم 3 .

وفي حالة ما إذا كان حجري النرد متزنين ومتماثلين هل سيكون هناك اختلاف عند حساب الاحتمالات السابقة ؟

الحل : في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين ومتميزين فإن فضاء العينـــة يحتوى على 36 عنصر كما موضح بالجدول وجميعها متساوية الاحتمال

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

١ – نفرض أن A هو الحدث مجموع ما يظهر على الوجهين يساوي 10 . إذن

$$A = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$$

$$n(A) = 3 \quad , \quad n = 36 \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

٢ – نفرض أن B هو الحدث مجموع ما يظهر على الوجهين أكبر من 9

$$B = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,6),(6,4),(6,5)\} \rightarrow \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

٣ – نفرض أن C هو الحدث مجموع ما يظهر على الوجهين أكبر من 2

$$C = \{(1,1)\}' \quad \rightarrow \quad P(C) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

٤ – نفرض الحدث D ظهور الرقم 3 ، إذن

$$D = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

$$P(D) = \frac{11}{36}$$

وفى حالة ما إذا كان حجري النرد متماثلين فإنه لن يكون هناك معنى للقول أن العدد ظهر من الحجر الأول أو ظهر من الحجر الثاني فمثلا ظهور العددين 5 , 2 نعبر عنه بزوج واحد أما (2,5) أو (5,2) وليس كليهما وذلك لان حجري النرد متماثلين وبالتالي فإن فضاء العينة يحتوى على 21 عنصر فقط كما موضح بالجدول وجميعها متساوية الاحتمال

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)					
2	(2,1)	(2,2)				
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)			
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)		
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

إذن الاحتمالات السابقة تصبح كالآتي :

١ – الحدث A مجموع ما يظهر على الوجهين في الرميتين يساوي 10 يصبح

$$A = \{(5,5),(6,4)\} \rightarrow P(A) = \frac{2}{21}$$

٢ – الحدث B مجموع ما يظهر على الوجهين في الرميتين أكبر من 9 يصبح

$$B = \{(5,5),(6,6),(6,4),(6,5)\} \rightarrow P(B) = \frac{4}{21}$$

٣ – الحدث C مجموع ما يظهر على الوجهين في الرميتين أكبر من 2 يصبح

$$C = \{(1,1)\}' \rightarrow P(C) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

٤ – الحدث D ظهور الرقم 3 يصبح

$$D = \{(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),(3,1),(3,2)\} \rightarrow P(D) = \frac{6}{21}$$

مثــال ٢٣ :

نفرض مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ فإذا تم اختيار عـــدد بطريقــة عشوائية من هذه المجموعة فأوجد

١ – احتمال أن العدد يقبل القسمة على 3 .

٢ – احتمال أن العدد يقبل القسمة على 5 .

٣ – احتمال أن العدد يقبل القسمة على 3 أو 5 .

٤ – احتمال أن العدد لا يقبل القسمة على 15 .

الحل : فضاء العينة $S = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ وعدد عناصره $n = 100$

١ – نفرض الحدث A أن العدد يقبل القسمة على 3 ، إذن $A = \{3m : 1 \le m \le 33\}$

وعدد عناصر الحدث A هو $n(A) = 33$ ، وبالتالي

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{33}{100} = 0.33$$

٢ – نفرض الحدث B أن العدد يقبل القسمة على 5 ، إذن $B = \{5m : 1 \le m \le 20\}$

وعدد عناصر الحدث B هو $n(B) = 20$ ، وبالتالي

$$P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{20}{100} = 0.2$$

٣ – الحدث أن العدد يقبل القسمة على 3 أو 5 هو الحدث $A \cup B$ وعدد عناصره

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

وحيث أن الحدث $A \cap B$ هو الحدث أن يكون العدد يقبل القسمة على 3 و 5 معــا ،

أي يقبل القسمة على 15 إذن

$$A \cap B = \{15m : 1 \le m \le 6\} \quad \rightarrow \quad n(A \cap B) = 6$$
$$\rightarrow \quad n(A \cup B) = 33 + 20 - 6 = 47$$

وبالتالي فإن احتمال الحدث $A \cup B$ يكون $P(A \cup B) = \frac{47}{100} = 0.47$

٤ – الحدث أن العدد لا يقبل القسمة على 15 هو $(A \cap B)'$ ، إذن

$$P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{6}{100} = 0.94$$

مثـــال ٢٤ :

أختير عدد عشوائيا من مجموعة الأعداد $\{100, 101, \ldots, 999\}$.

١ – أوجد احتمال أن هذا العدد يحتوى على الرقم 1 مرة واحدة على الأقل .

٢ – أوجد احتمال أن هذا العدد يحتوى على الرقم 3 مرتين بالضبط .

الحل :

فضاء العينة S يكون

$$S = \{100, 101, \ldots, 999\} \quad , \quad n(S) = 900$$

١ – نفرض الحدث A أن العدد الذي تم اختياره عشوائيا يحتوى على الرقم 1 مرة واحـــدة على الأقل ، أي أن الرقم 1 يظهر مرة واحدة على الأقل في خانة الآحـــاد أو العشـــرات أو المئات . إذن $P(A) = 1 - P(A')$ حيث A' هو مكملة الحدث A وهو يمثل عـــدم ظهور الرقم 1 في أيا من خانات الآحاد أو العشرات أو المئات . وحيث أنه من مجموعة الأرقـام $9, \ldots, 1, 0$ وعددها عشرة فإن عدم ظهور الرقم 1 في خانة الآحاد يتم بطرق عددها 9 وعدم ظهور الرقم 1 في خانة العشرات يتم بطرق عددها 9 وعدم ظهور الرقـــم 1 في خانـــة المئات يتم بطرق عددها 8 فقط لأننا نستبعد الرقم 0 أيضا حيث أن مجموعة الأعـــداد الـــتي نختار منها تبدأ من 100 . إذن عدد طرق وقوع الحدث A' يكون $8\times9\times9$ وبالتـــالي $P(A') = \dfrac{8\times9\times9}{900} = 0.72$. إذن

$$P(A) = 1 - 0.72 = 0.28$$

٢ – نفرض الحدث B أن العدد الذي تم اختياره عشوائيا يحتوى علـــى الرقـــم 3 مرتـــين بالضبط ، أي أن الحدث B يشمل أعداد على الصورة $x33$, $3x3$, $33x$ حيـــث الرقم x في خانة الآحاد أو العشرات يمكن أن يكون أي رقم من 0 إلى 9 ما عـــدا الرقـــم 3 ويتم ذلك بطرق عددها 9 بينما الرقم x في خانة المئات يمكن أن يكون أي رقم مـــن 0 إلى 9 ما عدا 0 أو 3 ويتم ذلك بطرق عددها 8 . ووفقا لقاعدة الجمع فإن عدد عناصر الحـدث B يكون $n(B) = 9 + 9 + 8 = 26$ وبالتالي فإن

$$P(B) = \frac{26}{900} = 0.029$$

مثــال ٢٥ :

اختير عدد بطريقة عشوائية من مجموعة الأعداد $\{1, 2, 3, \ldots, 63\}$ أوجد احتمــال أن هذا العدد مع العدد 63 يكونا عدديين أوليين بالنسبة إلى بعضهما .

الحل :

نعلم أن العدديين يقال انهما أوليين بالنسبة إلى بعضهما إذا كان القاسم المشترك الموجب لهمــا هو 1 فقط . وحيث أن قواسم العدد 63 هي 21 , 9 , 7 , 3 والقواسم المختلفة هما 3 , 7 لذلك نفرض الحدث A أن العدد يقبل القسمة على 3 وبالتالي

$$A = \{3m : 1 \le m \le 21\}$$

وعدد عناصر الحدثA هو $n(A) = 21$. إذن $P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{21}{63}$ ونفــرض الحدث B أن العدد يقبل القسمة على 7 ، وبالتالي $B = \{7m : 1 \le m \le 9\}$ وعــدد عناصر الحدث B هو $n(B) = 9$ ، إذن $P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{9}{63}$ وحيث أن الحدث $A \cup B$ هو أن العدد يقبل القسمة على أيا من قواسم 63 على الأقل . إذن الحـدث أن العدد يكون أولي بالنسبة إلى 63 هو $(A \cup B)'$ ويكــون المطلــوب هــو حســاب $P(A \cup B)'$. الحــدث أن العــدد يقبــل القســـمة علـــى 3 أو 7 هــو الحدث $A \cup B$ وعدد عناصره

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

وحيث أن الحدث $A \cap B$ هو أن يكون العدد يقبل القسمة على 3 و 7 معا ، أي يقبل القسمة على 21 إذن

$$A \cap B = \{21m : 1 \le m \le 3\} \quad \rightarrow \quad n(A \cap B) = 3$$

$$\rightarrow \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 21 + 9 - 3 = 27$$

إذن $P(A \cup B) = \frac{27}{63}$ وبالتالي نحصل على المطلوب

$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{27}{63} = \frac{36}{63}$$

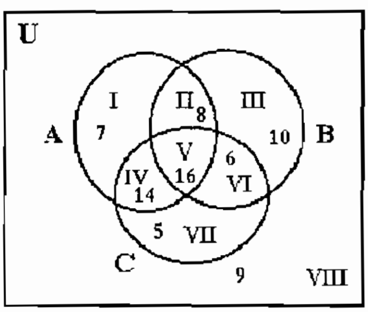
مثال ٢٦ : في مجموعة تتكون من 75 طالب بكلية التربية وجد أن 16 طالب يدرسون الرياضيات والفيزياء واللغة الإنجليزية ، 24 طالب يدرسون الرياضيات والفيزياء ، 30 طالب يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ، 22 طالب يدرسون الفيزياء واللغة الإنجليزية ، 7 طلاب يدرسون الرياضيات فقط ، 10 طلاب يدرسون الفيزياء فقط ، 5 طلاب يدرسون اللغة الإنجليزية فقط . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . أوجد ما يأتي :

(١) – احتمال أن الطالب يدرس الرياضيات .

(٢) – احتمال أن الطالب يدرس الرياضيات أو اللغة الإنجليزية ولا يدرس الفيزياء .

(٣) – احتمال أن الطالب لا يدرس أيا من المقررات الثلاث .

الحل : نفرض الحدث A هو اختيار طالب يدرس مقرر الرياضيات ، الحدث B هو اختيار طالب يدرس مقرر الفيزياء والحدث C هو اختيار طالب يدرس مقرر اللغة الإنجليزية . الأحداث الثلاث A , B , C يمكن تمثيلها باستخدام أشكال فن ، ومن المفضل أن نبدأ مع البيانات الأكثر وضوحا والتي يمكن وضعها مباشرة داخل شكل فن لتمثل الأساس الذي ننطلق منه لإكمال باقي البيانات داخل الشكل ، وفى هذا المثال نلاحظ أن البيانات الأكثر وضوحا هي الطلاب الذين يدرسون المقررات الثلاث وعددهم 16 وهذا يعنى أن المنطقة V الممثلة لتقاطع الأحداث الثلاث $A \cap B \cap C$ تحتوى على 16 عنصر لذلك نضع العدد 16 في المنطقة V ثم نكمل باقي المناطق كما هو موضح بشكل فن الآتي :



(١) – عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات

$7 + 8+14+16 = 45$ وبالتالي $P(A) = \frac{45}{75}$

(٢) – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات أو الإنجليزية ولا يدرس الفيزياء هو $(A \cup C) \cap B'$

وعدد عناصره يساوى $7+14 + 5 = 26$

وبالتالي $P((A \cup C) \cap B') = \frac{26}{75}$

(٣) –الحدث أن الطالب لا يدرس أيا من المقررات الثلاث هو $(A \cup B \cup C)'$ وعدد عناصره يساوى 9 وبالتالي $P(A \cup B \cup C)' = \frac{9}{75}$.

مثـــال ٢٧ :

في استطلاع بين عينة من الطلاب عن الألعاب التي يلعبونها وجد أن 25% يلعبـــون كـــرة القدم ، 20% يلعبون كرة السلة ، 13% يلعبون العاب القوى ، 10% يلعبون كـــرة القدم وكرة السلة ، 8% يلعبون كرة القدم والعاب القوى ، 5% يلعبـــون كـــرة الســـلة والعاب القوى ، 4% يلعبون الألعاب الثلاثة ، تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من العينة . أوجد احتمال ان هذا الطالب لا يلعب أيا من الألعاب الثلاثة .

الحل: نفرض الحدث A هو اختيار طالب يلعب كرة القدم ، الحدث B هو اختيار طالب يلعب كرة السلة والحدث C هو اختيار طالب يلعب العاب القوى . إذن

$$P(A)=0.25 \;,\; P(B)=0.2 \;,\; P(C)=0.13 \;,\; P(A\cap B)=0.1$$
$$P(A\cap C)=0.08 \;,\; P(B\cap C)=0.05 \;,\; P(A\cap B\cap C)=0.04$$

الحدث أن الطالب لا يلعب أيا من الألعاب الثلاثة هو $(A\cup B\cup C)'$ ، وحيث أن

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$
$$=0.25+0.2+0.13-0.1-0.08-0.05+0.04=0.39$$

إذن $P((A\cup B\cup C)')=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.39=0.61$

مثـــال ٢٨:

أحد الطلاب سئل زملائه في الفصل عن نتائجهم في مقررات الرياضيات والفيزياء والكيميـــاء وقام برصد هذه البيانات كالآتي : 78% نجحوا في الرياضيات ، 80% نجحوا في الفيزيـــاء ، 84% نجحوا في الكيمياء ، 60% نجحوا في الرياضيات والفيزيـــاء ، 65% نجحـــوا في الفيزياء والكيمياء ، 70% نجحوا في الرياضيات والكيمياء ، 55% نجحـــوا في المقـــررات الثلاثة . وضح أن هذه النسب غير متوافقة وبالتالي هناك خطأ في عملية الرصد .

الحل : نفرض الحدث A هو النجاح في الرياضيات ، الحدث B هو النجاح في الفيزيـــاء والحدث C هو النجاح في الكيمياء . إذن

$$P(A)=0.78 \;,\; P(B)=0.8 \;,\; P(C)=0.84 \;,\; P(A\cap B)=0.6$$
$$P(A\cap C)=0.7 \;,\; P(B\cap C)=0.65 \;,\; P(A\cap B\cap C)=0.55$$

$$P(A\cup B\cup C)=0.78+0.8+0.84-0.6-0.7-0.65+0.55 \doteq 1.02>1$$

إذن هناك خطأ في عملية الرصد لان دالة الاحتمال دائما اقل من أو تساوى 1 .

مثـــال ٢٩ :

اختبار من ثلاثة أسئلة كل سؤال يتم الإجابة عليه أما صواب T أو خطأ F فإذا كانت الإجابة على الأسئلة الثلاثة تتم بالتخمين فأوجد

١ – احتمال الإجابة صواب على سؤالين على الأقل .

٢ – احتمال الإجابة صواب على سؤالين على الأكثر .

الحل : فضاء العينة S الذي يمثل جميع الإمكانات المتاحة للإجابة على الاختبار يكون

$$S = \{ TTT , TTF , TFT , TFF , FTT , FTF , FFT , FFF \}$$

وعدد عناصره $n = 8$ ويمكن استنتاجه بتكوين الشجرة البيانية كما وضحنا في مثال (٢٠) بالفصل الأول

١ – الحدث الإجابة صواب على سؤالين على الأقل هو

$\{ TTT, TTF, TFT , FTT \}$ واحتماله يساوى $\frac{1}{2}$.

٢ – الحدث الإجابة صواب على سؤالين على الأكثر هو

$\{ TTF , TFT , TFF , FTT , FTF , FFT , FFF \}$ واحتماله يساوى $\frac{7}{8}$.

مثـــال ٣٠ :

كيس يحتوى على ثلاث قطع نقود اثنتان عاديتان وواحدة ذات صورتين ، اختيرت قطعة من الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة فإن القطعة نفسها تلقى مرة أخرى بينما إذا ظهر وجه الكتابة فأننا نختار قطعة نقود من القطعتين المتبقيتين بالكيس ثم تلقى . أوجد احتمال ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر .

الحل : نفرض أن A , B يرمزان إلى قطعتي النقود العاديتين ، C ترمز إلى قطعة النقـــود ذات الصورتين ، إذن فضاء العينة S الذي يمثل جميع النواتج الممكنة للتجربة يكون

$$S = \{ AHH , AHT , ATBH , ATBT , ATCH , BHH , BHT , BTAH , BTAT , BTCH , CHH \}$$

وعدد عناصره $n = 11$ ويمكن استنتاجه بتكوين الشجرة البيانية كما وضحنا في مثال(٢٣) بالفصل الأول والحدث ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر هو

$$\{ AHT , ATBH , ATBT , ATCH, BHT , BTAH , BTAT , BTCH \}$$

وعدد عناصره 8 وبالتالي احتماله يساوى $\frac{8}{11}$.

مثـــال ٣١ :

في مباراة للتنس بين لاعبين A , B يفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بشوطين متتـــــاليين أو يفوز بثلاثة أشواط على طول المباراة ، أوجد احتمال أن المباراة تنتهي بعد خمسة أشواط .

الحل : فضاء العينة S الذي يمثل جميع النواتج الممكنة للمباراة

$$S = \{ AA , ABAA , ABABA , ABABB , ABB , BAA , BABAA , BABAB , BABB , BB \}$$

وعدد عناصره $n = 10$ ويمكن استنتاجه بتكوين الشجرة البيانية كما وضحنا في مثـال (٢٤) بالفصل الأول والحدث E أن المباراة تنتهي بعد خمسة أشواط عدد عناصره 4

$$E = \{ ABABA, ABABB, BABAA, BABAB \} \quad , \quad P(E) = \frac{4}{10} = 0.4$$

مثـــال ٣٢ :

في أحد الفنادق الكبرى كان حجز الأجنحة يتم وفقا للاختيار من المجموعات الثلاث الآتية

المجموعة الأولى (الأجنحة)	المجموعة الثانية (عدد الغرف)	المجموعة الثالثة (الطابق)
جناح ممتاز L	غرفتين T	الطابق الأول A
جناح متوسط K	ثلاث غرف F	الطابق الثاني B
		الطابق الثالث C

أتصل أحد الأشخاص لحجز أحد الأجنحة . أوجد كل مما يأتي :

١ – احتمال حجز جناح ممتاز في الطابق الثالث . ٢ – احتمال حجز جناح من غرفتين .

الحل : فضاء العينة S الذي يمثل جميع الاختيارات الممكنة لحجز الأجنحة

$$S = \{ LTA , LTB , LTC , LFA , LFB , LFC , KTA , KTB , KTC , KFA , KFB , KFC \}$$

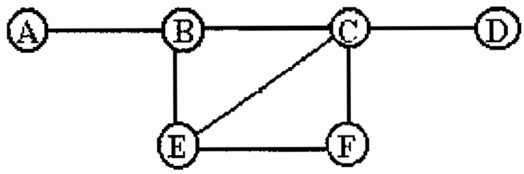
وعدد عناصره $n = 12$ ويمكن استنتاجه بتكوين الشجرة البيانية

١– الحدث حجز جناح ممتاز في الطابق الثالث هو $\{ LTC , LFC \}$ وعدد عنـــاصره 2 وبالتالي احتماله يساوى $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

٢– الحدث حجز جناح من غرفتين هو $\{ LTA, LTB , LTC, KTA, KTB, KTC \}$ وعدد عناصره 6 وبالتالي احتماله يساوى $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

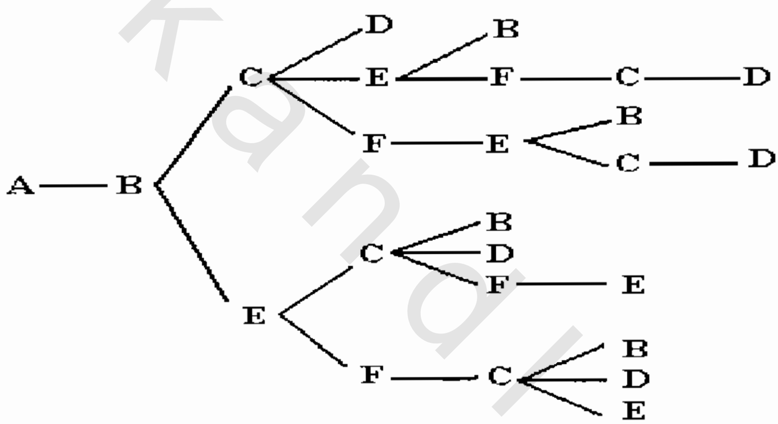
مثـــال ٣٣ :

النقاط A , B , C , D , E , F في الرسم الآتي تدل على 6 مدن والخطوط تدل علـــى



جسور تربط بينها . بدأ رجل من المدينة A رحلة بسيارته للتجول من مدينة إلى أخرى واعــتزم التوقف واخذ استراحة إذا لم يمكنه مواصلة التجول بدون أن يعبر نفس الجسر مرتين . أوجــد احتمال انه سيتوقف للاستراحة في المدينة B .

الحل : نكون الشجرة البيانية للتجربة



نلاحظ أنه توجد 11 طريقة يمكن للرجل أن يتجول بها حتى يصل إلى جسر مر عليه من قبــل ويكون مضطر للعبور عليه مرة ثانية وبالتالي يأخذ استراحة ،كما نلاحظ من الشجرة في النقاط النهائية أنه يجب أن يتوقف للاستراحة في أحد المدن B أو D أو E . إذن فضاء العينة

S = { ABCD, ABCEB, ABCEFCD, ABCFEB, ABCFECD, ABECB, ABECD, ABECFE, ABEFCB, ABEFCD, ABEFCE}

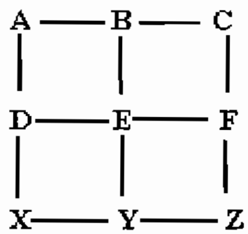
والحدث أن الرجل سيتوقف للاستراحة في المدينة B هو

{ ABCEB , ABCFEB , ABECB , ABEFCB }

واحتماله يساوى $\frac{4}{11}$.

مثـــال ٣٤:

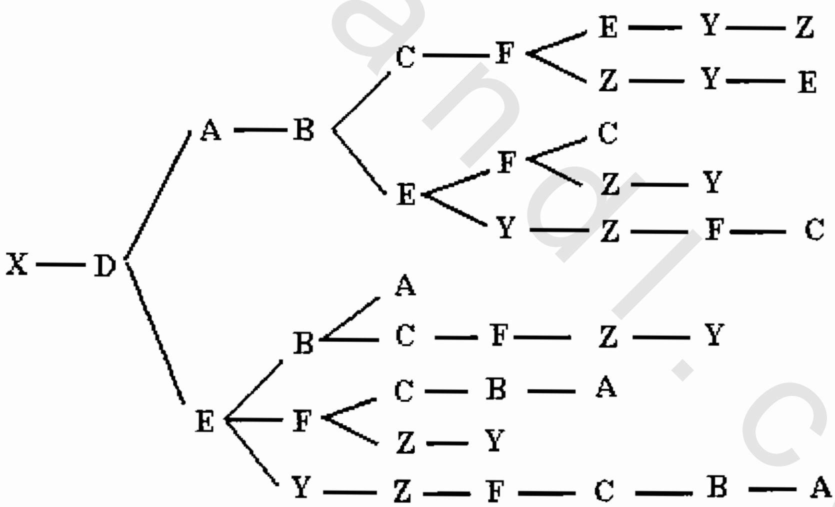
في الرسم الآتي تسعة نقاط A , B , C , D , E , F , X , Y , Z بدأ رجل في التحرك مـــن



النقطة X ويسمح له في كل مرة بالحركة خطوة رأسية أو خطوة أفقية ويتوقف عن الحركـــة إذا لم يتمكن من مواصلة السير بدون المرور على نقطة يكون قد مر بها من قبل . أوجد احتمال أن يمر الرجل بجميع النقاط إذا كانت الخطوة الأولى من X إلى D .

الحل :

نكون الشجرة البيانية للتجربة



نلاحظ أنه توجد 10 رحلات مختلفة أي أن فضاء العينة به 10 عناصر ونلاحظ انه توجـــد فقط 4 رحلات منها تمر بجميع النقاط وهى

{ XDABCFEYZ , XDABCFZYE , XDABEYZFC , XDEYZFCBA }

إذن احتمال أن يمر الرجل بجميع النقاط إذا كانت الخطوة الأولى من X إلى D يساوى $\frac{4}{10}$.

مثـــال ٣٥ :

في دراسة تهتم بنوع وعمر الأطفال في العائلات في مدينة القاهرة تم اختيـــار عائلـــة بطريقـــة عشوائية من مجموعة العائلات التي لديها ثلاثة أطفال ، أوجد كل مما يأتي :

١ – احتمال عدم وجود ولد في العائلة .

٢ – احتمال وجود ولد واحد على الأقل في العائلة .

٣ – احتمال وجود ولد واحد على الأكثر في العائلة .

٤ – احتمال أن المولود الثاني بنت .

٥ – احتمال أن عدد الأولاد اكبر من عدد البنات في العائلة .

الحل :

مع مراعاة الترتيب في الولادة فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{ bbb , bbg , bgb , bgg , gbb , gbg , ggb , ggg \}$$

وعدد عناصره 8 حيث الرمز b يعنى ولدا والرمز g يعنى بنتا .

١ – الحدث A_1 عدم وجود ولد للعائلة هو

$A_1 = \{ggg\}$ واحتماله $P(A_1) = \frac{1}{8}$.

٢ – الحدث A_2 وجود ولد واحد على الأقل في العائلة هو

$A_2 = \{ bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb \}$ واحتماله $P(A_2) = \frac{7}{8}$.

٣ – الحدث A_3 وجود ولد واحد على الأكثر في العائلة هو

$A_3 = \{ bgg , gbg , ggb \}$ واحتماله $P(A_3) = \frac{3}{8}$.

٤ – الحدث A_4 أن المولود الثاني بنت هو

$A_4 = \{ bgb , bgg , ggb , ggg \}$ واحتماله $P(A_4) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

٥ – الحدث A_5 أن عدد الأولاد اكبر من عدد البنات في العائلة هو

$A_5 = \{ bbb , bbg , bgb , gbb \}$ واحتماله $P(A_5) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

مثـــال ٣٦ :

في مصعد أحد العمارات ركب شخصان ، فإذا كان المصعَدُ يتوقف في الطابق الثاني والثـــالث والرابع وبفرض أن خروج أيا من الشخصين إلى أيا من الطوابق الثلاث متســـاوي الفرصـــة فأوجد ما يأتي :

١ – احتمال أن الشخصين يتركان المصعد في طابقين مختلفين .

٢ – احتمال أن الشخصين يصعدان إلى نفس الطابق .

٣– احتمال أن أحد الشخصين على الأقل يصعد إلى الطابق الرابع .

الحل :

نفرض أن a , b يرمزان إلى الشخصين وان a_i تعنى أن الشخص a يترك المصعـــد في الطابق رقم i حيث $2 \le i \le 4$ وان b_j تعنى أن الشـــخص b يـــترك المصعـــد في الطابق رقم j حيث $2 \le j \le 4$. إذن فضاء العينة يكون

$$S = \{ a_i \, b_j \}_{i,j=2}^{4}$$
$$= \{a_2 b_2 , a_2 b_3 , a_2 b_4 , a_3 b_2 , a_3 b_3 , a_3 b_4 , a_4 b_2 , a_4 b_3 , a_4 b_4\}$$

١ – نفرض الحدث A أن الشخصين يتركان المصعد في طابقين مختلفين ، إذن

$$A = \{ a_2 b_3 , a_2 b_4 , a_3 b_2 , a_3 b_4 , a_4 b_2 , a_4 b_3 \} ,$$
$$P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

٢ – نفرض الحدث B أن الشخصين يصعدان إلى نفس الطابق ، إذن

$$B = \{ a_2 b_2 , a_3 b_3 , a_4 b_4 \} ,$$
$$P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

٣ – نفرض الحدث C أن أحد الشخصين على الأقل يصعد إلى الطابق الرابع ، إذن

$$C = \{ a_2 b_4 , a_3 b_4 , a_4 b_2 , a_4 b_3 , a_4 b_4\} ,$$
$$P(C) = \frac{5}{9}$$

مثـــال ٣٧ :

إذا علمت أن معاملات المعادلة التربيعية $x^2 + b\,x + c = 0$ يتم تعيينها عـــن طريـــق إلقاء حجر نرد متزن مرتين على التوالي والعدد الذي يظهر في الرمية الأولى يمثـــل المعـــامل b بينما العدد الذي يظهر في الرمية الثانية يمثل العدد c .

١ – أوجد احتمال أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

٢ – أوجد احتمال أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

٣ – أوجد احتمال أن يكون للمعادلة جذران مركبان .

الحل :

في تجربة إلقاء حجر نرد متزن مرتين على التوالي فإن فضاء العينـــة S يحتوى على 36 عنصـــر كما موضح بالجدول وجميعها متساوية الاحتمال

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

ومن المعلوم أن المعادلة التربيعية $x^2 + b\,x + c = 0$ لها جذران هما

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ ومميز المعادلة $b^2 - 4c$ يحدد نوع الجذران .

١ – نفرض الحدث A أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان ، أي أن $b^2 - 4c > 0$.

إذن الحدث A هو مجموعة الأزواج المرتبة $(b\,,c)$ من فضاء العينة S للتجربة والتي تحقق $b^2 > 4c$ ، أي أن $A = \left\{(b,c) \in S \;:\; b^2 > 4c\right\}$. إذن

$$A = \{ (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$

وعدد عناصر الحدث A هو $n(A) = 17$ وبالتالي احتمال الحدث A يكون

$$P(A) = \frac{17}{36}$$

٢ – نفرض الحدث B أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان ، أي أن $b^2 = 4c$.
إذن الحدث B هو مجموعة الأزواج المرتبة (b, c) من فضاء العينة S للتجربة والتي تحقق $b^2 = 4c$ ، أي أن $B = \left\{(b,c) \in S \;:\; b^2 = 4c\right\}$ ، وبالتالي

$$B = \{(2,1), (4,4)\} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

٣ – نفرض الحدث C أن يكون للمعادلة جذران مركبان ، أي أن $b^2 - 4c < 0$.
إذن الحدث C هو مجموعة الأزواج المرتبة (b, c) من فضاء العينة S للتجربة والتي تحقق $b^2 < 4c$ ، أي أن $C = \left\{(b,c) \in S \;:\; b^2 < 4c\right\}$ ، وبالتالي

$$\begin{aligned} C = \{ & (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ & (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3) \\ & (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6) \} \end{aligned}$$

وعدد عناصر الحدث C هو $n(C) = 17$ واحتمال الحدث C يكون

$$P(C) = \frac{17}{36}$$

مثـــال ٣٨ :

امتحان بنظام الاختيار من متعدد Multiple – Choice يحتوى على 10 أســئلة ولكـل سؤال أربعة إجابات منها واحدة فقط صحيحة ، أراد أحد الطلاب الإجابة على كـل أســئلة الامتحان بالتخمين .

١ – أوجد احتمال أن تكون إجابة الطالب صواب في جميع أسئلة الامتحان .

٢ – أوجد احتمال أن تكون إجابة الطالب خطأ في جميع أسئلة الامتحان .

٣ – أوجد احتمال أن تكون إجابة الطالب صواب في نصف أسئلة الامتحان .

الحل :

حيث أن عدد أسئلة الامتحان 10 ولكل سؤال أربعة إجابات منها واحدة فقـــط صحيحــة ، إذن يمكن الإجابة على أي سؤال بطرق عددها 4 وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد فإن عـــدد طرق الإجابة على أسئلة الامتحان العشرة وبالتالي عدد عناصر فضاء العينة يكون

$$4^{10} = 1048576$$

١ – نفرض الحدث A أن تكون إجابة الطالب صواب في جميع أسئلة الامتحان و يتحقق هذا إذا اختار الطالب الاختيار الصواب في كل سؤال وهذا يتم بطريقة واحدة فقط وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق اختيار الإجابة الصواب في أسئلة الامتحان العشرة يكون طريقة واحدة فقط وبالتالي عدد عناصر الحدث A يساوى 1 . إذن

$$P(A) = \frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{1048576} = 9.53674 \times 10^{-7}$$

٢ – نفرض الحدث B أن تكون إجابة الطالب خطأ في جميع أسئلة الامتحان و يتحقق هذا إذا اختار الطالب إجابته على كل سؤال من الاختيارات الثلاث الخطأ ، أي انه يستبعد دائما الاختيار الصواب وبالتالي يمكن الإجابة خطأ على كل سؤال بطرق عددها 3 وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق الإجابة خطأ في جميع الأسئلة يكون $3^{10} = 59049$. إذن

$$P(B) = \frac{3^{10}}{4^{10}} = \frac{59049}{1048576} = 0.0563$$

٣ – نفرض الحدث C أن تكون إجابة الطالب صواب على نصف الأسئلة ويتحقق ذلك إذا اختار الطالب الإجابة الصواب في خمسة أسئلة وعدد طرق اختيار الإجابة صواب في كل منها هو طريقة واحدة فقط والأسئلة الخمسة الباقية يتم الإجابة على كل منها خطأ بطرق عددها 3 وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد فإن عدد طرق الإجابة صواب على نصف الأسئلة يكون $3^5 = 243$. إذن

$$P(C) = \frac{243}{4^{10}} = \frac{243}{1048576} = 0.0002$$

ملاحظة هامة : النتائج التي حصلنا عليها في المثال السابق تعتبر خير شاهد ودليل على أن أسلوب التخمين في الإجابة في امتحانات الاختيار من متعدد دائما ما تؤدى إلى الفشل .

مثـــال ٣٩ :

إذا كانت اللوحة المعدنية لرقم السيارة تحتوى على حرفين مختلفين من الحروف الأبجدية العربيـة يتبعهما عدد من أربعة أرقام بحيث لا يكون رقم الآلاف صفر .أوجد احتمال أن تكون اللوحـة المعدنية التي ستحصل عليها لسيارتك تبدأ بحرف ب وتحمل عدد زوجي .

الحل :

مواضع الحروف والأرقام وعدد طرق كتابتها على اللوحة المعدنية للسيارة يكون كالآتي

مواضع الحروف الأبجدية		مواضع الأرقـــام العدديـــــــة			
الموضع الأول	الموضع الثاني	رقم الآحاد	رقم العشرات	رقم المئات	رقم الآلاف
28	27	10	10	10	9

وبالتالي يكون عدد اللوحات المعدنية المختلفة التي يمكن طبعها للسيارات والذي يمثـل عـدد عناصر فضاء العينة يساوى

$$28 \times 27 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 6804000$$

وبفرض أن الحدث A أن تكون اللوحة المعدنية تبدأ بحرف ب وتحمل عدد زوجي أي أن رقـم الآحاد يكون زوجي $\{0,2,4,6,8\}$ وفى هذه الحالة فإن مواضع الحروف والأرقام وعـدد طرق كتابتها على اللوحة المعدنية لرقم السيارة يكون كالآتي

مواضع الحروف الأبجدية		مواضع الأرقـــام العدديـــــــة			
الموضع الأول	الموضع الثاني	رقم الآحاد	رقم العشرات	رقم المئات	رقم الآلاف
1	27	5	10	10	9

وبالتالي يكون عدد اللوحات المعدنية المختلفة التي يمكن طبعها للسيارات في هذه الحالة والذي يمثل عدد عناصر الحدث A يساوى

$$1 \times 27 \times 9 \times 10 \times 10 \times 5 = 121500$$

إذن احتمال الحدث A يكون

$$P(A) = \frac{121500}{6804000} = 0.0179$$

مثـــال ٤٠ :

ذهب أحد الأشخاص للتعاقد على إدخال تليفون إلى منزله فإذا علمت أن المنطقة التي يسكن بها هذا الشخص يبدأ فيها رقم التليفون من أقصى اليسار بالعدد 63 وإذا كان رقم التليفون يتكون من سبعة أرقام فما هو احتمال أن يكون رقم تليفون هذا الشخص سوف يشتمل على ثلاثة على الأقل من الأصفار المتجاورة .

الحل :

حيث أن رقم التليفون يبدأ من أقصى اليسار بالعدد 63 فإن عدد طرق كتابة كل من الخانة الأولي والثانية يكون طريقة واحدة أما الخانات الخمس الأخرى فإن عدد طرق كتابة كل منها يكون 10 طرق وبالتالي يكون عدد أرقام التليفونات المختلفة التي يمكن التعاقد عليها والذي يمثل عدد عناصر فضاء العينة يساوى

$$1\times1\times10\times10\times10\times10\times10 = 100000$$

وبفرض الحدث A أن يكون رقم تليفون هذا الشخص يشتمل على ثلاثة على الأقل من الأصفار المتجاورة فهذا يعنى أن رقم التليفون قد يشتمل على ثلاثة أصفار متجاورة أو أربعة أصفار متجاورة أو خمسة أصفار متجاورة ويتم ذلك كالآتي :

ثلاثة أصفار متجاورة		أربعة أصفار متجاورة		خمسة أصفار	
تمثيل الرقم	عدد الطرق	تمثيل الرقم	عدد الطرق	تمثيل الرقم	عدد الطرق
63000??	9x10=90	630000?	9	6300000	1
63?000?	9x9=81	63?0000	9		
63??000	10x9=90				

وبتطبيق قاعدة الجمع فإن عدد عناصر الحدث A يكون

$$90 + 81 + 90 + 9 + 9 + 1 = 280$$

إذن احتمال الحدث A يكون

$$P(A) = \frac{280}{100000} = 0.0028$$

مثـــال ٤١: ثلاثة أولاد وثلاثة بنات يتجهون نحو صف به ستة مقاعد للجلوس عليها

١ – أوجد احتمال أن يجلس الأولاد معا والبنات معا .

٢ – أوجد احتمال أن تجلس البنات معا .

الحل : عدد طرق جلوس 6 أشخاص على 6 مقاعد يكون $6!=720$

١ – نفرض الحدث A أن يجلس الأولاد معا والبنات معا . يوجد طريقتان لجلـــوس الأولاد معا وجلوس البنات معا bbbggg , gggbbb حيث الرمز b يعنى ولـــدا والرمـــز g يعنى بنتا وفى كل حالة يمكن للأولاد أن يجلسوا معا بطرق عددها $3!$ ويمكـــن للبنـــات أن تجلسن معا بطرق عددها $3!$.إذن وفقا لقاعدة الضرب فإن عدد الطرق في كل حالة يكـــون $3!\times3! = 36$ وبجمع الحالتين وفقا لقاعدة الجمع فإن عدد الطرق الكلية يكون 72 ، إذن

$$P(A)=\frac{72}{720}=0.1$$

٢ – نفرض الحدث B أن يجلس البنات معا . نلاحظ انه يوجد أربع طرق لجلوس البنات معا

bbbggg , bbgggb , bgggbb , gggbbb

وفى كل حالة يمكن للأولاد أن يجلسوا معا بطرق عددها $3!$ ويمكن للبنات أن تجلسن معـــا بطرق عددها $3!$ ووفقا لقاعدة الضرب فـــإن عـــدد الطـــرق في كـــل حالـــة يكـــون $3!\times3! = 36$ وبجمع الحالات الأربعة فإن عدد الطرق الكلية يكون 144 وبالتالي

$$P(B)=\frac{144}{720}=0.2$$

مثـــال ٤٢ : نفرض مجموعة الأرقام { 1,3,5,7,9 } وبفرض عدم السماح بالتكرار فقـــد تم اختيار ثلاثة أرقام بطريقة عشوائية لتكوين عدد من ثلاث خانات . أحسب ما يأتي :

١ – احتمال أن تكون قيمة العدد اقل من 600 .

٢ – احتمال أن تكون قيمة العدد مضاعف للعدد 5 .

الحل : عدد الأرقام في المجموعة المعطاة يساوى 5 وغير مسموح بالتكرار وبالتالي فإن الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام يتم اختيارها بطرق عددها ${}_5P_3 = 5\times4\times3 = 60$

١ – نفرض الحدث A أن تكون قيمة العدد اقل من 600 أي أن خانة المئات مسموح أن يوضع فيها الرقم 1 أو الرقم 3 أو الرقم 5 وبالتالي فإن خانة المئات يمكن أن تمـــلأ بطـــرق عددها 3 ونظراً لأنه غير مسموح بالتكرار وبعد حجز رقم لخانة المئات فإن خانة العشـــرات

تملأ بطرق عددها 4 ثم خانة الآحاد تملأ بطرق عددها 3 وبذلك فإن عدد عناصر الحدث A يساوى $3\times4\times3=36$ وبالتالي نحصل على $P(A)=\frac{36}{60}=0.6$.

٢- نفرض الحدث B أن تكون قيمة العدد مضاعف 5 أي أن رقم الآحاد يجب أن يقبل القسمة على 5 . وحيث أن الاختيار يكون من مجموعة الأرقام { 1,3,5,7,9 } . إذن رقم الآحاد يكون 5 أي أن خانة الآحاد تملأ بطريقة واحدة فقط ونظرا لأنه غير مسموح بالتكرار فإن خانة المئات تملأ بطرق عددها 4 ثم خانة العشرات تملأ بطرق عددها 3 وبذلك فإن عدد عناصر الحدث B يساوى $4\times3\times1=12$ وبالتالي نحصل على $P(B)=\frac{12}{60}=0.2$.

مثال ٤٣: اخترنا خمسة أعداد عشوائيا من مجموعة الأعداد { 20 , . . . ,2 ,1} أوجد احتمال

١ -أن اصغر عدد من الأعداد الخمسة يكون أكبر من 8 .

٢ -أن أكبر عدد من الأعداد الخمسة يكون اصغر من 17 واصغر عدد منهم أكبر من 6 .

الحل :مجموعة الأعداد { 20 , . . . , 2 , 1 } تحتوى على 20 عنصر وعدد طرق اختيار خمسة أعداد من 20 يساوى

$$\binom{20}{5}=\frac{20!}{(5!)\times(15!)}=15504$$

١ - نفرض الحدث A هو أن اصغر عدد من الأعداد الخمسة يكون أكبر من 8 . إذن الحدث A هو اختيار خمسة أعداد عشوائيا من مجموعة الأعداد { 20 , . . . , 10 , 9 } وعدد عناصر الحدث A هو 12 وبالتالي عدد طرق وقوع الحدث A والذي يعنى عدد طرق اختيار خمسة أعداد من 12 يساوى $792=\binom{12}{5}=\frac{12!}{(5!)\times(7!)}$. إذن احتمال الحدث A يكون

$$P(A)=\frac{792}{15504}=\frac{33}{646}$$

٢ - نفرض الحدث B هو أن أكبر عدد من الأعداد الخمسة يكون اصغر من 17 واصغر عدد منهم يكون أكبر من 6 . إذن الحدث B هو اختيار خمسة أعداد عشوائيا من مجموعة الأعداد { 16 , . . . , 8 , 7 } وعدد عناصر الحدث B هو 10 وبالتالي عدد طرق وقوع الحدث B والذي يعنى عدد طرق اختيار خمسة أعداد من 10 يساوى $252=\binom{10}{5}=\frac{10!}{(5!)\times(5!)}$. إذن $P(B)=\frac{252}{15504}=\frac{21}{1292}$.

مثـــال ٤٤ :

يوجد n من النقاط في المستوى $\{(x_i , y_i)\}_{i=1}^{n}$ بحيث لا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد .

١ – إذا رسم مستقيم عشوائيا يربط بين نقطتين من هذه النقاط ، أوجد احتمال أن هذا المستقيم لا يمر بالنقطة (x_1, y_1) أو (x_2, y_2) .

٢ – إذا رسم مثلث عشوائيا يربط بين ثلاثة من هذه النقاط ، أوجد احتمال أن هذا المثلث يحتوى النقطة (x_1, y_1) كرأس فيه .

٣ – إذا رسم مثلث عشوائيا يربط بين ثلاثة من هذه النقاط ، أوجد احتمال أن هذا المثلث يكون أحد أضلاعه هو الخط الواصل بين النقطتين (x_n, y_n) , (x_1, y_1) .

الحل :

١ – حيث أن النقاط عددها n ولا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد وحيث أن المستقيم يتحدد بنقطتين ، إذن عدد المستقيمات التي يمكن أن تحددها هذه النقاط يكون هو عدد طرق اختيار نقطتين من n من النقاط ويساوى $\binom{n}{2}$ ولإيجاد عدد المستقيمات التي لا تمر بالنقطة (x_1, y_1) أو (x_2, y_2) نستبعد النقطتين فيكون لدينا $n - 2$ من النقاط نختار منهم نقطتين ويكون ذلك بطرق عددها $\binom{n-2}{2}$.

وبالتالي فإن احتمال أن هذا المستقيم لا يمر بالنقطتين (x_1, y_1) أو (x_2, y_2) يساوى

$$\frac{\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$$

٢ – حيث أن المثلث له ثلاثة رؤوس ، إذن عدد المثلثات التي يمكن تحديدها بهذه النقاط يكون هو عدد طرق اختيار ثلاثة نقاط من n من النقاط ويساوى $\binom{n}{3}$ ولإيجاد عدد المثلثات التي تحوى النقطة (x_1, y_1) كرأس فيها فإننا نحجز هذه النقطة كرأس للمثلث فيتبقى

لدينا $n - 1$ من النقاط نختار منها نقطتين كرأسين آخرين للمثلث ويكون ذلك بطرق عددها $\binom{n-1}{2}$ وبالتالي فإن احتمال أن هذا المثلث يحتوى النقطة (x_1,y_1) كرأس فيه يساوى

$$\frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{3}{n}$$

٣ – لإيجاد عدد المثلثات التي يكون فيها الخط الواصل بين النقطتين $(x_n, y_n), (x_1, y_1)$ هو أحد أضلاعها وبمعنى آخر لإيجاد عدد المثلثات التي تحتوى النقطتين $(x_n, y_n), (x_1, y_1)$ كرأسين للمثلث فإننا نحجز هاتين النقطتين ، وبالتالي يتبقى $n - 2$ من النقاط نختار منها نقطة واحدة لتمثل الرأس الثالث ويكون ذلك بطرق عددها $n - 2$ وحيث أن عدد طرق اختيار ثلاثة نقاط من n من النقاط يساوى $\binom{n}{3}$ وبالتالي فإن احتمال أن هذا المثلث يكون أحد أضلاعه هو الخط الواصل بين النقطتين $(x_n, y_n), (x_1, y_1)$ يساوى $\frac{n-2}{\binom{n}{3}} = \frac{6}{n(n-1)}$

مثال ٤٥:

بحيرة صغيرة بها 200 سمكة دخلت 50 منها إلى شبكة صياد ثم خرجت نتيجة لوجود عيب بالشبكة ، وبعد إصلاح العيب بالشبكة تم اصطياد 40 سمكة من البحيرة . أوجد احتمال أن يكون من بين ما تم اصطياده في المرة الثانية يوجد 5 سمكات بالضبط سبق دخولها وخروجها من الشبكة في المرة الأولي .

الحل: عدد السمك بالبحيرة 200 سمكة منها 50 اكتسبت صفة أنها سبق لها دخول الشبكة والخروج منها ، وحيث انه في المرة الثانية تم اصطياد 40 سمكة من أجمالي 200 في البحيرة فإن عدد طرق اختيار 40 سمكة من 200 يكون $\binom{200}{40}$ وبفرض أن A هو الحدث وجود 5 سمكات بالضبط سبق دخولها وخروجها في المرة الأولي فإن هذا يعنى أن الحدث A هو اصطياد 5 سمكات من الخمسين التي اكتسبت صفة أنها سبق لها دخول الشبكة واصطياد

35 سمكة من الباقي وعددهم 150 وعدد طرق وقوع الحدث A يكـون $\binom{50}{5}\times\binom{150}{35}$

وبالتالي فإن احتمال الحدث A يكون

$$P(A)=\frac{\binom{50}{5}\times\binom{150}{35}}{\binom{200}{40}}$$

$$=\frac{50!}{(5!)\times(45!)}\times\frac{150!}{(35!)\times(115!)}\times\frac{(40!)\times(160!)}{200!}=0.0195351$$

مثـــال ٤٦ :

في مزرعة ما يوجد 50 رأس من الغنم 5 منها مصابة بجرثومة الحمى . إذا اخترنا 5 أغنــام بشكل عشوائي من القطيع ، أوجــد

١ – احتمال أن تكون الأغنام الخمسة غير حاملة للجرثومـــة .

٢ – احتمال أن تكون 2 من الأغنام المختـــارة مصابة بالمرض .

٣ – احتمال أن تكون واحدة منها على الأقل تحمل جرثومة المرض .

٤ – إذا علمت أنه تم استبعاد اثنتين من الأغنام المصابة بالمرض ، ثم اخترنا 5 أغنام من باقي القطيع بطريقة عشوائية ، فما احتمال وجود إصابة واحدة ؟

الحل : عدد طرق اختيار 5 أغنام من 50 وبالتالي عدد عناصر فضاء العينة للتجربة يكون

$$\binom{50}{5}=2118760$$

١ – عدد طرق اختيار 5 أغنام سليمة من 45 هو $\binom{45}{5}=1221759$

إذن الاحتمال p أن تكون الأغنام الخمسة سليمة يكون

$$p=\frac{\binom{45}{5}}{\binom{50}{5}}=\frac{1221759}{2118760}=0.5766$$

٢ – الاحتمال p أن تكون 2 من الأغنام المختـــارة مصابة بالمرض

$$p = \frac{\binom{5}{2}\times\binom{45}{3}}{\binom{50}{5}} = \frac{141900}{2118760} = 0.067$$

٣ – الاحتمال p أن تكون واحدة من الأغنام على الأقل تحمل جرثومة المرض هو

p = P (مصابة 2) + P (مصابة 3) + P (مصابة 4) + P (مصابة 5)

$$= \frac{\binom{5}{2}\times\binom{45}{3}}{\binom{50}{5}} + \frac{\binom{5}{3}\times\binom{45}{2}}{\binom{50}{2}} + \frac{\binom{5}{4}\times\binom{45}{1}}{\binom{50}{2}} + \frac{\binom{5}{5}\times\binom{45}{0}}{\binom{50}{2}}$$

$$= 0.4234$$

<u>وكان من الممكن حساب الاحتمال المطلوب فى (٣) كالآتي :</u>

الحدث أن تكون واحدة على الأقل من الأغنام الخمسة مصابة هو مكملة الحدث أن تكـــون الخمسة أغنام ســـليمة وبفرض أن A هو الحدث اختيار 5 أغنام سليمة ، إذن

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{\binom{45}{5}}{\binom{50}{5}} = 1 - 0.5766 = 0.4234$$

٤ – بعد استبعاد اثنتين من الأغنام المصابة بالمرض يصبح

عدد رؤوس الغنم بالقطيع ٤٨ منها ٣ مصابة .

إذن الاحتمال p لوجود إصابة واحدة هو

عدد الأغنام 48	
45 سليمة	3 مصابة

$$p = \frac{\binom{3}{1}\times\binom{45}{4}}{\binom{48}{5}} = \frac{446985}{1712304} = 0.261$$

مثـــال ٤٧ :

صندوق يحتوى على ١٥ مصباح كهربائي منها خمسة مصابيح معيبة ، اختيرت عينة عشـــوائية تتكون من ثلاثة مصابيح كهربائية . أوجد احتمال ما يأتي :

١ – أن يكون في العينة مصباح واحد معيب .

٢ – أن تكون المصابيح في العينة جميعها سليمة .

٣ – أن يكون في العينة مصباح واحد على الأقل معيب .

عدد المصابيح 15	
10 سليمة	5 معيبة

الحل :

١ – نفرض A هو الحدث انه يوجد في العينة مصباح واحد معيب ، إذن

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{225}{455} = \frac{45}{91}$$

٢ – نفرض B هو الحدث أن المصابيح في العينة جميعها سليمة ، إذن .

$$P(B) = \frac{\binom{5}{0} \times \binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$$

٣ – نفرض C هو الحدث أنه يوجد في العينة مصباح واحد على الأقل معيب وحيث أن الحدث يوجد في العينة مصباح واحد على الأقل معيب هو مكملة الحـــدث أن المصابيح في العينة جميعها سليمة ، إذن الحدث C هو مكملة الحدث B وبالتالي

$$P(C) = P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

مثـال ٤٨ :

يراد اختيار لجنة طلابية مؤلفة من 5 طلاب من بين 10 طلاب من الفرقة الرابعة و 15 طـالب من الفرقة الثالثة في الكلية . أوجد ما يأتي :

١ – احتمال أن تحتوي اللجنة على طالبين من الفرقة الرابعة وثلاثة طلاب من الفرقة الثالثة .

٢ – احتمال أن يكون على الأقل طالب من الفرقة الثالثة ممثل في اللجنة .

٣ – احتمال أن يكون طلاب الفرقة الثالثـة والرابعـة ممثلين في اللجنة .

٤ – احتمال أن يكون طلاب الفرقة الرابعـة هم الأكثر تمثيلا في اللجنة .

الحل :

عدد الطلاب بالعينة 25 طالبا ، وعدد طرق اختيار 5 طلاب من بين 25 يكون $\binom{25}{5}$ وهذا يمثل عدد عناصر فضاء العينة .

١ – الحدث أن تحتوي اللجنة على طالبين من الفرقة الرابعة وثلاثة طلاب من الفرقة الثالثة يتم بطرق عددها $\binom{15}{3} \times \binom{10}{2}$ واحتماله p يكون

$$p = \frac{\binom{10}{2} \times \binom{15}{3}}{\binom{25}{5}} = \frac{20475}{53130} = \frac{195}{506}$$

٢ – الحدث أن يكون على الأقل طالب من الفرقة الثالثة ممثل في اللجنة هو مكملة الحـدث اختيار جميع أعضاء اللجنة من الفرقة الرابعة وبفرض أن B هو الحدث اختيار جميع أعضـاء اللجنة من الفرقة الرابعة ، إذن الحدث أن يكون على الأقل طالب من الفرقة الثالثة ممثـل في اللجنة هو B' وبالتالي

$$P(B') = 1 - P(B)$$

$$= 1 - \frac{\binom{15}{0} \times \binom{10}{5}}{\binom{25}{5}} = 1 - \frac{252}{53130} = 1 - \frac{6}{1265} = \frac{1259}{1265}$$

٣ – نفرض الحدث A أن طلاب الفرقة الثالثة والرابعة ممثلين في اللجنة ، ولكي يتحقق ذلك فإننا نستبعد الحدث B أن يكون اختيار جميع أعضاء اللجنة من الفرقة الرابعة فقط أو الحدث C أن يكون اختيار جميع أعضاء اللجنة من الفرقة الثالثة فقط ، أي أن

$$P(A) = 1 - P(B \cup C)$$

وحيث أن B , C أحداث متنافية . إذن

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C)$$

$$= \frac{\binom{15}{0} \times \binom{10}{5}}{\binom{25}{5}} + \frac{\binom{15}{5} \times \binom{10}{0}}{\binom{25}{5}} = \frac{6}{1265} + \frac{33}{1265} = \frac{39}{1265}$$

إذن الاحتمال المطلوب

$$P(A) = 1 - \frac{39}{1265} = \frac{1226}{1265}$$

٤ – نفرض الحدث A أن يكون طلاب الفرقة الرابعة هم الأكثر تمثيلا في اللجنة وهذا يتحقق في كل من الأحداث الآتية :

الحدث A_1 أن تحتوي اللجنة على خمسة طلاب من الفرقة الرابعة أو

الحدث A_2 أن تحتوي اللجنة على أربعة طلاب من الفرقة الرابعة وطالب واحد من الثالثة أو

الحدث A_3 أن تحتوي اللجنة على ثلاثة طلاب من الفرقة الرابعة وطالبين من الفرقة الثالثة ،

وحيث أن $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ والأحداث A_1 , A_2 , A_3 متنافية ، إذن

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$= \frac{\binom{15}{0} \times \binom{10}{5}}{\binom{25}{5}} + \frac{\binom{15}{1} \times \binom{10}{4}}{\binom{25}{5}} + \frac{\binom{15}{2} \times \binom{10}{3}}{\binom{25}{5}}$$

$$= \frac{252}{53130} + \frac{3150}{53130} + \frac{12600}{53130} = \frac{2667}{8855}$$

مثـــال ٤٩ :

من بين 4 رجال و 5 نساء يراد تكوين لجنة عشوائيا مؤلفة من 3 أشخاص .

١ – أوجد احتمال أن اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة واحدة .

٢ – أوجد احتمال أن اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة واحدة بشرط أن أحد الرجال يجب أن يكون باللجنة .

الحل : عدد طرق اختيار 3 أشخاص من 9 أشخاص وبالتالي عدد عناصر فضاء العينة هو

$$\binom{9}{3} = \frac{9\,!}{(3\,!) \times (6\,!)} = 84$$

١ – نفرض الحدث A أن اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة واحدة ، إذن عدد عناصر الحدث A يكون $\binom{4}{2} \times \binom{5}{1} = 6 \times 5 = 30$ وبالتالي $P(A) = \frac{30}{84}$.

٢ – نفرض الحدث B أن اللجنة تحتوي على رجلين وامرأة بشرط أن أحد الرجال يجب أن يكون باللجنة ، إذن عدد عناصر B يساوى $\binom{3}{1} \times \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15$

وبالتالي $P(B) = \frac{15}{84}$.

مثـــال ٥٠ :

يقف في أحد الحجرات ستة رجال مع زوجاتهم فإذا اختير أربعة أشـــخاص منـــهم بطريقـــة عشوائية فما احتمال عدم اختيار أي اثنين متزوجين .

الحل : عدد الأشخاص بالحجرة 12 وبالتالي فإن عدد طرق اختيار أربعة أشخاص مـــن بـــين 12 شخص يكون $\binom{12}{4} = 495$ وبفرض أن الحدث A هو اختيار أربعة أشخاص بحيـــث لا يوجد بينهم أي اثنين متزوجين وحيث انه يقف بالحجرة 6 ثنائيات فإن الحدث A يقع بـــأن يتم اختيار أربعة أشخاص من أربعة ثنائيات مختلفة وهذا يحدث بطـــرق عددهـــا $\binom{6}{4} = 15$ وحيث انه يوجد طريقتان لاختيار فرد من كل ثنائي من الثنائيات الأربعة ، ووفقـــا لقـــاعدة الضرب فإن عدد طرق وقوع الحدث يكون $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 15 = 240$ وبالتالي فـــإن احتمال الحدث A يكون

$$P(A) = \frac{240}{495} = \frac{16}{33}$$

مثـــال ٥١ :

من بين 8 رجال وزوجاتهم تم اختيار شخصين بطريقة عشوائية . أوجد احتمال كل من

١ – اختيار رجل وزوجته .

٢– اختيار رجل وسيدة ليست زوجته .

٣ – اختيار رجل وسيدة .

٤ – اختيار رجلين أو سيدتين .

الحل : حيث أن عدد الأشخاص يساوى 16 لأنهم 8 رجال وزوجاتهم ، إذن عـــدد طـرق اختيار شخصين من 16 وبالتالي عدد عناصر فضاء العينة هو

$$\binom{16}{2} = \frac{16\ !}{(2\,!) \times (14\ !)} = 120$$

١– نفرض الحدث A هو اختيار رجل وزوجته وبالتالي يمثل اختيار زوج من ثمانية أزواج ويتم ذلك بطرق عددها $\binom{8}{1} = 8$ وبالتالي $P(A) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$.

٢– نفرض الحدث B هو اختيار رجل وسيدة ليست زوجته . إذن

$$P(B) = \frac{\binom{8}{1} \times \binom{7}{1}}{\binom{16}{2}} = \frac{7}{15}$$

٣– نفرض الحدث C هو اختيار رجل وسيدة . إذن

$$P(B) = \frac{\binom{8}{1} \times \binom{8}{1}}{\binom{16}{2}} = \frac{8}{15}$$

٤– نفرض الحدث E_1 هو اختيار رجلين والحدث E_2 هو اختيار سيدتين وهـــم حدثـــين متنافيين ، إذن الحدث اختيار رجلين أو سيدتين هو $E_1 \cup E_2$ وبالتالي

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{16}{2}} + \frac{\binom{8}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{28}{120} + \frac{28}{120} = \frac{7}{15}$$

مثـــال ٥٢ :

صندوق يحتوى على 9 كرات بيضاء ، 6 كرات سوداء ، 5 كرات حمراء ونريـــد ســحب مجموعة من ثلاث كرات بطريقة عشوائية بدون إرجاع

١ – أوجد احتمال اختيار مجموعة من كرتين بيضاء وكرة سوداء .

٢ – أوجد احتمال اختيار مجموعة من 3 كرات مختلفة الألوان .

٣ – أوجد احتمال اختيار مجموعة من 3 كرات من نفس اللون .

الحل :

حيث أن عدد الكرات بالصندوق يساوى 20 ، إذن عدد طرق سحب ثلاث كرات بطريقة عشوائية بدون إرجاع يكون

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{(3!) \times (17!)} = 1140$$

١ – عدد طرق سحب كرتين بيضاء وكرة سوداء يكون

$$\binom{9}{2} \times \binom{6}{1} = 36 \times 6 = 216$$

إذن احتمال اختيار مجموعة من كرتين بيضاء وكرة سوداء يكون $\frac{216}{1140}$.

٢ – يمكن اختيار مجموعة من 3 كرات مختلفة الألوان بأن نختار كرة من كل لون ويتم ذلــك بطرق عددها

$$\binom{9}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} = 9 \times 6 \times 5 = 270$$

واحتمال ذلك يساوي $\frac{270}{1140}$.

٣ – الحدث اختيار مجموعة من 3 كرات من نفس اللون هو مكملة الحدث اختيار مجموعـــة من 3 كرات مختلفة الألوان واحتمال ذلك يكون $1 - \frac{270}{1140} = \frac{87}{114}$

مثـــال ٥٣ :

سحبت كرتان من صندوق يحتوي على 4 كرات بيضاء وكرتان حمراء . أوجد احتمال ما يأتي

١ – الكرتان بيضـــاء ٢ – الكرتان من نفس اللون ٣ – على الأقل واحدة بيضاء .

وذلك في كل من الحالات الآتية :

أولا : السحب بإرجاع .

ثانيا :السحب بدون إرجاع .

الحل :

نفرض أن A هو الحدث الكرتان بيضـــاء ، B هو الحدث الكرتان حمراء

أولا : في حالة السحب بإرجـــاع

١ – احتمال أن الكرتان بيضـــاء $P(A)=\left(\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{4}{6}\right)=\frac{4}{9}$

٢ – الحدث الكرتان من نفس اللون يعنى الحدث A الكرتان من اللون الأبيض أو الحدث B الكرتان من اللون الأحمر ، أي انه الحدث $A\cup B$ وحيث أن A, B أحداث متنافية ، إذن $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ وحيث أن

$$P(B)=\left(\frac{2}{6}\right)\times\left(\frac{2}{6}\right)=\frac{1}{9} \quad , \quad P(A)=\left(\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{4}{6}\right)=\frac{4}{9}$$

إذن

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$$

٣ – الحدث على الأقل واحدة بيضاء هو مكملة الحدث أن الكرتان حمراء ، إذن احتمال على الأقل واحدة بيضاء يكون

$$P(B')=1-P(B)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

ثانيا : في حالة السحب بدون إرجاع

1 - $P(A)=\left(\frac{4}{6}\right)\times\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$

2 - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\left(\frac{2}{5}\right)+\left[\left(\frac{2}{6}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)\right]=\frac{7}{15}$

3 - $P(B')=1-P(B)=1-\left[\left(\frac{2}{6}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)\right]=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$

مثـــال ٥٤ :

سحبت ورقتان بطريقة عشـــوائية من صندوق يحتوى على 10 ورقات مرقمة بالأعداد مـــن 1 إلى 10 . أوجد احتمال أن يكون مجموعها عددا زوجيا

١ – إذا تم سحب الورقتين معا .

٢ – إذا تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى بدون إحلال .

٣ – إذا تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى مع الإحلال .

الحل :

نفرض أن A هو الحدث سحب ورقتان مرقمتان بعددين مجموعهما عددا زوجيا

١ – إذا تم سحب الورقتين معا .

عدد طرق سحب ورقتان من 10 ورقات هو

$$\binom{10}{2} = \frac{(10!)}{(2!) \times (8!)} = 45$$

وحيث أن الحدث A سحب ورقتان مرقمتان بعددين مجموعـــهما عـــددا زوجيـــا يتحقق إذا كان كل من العددين زوجيا أو كل من العددين فرديا ، وحيث انه يوجد 5 أعداد زوجية و 5 أعداد فردية ، إذن

عدد طرق سحب عددين زوجيين يكون

$$\binom{5}{2} \times \binom{5}{0} = \frac{5!}{(2!) \times (3!)} \times 1 = 10$$

وعدد طرق سحب عددين فرديين

$$\binom{5}{0} \times \binom{5}{2} = 1 \times \frac{5!}{(2!) \times (3!)} = 10$$

ووفقا لقاعدة الجمع فإن عدد طرق وقوع الحدث A يكون $10 + 10 = 20$

إذن

$$P(A) = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

٢ – إذا تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى بدون إحلال .

عدد طرق سحب ورقتان من 10 ورقات بحيث يتم السحب ورقة بعد الأخرى بدون إحلال هو $10 \times 9 = 90$ وحيث أن الحدث A سحب ورقتان مرقمتان بعددين مجموعهما عددا زوجيا يتحقق إذا كان كل من العددين زوجيا أو كل من العددين فرديا ، وحيث انه يوجد 5 أعداد زوجية و 5 أعداد فردية . إذن

عدد طرق سحب عددين زوجيين يكون $5 \times 4 = 20$

عدد طرق سحب عددين فرديين يكون $5 \times 4 = 20$

ووفقا لقاعدة الجمع فإن عدد طرق حدوث الحدث A يكون $20 + 20 = 40$

إذن

$$P(A) = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$$

٣ – إذا تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى مع الإحلال .

عدد طرق سحب ورقتان من 10 ورقات بحيث يتم السحب ورقة بعد الأخرى مع الإحلال هو $10 \times 10 = 100$ وحيث أن الحدث A سحب ورقتان مرقمتان بعددين مجموعهما عددا زوجيا يتحقق إذا كان كل من العددين زوجيا أو كل من العددين فرديا ، وحيث انه يوجد 5 أعداد زوجية ، 5 أعداد فردية . أذن

عدد طرق اختيار عددين زوجيين يكون $5 \times 5 = 25$

عدد طرق اختيار عددين فرديين يكون $5 \times 5 = 25$

ووفقا لقاعدة الجمع فإن عدد طرق حدوث الحدث A يكون $25 + 25 = 50$

إذن

$$P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

مثـــال ٥٥ : (المسألة الكلاسيكية لأعياد الميلاد)

في هذا المثال سوف نتناول تجربة تحديد أعياد الميلاد لعدد n من الأشخاص ، ونبحـــث عـــن الاحتمال p أن تكون أيام أعياد الميلاد مختلفة لهؤلاء الأشخاص ، وبفرض أن جميع الســـنوات 365 يوما وإذا أخذنا في الاعتبار أن يوم الميلاد لأي شخص منهم يمكن أن يكون أي يـــوم في السنة وأن كل يوم من أيام السنة له نفس الاحتمال في أن يكون يوم الميلاد لشخص ما فـــإن عدد عناصر فضاء العينـــة S للتجربة في هذه الحالة ، أي أن عدد الطرق الممكنة لتحديـــد أعياد الميلاد لهؤلاء الأشخاص يكون

$$n(S) = (365)^n$$

وبفرض أن الحدث A هو أن أيام أعياد الميلاد لهؤلاء الأشخاص مختلفة ، إذن

يمكن اختيار يوم عيد الميلاد للشخص الأول بطرق عددها 365

ويمكن اختيار يوم عيد الميلاد للشخص الثاني بطرق عددها 364

ويمكن اختيار يوم عيد الميلاد للشخص الثالث بطرق عددها 363

وهكذا حتى نصل إلى إمكانية اختيار يوم عيد الميلاد للشخص رقم n بطرق عددها

$$(365 - n + 1)$$

إذن عدد عناصر الحدث A ، أي أن عدد الطرق الممكنة لتحديد أيام أعياد ميـــلاد مختلفـــة لهؤلاء الأشخاص يكون

$$n(A) = 365 \times 364 \times 363 \times \; \ldots \; \times (365 - n + 1)$$

إذن الاحتمال p أن تكون أيام أعياد الميلاد مختلفة لمجموعة بها n من الأشخاص

$$p = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{365 \times 364 \times 363 \times \; \ldots \; \times (365 - n + 1)}{(365)^n}$$

وبصيغة أخرى فإن p يمثل احتمال عدم وجود أي اثنان من n من الأشخاص لهم نفس يـــوم الميلاد ، إذن احتمال وجود شخصين على الأقل من مجموعة من n من الأشخاص ويكـــون لهما نفس يوم الميلاد يكون $1 - p$.

وفى الجدول الآتي نحسب احتمال وجود شخصين على الأقل من مجموعة تحتوى على n من الأشخاص ويكون لهما نفس يوم الميلاد وذلك لبعض قيم n وقيمة هذا الاحتمال $1 - p$ حيث p تعطى من القانون

$$p = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \ \ldots \ \times (365 - n + 1)}{(365)^n}$$

احتمال وجود شخصين على الأقل لهما نفس يوم الميلاد	عدد الأشخاص n
0.0271356	5
0.116948	10
0.252901	15
0.411438	20
0.475695	22
0.507297	23
0.5687	25
0.706316	30
0.970374	50
0.994123	60
0.999914	80
0.999999	95

ومن الجدول نلاحظ انه لقيم $n \geq 23$ فإن احتمال وجود شخصين على الأقل لهما نفس يوم الميلاد يكون اكبر من 0.5 أي أن الاحتمال يكون اكبر من 50% وبالتالي يمكننا القول انه في أي مجموعة تحتوى على 23 شخص أو اكثر فإنه من المرجح أن يكون هناك اثنان على الأقل منهم لهما نفس يوم الميلاد .

وفى دراسة الاحتمالات والإحصاء تعتبر مسألة أعياد الميلاد من المسائل الشهيرة منذ عام 1939 وذلك نظرا لان القيم العددية التي نحصل عليها عند حل هذا النوع من المسائل يكون غالبا مثير للدهشة وربما تكون النتيجة السابقة والتي تخبرنا انه في أي مجموعة تحتوى على 23 شخص أو اكثر فإنه من المرجح أن يكون هناك اثنان على الأقل منهم لهما نفس يوم الميلاد تعتبر من النتائج المثيرة للدهشة .

مثـــال ٥٦ :

اختير عدد بطريقة عشوائية من مجموعة الأعداد $\{1, 2, 3, \ldots, 10000\}$ أوجـــد احتمال أن العدد يحتوى على الرقم 5 مرة واحدة على الأقل ضمن خاناته .

الحل : مجموعة الأعداد بالصورة $\{0001, 0002, 0003, \ldots, 9999, 10000\}$

ونفرض الحدث A_i هو أن العدد يحتوى على الرقم 5 في الخانة رقم i حيث $1 \le i \le 4$

إذن الحدث أن العدد يحتوى على الرقم 5 مرة واحدة على الأقـــل ضمـــن خاناتـــه يكـــون $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ ولحساب احتماله نستخدم القانون

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 4} P(A_i \cap A_j)$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)$$

وحيث أن كل خانة يمكن أن تملأ بطرق عددها 10 وهى الأرقام من 0 إلى 9 ، إذن

$$P(A_i) = \frac{1}{10} \qquad \forall \quad 1 \le i \le 4$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \qquad \forall \quad 1 \le i < j \le 4$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} \qquad \forall \quad 1 \le i < j < k \le 4$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{10000}$$

نلاحظ انه يوجد $\binom{4}{1}$ من الحدود بالصورة $P(A_i)$ ويوجد $\binom{4}{2}$ من الحدود بـــالصورة $P(A_i \cap A_j)$ ويوجد $\binom{4}{3}$ من الحدود بالصورة $P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ ويوجد $\binom{4}{4}$ من الحدود على الصورة $P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)$ وبالتعويض نحصل على

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \binom{4}{1} \times \frac{1}{10} - \binom{4}{2} \times \frac{1}{100} + \binom{4}{3} \times \frac{1}{1000} - \binom{4}{4} \times \frac{1}{10000} = 0.3439$$

مثـــال ٥٧ :

كتب أحد الأشخاص n من الخطابات الشخصية إلى n من الأصدقاء ووضع كل خطاب في ظرف بريد وأغلقه بدون كتابة العناوين ثم بدء بعد ذلك بطريقة عشوائية في كتابة n من العناوين على هذه المظاريف . أوجد احتمال وجود خطاب واحد على الأقل مكتوب عليه العنوان مضبوط .

الحل :

عدد طرق كتابة n من العناوين على n من المظاريف يساوى $n!$ وهذا يمثل عدد عناصر فضاء العينة ، ونفرض الحدث A_i هو أن الخطاب رقم i تم كتابة العنوان عليه مضبوط . إذن الحدث وجود خطاب واحد على الأقل مكتوب عليه العنوان مضبوط يكون $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ ولحساب احتماله نستخدم القانون

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

وحيث انه عند كتابة العنوان مضبوط على الخطاب رقم i فإنه يتبقى $(n-1)$ من الخطابات وعدد طرق كتابة العناوين على هذه الخطابات المتبقية يساوى $(n-1)!$ أي أن عدد عناصر الحدث A_i يساوى $(n-1)!$ وبالتالي فإن $P(A_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!}$. وبالمثل $A_i \cap A_j$ يمثل الحدث كتابة العنوان مضبوط على كل من الخطاب رقم i والخطاب رقم j وبالتالي يتبقى $(n-2)$ من الخطابات وعدد طرق كتابة العناوين على هذه الخطابات المتبقية يساوى $(n-2)!$ أي أن عدد عناصر الحدث $A_i \cap A_j$ يساوى $(n-2)!$ وبالتالي فإن $P(A_i \cap A_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!}$. وبالمثل $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \dfrac{(n-3)!}{n!}$ وهكذا حتى $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \dfrac{1}{n!}$. والآن عند حساب $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$

نلاحظ انه يوجد $\binom{n}{1}$ من الحدود على الصورة $P(A_i)$ ويوجد $\binom{n}{2}$ من الحدود على الصورة $P(A_i \cap A_j)$ ويوجد $\binom{n}{3}$ من الحدود على الصورة $P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ وهكذا إلى $\binom{n}{n}$ من الحدود على الصورة $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$ وبـــالتعويض نحصل على

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \binom{n}{1} \times \frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2} \times \frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3} \times \frac{(n-3)!}{n!} - \dots + (-1)^{n-1} \times \binom{n}{n} \times \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

ملاحظة :

نعلم أن مفكوك الدالة الآسية $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ وبالتالي عندما $n \to \infty$ فإن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + \dots$$

$$= 1 - \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots\right)$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$= 1 - e^{-1}$$

$$\cong 0.632$$

وفي الجدول الآتي نحسب احتمال وجود خطاب واحد على الأقل مكتوب عليه العنوان مضبوط من مجموعة تحتوى على n من الخطابات لبعض قيم n وذلك باستخدام الكومبيوتر حيث تم الحساب بدقة عشرة خانات عشرية ، وقيمة هذا الاحتمال تعطى من القانون

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

عدد الخطابات n	احتمال وجود خطاب واحد على الأقل مكتوب عليه العنوان مضبوط
1	1.0
2	0.5
3	0.6666666667
4	0.625
5	0.6333333333
6	0.6319444444
7	0.6321428571
8	0.6321180556
9	0.6321208113
10	0.6321205357
11	0.6321205608
12	0.6321205587
13	0.6321205588
14	0.6321205588
15	0.6321205588
50	0.6321205588
100	0.6321205588
1000	0.6321205588
2000	0.6321205588

أي انه حتى وأن كان عدد الخطابات كبير جدا في هذا المثال فانه توجد فرصة جيدة تصل إلى 63 % لان يكون واحد على الأقل من هذه الخطابات قد كتب عليه العنوان مضبوط ويلاحظ أننا حصلنا على هذه النسبة 63 % بدأ من n = 5 كما انه بدأ من n = 13 فإن قيمة الاحتمال تكون ثابتة لعشرة خانات عشرية وهذه تعتبر من النتائج المثيرة للدهشة .

٤ - ٣ : فضاء الاحتمال اللانهائي القابل للعد

Countable Infinite Probability Space

إذا كان فضاء العينة S فضاء لا نهائي قابل للعد ، مثلا $S = \{ s_1 , s_2 , \ldots \}$ فإنه كما في حالة فضاء الاحتمال المنتهى يمكن الحصول على فضاء احتمال عن طريق تخصيص عدد حقيقي p_i لكل حدث أولى $s_i \in S$ وهذا العدد الحقيقي يسمى احتمال s_i وهذه الأعداد تحقق الخواص الآتية :

$$1) - \quad p_i \geq 0 \quad , \quad \forall \; i$$

$$2) - \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

ويكون الاحتمال $P(A)$ للحدث A هو مجموع احتمالات العناصر التي تنتمي إلى A .

مثـال ٥٨ :

في تجربة إلقاء قطعة نقود باستمرار وحساب عدد المرات اللازمة حتى يظهر وجه الصورة لأول مرة فإن فضاء العينة لهذه التجربة يكون $S = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$ حيث الرمز ∞ يمثل حالة عدم ظهور الصورة على الإطلاق على الرغم من إلقاء قطعة النقود عدد لانهائي من المرات ، وفى هذه التجربة فإن فضاء العينة يكون لا نهائي قابل للعد وكل حدث أولى في S يمثل عدد مرات إلقاء العملة المعدنية حتى يظهر وجه الصورة لأول مرة ، ويمكن الحصول على فضاء احتمال بالتخصيص التالي

$$P(1) = \frac{1}{2} \;,\; P(2) = \frac{1}{2^2} \;,\; \ldots \;, P(n) = \frac{1}{2^n} \;,\; P(\infty) = 0$$

وهذه الأعداد تمثل متتابعة هندسية حدها الأول $\frac{1}{2}$ وأساسها $\frac{1}{2}$ ومجموعها

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$$

وبفرض أن A هو الحدث ظهور الصورة لأول مرة بعد الرمية الخامسة على الأقل فإن هذا يعنى انه قد تظهر الصورة لأول مرة في الرمية السادسة أو السابعة أو ... وهكذا . إذن

$$P(A) = \sum_{n=6}^{\infty} P(n) = 1 - \sum_{n=1}^{5} P(n) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right) = \frac{1}{2^5}$$

٤ – ٤ : فضاء الاحتمال المنتظم اللانهائي الغير قابل للعد

Equi-probable Uncountable Infinite Probability Space

إذا كان فضاء العينة S فضاء لا نهائي غير قابل للعد فإنه لا يمكن تخصيص عددا حقيقيا لكل عنصر s_i ولكن عندما يكون هناك مقياس هندسي محدود $m(S)$ لفضاء العينة S فإنه لكل حدث A يتم حساب هذا المقياس الهندسي $m(A)$ وهذا المقياس الهندسي المحدود قد يكون الطول أو العرض أو المساحة أو الحجم وبشرط أن يتم اختيار النقاط فيه بطريقة عشوائية وبالتالي يصبح احتمال الحدث A ، أي احتمال أن تنتمي النقطة المختارة إلى A ، هو خارج قسمة المقياسين كالآتي

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)}$$

وفضاء العينة اللانهائي مع دالة الاحتمال P في هذه الحالة يسمى بفضاء الاحتمال المنتظم اللانهائي الغير قابل للعد ، وصفة الانتظام هنا تعني أن جميع عناصر فضاء العينة متساوية في احتمال حدوثها .

مثال ٥٩ :

تم اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل الفترة $[1,9]$. ما احتمال أن تقع هذه النقطة بين العددين $3,5$ ؟

الحل :

نفرض أن الحدث A هو وقوع النقطة بين $3,5$. فضاء العينة S هو الفترة $[1,9]$ والمقياس الهندسي المحدود هو الطول ، أي أن $m(S)$ يمثل طول الفترة $[1,9]$ أي البعد بين العددين $1,9$ وأيضا $m(A)$ يمثل البعد بين العددين $3,5$ وبالتالي

$$m(S) = 9-1 = 8 \qquad , \qquad m(A) = 5-3 = 2$$

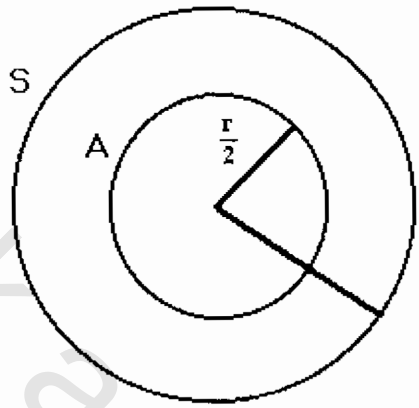
إذن

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

مثـــال ٦٠ :

اختيرت نقطة بطريقة عشوائية داخل دائرة ، أوجد احتمال أن تكون النقطة أقرب إلى مركـــز الدائرة منها إلى محيط الدائرة .

الحل :



نفرض أن S تمثل مجموعة النقاط داخل دائرة نصف قطرها r ونفرض أن A تمثل مجموعة النقاط داخل الدائرة المشـــتركة معها في المركز ونصف قطرهـا $\frac{r}{2}$. إذن A تمثـــل نقـــاط الدائرة الداخلية التي تكون اقرب إلى مركز الدائرة منها إلى محيط الدائـــــرة الخارجيـــة S ، والمقياس الهندسي المحدود هو المساحة ، أي أن

$m(S)$ يمثل مساحة الدائرة الخارجية S

وأيضا

$m(A)$ يمثل مساحة الدائرة الداخلية A

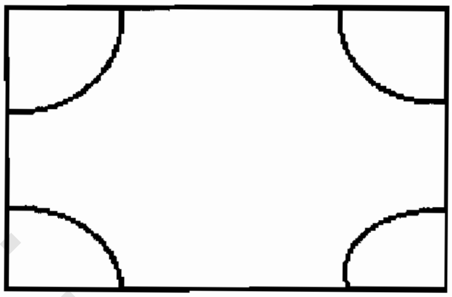
إذن الاحتمال p أن تكون النقطة أقرب إلى مركز الدائرة منها إلى محيط الدائرة هو

$$p = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

مثــال ٦١ :

مستطيل طوله 8 cm وعرضه 6 cm اختيرت نقطة بطريقة عشوائية داخل المســــتطيل ، أوجد احتمال أن تكون النقطــة أقرب بمقدار 2 cm عن كل رأس من رؤوس المستطيــل .

الحل :



المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون أقرب بمقدار 2 cm عن رأس من رؤوس المستطيــل يمثله النقاط (وبالتالي المساحة) الواقعة داخل ربع دائرة مركزها هذا الرأس ونصف قطرهــا 2 cm وحيث أنه يوجد للمستطيل أربعة رؤوس ، وبفرض أن الحدث A هــو أن تكــون النقطــة أقرب بمقدار 2 cm عن كل رأس من رؤوس المستطيــل ، إذن الحدث A يمثلــه المنطقة المظللة بالرسم والواقعة داخل دائرة نصف قطرها 2 cm وفضاء العينــــة S يمثلــه المستطيل والمقياس الهندسي المحدود في هذه الحالة هو المساحة ، أي أن

$m(S)$ يمثل مساحة المستطيل S

وأيضا

$m(A)$ يمثل مساحة الدائرة A

إذن الاحتمال p أن تكون النقطــة أقرب بمقــدار 2 cm عــن كــل رأس مــن رؤوس المستطيــل يكون

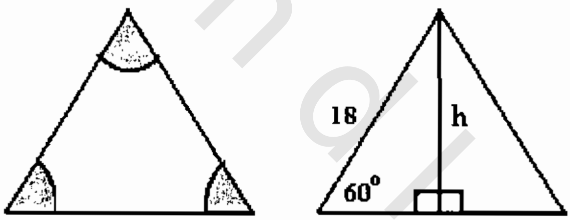
$$p = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{\pi (2)^2}{6 \times 8} = \frac{\pi}{12}$$

مثـــال ٦٢ :

مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 18 cm اختيرت نقطة بطريقة عشوائية داخل المثلث أوجد احتمال أن تكون النقطة أقرب بمقدار 3 cm عن كل رأس من رؤوس المثلث .

الحل :

المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون أقرب بمقدار 3 cm عن رأس من رؤوس مثلث متساوي الأضلاع يمثله النقاط الواقعة داخل قطاعا دائريا زاوية رأسه 60^0 ومركزه هذا الرأس ونصف قطر دائرته 3 cm ، وحيث أنه يوجد للمثلث ثلاثة رؤوس وبفرض أن الحدث A هو أن تكون النقطة أقرب بمقدار 3 cm عن كل رأس من رؤوس المثلث ، إذن الحدث A يمثله المنطقة المظللة بالرسم والواقعة داخل القطاعات الدائرية الثلاث والتي تشكل نصف دائرة نصف قطرها 3 cm وفضاء العينة S يمثله المثلث والمقياس الهندسي المحدود في هذه الحالة هو المساحة ، أي أن m (S) يمثل مساحة المثلث S وأيضا m (A) يمثل مساحة نصف الدائرة A ، وحيث أن مساحة المثلث تساوى حاصل ضرب طول نصف القاعدة في طول الارتفاع h ، إذن



$$h = 18 \sin 60^0 = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$m(S) = \frac{1}{2} \times 18 \times (9\sqrt{3}) = 81\sqrt{3}$$

$$m(A) = \frac{1}{2}\pi(3)^2 = \frac{9\pi}{2}$$

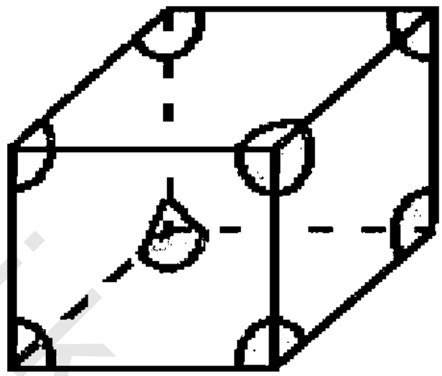
إذن الاحتمال p أن تكون النقطة أقرب بمقدار 3 cm عن كل رأس من رؤوس المثلث

$$p = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{9\pi}{2 \times 81\sqrt{3}} = \frac{\pi}{18\sqrt{3}}$$

مثـــال ٦٣ :

مكعب طول ضلعه 20 cm يراد اختيار نقطة بداخله بطريقة عشوائية . أوجد احتمال أن تكون النقطة على بعد 3 cm على الأقل من كل رأس من رؤوس المكعب .

الحل :



النقاط التي تكون أقرب بمقدار 3 cm عن كل رأس من رؤوس المكعب هي النقاط الواقعـــة داخل ثمن كرة مركزها هذا الرأس ونصف قطرها 3 cm وحيث أنه يوجد للمكعب ثمانيـــة رؤوس وبفرض أن الحدث A هو أن تكون النقطـــة على بعد 3 cm على الأقل من كـــل رأس من رؤوس المكعب ، إذن الحدث A يمثله مجسم المكعب مطروح منه مجسم الكرة الـــتي نصف قطرها 3 cm وفضاء العينة S يمثله مجسم المكعب بالكامل والمقياس الهندسي المحـدود في هذه الحالة هو الحجم ، أي أن m (S) يمثـــل حجـــم المكعـــب وأيضـــا m (A) يمثل حجم المكعب مطروحا منه حجم الكرة . إذن الاحتمال p أن تكون النقطـــــة علـــى بعد 3 cm على الأقل من كل رأس من رؤوس المكعب يكون

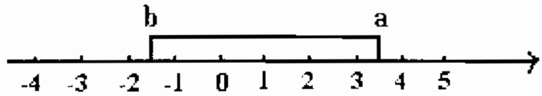
$$p = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{(20)^3 - \frac{4}{3}\pi\,(3)^3}{(20)^3} = \frac{8000 - 36\,\pi}{8000}$$

مثـــال ٦٤ :

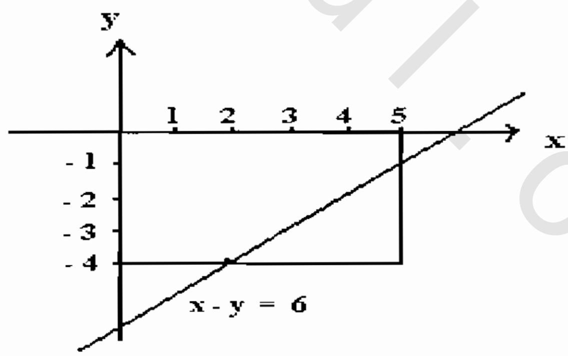
اختيرت نقطتان a , b عشوائيا على خط الأعداد بحيث أن $0 \le a \le 5 \ , \ -4 \le b \le 0$

أوجد احتمال أن تكون المسافة بين النقطتين أقل من 6 cm .

الحل : يتم اختيار النقطتان a , b على خط الأعداد كما هو موضح بالرسم



ويتكون فضاء العينة S في هذه الحالة من الأزواج المرتبة (a,b) الواقعة في المنطقة المستطيلة الموضحة بالشكل وبفرض أن الحدث A هو أن تكون المسافة بين النقطتين أقل مـــن 6 cm فإن الحدث A يمثله مجموعة النقاط (a,b) من فضاء العينة S والـــتي تحقـــق الشـــرط $a - b < 6$ أي أن الحدث A هو المنطقة المظللة بالشكل والواقعة فوق الخـــط المســـتقيم $x - y = 6$ والمقياس الهندسي المحدود في هذه الحالة هو المساحة ، أي أن $m(S)$ يمثـل مساحة المستطيل S وأيضا $m(A)$ يمثل مساحة المنطقة المظللة الـــتي تمثـل الحـــدث A وبالتالي $m(A)$ يمثل مساحة المستطيل مطروح منها مساحة المثلث القائم الزاويـــة الـــذي طول كل من ضلعي القائمة يساوى 3 كما هو واضح بالرسم من نقـــاط تقـــاطع المســـتقيم بالمستطيل $(5,-1) , (2,-4)$. إذن



$$m(S) = 5 \times 4 = 20 \quad , \quad m(A) = 20 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 20 - 4.5 = 15.5 \quad ,$$

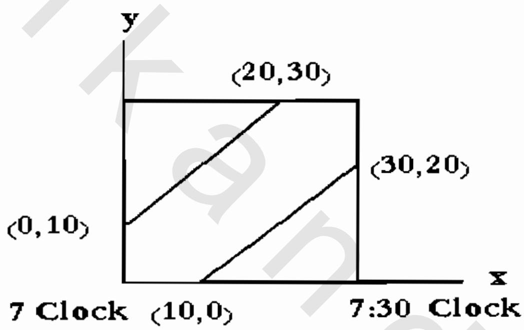
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{15.5}{20} = 0.775$$

مثـــال ٦٥ :

اتفق صديقان على أن يلتقيا في مكان ما بين الساعة السابعة والساعة السابعة والنصف على أن ينتظر الشخص الذي يصل أولا مدة عشرة دقائق فإذا لم يأتي الشخص الآخر يترك الشخص الذي وصل أولا المكان ، فإذا افترضنا أن وقت وصول كل منهما عشوائي فما هو احتمال انهما سوف يلتقيان .

الحل :

حيث أن الصديقان اتفقا على أن يلتقيا بين الساعة السابعة والساعة السابعة والنصف أي في فترة زمنية مقدارها 30 دقيقة لذلك نمثل الوقت الذي سيصل فيه الشخص الأول على محور x والوقت الذي سيصل فيه الشخص الثاني على محور y كما مبين بالشكل



حيث أن الشخص الذي يصل أولا ينتظر مدة عشرة دقائق ، إذن يلتقي الشخصان إذا كان $|x - y| \leq 10$ أي أن الشخصان يلتقيا إذا كانت النقطة (x, y) والتي تمثل وقت وصول كل من الشخصان تقع في الجزء المظلل بالرسم . وبفرض أن الحدث A هو أن الشخصان يلتقيا ، إذن الحدث A يمثله المساحة المظللة بالرسم وفضاء العينة S يمثله المربع والمقياس الهندسي المحدود في هذه الحالة هو المساحة ، أي أن $m(S)$ يمثل مساحة المربع S وأيضا $m(A)$ يمثل مساحة المنطقة المظللة . وحيث أن

$$m(S) = (30)^2 = 900 \quad , \quad m(A) = 900 - 2\times\left(\frac{1}{2}\times 20\times 20\right) = 500$$

إذن احتمال التقاء الشخصان $P(A)$ يكون

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{500}{900} = \frac{5}{9}$$

٥ - اتصال دالة الاحتمال

Continuity of Probability function

نعلم أن الدالة $f : R \to R$ تكون متصلة عند النقطة c على خط الأعداد R إذا كان $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ ويقال أنها متصلة على خط الأعداد R إذا كانت متصلة عند جميع النقاط $c \in R$ ، وكذلك نعلم أن اتصال الدالة f على خط الأعداد R له التعريف المكافئ الآتي :

تعريف ٣ :

الدالة $f : R \to R$ تكون متصلة على خط الأعداد R إذا وفقط إذا كان لكل متتابعة تقاربية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ في R فإن

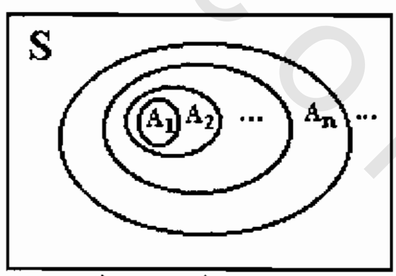
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$$

ودالة الاحتمال $P : \rho(S) \to [0,1]$ تحقق هذه الخاصية ولتوضيح ذلك نحتاج أولاً إلى بعض التعاريف الهامة .

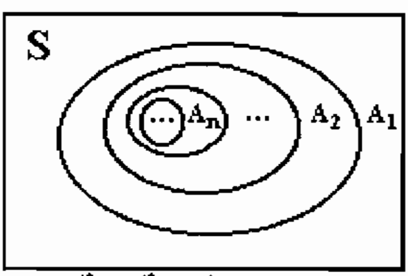
تعريف ٤ :

المتتابعة $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ من الأحداث من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما تسمى متتابعة تزايدية إذا كان $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \dots$ أي أن $A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall \quad n \geq 1$ وتسمى متتابعة تناقصية إذا كان $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \dots$ أي أن

$$A_n \supseteq A_{n+1} \quad \forall \quad n \geq 1$$



متتابعة تزايدية



متتابعة تناقصية

تعريف ٥ :

للمتتابعة التزايدية من الأحداث $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}$ فإن الرمز $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ يمثل وقوع واحد على الأقل من الأحداث $A_i \; , \; i \ge 1$ أي أن

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ وبالمثل للمتتابعة التناقصية من الأحداث $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}$

فإن الرمز $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ يمثل وقوع كل الأحداث $A_i \; \forall \; i \ge 1$ أي أن

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \; .$$

والنظرية الآتية توضح لنا أن دالة الاحتمال تحقق خاصية الاتصال .

نظرية ١٠ :

لأي متتابعة من الأحداث $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}$ تزايدية أو تناقصية فإن

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

البرهان:

الحالة الأولى : متتابعة الأحداث $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}$ تزايدية

في هذه الحالة نفرض المتتابعة $\{ B_n \}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة كالآتي

$$B_1 = A_1 \; , B_2 = A_2 - A_1 \; , B_3 = A_3 - A_2 \; , \; \ldots \; , \; B_n = A_n - A_{n-1}$$

إذن $\{ B_n \}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة من الأحداث المتنافية مثنى مثنى وتحقق

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n \qquad , \qquad n=1,2,3, \ldots$$

إذن $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ وباستخدام مسلمة الاحتمال الثالثة

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

وهذا يثبت النظرية في حالة المتتابعة التزايدية .

الحالة الثانية : متتابعة الأحداث $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ تناقصية

في هذه الحالة

$$A_n \supseteq A_{n+1} \quad , \quad \forall \quad n \geq 1$$

أي أن

$$A'_n \subseteq A'_{n+1} \quad , \quad \forall \quad n \geq 1$$

إذن المتتابعة $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ تزايدية وبالتالي

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 - P((\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)')$$

$$= 1 - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i) = 1 - P(\lim_{n\to\infty} A'_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A'_n)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) = 1 - 1 + \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

وهذا يُثبت النظرية في حالة المتتابعة التناقصية .

مثـــال ٦٦ :

نفرض $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة متزايدة من الأحداث بحيث أن $P(A_n) = e^{-\frac{2n^2+7}{6n^2}}$

أوجد $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A'_i)$.

الحل :

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A'_i) = P((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)') = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

$$= 1 - P(\lim_{n\to\infty} A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2n^2+7}{6n^2}} = 1 - e^{-\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+7}{6n^2}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{3}}$$

٦ - الاحتمالات 0 و 1   Probabilities 0 and 1

الأحداث ذات الاحتمالات 0 و 1 يجب ألا تسبب لنا أي سوء فهم ، فإذا كان A حدث بحيث أن $P(A) = 0$ فإنه من الخطأ القول أن الحدث A هو حدث مستحيل $A = \Phi$ وكذلك إذا كان B حدث بحيث أن $P(B) = 1$ فإنه من الخطأ القول أن الحدث B هو فضاء العينة $B = S$ ، وفي الحقيقة هناك تجارب عشوائية بها عدد لا نهائي من الأحداث المختلفة وكل منها احتماله يساوى 0 وكذلك هناك تجارب عشوائية بها عدد لا نهائي من الأحداث المختلفة وكل منها احتماله يساوى 1 والمثال التوضيحي لذلك هو تجربة اختيار نقطة عشوائيا من داخل الفترة المفتوحة $(0,1)$ ومن المعلوم أن كل نقطة في الفترة $(0,1)$ لها تمثيل عشري بالصورة $0.d_1d_2d_3\ldots$ حيث $0 \le d_i \le 9$ وبالتالي فإن هذه التجربة العشوائية تكافئ اختيار عدد لا نهائي من الخانات العشرية بطريقة عشوائية ، وقد يكون عدد الخانات منتهى وهذا يحدث في حالة أن جميع الخانات تكون أصفار من بعد خانة عشرية معينة فمثلا لحساب احتمال الحدث E والذي يعنى اختيار العدد $\frac{1}{3}$ من الفترة $(0,1)$ وبمعنى آخر لحساب احتمال اختيار العدد $0.3333333\ldots$ نفرض متتابعة الأحداث $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث A_n هو الحدث اختيار n من الخانات العشرية كل منها 3 أي أن A_1 هو الحدث اختيار العدد 0.3 ، والحدث A_2 هو اختيار العدد 0.33 ، A_3 هو الحدث اختيار العدد 0.333 وهكذا A_n هو الحدث اختيار العدد $0.3333\ldots33$ والذي يحتوى على n من الخانات العشرية . وحيث أن وقوع الحدث A_n يضمن وقوع الحدث A_{n+1} إذن $\ldots \supset A_{n+1} \supset A_n \supset \ldots \supset A_2 \supset A_1$ وحيث انه يوجد عشرة من الاختيارات لملأ الخانة العشرية الأولى وهى أرقام العد $0,1,2,\ldots,9$ ونريد أن نملأ الخانة الأولى بالرقم 3 فقط ، إذن $P(A_1) = \frac{1}{10}$ وحيث انه يوجد 100 من الاختيارات لملأ الخانة العشرية الأولى والثانية وهى $00,01,02,\ldots,99$ ونريد أن نملأ الخانة الأولى والثانية بالرقم 3 فقط ، إذن $P(A_2) = \frac{1}{100}$ وبالمثل يوجد 1000 من الاختيارات لملأ الخانة العشرية الأولى والثانية والثالثة وهى $000, 001, 002, \ldots, 999$ ونريد أن نملأ الخانة الأولى والثانية والثالثة بالرقم 3 ، إذن $P(A_3) = \frac{\ }{(10)^3}$ وبوجه عام نحصل على

وحيث أن $P(A_n) = \frac{1}{(10)^n} \quad \forall\, n \geq 1$ ، $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = 0.3333333333... = \frac{1}{3}$

إذن احتمال الحدث E الذي يمثل اختيار العدد $\frac{1}{3}$ يكون

$$P(E) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(10)^n} = 0$$

إذن احتمال اختيار العدد $\frac{1}{3}$ من الفترة $(0,1)$ يساوى صفر . ونلاحظ أن ما حدث مع العدد $\frac{1}{3}$ يحدث بالمثل لأي عدد $0.d_1d_2d_3 \; ...$ في الفترة $(0,1)$ حيث $0 \leq d_i \leq 9$ وايضاً يحدث بالمثل لأي عدد في أي فترة (a,b) وبالتالي نصل إلى النتيجة الهامة الآتية :

احتمال اختيار أي نقطة بطريقة عشوائية من داخل الفترة (a,b) يساوى صفر .

وبالتالي يمكننا القول انه لأي حدث احتماله صفر فأنه ليس من الضروري أن يكون هو الحدث المستحيل Φ وبالمثل لأي حدث احتماله 1 فأنه ليس من الضروري أن يكون هو فضاء العينة S للتجربة ، فمثلا في تجربة اختيار نقطة من الفترة $(0,1)$ بأخذ الأحداث

$$B_t = (0,1) - \{t\} \quad \forall\, t \in (0,1)$$

وحيث أن لكل $t \in (0,1)$ فإن $P(\{t\}) = 0$ إذن يوجد عدد لا نهائي من الأحداث المختلفة $\{t\}$ واحتمال كل منها يساوى 0 وفى نفس الوقت أيا منها لا يمثل Φ وكذلك

$$P(B_t) = P(\{t\}') = 1 - P(\{t\}) = 1 - 0 = 1$$

أي أنه يوجد عدد لا نهائي من الأحداث المختلفة B_t واحتمال كل منها يساوى 1 وف نفس الوقت أيا منها لا يمثل فضاء العينة .

مثال ٦٧ :

اختيرت نقطة عشوائيا من الفترة $(0,100)$ أوجد احتمال أن تكون عدد صحيح .

الحل : حيث أن احتمال اختيار أي نقطة بطريقة عشوائية من داخل الفترة $(0,100)$ يساوى صفر ، إذن احتمال أن تكون النقطة تمثل عددا صحيحا يساوى صفر ايضا .

٧ - الاختيار العشوائي لنقاط من الفترات

Random Selection of Points from Intervals

في البند السابق وضحنا أن احتمال اختيار أي نقطة بطريقة عشوائية من داخل الفترة (a, b) يساوى صفر ، وبالتالي إذا كان $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$ فإن الأحداث التي تمثل اختيار نقطة عشوائيا واقعة في أيا من الفترات $[\alpha,\beta], (\alpha,\beta), [\alpha,\beta), (\alpha,\beta]$ يكون جميعها متساوية الفرصة في الاحتمال وذلك لأن وجود أو عدم وجود نقاط الأطراف في الفترات لن يؤثر في قيمة الاحتمال ، والآن حيث أن النقطة $\frac{a+b}{2}$ هي منتصف الفترة (a, b) ، إذن في تجربة اختيار نقطة عشوائيا من داخل الفترة (a, b) فإن الاحتمال p_1 للحدث الذي يمثل وقوع النقطة في الفترة $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ يساوى الاحتمال p_2 للحدث الذي يمثل وقوع النقطة في الفترة $\left[\frac{a+b}{2}, b\right)$ أي أن $p_1 = p_2$ ، وحيث أن الحدثان متنافيان واتحادهما هو الفترة (a, b) والتي تمثل فضاء العينة للتجربة ، إذن $p_1 + p_2 = 1$ وبالتالي نحصل على $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. أي أنه في تجربة اختيار نقطة عشوائيا من الفترة (a, b) فإن احتمال أن تقع هذه النقطة في الفترة الجزئية $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ يساوى احتمال وقوع النقطة في الفترة الجزئية $\left[\frac{a+b}{2}, b\right)$ وكل منهم يساوى $\frac{1}{2}$ ونلاحظ أن طول كل من هذه الفترات الجزئية يساوى نصف طول الفترة (a, b) وبالمثل إذا قسمنا الفترة (a, b) إلى ثلاث فترات جزئية متساوية بواسطة النقاط $\frac{a+2b}{3}$, $\frac{2a+b}{3}$ فإن $p_1 = p_2 = p_3$ حيث p_1, p_2, p_3 هي احتمالات أن النقطة التي تم اختيارها تقع في الفترة الجزئية $\left[\frac{a+2b}{3}, b\right)$ ، $\left[\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}\right)$ ، $\left(a, \frac{2a+b}{3}\right)$ على الترتيب ، وهذه الأحداث متنافية مثنى مثنى واتحادها هو الفترة (a, b) ، إذن $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ وبالتالي نحصل على $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ ونلاحظ أن طول كل من الفترات الجزئية يساوى ثلث طول الفترة (a, b) وبوجه عام يمكننا صياغة النتيجة الآتية :

> في تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية من الفترة (a , b) فإن الفترات الجزئية والمتساوية الطول من الفترة (a , b) يكون فرصة وقوع النقطة في أيا منها متساوي وإذا كانت (α,β) فترة جزئية من (a , b) فإن احتمال وقوع النقطة في الفترة الجزئية (α,β) يساوى $\frac{\beta - \alpha}{b - a}$.

وهذه النتيجة سبق وان تعاملنا معها بدون أن نوضحها عندما تعاملنا مع مقياس الطول ف فضاء الاحتمال اللانهائي الغير قابل للعد في البند ٤ من هذا الفصل ، وكما وضحنا الآن فإن اختيار نقطة بطريقة عشوائية من فترة يكافئ اختيار عدد لا نهائي من الخانات العشرية وهذا أن كان يجوز من الوجهة النظرية لكنه مستحيل من الوجهة العملية ، ولكننا سوف نتفق على انه عند الحديث عن تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية من الفترة (a,b) فإننا سوف نتخيل كما لو أن هناك صندوق كبير يحتوى على عدد لانهائي من الكرات المتميزة وكل من هذه الكرات يحمل رقم مأخوذ من الفترة (a,b) ثم قمنا بخلط الكرات معا وبالتالي كل من هذه الكرات والتي هي في حقيقة أمرها أعداد من الفترة (a,b) يكون لها نفس الفرصة في السحب وعلى ذلك فإن تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية من الفترة (a,b) أصبحت تكافئ تجربة سحب كرة من هذا الصندوق ثم النظر إلى العدد الذي تحمله هذه الكرة المسحوبة.

مثال ٦٨ :

تصل حافلة (أتوبيس) إلى أحد المحطات كل يوم في وقت عشوائي بين الساعة الواحدة والساعة الواحدة والنصف ظهرا ، إذا وصل شخص إلى المحطة الساعة الواحدة ظهرا تماما فأوجد احتمال أن هذا الشخص سوف يضطر إلى الانتظار على الأقل 10 دقائق .

الحل :فضاء العينة هو الفترة الزمنية من الساعة 1:00 إلى الساعة 1:30 ومدها 30 دقيقة والحدث أن هذا الشخص سوف يضطر إلى الانتظار على الأقل 10 دقائق يعني أن الحافلة يمكن أن تصل إلى المحطة بعد مرور عشرة دقائق أي في الفترة الزمنية من الساعة 1:10 إلى الساعة 1:30 ومدها 20 دقيقة . إذن الاحتمال المطلوب p يكون $p = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

الفصل
3

تمارين

١ –ألقى حجر نرد 200 مرة ، والجدول الآتي يوضح تكرار ظهور كل من الأعداد الستة في فضاء العينة

العدد	1	2	3	4	5	6
التكرار	25	37	39	37	32	30

أوجد التكرار النسبي للحدث

١ – ظهور العدد 3 .

٢ – ظهور العدد 6 .

٣ – ظهور عدد زوجي .

٤ – ظهور عدد أولى .

٥ – ظهور عدد أقل من 4 .

٦ – ظهور عدد أكبر من 3 .

٢ – إذا كان احتمال ان يتخرج أحد الطلاب من الكلية بتقدير امتياز أو بتقدير جيد جدا يساوى 0.82 وإذا كان احتمال ان يتخرج هذا الطالب بتقدير جيد جدا يساوى 0.6 فأوجد احتمال أن يتخرج هذا الطالب بتقدير امتياز .

٣ – إذا كان احتمال ان يلتحق أحد الطلاب المتفوقين بكلية الطب أو كلية الصيدلة بجامعة عين شمس يساوى 0.95 وإذا كان احتمال ان يلتحق هذا الطالب بكلية الصيدلة 0.52 فأوجد احتمال أن يلتحق هذا الطالب بكلية الطب .

٤ – نفرض أن A , B حدثان بحيث أن $P(A)=\frac{3}{8}$, $P(B)=k$, $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$

أوجد قيمة الثابت k في حالة أن A , B حدثان متنافيان .

٥ – إذا كان A , B حدثان متنافيان وكان $P(A)=0.55$, $P(B)=0.35$ أوجد

1 - $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ 3 - $P(A'\cap B')$, $P(A'\cup B')$

2 - $P(A')$, $P(B')$ 4 - $P(A\cap B')$, $P(A\cup B')$

٦ – أحد شركات التامين على الحياة تصدر ثلاث وثائق مختلفة للتامين A , B , C ويحق لأي شخص أن يختار نوع واحد فقط من الثلاث وثائق للتامين على حياته . تم اختيار شخص بطريقة عشوائية من عملاء الشركة الذين تم التامين على حياقم فإذا كان احتمال أن هذا الشخص يتبع الوثيقة A هو 0.45 واحتمال أن يتبع الوثيقة B هو 0.4 أوجد احتمال أن هذا الشخص يتبع الوثيقة C .

٧ – أوجد احتمال ظهور الصورة في تجربة إلقاء عملة معدنية غير متزنة إذا علمت أن أرجحية ظهور الصورة هي النسبة $3 : 5$.

٨ – أوجد احتمال فوز أحد المتسابقين في سباق للسيارات إذا كانت أرجحيته هي 5 إلى 12.

٩– احتمال أن ينجح طالب في مقرر الرياضيات هو 0.92 واحتمال أن ينجح في مقرر الفيزياء هو 0.87 واحتمال أن ينجح في المقررين معا هو 0.83 فما هو احتمال أن ينجح الطالب في مقرر منهم على الأقل ؟

١٠ – نفرض أن A , B حدثان بحيث أن

$$P(A) = 0.6 \quad , \quad P(B) = 0.35 \quad , \quad P(A \cap B) = 0.2$$

أوجد كل مما يأتي :

1- $P(A \cup B)$ 3- $P(A' \cap B')$, $P(A' \cup B')$

2- $P(A')$, $P(B')$ 4- $P(A \cap B')$, $P(A \cup B')$

١١– إذا كان A , B حدثان بحيث أن $A \subset B$ وكان $P(A) = 0.55 , P(B) = 0.85$

فأوجد ما يأتي :

1- $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ 3- $P(A' \cap B')$, $P(A' \cup B')$

2- $P(A')$, $P(B')$ 4- $P(A \cap B')$, $P(A \cup B')$

١٢– إذا كان 12% من سكان أحد المدن لهم فصيلة الدم O^+ وكان 5% لهم فصيلة الدم O^- اخترنا أحد سكان هذه المدينة بطريقة عشوائية . أوجد احتمال أن تكون فصيلة دمه O .

١٣– في أحد المدن يوجد ثلاثة أندية اجتماعية A, B, C . تم اختيار شخص بطريقة عشوائية ، فإذا كان احتمال أن هذا الشخص مشترك في النادي A هو 0.35 واحتمال أن يكون مشترك في النادي B هو 0.55 واحتمال أن يكون مشترك في النادي C هو 0.3 واحتمال أن يكون مشترك فى كل من A , B هو 0.25 واحتمال أن يكون مشترك في كل من A , C هو 0.2 واحتمال أن يكون مشترك ف كل من B , C هو 0.15 واحتمال أن يكون مشترك في ألاندية الثلاثة هو 0.1

أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١– الحدث أن هذا الشخص مشترك في نادي واحد على الأقل .

٢– الحدث أن هذا الشخص غير مشترك في أيا من ألاندية الثلاثة.

١٤– نفرض أن فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما هو فضاء منتهى $S = \{a,b,c,d\}$ وضح أيا من الدوال الآتية تعرف فضاء احتمال على فضاء العينة S .

1 - $P(a)=\frac{2}{5}$, $P(b)=\frac{1}{3}$, $P(c)=\frac{1}{4}$, $P(d)=\frac{1}{5}$

2 - $P(a)=\frac{1}{4}$, $P(b)=\frac{1}{3}$, $P(c)=\frac{-1}{3}$, $P(d)=\frac{3}{4}$

3 - $P(a)=\frac{1}{4}$, $P(b)=0$, $P(c)=\frac{1}{4}$, $P(d)=\frac{1}{2}$

4 - $P(a)=\frac{1}{12}$, $P(b)=\frac{1}{3}$, $P(c)=\frac{1}{6}$, $P(d)=\frac{5}{12}$

5 - $P(a)=\frac{1}{12}$, $P(b)=\frac{1}{4}$, $P(c)=\frac{1}{6}$, $P(d)=\frac{5}{12}$

١٥– نفرض أن (S , P) فضاء احتمال حيث $S = \{a,b,c,d\}$

١ – أوجد $P(a)$ إذا كان $P(d)=0.125$, $P(c)=0.25$, $P(b)=0.3$.

٢ – أوجد $P(a) , P(b)$ إذا كان $P(a)=2P(b)$, $P(c)= P(d)=0.25$.

٣ – أوجد $P(a)$ إذا كان $P(b)=0.3$, $P(b,d)=0.5$, $P(b,c)=0.65$.

٤ – أوجد $P(a)$ إذا كان $P(b,c,d)=0.85$.

٥ – أوجد احتمال كل من عناصر S إذا كان $P(a)=2P(b)=3P(c)=4P(d)$.

١٦–في أحد المستشفيات وجد أن عدد المرضى فى أحد الأيام والذين يترددون على عيادة الأسنان أربعة أمثال الذين يترددون على عيادة الباطنة وضعف الذين يترددون على عيادة العيون وعدد المرضى الذين يترددون على عيادة العيون سبعة أمثال الذين يترددون على عيادة مرضى السكر . تم اختيار أحد المرضى فى هذا اليوم بطريقة عشوائية ، وبفوض أن أيا من المرضى فى هذا اليوم يذهب إلى عيادة واحدة فقط من هذه العيادات الأربعة ، أوجد احتمال أن يكون هذا الشخص فى هذا اليوم

١ – لم يذهب إلى عيادة الباطنة .

٢– ذهب إلى عيادة الأسنان أو عيادة العيون .

١٧– يتسابق ثلاثة أشخاص A , B , C في سباق للسيارات ، فإذا كان احتمال فوز A هو ثلاثة أمثال احتمال فوز B واحتمال فوز B هو نصف احتمال فوز C فأوجد

١ – احتمال فوز كل شخص من الأشخاص الثلاثة .

٢ – احتمال فوز A أو C .

٣ – احتمال عدم فوز C .

١٨– في أحد المدن الصغيرة وجد أن عدد الأشخاص من فصيلة الدم A يساوى عدد الأشخاص من فصيلة الدم B وعدد الأشخاص من فصيلة الدم AB أربعة أمثال عدد الأشخاص من فصيلة الدم O وعدد الأشخاص من فصيلة الدم B سبعة أمثال عدد الأشخاص من فصيلة الدم O . أوجد احتمال أن المولود القادم في هذه المدينة يكون له فصيلة الدم AB .

١٩– تقدم أربعة أشخاص إلى مسابقة لشغل وظيفة واحدة في أحد الشركات وكان الشخص الأول والثالث لهم نفس الفرصة لشغل الوظيفة بينما كانت فرصة الشخص الثاني للفوز بالوظيفة تزيد عن فرصة الرابع بنسبة 30% وتقل عن فرصة الثالث بمقدار 5% أوجد احتمال الفوز بالوظيفة لكل من الأشخاص الأربعة علما بأنه سيتم اختيار شخص منهم للوظيفة . أوجد كذلك احتمال عدم فوز الشخص الرابع بالوظيفة .

٢٠– عينة عشوائية تتكون من n عنصر تم اختيارها بدون إرجاع من مجتمع بـه N من العناصر . أوجد احتمال أن عنصر معين من المجتمع يكون موجود في العينة .

٢١– مجموعة من 33 طالب بالكلية حصل 17 طالب منهم على تقدير جيد في الفصل الدراسي الأول وحصل 14 منهم على تقدير جيد في الفصل الدراسي الثاني وعدد 11 طالب منهم لم يحصل على تقدير جيد سواء في الفصل الأول أو الفصل الثاني . اخترنا طالب بطريقة عشوائية من هذه المجموعة ، أوجد احتمال أن هذا الطالب حصل على تقدير جيد في كل من الفصلين الدراسيين .

٢٢–أجري امتحانان للرياضيات على 400 طالب فنجح في الامتحان الأول 330 طالبا ونجح في الامتحان الثاني 310 طالبا ونجح في الامتحانين معا 290 طالبا .

١–أوجد احتمال ونسبة النجاح في الامتحان الأول وفي الامتحان الثاني وكذلك في الامتحانين معا .

٢– أوجد احتمال ونسبة النجاح في امتحان واحد على الأقل .

٢٣– سحبت ورقة بطريقة عشوائية تتكون من بين 60 ورقة مرقمة من 1 إلى 60 . أوجد احتمال أن يكون العدد المسحوب لا يقبل القسمة على 5 .

٢٤– سحبت كرة عشوائيا من كيس يحتوى على n من الكرات مرقمة من 1 إلى n حيث $n>6$ ، أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة تحمل رقم أقل من 6 .

٢٥–في تجربة إلقاء حجر نرد متزن مرة واحدة فقط فإذا كان الحدث A هو ظهور عدد فردى ، الحدث B هو ظهور عدد أكبر من 3 والحدث C هو ظهور عدد يقبل القسمة على 3 أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

$$A' \quad , \quad B' \quad , \quad A-B \quad , \quad B\cap C$$
$$A\cap B \quad , \quad A\cap C \quad , \quad B\cap C' \quad , \quad A\cap C'$$

٢٦- في تجربة إلقاء حجر نرد غير متزن إذا كان احتمال ظهور أي رقم يتناسب مع هذا الرقم وإذا كان الحدث A هو ظهور عدد فردى ، الحدث B هو ظهور عدد زوجي والحدث C هو ظهور عدد أولى (أي لا يقبل القسمة ألا على نفسه وعلى 1)

١ - أوجد $P(A), P(B), P(C)$.

٢ - أوجد احتمال ظهور عدد زوجي أو ظهور عدد أولى .

٣ - أوجد احتمال ظهور عدد فردى أو ظهور عدد أولى .

٤ - أوجد احتمال ظهور عدد زوجي وليس أولى .

٢٧- في تجربة إلقاء حجر نرد متزن مرتين على التوالي أوجد

١ - احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين في الرميتين يساوي 8 .

٢ - احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين في الرميتين أكبر من 7 .

٣ - احتمال أن يكون الفرق المطلق بين العددين في الرميتين يساوى 4 .

٤ - احتمال أن يكون الفرق المطلق بين العددين في الرميتين اكبر من 5 .

٢٨-في تجربة إلقاء حجر نرد متزن 6 مرات على التوالي أوجد ما يأتي

١- احتمال الحصول على العدد 5 مرتين على الأقل .

٢ - احتمال عدم ظهور وجهين متتاليين ومن نفس النوع .

٣ - احتمال الحصول على ستة أعداد مختلفة .

٢٩- في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين ومتميزين إذا كان الحدث A هو ظهور الرقمين 4 , 6 على وجهي حجري النرد والحدث B هو ظهور الرقمين 3 , 5 على وجهي حجري النرد فأوجد $P(A'\cap B')$, $P(A\cup B)$, $P(A\cap B)$.

٣٠-القي حجري نرد متزنين ومتميزين أوجد احتمال كل مما يأتي

١ - ظهور رقمين زوجيين .

٢ - ظهور رقمين متساويين .

٣ - ظهور رقم زوجي وآخر فردى .

٤ - ظهور الرقم 5 مع عدد زوجي .

ثم أوجد احتمال كل من هذه الأحداث إذا كان حجري النرد متزنين ومتماثلين .

٣١– في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين ومتميزين اعتقد أحد الأشخاص أن احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين يساوى 7 هو نفسه احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين يساوى 8 . هل تتفق مع هذا الشخص في اعتقاده ؟ وضح أجابتك .وإذا علمت أن حجري النرد متزنين ومتماثلين هل ما زلت على رأيك السابق ؟ ولماذا ؟

٣٢– في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية متزنة 4 مرات على التوالي لملاحظة ظهور الصورة ، إذا كان الحدث A هو ظهور الصورة 3 مرات على الأقل ، الحدث B هو ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر والحدث C هو ظهور الصورة مرتين بالضبط أوجد

$$P(A \cap B) \;,\quad P(B \cap C) \;,\quad P(A') \;,$$
$$P(B') \;,\quad P(A - B) \;,\quad P(B - C)$$

٣٣– في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية غير متزنة 4 مرات متتالية ، فإذا علمت أن احتمال ظهور الصورة 0.6 فأوجد احتمال ظهور الصورة مرتين على الأقل .

٣٤– نفرض أن A , B حدثان من فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما . أثبت أن

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

٣٥–في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات على التوالي أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث A_1 ظهور الصورة مرتين على الأقل .
٢ – الحدث A_2 ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل .
٣ – الحدث A_3 ظهور الصورة مرة واحدة على الأكثر .
٤ – الحدث A_4 ظهور الصورة في الرمية الثانية .
٥ – الحدث A_5 عدم ظهور الصورة على الإطلاق .

٣٦–اختير عدد بطريقة عشوائية من مجموعة الأعداد $\{1, 2, 3, \ldots, 84\}$ أوجد احتمال أن هذا العدد مع العدد 84 يكونا عددين أوليين بالنسبة إلى بعضهما .

٣٧-في تجربة إلقاء حجر نرد متزن مرتين على التوالي أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث A_1 ظهور العدد 6 في الرمية الثانية .

٢ – الحدث A_2 مجموع العددين الظاهرين اكبر من 7 .

٣ – الحدث A_3 مجموع العددين الظاهرين يقبل القسمة على 3 .

٤ – الحدث A_4 ظهور عدد في الرمية الأولى اكبر من الذي يظهر في الرمية الثانية .

٥ – الحدث A_5 عدم ظهور العدد 6 في الرميتين .

٦ – الحدث أن مجموع العددين الظاهرين اكبر من 7 ويقبل القسمة على 3.

٣٨-للعائلات التي لديها ثلاثة أطفال و مع مراعاة الترتيب في الولادة أوجد احتمال كل من

١-وجود بنت واحدة على الأقل في العائلة .　　٣- عدم وجود ولد في العائلة .

٢-وجود بنت واحدة على الأكثر في العائلة .　　٤- المولود الثاني ولد .

٣٩- للعائلات التي لديها طفلان ومع مراعاة ترتيب الولادة أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث A_1 يعنى عدم وجود بنت للعائلة .

٢ – الحدث A_2 يعنى وجود ولد واحد على الأكثر في العائلة .

٣ – الحدث A_3 يعنى وجود بنت واحدة على الأكثر في العائلة .

٤ – الحدث A_4 يعنى وجود ولد وبنت في العائلة .

٥ – الحدث A_5 يعنى أن المولود الثاني ولد .

٦ – الحدث A_6 يعنى وجود ولد وبنت في العائلة والمولود الثاني ولد .

٤٠- في مجتمع ما كان احتمال أن يكون المولود ذكرا ضعف احتمال أن يكون المولود أنثى وبفرض انه تم تسجيل ثلاث حالات ولادة أوجد الاحتمالات الآتية :

١ – أن تكون الحالات الثلاث جميعها من الذكور .

٢- أن يكون اثنان من الذكور والثالث أنثى .

٣ – أن يكون مولود واحد على الأقل من الذكور .

٤١– عرف فضاء العينة لتجربة سحب ثلاث قطع نقود معا من كيس يحتوى على عدد 4 قطع نقود من فئة 50 قرش ، عدد 3 قطع نقود من فئة 25 قرش ، 2 قطعة من فئة 20 قرش ، 5 قطع من فئة 10 قروش وقطعة واحدة من فئة 5 قروش ، ثم أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 70 قرش بالضبط .

٢ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 70 قرش .

٣ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب أكبر من 60 قرش وأقل من 150 قرش .

٤ – أن يكون جملة المبلغ المسحوب 50 قرش على الأكثر .

٤٢–نفرض مجموعة الأعداد الصحيحة { 100000 , ... , 3 , 2 , 1 } فإذا تم اختيار عدد بطريقة عشوائية من هذه المجموعة فأوجد احتمال أن يكون هذا العدد

١ – من خمسة خانات .

٢ – يقبل القسمة على 3 .

٣ – لا يقبل القسمة على 5 .

٤– يقبل القسمة على كل من 3 و 5 .

٥– لا يقبل القسمة على كل من 3 و 5 .

٦– يقبل القسمة على 4 ولا يقبل القسمة على 6 .

٤٣–قاعة للاجتماعات لها أربعة أبواب مختلفة . دخل أحد الأشخاص من أحد أبواب القاعة لحضور اجتماع ما . أوجد احتمال خروجه من باب أخر غير الذي دخل منه .

٤٤– خمسة طرق مزدوجة تؤدى إلى تقاطع (دوران) في أحد المدن ، دخل سائق بسيارته من أحد الطرق إلى الدوران ، أوجد احتمال أن السائق دخل الدوران لكي يعكس اتجاهه في الطريق الذي دخل منه .

٤٥– تحرك مصعد في أحد العمارات من الطابق الأرضي وبه 6 أشخاص وكان المصعد يتوقف في كل من الطوابق العشرة المتبقية وبفرض أن خروج أيا من الأشخاص إلى أيا من الطوابق العشرة متساوي الفرصة فأوجد ما يأتي :

١ – احتمال عدم نزول اثنين من الأشخاص في نفس الطابق .

٢ – احتمال نزول اثنين من الأشخاص على الأقل في نفس الطابق .

٣ – احتمال نزول الأشخاص الستة في طوابق مختلفة .

٤٦- في مصعد أحد العمارات ركب ثلاثة أشخاص ، فإذا كان المصعد يتوقف في الطابق الثاني والثالث والرابع وبفرض أن خروج أيا من الأشخاص إلى أيا من الطوابق الثلاث متساوي الفرصة فأوجد ما يأتي :

١ - احتمال أن الأشخاص الثلاثة يتركون المصعد فى طوابق مختلفة .

٢ - احتمال أن الأشخاص الثلاثة يتركون المصعد فى نفس الطابق .

٣- احتمال أن أحد الأشخاص على الأقل يصعد إلى الطابق الرابع .

٤- احتمال أن المصعد يكون بدون ركاب عند وصوله الطابق الثالث .

٥- احتمال أن المصعد يكون بدون ركاب عند وصوله الطابق الرابع .

٤٧- سيارة أجرة تتبع أحد شركات السياحة تحمل الركاب من مطار القاهرة الدولي إلى ثلاثة فنادق مختلفة ، فإذا علمت أن السيارة غادرت المطار وبها عدد 4 من السياح .

أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ - الحدث أن السياح يترلون في نفس الفندق .

٢ - الحدث أن السياح يترلون في فندقين مختلفين .

٣ - الحدث أن السياح يترلون في الفنادق الثلاثة .

٤٨-كون الشجرة البيانية لاستنتاج فضاء العينة الذي يوضح جميع الترتيبات الممكنة من الأولاد والبنات في عائلة لديها أربعة أطفال وأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١- وجود بنت واحدة على الأقل في العائلة .　　٣- وجود ولدان في العائلة .

٢- وجود بنت واحدة على الأكثر في العائلة .　　٤- المولود الرابع ولد .

٤٩- في مباراة للتنس بين لاعبين A , B يفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بثلاثة أشواط على طول المباراة . ما هو احتمال أن تنتهي المباراة بعد أربعة أشواط ؟

٥٠- في مباراة للشطرنج Chess بين لاعبين يفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بشوطين متتاليين أو يفوز بثلاثة أشواط على طول المباراة . ما هو احتمال أن تنتهي المباراة بعد خمسة أشواط ؟

٥١- يلعب فريقان مباراة ما ويعتبر الفريق فائزا إذا فاز في شوطين على التوالي أو أربعة أشواط في كل المباراة ، ما هو احتمال أن تنتهي المباراة بعد ستة أشواط ؟

٥٢- كيس يحتوى على أربعة قطع نقود اثنتان عاديتان واثنتان ذات صورتين ، اخترت قطعة من الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة فإن القطعة نفسها تلقى مرة أخرى بينما إذا ظهر وجه الكتابة فأننا نختار قطعة نقود من الثلاث قطع المتبقية بالكيس ثم تلقى . أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

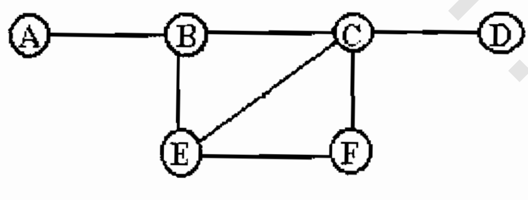
١ – ظهور صورة مرة واحدة على الأكثر . ٢ – ظهور الصورة مرتين .

٥٣- كيس يحتوى على ثلاث قطع نقود اثنتان عاديتان وواحدة ذات صورتين ، اخترت قطعة من الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة نقوم بإلقاء حجر نرد مرة واحدة بينما إذا ظهر وجه الكتابة فأننا نختار قطعة نقود من القطعتين المتبقيتين بالكيس ثم تلقى فإذا ظهر وجه الصورة نقوم بإلقاء حجر نرد مرة واحدة . ارسم شجرة بيانية للتجربة وأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – ظهور عدد زوجي . ٣ – ظهور صورة وعدد زوجي .

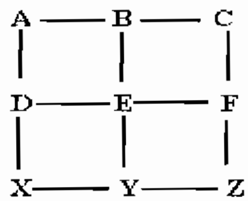
٢ – ظهور عدد يقبل القسمة على 3. ٤ – ظهور كتابة وعدد فردى .

٥٤-النقاط A , B , C , D , E , F في الرسم الآتي تدل على 6 مدن والخطوط تدل على

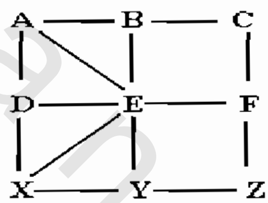


جسور تربط بينها . بدأ رجل من المدينة A رحلة بسيارته للتجول من مدينة إلى أخرى واعتزم التوقف واخذ استراحة إذا لم يمكنه مواصلة التجول بدون أن يعبر نفس الجسر مرتين . أوجد احتمال انه سيتوقف للاستراحة في المدينة B .وإذا علمت بوجود طريق بين المدينتين B , F فهل ستتغير قيمة الاحتمال السابق ؟ وضح أجابتك ؟

٥٥- في الرسم الآتي تسع نقاط A , B , C , D , E , F , X , Y , Z بـــدأ رجـــل في التحرك من النقطة X ويسمح له في كل مرة بالحركة خطوة رأســية أو خطوة أفقية



ويتوقف عن الحركة إذا لم يتمكن من مواصلة السير بدون المرور على نقطة يكون قــد مر بها من قبل . أوجد احتمال أن يمر الرجل بجميع النقاط التسع إذا كــانت الخطــوة الأولى من X إلى D . وإذا كان يوجد طريق بين X , E وطريق بين A , E كمــا موضح بالرسم التالي فأوجد احتمال أن يمر الرجل بجميع النقاط التسعة في هذه الحالــة إذا كانت الخطوة الأولى من X إلى E .



٥٦- في أحد الفنادق الكبرى كان حجز الأجنحة يتم وفقا للاختيار من الثلاث مجموعات الموضحة بالجدول

المجموعة الأولى (الأجنحة)	المجموعة الثانية (عدد الغرف)	المجموعة الثالثة (الطابق)
جناح ممتاز	غرفتين	الطابق الأول
جناح جيد	ثلاث غرف	الطابق الثاني
جناح متوسط		الطابق الثالث

ارسم شجرة بيانية توضح الاختيارات الممكنة وأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ - حجز جناح ممتاز في الطابق الثالث .

٢- حجز جناح من ثلاث غرف بالطابق الأول .

٣ - حجز جناح متوسط .

٤ - حجز جناح من غرفتين .

٥٧– في مجموعة تتكون من 100 طالب وجد أن 20 طالب يدرسون اللغة العربية والرياضيات والعلوم ، 29 طالب يدرسون الرياضيات والعلوم ، 35 طالب يدرسون الرياضيات واللغة العربية ، 26 طالب يدرسون العلوم واللغة العربية ، 8 طلاب يدرسون الرياضيات فقط ، 12 طالب يدرسون العلوم فقط ، 22 طالب يدرسون اللغة العربية فقط . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات .

٢ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات فقط .

٣ – الحدث أن الطالب يدرس الرياضيات والعلوم ولا يدرس اللغة العربية .

٤ – الحدث أن الطالب لا يدرس أيا من المقررات الثلاث .

٥ – الحدث أن الطالب يدرس مقررين بالضبط .

٦ – الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأقل .

٧ – الحدث أن الطالب يدرس مقرر واحد على الأكثر .

٨ – الحدث أن الطالب يدرس مقررين على الأكثر .

٥٨– في عينة من 225 طالب بأحد الكليات تم سؤال كل منهم عن الألعاب التي يلعبونها ، فإذا كان 62 طالب يلعبون كرة القدم ، 53 يلعبون كرة السلة ، 65 يلعبون العاب القوى ، 19 يلعبون كرة القدم وكرة السلة ، 14 يلعبون كرة القدم والعاب القوى ، 21 يلعبون كرة السلة والعاب القوى ، 8 لا يلعبون أيا من الألعاب الثلاث . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – الحدث أن الطالب يلعب كرة القدم فقط .

٢ – الحدث أن الطالب يلعب لعبة واحدة فقط .

٣ – الحدث أن الطالب لا يلعب كرة السلة .

٤ – الحدث أن الطالب يلعب لعبتين فقط ليس من ضمنهم العاب القوى.

٥ – الحدث أن الطالب يلعب لعبتين فقط .

٥٩- في مجموعة من 250 طالب بالكلية وجد أن 230 طالب يدرسون على الأقل واحدة من اللغات الإنجليزية، الفرنسية ،الألمانية ووجد أن 135 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية ، 86 طالب يدرسون اللغة الفرنسية ، 54 طالب يدرسون اللغة الألمانية ، 30 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والفرنسية ، 35 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والألمانية ،15 طالب يدرسون اللغة الفرنسية والألمانية . تم اختيار طالب بطريقة عشوائية من مجموعة الطلاب . أوجد احتمال أن الطالب يدرس الثلاث لغات .

٦٠- في تجربة اختيار عدد عشوائيا من مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1,2,3,\ \dots\ ,500\}$ فإذا كان الحدث A هو اختيار عدد زوجي والحدث B هو اختيار عدد فردى والحدث C هو اختيار عدد يقبل القسمة على 3 والحدث D هو اختيار عدد يقبل القسمة على 5 والحدث E هو اختيار عدد يقبل القسمة على 6 . أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية

1- A, B, C, D, E

2- $A \cup B\ ,\ C \cup E$

3- $A \cap B\ ,\ C \cap D$

4- $A \cap B'\ ,\ C' \cap E'$

٦١- خمسة رجال وزوجاتهم يريدون الجلوس على عشرة مقاعد في صف واحد . أوجد

١ - احتمال أن تجلس النساء متجاورات .

٢ - احتمال أن لا يجلس اثنان من نفس الجنس بجانب بعضهما .

٦٢- بطريقة عشوائية جلس 4 أولاد وبنتان حول منضدة مستطيلة الشكل حيث يوجد 4 كراسي على جانب وأربعة كراسي على الجانب الآخر . أوجد احتمال أن البنتان لن يجلسا على نفس الجانب من المنضدة .

٦٣- ثلاثة أولاد وثلاثة بنات يتجهون إلى صف به ستة مقاعد للجلوس عشوائيا بأي ترتيب

١ - أوجد احتمال أن يجلس الأولاد معا والبنات معا .

٢ - أوجد احتمال أن تجلس البنات معا .

٦٤– يجلس n رجل و m سيدة في صف بطريقة عشوائية . أوجد احتمال أن يجلس الرجال معا والنساء معا .

٦٥– خمسة طلاب بالفرقة الثالثة وخمسة طلاب بالفرقة الرابعة يريدون الجلوس على عشرة مقاعد في صف واحد بقاعة الامتحان أوجد احتمال أن لا يجلس طالبان متجاوران من نفس الفرقة .

٦٦– عند ترتيب حروف كلمة PROBABILITY في صف . أوجد احتمال

١ – الحصول على كلمة تبدأ بالمقطع PROB .

٢ – الحصول على كلمة تنتهي بالمقطع TY .

٣ – الحصول على كلمة تحتوى المقطع BB .

٦٧– أحد الأشخاص لديه 12 قميص و 3 بدله و 9 رابطة عنق و 4 أحذية . فإذا علمت أن 4 قمصان و 1 بدلة و 3 رابطة عنق و 2 حذاء جميعها لونها أسود . تم دعوت هذا الشخص للحضور إلى اجتماع بالزي الكامل . أوجد احتمال أن يرتدي هذا الشخص زي لونه اسود بالكامل .

٦٨– إذا كانت اللوحة المعدنية لرقم السيارة تحتوى على حرفين مختلفين من الحروف الأبجدية الإنجليزية يتبعهما عدد من ستة أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول صفر .تم اختيار لوحة معدنية بطريقة عشوائية ، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – تبدأ اللوحة بالحرف R . ٣ – تحمل اللوحة الحرفين RY

٢ – تحمل اللوحة عدد زوجي . ٤ – تحمل اللوحة عدد يقبل القسمة على 111111.

٦٩– أرقام التليفونات في سنترال مصر الجديدة كل منها يتكون من سبعة أرقام على أن يبدأ بالرقمين 63 ذهب أحد الأشخاص للتعاقد على تركيب خط تليفون للمنزل ، أوجد احتمال كل مما يأتي :

١ – أن يشتمل رقم تليفونه على السنة التي ولد فيها علما بأنه من مواليد 1955 .

٢ – أن يشتمل رقم تليفونه على الرقم 5 مرة واحدة على الأقل .

٧٠- اختير عدد بطريقة عشوائية من مجموعة الأعداد $\{1, 2, 3, \ldots, 1000000\}$ أوجد احتمال أن العدد يحتوى على الرقم 4 مرة واحدة على الأقل ضمن خاناته .

٧١- إذا علمت أن معاملات المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ يتم تحديدها عن طريق إلقاء حجر نرد متزن ثلاث مرات على التوالي والعدد الذي يظهر في الرمية الأولى يمثل المعامل a والعدد الذي يظهر في الرمية الثانية يمثل المعامل b بينما العدد الذي يظهر في الرمية الثالثة يمثل العدد c .

١ – أوجد احتمال أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

٢ – أوجد احتمال أن يكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

٣ – أوجد احتمال أن يكون للمعادلة جذران مركبان .

٧٢- يوجد 10 من النقاط $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ في المستوى بحيث لا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد . اخترنا ثلاثة نقاط منها بطريقة عشوائية ورسمنا ثلاثة مستقيمات تصل بين هذه النقاط الثلاث التي تم اختيارها . أوجد احتمال أن هذه المستقيمات لا تمر بالنقاط B, D, G, H .

٧٣- يوجد n من النقاط في المستوى $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ بحيث لا تقع أي ثلاثة منها على خط مستقيم واحد ، اخترنا ثلاث نقاط منها بطريقة عشوائية ورسمنا مثلث رؤوسه هذه النقاط الثلاث. أوجد احتمال أن (x_1, y_1) أو (x_n, y_n) ضمن رؤوس هذا المثلث .

٧٤- شخص له تسعة أصدقاء ، ويرغب في دعوة أربعة منهم إلى العشاء ، وإذا علمت أن اثنان من أصدقائه متزوجان ولابد أن يحضران معا في حالة دعوة أيا منهما إلى العشاء فأوجد احتمال ألا يكونا ضمن المدعوين . وإذا علمت أن اثنان من أصدقائه متخاصمين فأوجد احتمال أن يجتمعا معا على العشاء ضمن المدعوين .

٧٥- من بين 9 رجال وزوجاتهم تم اختيار شخصين بطريقة عشوائية . أوجد احتمال كل من

١ – اختيار رجل وزوجته .

٢ – اختيار رجل وسيدة ليست زوجته .

٣ – اختيار رجل وسيدة .

٤ – اختيار رجلين أو سيدتين .

٧٦- في أحد المدارس من بين 5 طلاب بالفرقة الأولى ، 10 طلاب بالفرقة الثانية ، 15 طالب بالفرقة الثالثة يراد اختيار لجنة ثقافية بالمدرسة تتكون من 9 طلاب ، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – اللجنة تشمل أعداد متساوية من الطلاب في الفرق الدراسية الثلاث .

٢ – اللجنة تشمل على 2 طالب بالفرقة الأولى , 3 بالفرقة الثانية , 4 بالفرقة الثالثة .

٣ – اللجنة تشمل 5 طلاب بالفرقة الثانية .

٤ – اللجنة لا تشمل أيا من طلاب الفرقة الأولى .

٥ – اللجنة تشمل طلاب بالفرقة الثالثة فقط .

٦ – اللجنة تشمل على الأكثر 3 طلاب من الفرقة الثانية .

٧ – اللجنة تشمل على الأقل 6 طلاب من الفرقة الثالثة .

٨ – جميع أعضاء اللجنة من نفس الفرقة الدراسية .

٧٧- يراد اختيار لجنة طلابية مؤلفة من 10 طلاب من بين 30 طالب من الفرقة الرابعة و 40 طالب من الفرقة الثالثة في الكلية . أوجد ما يأتي :

١ – احتمال أن تحتوي اللجنة على 5 طلاب من كل فرقة دراسية .

٢ – احتمال أن يكون على الأقل طالب من الفرقة الثالثة ممثل في اللجنة .

٣ – احتمال أن يكون طلاب الفرقة الرابعة هم الأكثر تمثيلا في اللجنة .

٧٨- من بين 10 رجال و 8 نساء يراد تكوين لجنة بطريقة عشوائية مؤلفة من 6 أشخاص

١ – أوجد احتمال أن اللجنة تقتسم بالتساوي بين الرجال والسيدات .

٢ – أوجد احتمال أن نسبة الرجال باللجنة اكبر من نسبة السيدات .

٣ – أوجد احتمال أن اللجنة تحتوي على أربعة رجال وسيدتين .

٧٩- نفرض مجموعة الأرقام الزوجية { 8 , 6 , 4 , 2 } فإذا تم اختيار 3 أرقام من هذه المجموعة بطريقة عشوائية لتكوين عدد من ثلاث خانات وبفرض السماح بالتكرار احسب احتمال أن قيمة هذا العدد تكون اكبر من 500 .

٨٠- من عدد 6 أساتذة ، 8 أساتذة مساعدين ، 10مدرسين ، 12 مدرس مساعد ، 8 معيدين بقسم الرياضيات بالكلية يراد تكوين لجنة عشوائيا من 10 أشخاص . أوجد احتمال كل مما يأتي :

١- أن يكون باللجنة 2 من الأساتذة .

٢- أن تكون اللجنة من الحاصلين على الدكتوراه (بدون مدرسين مساعدين أو معيدين).

٣- أن تكون اللجنة من غير الحاصلين على الدكتوراه .

٤- أن تكون جميع الدرجات العلمية ممثلة باللجنة وبالتساوي .

٥- أن يكون أعضاء اللجنة من الأساتذة والأساتذة المساعدين بالتساوي .

٨١- اختبار من خمسة أسئلة وكل سؤال يتم الإجابة عليه أما صواب T أو خطأ F فإذا قام احد الطلاب بالإجابة على الأسئلة الخمسة بالتخمين فأوجد

١ - احتمال أن تكون الإجابة صواب على ثلاثة أسئلة على الأقل .

٢ - احتمال أن تكون الإجابة خطأ على سؤالين على الأكثر .

٣ - احتمال أن تكون الإجابة خطأ على جميع أسئلة الاختبار .

٤ - احتمال أن تكون الإجابة بالصواب اكبر من الإجابة بالخطأ .

٥ - احتمال أن تكون الإجابة صواب على جميع أسئلة الاختبار .

٨٢- اختبار بنظام الاختيار من متعدد Multiple – Choice بحيث أن لكل سؤال ثلاثة اختيارات منها إجابة واحدة فقط صواب فإذا كان الاختبار يتكون من خمسة أسئلة وقام احد الطلاب بالإجابة على جميع الأسئلة بالتخمين ، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ - الإجابة تكون صواب على سؤالين .

٢ - الإجابة تكون صواب على سؤالين على الأكثر .

٣ - الإجابة تكون خطأ على سؤالين على الأكثر .

٤ - الإجابة الصواب تكون اكثر من الإجابة الخطأ .

٥ - الإجابة تكون صواب على الأسئلة جميعها .

٦ - الإجابة تكون خطأ على الأسئلة جميعها .

٨٣– امتحان بنظام الاختيار من متعدد **Multiple – Choice** يحتوى على 20 سؤال ولكل سؤال أربعة إجابات منها واحدة فقط صحيحة . قام أحد الطلاب بالإجابة على كل أسئلة الامتحان بالتخمين . أوجد

١ – احتمال أن تكون إجابة الطالب صواب على نصف الأسئلة .

٢ – احتمال أن تكون إجابة الطالب خطأ في جميع أسئلة الامتحان .

٣ – احتمال أن تكون إجابة الطالب صواب في جميع أسئلة الامتحان .

٨٤– نفرض مجموعة الأرقام { 0,1,4,5,6,8,9 } ، تم اختيار أربعة أرقام بطريقة عشوائية لتكوين عدد من أربعة خانات وبفرض عدم السماح بالتكرار أحسب ما يأتي :

١ – احتمال أن تكون قيمة العدد اقل من 7000 .

٢ – احتمال أن العدد يقبل القسمة على 5 .

ثم احسب الاحتمالات السابقة إذا سمح بالتكرار عند اختيار الأرقام من المجموعة المعطاة .

٨٥– عند رصد بيانات **Data** في أحد برامج الكومبيوتر أخطأ طالب بإدخال عدديين بإشارة سالبة ضمن 6 أعداد موجبة وكذلك أخطأ في إدخال عدديين بإشارة موجبة ضمن 4 أعداد سالبة ، وفي مرحلة ما من البرنامج تم اختيار ثلاثة أعداد مختلفة منها عشوائيا . أوجد احتمال انه في هذه المرحلة لم يتم أي خطأ في الحسابات ، وإذا كانت العملية الحسابية هي جمع مربعات الأعداد الثلاثة التي تم اختيارها عشوائيا فما هو احتمال انه في هذه المرحلة يحدث خطاء في الحسابات .

٨٦– قطيع من الأغنام به 25 سليمة و 5 أغنام مصابة ، أخذت عينة من ثلاثة أغنام بطريقة عشوائية . أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ – العينة كلها أغنام سليمة .

٢ – العينة كلها أغنام مصابة .

٣ – عدد الأغنام السليمة في العينة اكبر من عدد الأغنام المصابة .

٤ – العينة تحتوى على أغنام سليمة ومصابة .

٨٧- في تجربة سحب 6 كرات من صندوق يحتوى على 8 كرات حمراء ، 4 سوداء . أوجد احتمال سحب 3 كرات حمراء ، 3 كرات سوداء فى حالة إذا تم السحب بإرجاع ثم في حالة إذا تم السحب بدون بإرجاع .

٨٨- صندوق يحتوى على6 كرات بيضاء ، 5 كرات حمراء ، 3 كرات سوداء . تم سحب مجموعة من ثلاث كرات من الصندوق بدون إرجاع

١ - أوجد احتمال اختيار كرتين بيضاء وكرة حمراء .

٢ - أوجد احتمال اختيار كرتين حمراء وكرة بيضاء .

٣ - أوجد احتمال اختيار ثلاث كرات من نفس اللون .

٤ - أوجد احتمال اختيار 3 كرات مختلفة الألوان .

٥ - أوجد احتمال اختيار 3 كرات من لونين فقط .

٨٩- صندوق يحتوى على 9 كرات بيضاء ، 8 كرات سوداء ، 7 كرات حمراء ونريد سحب مجموعة من أربعة كرات بطريقة عشوائية بدون إرجاع

١ - أوجد احتمال اختيار 2 كرة بيضاء و 2 كرة سوداء .

٢ - أوجد احتمال اختيار 2 كرة حمراء و 2 كرة سوداء .

٣ - أوجد احتمال اختيار 3 كرة بيضاء وكرة سوداء .

٤ - أوجد احتمال اختيار 4 كرات من نفس اللون .

٥ - أوجد احتمال اختيار 3 كرات من نفس اللون ضمن المجموعة .

٩٠- سحبت 3 كرات من صندوق يحتوي على 6 كرات بيضاء وكرتان حمراء . أوجد احتمال ما يأتي :

١ - كرتان بيضاء وكرة حمراء .

٢ - الكرات من نفس اللون .

٣ - على الأقل واحدة بيضاء .

٤ - على الأقل واحدة بيضاء .

وذلك في حالة السحب بإرجاع ثم فى حالة السحب بدون إرجاع .

٩١– يحتوى كيس على 15 قطعة نقود منها 6 ذهبية والباقي فضية ، سحبت قطعتين من الكيس عشوائيا . نفرض الحدث A سحب قطعتين فضيتين ، الحدث B سحب قطعتين ذهبيتين ، الحدث C سحب قطعة ذهبية واحدة على الأقل والحدث D سحب قطعة فضية واحدة على الأقل أوجد الاحتمالات $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$ في كل من الحالات الآتية :

١ – سحب القطعتين معا .

٢ – سحب القطعتين واحدة بعد الأخرى بدون إحلال .

٣ – سحب القطعتين واحدة بعد الأخرى مع الإحلال .

٩٢– سحبت ورقتان بطريقة عشوائية من صندوق يحتوى على 10 ورقات مرقمة بالأعداد من 1 إلى 10 . أوجد احتمال أن يكون مجموعها عدد أولى إذا

١ – تم سحب الورقتين معا .

٢ – تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى بدون إحلال .

٣ – تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى مع الإحلال .

٩٣– صندوق يحتوى على 30 مصباح كهربائي منها 3 مصابيح معيبة . اختيرت عينة عشوائية تتكون من 5 مصابيح كهربائية . أوجد احتمال ما يأتي :

١ – أن يكون في العينة مصباح واحد معيب .

٢ – أن تكون المصابيح في العينة جميعها سليمة .

٣ – أن يكون في العينة مصباح واحد على الأقل معيب .

٤ – أن يكون في العينة مصباح واحد على الأقل سليم .

٥ – أن يكون عدد المصابيح السليمة في العينة اكبر من المعيبة .

٩٤– مجموعة من 10 أشخاص ذهبت لصيد السمك وعند عودهم كان عدد السمك الذى تم اصطياده 8 سمكات فقط ، وبفرض أن جميع الاشخاص لهم نفس الفرصة في صيد السمك أوجد احتمال أن السمكات الثمانية تم اصطيادها بثمانية اشخاص مختلفين . أوجد كذلك احتمال أن السمكات الثمانية تم إصطيادها بواسطة شخص واحد فقط .

٩٥- في تجربة سحب أربعة ورقات من أوراق اللعب (الكوتشينة) على التوالي وبدون إرجاع ، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ - الأوراق الأربعة جميعها صور .

٢ - الأوراق الأربعة ليس بها صور .

٣ - الأوراق الأربعة ليس بها صور وكلها أرقام اكبر من 4 .

٤ - الأوراق الأربعة ليس بها صور وكلها أرقام زوجية .

٥ - الأوراق الأربعة ليس بها صور وكلها أرقام فردية .

٦ - الأوراق الأربعة بها ورقتان صور وورقتان لأرقام اكبر من 8 .

٧ - الأوراق الأربعة ليس بها صور وجميعها أرقام مختلفة .

٨ - الأوراق الأربعة ليس بها صور وجميعها أرقام متساوية .

٩ - الحصول على صورة ولد واحد على الأكثر .

١٠ - الحصول على صورة ولد واحد على الأقل .

٩٦- أوجد احتمال أن تكون أيام أعياد الميلاد مختلفة لعدد 30 من الطلاب المتواجدين في قاعة الدرس وذلك بفرض أن جميع السنوات 365 يوما .

٩٧- في حفلة عيد ميلاد ماريان في 20 من شهر فبراير حضر 15 من صديقاها إلى الحفل .

١ - أوجد احتمال أن تكون أيام أعياد الميلاد مختلفة لكل من ماريان وصديقاها .

٢ - أوجد احتمال أن تكون أحد صديقاها على الأقل لها نفس تاريخ ميلاد ماريان .

٩٨- في حفل زواج أحد الأشخاص في يوم 8 سبتمبر من عام 1983 حضر إلى قاعة الحفل 32 رجل وكل منهم معه زوجته . أوجد احتمال

١ - أن الأزواج الحاضرون بالحفل يحتفلون بأعياد زواجهم في أيام مختلفة في السنة .

٢ - وجود اثنين على الأقل من المدعوين الرجال بالحفل ولهما نفس يوم الزواج.

٣ - أن أحد المدعوين الرجال على الأقل سوف يحتفل بذكرى زواجه في هذا اليوم الثامن من سبتمبر .

٩٩– يجلس n من الاشخاص في قاعة ، أوجد احتمال وجود 2 على الاقل لهم نفس شهر الميلاد . احسب هذا الاحتمال في حالة $n = 2 , 3 , 5 , 10$.

١٠٠–رجل لديه 6 أطفال أربعة منهم ذكور والباقي إناث . أوجد

١ – احتمال وجود اثنين على الأقل من الأطفال ولهما نفس يوم الميلاد.

٢ – احتمال أن تكون أيام أعياد الميلاد مختلفة للأطفال الذكور .

٣ – احتمال أن تكون أيام أعياد الميلاد مختلفة للأطفال الإناث .

٤ – احتمال أن أعياد ميلاد الأطفال الستة تقع في شهور مختلفة من السنة .

١٠١–كتب أحد الأشخاص 5 من الخطابات الشخصية إلى 5 من الأصدقاء ووضع كل خطاب في ظرف بريد وأغلقه بدون كتابة العناوين ثم بدء بعد ذلك بطريقة عشوائية في كتابة 5 من العناوين على هذه المظاريف . أوجد احتمال وجود خطاب واحد على الأقل مكتوب عليه العنوان مضبوط .

١٠٢– في تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية داخل الفترة $[a , b]$ على خط الأعداد نفرض النقطتان $c,d \in]a,b[$ بحيث أن $a<c<d<b$ ونفرض الأحداث

$$A_1 = \{ x : a \le x < c \} = [a , c [$$
$$A_2 = \{ x : c \le x < d \} = [c , d [$$
$$A_3 = \{ x : d \le x \le b \} = [d , b]$$

أوجد احتمال كل من الأحداث الثلاثة A_1 , A_2 , A_3 .

١٠٣–اختيرت نقطة بطريقة عشوائية داخل الفترة $(-1000 , 1000)$ أوجد احتمال أن تكون عدد صحيح .

١٠٤– إذا كان عدد الدقائق لردة الفعل عند حيوان معين على حادث معين يكون عدد عشوائي بين دقيقتين وثلاث دقائق ونصف . أوجد احتمال أن ردة الفعل عند هذا الحيوان عند وقوع هذا الحدث مرة أخرى لن تزيد عن ثلاث دقائق .

١٠٥- في حديث مع مدير المكتبة الإكاديمية قال انه من واقع خبرته الطويلة في مجال بيع الكتب بالمكتبة فإن كل كتاب جديد لمؤلف معين معروف لديه يحقق نسبة بين 4% إلى 12% من جملة المبيعات للمكتبة خلال ستة شهور. أوجد احتمال أن الكتاب القادم لهذا المؤلف سوف يحقق على الأكثر 6.35% من جملة المبيعات للمكتبة خلال ستة شهور .

١٠٦-اختيرت نقطة بطريقة عشوائية داخل دائرة ، أوجد احتمال أن تكون النقطة أقرب إلى محيط الدائرة منها إلى مركز الدائرة .

١٠٧- مستطيل طوله 10cm وعرضه 8 cm اختيرت نقطة بطريقة عشوائية داخل المستطيل أوجد احتمال أن تكون النقطة أقرب بمقدار 2 cm عن مركز المستطيل .

١٠٨-حدث عطل لسيارة أثناء السفر من مدينة A إلى مدينة B البعد بينهما 300 كيلومتر أوجد احتمال أن العطل حدث بعد مرور السيارة بالمدينة C الواقعة في ثلث المسافة من المدينة A إلى مدينة B .

١٠٩- تصل حافلة (أتوبيس) إلى أحد المحطات كل يوم في وقت عشوائي بين الساعة الثانية والساعة الثانية والنصف ظهرا ، إذا وصل شخص إلى المحطة الساعة الثانية ظهرا تماما فأوجد احتمال أن هذا الشخص سوف يضطر إلى الانتظار على الأقل 15 دقيقة .

١١٠- مكالمة تليفونية من شخص ما يتم الانتظار لاستقبالها بين الساعة 7:00 والساعة 7:30صباحا من كل يوم . أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١ - وصول المكالمة خلال ربع ساعة بعد السابعة .

٢ - وصول المكالمة في مدة لا تزيد عن خمس دقائق بعد السابعة والربع .

٣ - فترة الانتظار اقل من 10 دقائق .

٤ - فترة الانتظار أكبر من 10 دقائق .

١١١– اتفق صديقان على أن يلتقيا في مكان ما بين الساعة الخامسة والساعة الخامسة والربع على أن ينتظر الشخص الذي يصل أولا مدة خمسة دقائق فإذا لم يأتي الشخص الآخر يترك الشخص الذي وصل أولا المكان ، فإذا افترضنا أن وقت وصول كل منهما عشوائي فما هو احتمال الهما لن يلتقيان .

١١٢– في تجربة اختيار نقطة بطريقة عشوائية على أو داخل سطح الاسطوانة $x^2 + y^2 = 4$ في الفراغ والمحدودة بالمستويات $z = 5$, $z = 0$ أوجد احتمال أن تكون النقطة اقرب إلى قاعدة الاسطوانة منها إلى قمتها .

١١٣– خزان مياه على شكل اسطوانة نصف قطرها 10 متر وارتفاعها 8 متر ويراد اختيار قطرة ماء من داخلها بشكل عشوائي . أوجد احتمال أن تكون قطرة الماء هذه ابعد بمقدار 1 متر عن محور تماثل الخزان وعن كل من السطح العلوي والسفلي للخزان .

١١٤– في تجربة اختيار نقطة عشوائيا على أو داخل سطح الأسطوانة $x^2 + y^2 = 16$ والمحدودة بالمستويات $z = 9$, $z=1$ أوجد احتمال الحدث

$$A_1 = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \le 4 \quad , \quad 1 \le z < 3 \}$$

١١٥–أيا من العبارات الآتية صواب وأيها خطأ وإذا كانت العبارة صواب أثبتها وإذا كانت خطأ أعطى مثال مضاد

١–إذا كان A حدث ما بحيث أن $P(A) = 1$ فإن الحدث A يكون هو فضاء العينة.

٢–إذا كان B حدث ما بحيث أن $P(B) = 0$ فإن $B = \Phi$.