الفصل

4

الاحتمال المشروط والاستقلال

Conditional Probability and Independence

١ – الاحتمال المشروط   Conditional Probability

دراسة الاحتمال المشروط تعنى حساب احتمال حدث ما إذا عُلم حدث آخر ، فإذا كان A , B حدثان في فضاء عينة S لتجربة عشوائية ما ، وقبل أن نعلم أي شيء عن وقوع الحدث B فإن احتمال وقوع الحدث A هو $P(A)$ ويسمى بالاحتمال الغير مشروط للحدث A وللاختصار يسمى احتمال الحدث A ، أما إذا كان لدينا معلومات إضافية عن وقوع الحدث B فإن معرفة هذه المعلومات قد تؤثر بشكل فعلى على احتمال وقوع الحدث A . وفى كثير من الأحيان نحتاج إلى إيجاد احتمال وقوع حدث A بشرط وقوع حدث آخر B ويسمى هذا بالاحتمال المشروط ويرمز له بالرمز $P(A|B)$ ، أي احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B ، وللتعرف على مفهوم الاحتمال المشروط نستعرض هذا المثال التوضيحي :

نفرض m من الطلاب نجح منهم 90% في امتحان مقرر الاحتمالات ، 80% في امتحان مقرر الهندسة ونجح 70% في المقررين معاً ، تم اختيار طالب عشوائياً من هذه المجموعة من الطلاب ووجدنا انه ناجح في امتحان مقرر الاحتمالات ، والسؤال الآن هو ما احتمال أن هذا الطالب الذي اخترناه عشوائياً يكون ناجح في مقرر الهندسة ؟ وللإجابة على هذا السؤال نفرض A هو الحدث أن الطالب ناجح في امتحان مقرر الهندسة ونفرض B هو الحدث أن الطالب ناجح في امتحان مقرر الاحتمالات ونلاحظ أن المطلوب ليس حساب $P(A)$ فنحن نعلم أن $P(A) = 0.8$ وكذلك نعلم أن $P(A \cap B) = 0.7$, $P(B) = 0.9$ ولكن المطلوب هو حساب $P(A|B)$. ولإيجاد ذلك نلاحظ أن عدد الطلاب الذين نجحوا في امتحان مقرر الاحتمالات يساوى $(0.9)m$ وعدد الطلاب الذين نجحوا في

امتحان مقرر الهندسة يساوى $m\ (0.8)$ وعدد الطلاب الذين نجحوا في المقررين معاً يساوى $m\ (0.7)$ ، أي انه من بين $m(0.9)$ طالب ناجح في امتحان مقرر الاحتمالات يوجد $m\ (0.7)$ طالب ناجح في امتحان مقرر الهندسة ، وحيث أن الطالب الذي تم اختياره عشوائياً ناجح في امتحان مقرر الاحتمالات أي انه من ضمن $m(0.9)$ إذن احتمال أن هذا الطالب يكون ناجح في امتحان مقرر الهندسة أي انه من ضمن الذين نجحوا في المقررين معاً وعددهم $m\ (0.7)$ يعطى كالآتي :

$$P(A|B) = \frac{(0.7)\ m}{(0.9)\ m} = \frac{0.7}{0.9}$$

وحيث أن $P(A \cap B) = 0.7$, $P(B) = 0.9$ ، إذن هذا المثال يقدم لنا اقتراح لحساب $P(A|B)$ وهذا الاقتراح يمكن تمثيله بالعلاقة الآتية :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ويمكن التحقق من هذه العلاقة لأنواع أخرى من الاحتمال المشروط ، وهذه العلاقة بديهية وتتفق مع إدراكنا لمعنى الاحتمال وهى تعتبر بمثابة تعميم منطقي للعلاقة الموجودة بالفعل والتي تربط التكرار النسبي المشروط للحدث A بالنسبة للشرط B من جهة والتكرار النسبي للحدث $A \cap B$ بالنسبة للتكرار النسبي للحدث B من جهة أخرى ولهذا السبب تم اتخاذ هذه العلاقة كتعريف للاحتمال المشروط .

تعريف ١ :الاحتمال المشروط Conditional Probability

إذا كان A , B حدثان في فضاء عينة S وكان $P(B) > 0$ فإن الاحتمال المشروط للحدث A إذا عُلم B أو بصيغة أخرى احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B هو

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

وفى حالة $P(B) = 0$ فإنه لا يوجد معنى للاحتمال المشروط وذلك لأنه في هذه الحالة الحدث B يكون حدث مستحيل وهذا يتعارض مع حساب احتمال A بشرط وقوع B ، ولذلك فإن الاحتمال المشروط $P(A|B)$ يكون مُعرف فقط إذا كان $P(B) > 0$.

وتعريف الاحتمال المشروط يمكن صياغته بالقول أن احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B هو النسبة بين احتمال الوقوع المشترك للحدثين A , B واحتمال الحدث B ، ومن الضروري أن نؤكد ملاحظة هامة وهى أن العلاقة $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ليست مُسلمة كما أنها ليست بنظرية ولكنها فقط تعريف ، وكما وضحنا فإن هذا التعريف تم التحقق منه بالكامل ولم يوضع اعتباطاً .

ملاحظات : لأي حدث A فإن

$$(1)\quad P(\Phi|A)=\frac{P(\Phi\cap A)}{P(A)}=\frac{0}{P(A)}=0$$

$$(2)\quad P(S|A)=\frac{P(S\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$$

مثال ١ :

في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة . إذا عُلم أن العدد الذي ظهر أكبر من 3 ، فما احتمال أن يكون عدد زوجي ؟

الحل :

نفرض أن الحدث A هو ظهور عدد زوجي ، الحدث B هو ظهور عدد أكبر من 3 .

المطلوب هو إيجاد $P(A|B)$.

وحيث أن

$$A=\{2,4,6\} \quad , \quad B=\{4,5,6\} \quad , \quad A\cap B=\{4,6\}$$

إذن

$$P(B)=\frac{3}{6} \quad , \quad P(A\cap B)=\frac{2}{6}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2/6}{3/6}=\frac{2}{3}$$

مثـــال ٢ :

نفرض أن A , B حدثان بحيث أن

$$P(A)=\frac{1}{2} \quad , \quad P(A\cap B)=\frac{1}{3} \quad , \quad P(B|\ A')=\frac{1}{4}$$

أوجد $P(A|\ B')$, $P(A|\ B)$.

الحـــل :

حيث أن

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(B|\ A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}$$

إذن

$$P(B\cap A')=P(B|\ A')\ P(A')=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

وحيث أن

$$P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$

إذن

$$P(B)=P(B\cap A')+P(A\cap B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{11}{24}$$

$$P(A|\ B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/3}{11/24}=\frac{8}{11}$$

ولحساب $P(A|\ B')$

$$P(A|\ B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')} \qquad P(B')=1-P(B)=1-\frac{11}{24}=\frac{13}{24}$$

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

إذن

$$P(A|\ B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{1/6}{13/24}=\frac{4}{13}$$

مثـــال ٣ :

في مدينة ما ومن مجموعة العائلات التى لديها طفلان تم اختيار عائلة عشوائياً ووجد أن هـــذه العائلة لديها بنتاً ، وبفرض أن احتمال وجود ولد يكون متساوي مع احتمال وجود بنـــت ، فأوجد احتمال أن الطفل الآخر فى هذه العائلة يكون ولداً .

الحل : بفرض أن الرمز b يعنى ولد(boy) والرمز g يعنى بنت (girl) ومع مراعاة الأسـبقية في الولادة فإنه في العائلة التي لديها طفلان يكون فضاء العينة $S = \{bb , bg , gb , gg\}$ حيث bg تعنى أن الطفل الأكبر هو الولد بينما الطفل الأصغر هو البنت ، واحتمـــال كـل عنصر من فضاء العينة يساوى $\frac{1}{4}$. نفرض الحدث A هو أن الطفل الآخـــر ولـد أي أن العائلة لديها ولد وبنت ، $A = \{ bg , gb \}$ ونفرض الحدث B هو أن العائلــة لديــها بنت، أي أن $B = \{ bg , gb , gg \}$. إذن المطلوب هو حساب احتمال أن يكون الطفل الآخر ولد بشرط أن العائلة لديها بنت أي أن المطلوب هو حساب $P(A|B)$. وحيـــث أن $A \cap B$ هو الحدث أن الطفل الآخر ولد والعائلة لديها بنت ، وبالتالي

$$A \cap B = \{ bg , gb \} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{2}{4} \quad , \quad P(B) = \frac{3}{4}$$

وبالتعويض في تعريف الاحتمال المشروط ، إذن $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}$

مثـــال ٤ :

في مدينة ما كان احتمال أن يعيش أي شخص لمدة 80 عام علـــى الأقـل يســاوى 0.56 واحتمال أن يعيش لمدة 90 عام على الأقل يساوى 0.21 ، تم اختيار شخص عشوائياً مـــن هذه المدينة ووجد أن عمره 80 عام فما هو احتمال أن يبقى هذا الشخص على قيد الحيـــاة حتى يصل به العمر إلى 90 عام .

الحل : نفرض الحدث B هو أن الشخص الذي تم اختياره كـــان عمـره 80 عـــام وأن الحدث A هو أن الشخص الذي تم اختياره يبقى على قيد الحياة حتى يصل به العمـــر إلى 90 عام ، وحيث أن مجموعة الأشخاص الذين يصل بهم العمر إلى 90 عام هي مجموعة جزئية مـــن مجموعة الأشخاص الذين يصل بهم العمر إلى 80 عام ، إذن $A \cap B = A$ وبالتالي

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.21}{0.56} = \frac{3}{8}$$

ومن الخصائص الهامة للاحتمال المشروط هو انه يحقق مسلمات نظرية الاحتمال ، وبالتالي هـذا يُمكننا من استخدام النظريات المتحققة فى الاحتمالات على الاحتمال المشروط .

نظرية ١ :

نفرض أن S هو فضاء العينة لتجربة عشوائية ما ، ونفرض الحدث B من فضاء العينة S حيث $P(B) > 0$ ، إذن

١ – لأي حدث A من فضاء العينة S فإن $P(A|B) \geq 0$

٢ – $P(S|B) = 1$

٣ – إذا كان $A_1, A_2, \ldots$ متتابعة من الأحداث المتنافية ، فإن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\middle|\, B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

البرهان :

١ – من تعريف الاحتمال المشروط $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ وحيث أن

$$P(A \cap B) \geq 0 \quad , \quad P(B) \geq 0$$

إذن $P(A|B) \geq 0$.

٢ – من تعريف الاحتمال المشروط

$$P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

٣ – حيث انه إذا كان $A_1, A_2, \ldots$ أحداث متنافية فإن $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots$ تكون أيضاً أحداث متنافية ، ومن تعريف الاحتمال المشروط

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\middle|\, B\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

والآن كحالة خاصة ، إذا كان S فضاء احتمال منتظم من النوع المنتهي أي أن جميع عناصر فضاء العينة متساوية في احتمال حدوثها وبفرض أن A , B حدثان في فضاء العينة S بحيث أن $P(B) > 0$ ، إذن من تعريف الاحتمال المشروط فإن $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ وحيث أن S فضاء احتمال منتهى منتظم ، إذن

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \quad , \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

حيث الرمز $n(S)$ يرمز إلى عدد عناصر S ، إذن الاحتمال المشروط للحدث A إذا عُلم B أو بصيغة أخرى احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B يمكن التعبير عنه في هذه الحالة بالصورة $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ وإذا كان S فضاء احتمال منتظم من النوع اللانهائي الغير قابل للعد فإن المقياس الهندسي المحدود المستخدم في هذه الحالة يحل مكان عدد العناصر ، وبالتالي يمكننا صياغة الآتي :

- إذا كان A , B حدثان في فضاء احتمال منتظم من النوع المنتهى وكان $P(B) > 0$ فإن احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B يكون

$$\mathbf{P(A|B)} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث } A \cap B}{\text{عدد عناصر الحدث } B}$$

وبصورة أخرى :

$$\mathbf{P(A|B)} = \frac{\text{عدد طرق وقوع الحدث } A \cap B}{\text{عدد طرق وقوع الحدث } B}$$

- إذا كان A , B حدثان في فضاء احتمال منتظم من النوع اللانهائي الغير قابل للعد وكان $P(B) > 0$ فإن احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B يكون $P(A|B) = \frac{m(A \cap B)}{m(B)}$ حيث m يمثل المقياس الهندسي وقد يكون هذا المقياس هو قياس طول فترة على خط الأعداد أو قياس طول فترة زمنية أو قياس مساحة أو حجم .

مثـــال ٥:

في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات على التوالي إذا عُلم أنه في الرمية الأولى ظهر وجه الصورة فما احتمال أن يكون الوجهان في الرميتان الأخرتان صورتان .

الحل : فضاء العينة $S = \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$

نفرض B هو الحدث أن الوجه في الرمية الأولى صورة ونفرض A هو الحدث أن الوجهان في الرميتان الأخرتان صورتان فيكون المطلوب هو حساب $P(A|B)$.

$B = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$, $A = \{HHH, THH\}$, $A \cap B = \{HHH\}$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{4}$$

مثـــال ٦: نفرض أن فضاء العينة S يمثل مجموعة من الأشخاص في مدينة صغيرة والذيـــن أكملوا تعليمهم الجامـــعي وموزعين كما موضح بالجدول الآتي :

	يعمل W	لا يعمل N	المجموع
رجال A	460	40	500
إناث B	140	260	400
المجموع	600	300	900

فإذا تم اختيار شخص عشوائيا من هذه المجموعة ، أوجد احتمال ما يأتي :

١- أن يكون رجل إذا علمنا أنـــه يعمل .

٢- أن تكون أنثى إذا علمنا أنها لا تعمل .

الحل : نفرض الحدث A هو اختيار رجل والحدث B هو اختيار أنثى والحـــدث W هـــو اختيار شخص يعمل والحدث N هو اختيار شخص لا يعمل

1 - $P(A|W) = \frac{n(A \cap W)}{n(W)}$, $n(A \cap W) = 460$, $n(W) = 600$

$$P(A|W) = \frac{460}{600} = \frac{23}{30}$$

2 - $P(B|N) = \frac{n(B \cap N)}{n(N)}$, $n(B \cap N) = 260$, $n(N) = 300$

$$P(B|N) = \frac{260}{300} = \frac{13}{15}$$

مثـــال ٧ :

في تجربة إلقاء حجري نرد متميزين ، أوجد احتمال أن يكون مجموع ما يظهر على الوجـــهين اكبر من 9 في كل من الحالات الآتية :

١ – إذا ظهر العدد 6 على حجر النرد الأول .

٢ – إذا ظهر العدد 6 على حجر واحد على الأقل .

٣ – إذا ظهر العدد 6 على حجر واحد على الأكثر .

الحـــل :

نفرض أن الحدث A هو أن يكون مجموع ما يظهر على الوجهين اكبر من 9 . إذن

$A = \{ (4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6) \}$

١ – نفرض أن الحدث B هو ظهور العدد 6 على حجر النرد الأول . إذن

$B = \{ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \} \quad , \quad n(B) = 6$

$A \cap B = \{ (6,4), (6,5), (6,6) \} \quad , \quad n(A \cap B) = 3$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

٢ – نفرض أن الحدث B هو ظهور العدد 6 على حجر واحد على الأقل . إذن

$B = \{ (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)$

$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5) \} \quad , \quad n(B) = 11$

$A \cap B = \{ (4,6), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6) \} \quad , \quad n(A \cap B) = 5$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{5}{11}$$

3 – نفرض أن الحدث B هو ظهور العدد 6 على حجـــر واحـــد علـــى الأكـــثر ، إذن الحدثB هو مكملـــة الحـــدث ظـــهور 6 علـــى كـــل مـــن الحجريـــين أي انـــه $\{ (6,6) \}'$ وحيث أن عدد عناصر فضاء العينة يساوى 36 ، إذن

$$n(B) = n(\{ (6,6) \}') = 35$$

$A \cap B = \{ (4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5) \} \quad , \quad n(A \cap B) = 5$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

مثـــال ٨:

تصل حافلة إلى محطة ما يوميا في وقت عشوائي بين الساعة 6:00 والساعة 6:30 صباحـــا ، وصل شخص إلى المحطة في الساعة 6:00 صباحا وانتظر الحافلة حتى الساعة 6:10 ولم تصل فما هو احتمال أن تصل الحافلة خلال 5 دقائق أخرى على الأكثر .

الحـــل :

نفرض الحدث A هو أن الحافلة تصل بين الساعة 6:10 والساعة 6:15 ونفرض الحـــدث B هو أن الحافلة تصل بين الساعة 6:10 والساعة 6:30 . إذن الحدث A يمثل فترة زمنية طولها 5 دقائق من الساعة 6:10 إلى الساعة 6:15 والحدث B يمثل فترة زمنية طولهـا 20 دقيقة من الساعة 6:10 إلى الساعة 6:30 وبالتالي فإن الحدث $A \cap B$ يمثل فترة زمنيـــة طولها 5 دقائق من الساعة 6:10 إلى الساعة 6:15 والمقياس المستخدم هو طـــول الفـــترة الزمنية ، إذن

$$P(A|B) = \frac{m(A \cap B)}{m(B)} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \ .$$

مثـــال ٩ :

مزرعة سمكية صغيرة بها 105 سمكة بينها 40 من سمك السلمون والباقي من سمك البلطي ، وضعت شبكة صغيرة فاصطادت 8 سمكات . أوجد احتمال أن أثنين منها من نوع الســـلمون إذا علمت انه على الأقل 3 منها من نوع البلطي .

الحل : نفرض أن A هو الحدث أن أثنين من السمكات الثمانية بالشبكة من نوع الســـلمون وهذا يعنى أن 6 منهم من نوع البلطي ، ونفرض B هو الحدث انه على الأقل 3 منها مـــن نوع البلطي ، أي أن B هو الحدث أن عدد السمك البلطـــي بالشـــبكة يكـــون x حيـــث $3 \le x \le 8$ وبالتالي فإن الحدث $A \cap B$ هو أن عدد السمك البلطي بالشبكة يكـون $x = 6$ والمطلوب هو حساب $P(A|B)$. إذن

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{65}{6}\binom{40}{2}}{\binom{105}{8}} = 0.231072 \quad , \quad P(B) = \sum_{x=3}^{8} \frac{\binom{65}{x}\binom{40}{8-x}}{\binom{105}{8}} = 0.966743$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.231072}{0.966743} = 0.239021 \ .$$

مثـــال ١٠:

في تجربة سحب كارت عشوائياً من مجموعة من 100 كارت مرقمة $00, 01, 02, \ldots, 99$ إذا علمت أن حاصل ضرب أرقام العدد على الكارت المسحوب يساوي 0 فأوجد احتمال أن مجموع أرقام العدد على الكارت المسحوب يساوي k لأي عدد صحيح $0 \le k \le 18$.

الحـــل :

نفرض B هو الحدث سحب كارت بحيث أن حاصل ضرب أرقام العدد الذي يظهر علـــى الكارت المسحوب يساوي 0 وأن A_k هو الحدث سحب كارت بحيث أن مجموع أرقـــام العدد الذي يظهر على الكارت المسحوب يساوي k إذن

$$B = \{00, 01, 02, \ldots, 09, 10, 20, \ldots 90\}$$

$$n(B) = 19 \quad , \quad n(S) = 100$$

ومن تعريف الحدث A_k فإن أقل قيمة يأخذها k هي $k=0$ ونحصل عليها من مجمـــوع أرقام العدد 00 واكبر قيمة يأخذها k هي $k=18$ ونحصل عليها من مجموع أرقام العدد 99 وبالتالي فإن قيم k تكون الأعداد الصحيحة $0 \le k \le 18$. إذن

$$A_k \cap B = \begin{cases} \{00\} & , \quad k = 0 \\ \{0k, k0\} & , \quad 0 < k \le 9 \\ \Phi & , \quad 9 < k \le 18 \end{cases}$$

وبالتالي

$$n(A_k \cap B) = \begin{cases} 1 & , \quad k = 0 \\ 2 & , \quad 0 < k \le 9 \\ 0 & , \quad 9 < k \le 18 \end{cases}$$

إذن

$$P(A_k | B) = \frac{n(A_k \cap B)}{n(B)} = \begin{cases} \frac{1}{19} & , \quad k=0 \\ \frac{2}{19} & , \quad 0<k\le 9 \\ 0 & , \quad 9<k\le 18 \end{cases}$$

٣ – فضاء العينة المختزل Reduced Sample Space

نفرض الحدث B من فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما حيث $P(B) > 0$ ، لأي مجموعة جزئية E من B نعرف الدالة Q كالآتي :

$$Q(E) = P(E \mid B)$$

إذن الدالة Q هي دالة من عائلة المجموعات الجزئية من B إلى الفترة المغلقة $[0,1]$ ، ومن الواضح أن الدالة Q تحقق ما يأتي :

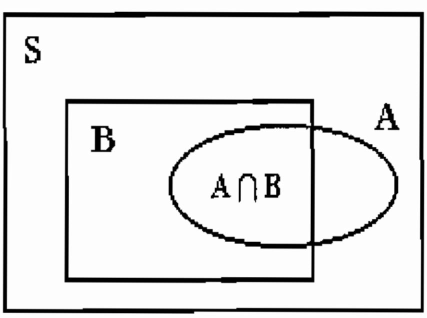
أولاً : لأي حدث E من B فإن $Q(E) \geq 0$ وهذا يحقق المسلمة الأولى للاحتمالات

ثانياً : $Q(B) = P(B \mid B) = 1$ وهذا يحقق المسلمة الثانية للاحتمالات

ثالثاً : إذا كان $E_1, E_2, \ldots$ متتابعة لانهائية من الأحداث المتنافية المأخوذة من B فإن

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i \mid B) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(E_i)$$

إذن الدالة Q تحقق مسلمات نظرية الاحتمال وبالتالي فإن Q هي دالة احتمال ، ونلاحظ انه بينما الدالة P هي دالة احتمال معرفة لجميع المجموعات الجزئية من S فإن الدالة Q هي دالة احتمال معرفة فقط لجميع المجموعات الجزئية من B ، وبناء على ذلك فإنه للدالة Q تم اختزال فضاء العينة ليصبح B بدلا من S وفى هذه الحالة فإن B يسمى بفضاء العينة المختزل ، وهذا الاختزال لفضاء العينة يكون مفيد جدا في حساب الاحتمال المشروط ، وبالتالي فإن الاحتمال المشروط $P(A \mid B)$ حيث $A \subseteq S$ يمكن حسابه عن طريق اختزال فضاء العينة S إلى B ثم حساب $Q(A \cap B)$ كما موضح بالشكل .



ومما لا شك فيه أن حساب الاحتمال الغير مشروط $Q(A \cap B)$ بالنسبة لفضاء العينة المختزل B يكون اسهل بكثير من حساب الاحتمال المشروط $P(A \mid B)$ بالنسبة لفضاء العينة S .

مثـــال ١١ :

في مزرعة ما يوجد 13 رأس من الغنم 3 منها مصابة بجرثومة الحمى . لاستبعاد الأغنام المصابة تم اختيار الغنم واحدة بعد الأخرى فإذا وجدنا أن الأغنام الأربعة الأولى التى تم اختيارها جميعها سليم فما هو احتمال أن الاختيار الخامس يكون أحد الأغنام المصابة .

الحـــل :

عدد الأغنام السليمة 10 وعدد الأغنام المصابة 3 وحيث أن الأغنام الأربعة الأولى التي تم اختيارها جميعها سليم ، إذن فضاء العينة S الذي به 13 رأس من الغنم (عدد 10 سليم وعدد 3 مصاب) يمكن اختزاله إلى فضاء العينة B الذي به 9 من الأغنام (عدد 6 سليم وعدد 3 مصاب) وحيث أن المطلوب هو احتمال أن الاختيار الخامس يكون أحد الأغنام المصابة ، إذن يمكن الآن إعادة صياغة المسألة في فضاء العينة المختزل B بالصورة الآتية :

" من بين 9 من الأغنام (عدد 6 سليم وعدد 3 مصـــاب) تم اختيار أحد الأغنام فما هو احتمال أن يكون من الأغنام المصابة "

إذن الاحتمال p المطلوب يكون $p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. ونلاحظ في هذا المثال مدى السهولة في الحل نتيجة للتعامل مع فضاء العينة المختزل والذي بدونه لن يكون الحل بمثل هذه السهولة .

مثـــال ١٢:

عائلة لديها ثلاثة أطفال ، مع مراعاة الأسبقية في الولادة أوجد :

١– احتمال أن يكون للعائلة ولد واحد فقط بشرط أن يكون الطفل الأكبر بنت .

٢– احتمال أن يكون للعائلة ولدا واحد على الأقل إذا عُلم أن الطفل الأكبر بنت .

٣– احتمال أن يكون للعائلة بنتان إذا عُلم أن الطفل الأكبر ولد .

٤– احتمال أن يكون للعائلة بنت على الأكثر إذا عُلم أن أحد الطفلين الأكبر أو الأوسط ولد

الحـــل :

بفرض أن الرمز b يعنى ولد (boy) والرمز g يعنى بنت (girl) ومع مراعاة الأسبقية في الولادة فإنه في العائلة التي لديها ثلاثة أطفال يكون فضاء العينة

$$S = \{ bbb , bbg , bgb , bgg , gbb , gbg , ggb , ggg \}$$

حيث bgg تعنى أن الطفل الأكبر ولد والطفل الأوسط بنت والطفل الأصغر بنت .

١– نفرض الحدث A أن يكون للعائلة ولد واحد فقط ، أي أن $A=\{bgg, gbg, ggb\}$
ونفرض الحدث B هو أن يكون الطفل الأكبر بنت وهذا يمثل فضاء العينة المختزل ، إذن
$B = \{gbb, gbg, ggb, ggg\}$, $A \cap B = \{gbg, ggb\}$
المطلوب هو $P(A|B)$ وهذا يمثله احتمال الحدث $A \cap B$ بالنسبة لفضاء العينة المختزل B
إذن $P(A|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

٢– نفرض الحدث A هو أن يكون للعائلة ولدا واحد على الأقل ، أي أن يكون لدى العائلة إما ولد وبنتان أو ولدان وبنت أو ثلاثة أولاد ، أي أننا نستبعد أن يكون الثلاث أطفال بنات ،
إذن $A = \{bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb\}$
ونفرض الحدث B هو أن يكون الطفل الأكبر بنت وهذا يمثل فضاء العينة المختزل ، إذن
$B = \{gbb, gbg, ggb, ggg\}$, $A \cap B = \{gbb, gbg, ggb\}$
المطلوب هو $P(A|B)$ وهذا يمثله احتمال الحدث $A \cap B$ بالنسبة لفضاء العينة المختزل B
إذن $P(A|B) = \frac{3}{4}$.

٣ – نفرض الحدث A هو أن يكون للعائلة بنتان $A = \{bgg, gbg, ggb\}$
ونفرض الحدث B هو أن يكون الطفل الأكبر ولدا وهذا يمثل فضاء العينة المختزل ، إذن
$B = \{bbb, bbg, bgb, bgg\}$, $A \cap B = \{gbb\}$
المطلوب هو $P(A|B)$ وهذا يمثله احتمال الحدث $A \cap B$ بالنسبة لفضاء العينة المختزل B
إذن $P(A|B) = \frac{1}{4}$.

٤ – نفرض الحدث A هو أن يكون للعائلة بنت على الأكثر ، أي أن يكون لدى العائلة إما ولدان وبنت أو ثلاثة أولاد $A = \{bbb, bbg, bgb, gbb\}$ ونفرض الحدث B هو أن يكون أحد الطفلين الأكبر أو الأوسط ولد وهذا يمثل فضاء العينة المختزل ، إذن
$B = \{bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg\}$, $A \cap B = \{bbb, bbg, bgb, gbb\}$
المطلوب هو $P(A|B)$ وهذا يمثله احتمال الحدث $A \cap B$ بالنسبة لفضاء العينة المختزل B
إذن $P(A|B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

مثـــال ١٣:

قام رجل بزيارة عائلة لديها طفلان ، ودخل أحد الطفلين إلى الغرفة وكـــان ولـــدا ، أوجـــد الاحتمال p أن يكون الطفل الآخر ولدا إذا كان

١ – من المعلوم أن الطفل الآخر هو الأصغر .

٢ – ليس هناك أية معلومات عن الطفل الآخر .

الحـــل :

بفرض أن الرمز b يعنى ولد والرمز g يعنى بنت ومع مراعاة الأسبقية في الولادة فإنـــه في العائلة التي لديها طفلان يكون فضاء العينة

$$S = \{ bb , bg , gb , gg \}$$

حيث bg تعنى أن الطفل الأكبر هو الولد بينما الطفل الأصغر هو البنت .

١ – حيث انه من المعلوم أن الطفل الآخر هو الأصغر فهذا يعنى أن الطفل الـــذي دخـــل إلى الغرفة هو الأكبر بالإضافة إلى انه ولد لذلك نفرض الحدث B هو أن الطفل الذي دخـــل إلى الغرفة هو الأكبر بالإضافة إلى انه ولد ، أي أن فضاء العينة المختزل

$$B = \{ bb , bg \}$$

ونفرض الحدث A هو أن الطفل الآخر ولد ، أي أن $A=\{bb\}$ ، إذن $A \cap B = \{bb\}$ وبالتالي فإن الاحتمال p أن يكون الطفل الآخر ولد يكون $p = \frac{1}{2}$.

٢ – حيث انه ليس هناك أية معلومات عن الطفل الآخر لذلك نفرض الحـــدث B هـــو أن الطفل الذي دخل إلى الغرفة ولد ، أي أن فضاء العينة المختزل

$$B = \{ bb , bg , gb \}$$

ونفرض الحدث A هو أن الطفل الآخر ولد ، أي أن $A = \{ bb \}$ ، إذن $A \cap B = \{bb\}$ وبالتالي فإن الاحتمال p يكون الطفل الآخر ولد يكون $p = \frac{1}{3}$.

٣ - قانون حاصل الضرب للاحتمال المشروط

Multiplication Law for Conditional Probability

يمكن الاستفادة من تعريف الاحتمال المشروط

$$P\left(A \mid B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

في حساب $P(A \cap B)$ وذلك بضرب الطرفين في $P(B)$ حيث $P(B) > 0$ فنحصل على ما يسمى بقاعدة الضرب

$$P(A \cap B) = P(B)\ P(A \mid B) \qquad (\mathrm{I})$$

وإذا كان $P(A) > 0$ فإنه باستبدال A محل B و استبدال B محل A نحصل على

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B \mid A) \qquad (\mathrm{II})$$

إذن حساب $P(A \cap B)$ يتوقف على كون أي الحدثان يقع أولاً ، فإذا كان $P(A \mid B)$ معلوم فإننا نستخدم القانون في المعادلة (I) بينما إذا كان $P(B \mid A)$ معلوم فإننا نستخدم القانون في المعادلة (II) .

مثال ١٤ :

صندوق يحتوي على 7 وحدات من إنتاج ما بها 2 وحدة معيبة ، تم سحب الوحدات من الصندوق بطريقة عشوائية واحدة بعد الأخرى بدون إرجاع . أوجد احتمال سحب الوحدتين المعيبتين في أول وثاني سحب .

الحل :

نفرض أن الحدث A هو سحب الوحدة الأولى معيبة والحدث B هو سحب الوحدة الثانية معيبة ، أذن المطلوب هو حساب $P(A \cap B)$ ، ومن قاعدة الضرب فإن

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B \mid A)$$

وحيث أن $P(B \mid A) = \frac{1}{6}$, $P(A) = \frac{2}{7}$ إذن

$$P(A \cap B) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$$

مثـال ١٥:

صندوق يحتوى على 6 كرات حمراء ، 4 كرات بيضاء تم سحب كرتان من الصندوق بطريقة عشوائية واحدة تلو الأخرى وبدون إرجاع .أوجد احتمال

١ - أن تكون الكرتان من اللون الأحمر .

٢ - أن تكون الكرتان من نفس اللون .

الحـل :

نفرض الحدث A هو أن الكرة المسحوبة أولا تكون حمراء والحدث B هو أن الكرة المسحوبة ثانيا تكون حمراء .

١ - الحدث أن تكون الكرتان من اللون الأحمر هو $A \cap B$. ومن قاعدة الضرب فإن

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|\ A)$$

وحيث أن $P(B|\ A) = \frac{5}{9}$, $P(A) = \frac{6}{10}$ إذن

$$P(A \cap B) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

٢ - الحدث C أن تكون الكرتان من نفس اللون هو أن تكون الكرتان من اللون الأحمر $A \cap B$ أو أن تكون الكرتان من اللون الأبيض $A' \cap B'$ حيث A' هو الحدث أن تكون الكرة المسحوبة أولاً بيضاء وهو مكملة أن تكون حمراء لأن الصندوق به لونان فقط ، B' هو الحدث أن تكون الكرة المسحوبة ثانياً بيضاء أي أن

$$C = (A \cap B) \cup (A' \cap B')$$

وحيث أن الأحداث $A' \cap B'$ ، $A \cap B$ متنافية ، إذن

$$P(C) = P((A \cap B) \cup (A' \cap B')) = P(A \cap B) + P(A' \cap B')$$

ومن قاعدة الضرب فإن

$$P(A' \cap B') = P(A')\ P(B'|\ A') = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

إذن

$$P(C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$$

وقاعدة الضرب في معادلة (II) يمكن تعميمها لحساب احتمال الوقوع المشترك لمجموعة من الأحداث فمثلا ،

في حالة ثلاثة أحداث A_1 , A_2 , A_3 إذا كان $P(A_1 \cap A_2) > 0$ فإن

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2 | A_1)\, P(A_3 | A_1 \cap A_2)}$$

وللتحقق من ذلك

حيث أن $P(A_1 \cap A_2) > 0$ يؤدى إلى $P(A_1) > 0$

إذن من تعريف الاحتمال المشروط

$$\begin{aligned} P(A_1)\, P(A_2 | A_1)\, P(A_3 | A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \times \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \times \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

والنظرية الآتية تصف تعميم لقاعدة الضرب في حالة n من الأحداث .

نظريـــة ٢ : قانون حاصل الضرب للاحتمال المشروط

لأي مجموعة من الأحداث $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ إذا كان

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1}) > 0 \qquad \forall \quad 1 < k \leq n$$

فـــإن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

$$= P(A_1)\, P(A_2 | A_1)\, P(A_3 | A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

مثال ١٦ :

صندوق يحتوي على 12 وحدة من إنتاج ما بها 4 وحدات معيبة ، اختيرت 3 وحدات عشوائياً من الصندوق واحدة تلو الأخرى بدون إرجاع ، أوجد :

١ – احتمال أن تكون 3 وحدات سليمة .

٢ – احتمال أن تكون الوحدة الأولى والثانية سليمة بينما الثالثة معيبة .

٣ – احتمال أن تكون واحدة على الأقل معيبة .

الحل :

عدد الوحدات 12	
8 سليمة	4 معيبة

نفرض أن الحدث A_1 هو سحب الوحدة الأولى سليمة

الحدث A_2 هو سحب الوحدة الثانية سليمة

الحدث A_3 هو سحب الوحدة الثالثة سليمة

١ – الحدث أن تكون الوحدات الثلاث سليمة هو $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ، وبالتالي

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2 | A_1)\,P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

وحيث أن

$$P(A_1) = \frac{8}{12} \quad , \quad P(A_2 | A_1) = \frac{7}{11} \quad , \quad P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{6}{10}$$

إذن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

٢ – الحدث أن تكون الوحدتان الأولى والثانية سليمتان بينما الوحدة الثالثة معيبة هو $A_1 \cap A_2 \cap A_3'$ حيث A_3' هو مكملة الحدث A_3 ويعني اختيار الوحدة الثالثة معيبة ، إذن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3') = P(A_1)\,P(A_2 | A_1)\,P(A_3' | A_1 \cap A_2)$$
$$= \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{28}{165}$$

٣ – الحدث أن تكون واحدة على الأقل معيبة هو مكملة الحدث أن تكون 3 وحدات سليمة أي انه $(A_1 \cap A_2 \cap A_3)'$ ، إذن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)' = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - \frac{14}{55} = \frac{41}{55}$$

٤ – الاحتمال الكلي ونظرية بييز

Total Probability and Bayes' Theorem

في بعض الحالات يكون من الصعب أن نحسب مباشرة احتمال وقوع حدث ما B من فضاء عينة S لتجربة عشوائية ، ولكن من الممكن حساب $P(B|A')$, $P(B|A)$ حيث A حدث آخر من فضاء العينة S ، ولمثل هذه الحالات يمكن استخدام النظرية التالية والتي تعرف بقانون الاحتمال الكلي وهذا القانون يستخدم في العديد من التطبيقات .

نظرية ٣ : قانون الاحتمال الكلي Law of Total Probability

نفرض أن A حدث من فضاء عينة S لتجربة عشوائية ما حيث

$$P(A) > 0 \quad , \quad P(A') > 0$$

إذن لأي حدث آخر B فإن

$$P(B) = P(A)\,P(B|A) + P(A')\,P(B|A')$$

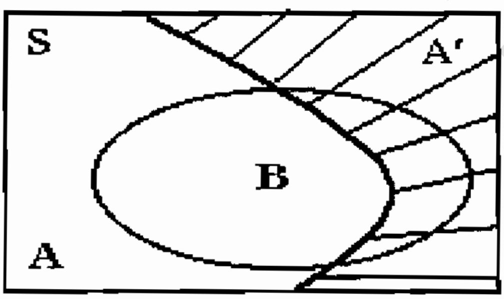
البرهان :

حيث أن A , A' تجزيئا لفضاء العينة S ، أي أن

$$S = A \cup A' \quad , \quad A \cap A' = \Phi$$

إذن

$$B = S \cap B = (A \cup A') \cap B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$



وحيث أن A , A' أحداث متنافية فإن $A' \cap B$, $A \cap B$ أحداث متنافية ، إذن

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$
$$= P(A)\,P(B|A) + P(A')\,P(B|A')$$

مثـــال ١٧:

صندوقان يحتوى الأول على 20 مصباح كهربائي منها عدد 4 مصـــابيح معيبـــة ويحتـــوى الصندوق الثاني على 30 مصباح كهربائي منها عدد 5 مصابيح معيبة . ألقي حجر نرد متزن مرة واحدة فإذا ظهر وجه يحمل عدد يقبل القسمة على 3 نختـــار عشـــوائياً مصبـــاح مـــن الصندوق الأول وخلاف ذلك نختار عشوائياً مصباح من الصندوق الثاني . أوجد احتمـــال أن المصباح الذي تم اختياره يكون معيب .

الحـــل :

نفرض الحدث A هو اختيار مصباح من الصندوق الأول وبالتالي الحدث A' هـــو اختيـــار مصباح من الصندوق الثاني ونفرض أن B هو الحدث اختيار مصباح معيب . إذن الاحتمـــال المطلوب هو $P(B)$ ومن قانون الاحتمال الكلي بنظرية (٣) فإن

$$P(B) = P(A)\,P(B|A) + P(A')\,P(B|A')$$

وحيث أن ظهور وجه يحمل عدد يقبل القسمة على 3 أي ظهور 3 أو 6 يؤدى إلى أن نختـــار عشوائياً مصباح من الصندوق الأول وبالتالي وقوع الحدث A بينما ظهور 1 أو 2 أو 4 أو 5 يؤدى إلى أن نختار عشوائياً مصباح من الصندوق الثاني وبالتالي وقوع الحدث A' ، إذن

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad , \quad P(A') = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(B|\,A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \quad , \quad P(B|\,A') = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)\,P(B|A) + P(A')\,P(B|A') \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{6} \\ &= \frac{8}{45} \end{aligned}$$

نظريـــة ٤ : قانون الاحتمال الكلي في الحالة العامة

إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تجزيئا لفضاء العينة S لتجربة عشـــوائية حيث $\{1,2, \ldots ,n\}$ $P(A_i) > 0 \quad \forall\, i \in \{1,2, \ldots ,n\}$ وكان B أي حدث آخر في فضاء العينة فإن

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B \mid A_i)$$

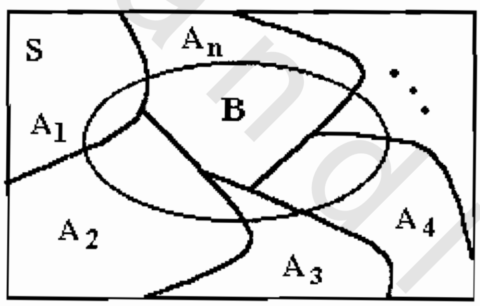
البرهان :

حيث أن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تجزيئا لفضاء العينة S ، أي أن

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad , \quad A_i \cap A_j = \Phi \quad \forall \quad i \neq j \quad , \quad i, j \in \{1,2, \ldots ,n\}$$

إذن

$$B = S \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$



وحيث أن A_i أحداث متنافية لكل $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ فإن $A_i \cap B$ أحـــداث متنافية لكل $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. إذن

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B \mid A_i)$$

مثـــال ١٨ :

ثلاث ماكينات تنتـــج على الترتيب 20% ، 30% ، 50% من الإنتـــاج الكلي لأحـد المصانع ، وكانت نسبة إنتاج قطعة تالفـــة من الماكينات الثلاث هي 5% ، 4% ، 3% على الترتيب . إذا سحبت قطعة من الإنتاج الكلي عشوائياً ، فما احتمال أن تكون تالفـــة ؟

الحـــل :

نفرض أن A_1 هو الحدث أن القطعة المسحوبة كانت من إنتاج الماكينة الأولى

A_2 هو الحدث أن القطعة المسحوبة كانت من إنتاج الماكينة الثانية

A_3 هو الحدث أن القطعة المسحوبة كانت من إنتاج الماكينة الثالثة

ونفرض أن الحدث B هو سحب قطعة تالفة

$$P(A_1)=\frac{50}{100}=\frac{5}{10}, \quad P(A_2)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10} \quad , \quad P(A_3)=\frac{20}{100}=\frac{2}{10}$$

$$P(B|A_1)=\frac{3}{100} \quad , \quad P(B|A_2)=\frac{4}{100} \quad , \quad P(B|A_3)=\frac{5}{100}$$

ومن قانون الاحتمال الكلي ، إذن

$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i)\,P(B|A_i) \\
&= P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3) \\
&= \frac{5}{10}\times\frac{3}{100}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{100}+\frac{2}{10}\times\frac{5}{100} \\
&= \frac{15+12+10}{1000} \\
&= \frac{37}{1000}
\end{aligned}$$

نظرية ٥ : نظرية بييــــز Bayes' Theorem

إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تجزيئا لفضـــاء العينـة S وكان $P(A_i) > 0 \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$ فإنه لأي حدث B من فضاء العينة S حيث $P(B) > 0$ يكون

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k)\, P(B | A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B | A_i)}$$

البرهــان :

من تعريف الاحتمال المشروط ، نعلم أن

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} \qquad (1)$$

$$P(A_k \cap B) = P(A_k)\, P(B | A_k) \qquad (2)$$

وحيث أن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تجزيئا لفضاء العينة S ، أي أن

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad , \quad A_i \cap A_j = \Phi \quad \forall \quad i \neq j \quad , \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

إذن

$$B = S \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$

وحيث أن A_i أحداث متنافية لكل $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ فإن $A_i \cap B$ أحداث متنافية لكل $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ، وبالتالي

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

بالتـــعويض من (2) نحصل على

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B | A_i) \qquad (3)$$

وبالتعويض من المعادلات (2) ، (3) في المعادلة (1) ينتج المطلوب .

مثـــال ١٩:

في مثال (١٨) إذا سحبت قطعة من الإنتاج الكلي عشوائياً ووجد أنها تالفـــة ، فمـــا هـــو احتمال أن تكون من الماكينة الثانية ؟

الحــل :

نفرض أن الحدث B هو سحب قطعة تالفة ، إذن المطلوب هو $P\left(A_2 \mid B\right)$

$$P\left(A_2 \mid B\right)=\frac{P\left(A_2\right) P\left(B \mid A_2\right)}{\sum_{i=1}^{3} P\left(A_i\right) P\left(B \mid A_i\right)}=\frac{\frac{3}{10} \times \frac{4}{100}}{\frac{37}{1000}}=\frac{12}{37}$$

مثـــال ٢٠ :

في إحدى كليات التربية بجمهورية مصر العربية يدرس % 25 من الطـــلاب ، % 10 مـــن الطالبات في قسم الرياضيات بالكلية علما بأن % 60 من الدارسين بالكلية من الطالبات . تم اختيار أحد الأشخاص الدارسين بالكلية عشوائياً ووجد انه يدرس في قسم الرياضيـــات فمـــا احتمال أن يكون طالبة .

الحــل :

نفرض الحدث A أنه تم اختيار طالبة وبالتالي فإن A' هو الحدث اختيار طالب . إذن

$$P(A)=\frac{60}{100}=0.6 \quad , \quad P(A')=1-0.6=0.4$$

نفرض M هو الحدث أن الشخص الذي تم اختياره عشوائياً يدرس في قسم الرياضيات . إذن

$$P(M \mid A)=\frac{10}{100}=0.1 \quad , \quad P(M \mid A')=\frac{25}{100}=0.25$$

المطلوب هو حساب $P(A \mid M)$ وبتطبيق نظرية بييز

$$P(A \mid M)=\frac{P(A)\,P(M \mid A)}{P(A)\,P(M \mid A)+P(A')\,P(M \mid A')}$$

$$=\frac{0.6 \times 0.1}{0.6 \times 0.1+0.4 \times 0.25}=\frac{3}{8}$$

مثـــال ٢١ :

يتنافس ثلاثــة أشخاص على منصب مدير لإحدى الشركات ، وكانت احتمالات الفوز لهــم 0.3 للأول و 0.5 للثاني و 0.2 للثالث . وإذا كان احتمال زيادة المبيعات للشركة إذا فـــاز الشخص الأول هو 0.6 وإذا فاز الشخص الثاني هو 0.4 وإذا فاز الشخص الثالث هو 0.5

١ – أوجد احتمال حدوث زيادة في مبيــعات الشركة .

٢ – إذا حدث زيادة في مبيعات الشركة فما هو احتمال أن يكون الشخص الثالث قد فاز بمنصب المدير ؟

الحـــل :

نفرض أن A_1 هو الحدث فوز الشخص الأول بمنصب المدير

A_2 هو الحدث فوز الشخص الثاني بمنصب المدير

A_3 هو الحدث فوز الشخص الثالث بمنصب المدير

ونفرض أن الحدث B هو حدوث زيادة في مبيــعات الشركة ، إذن

$$P(A_1)=\frac{3}{10} \quad , \quad P(A_2)=\frac{5}{10} \quad , \quad P(A_3)=\frac{2}{10}$$

$$P(B|A_1)=\frac{6}{10} \quad , \quad P(B|A_2)=\frac{4}{10} \quad , \quad P(B|A_3)=\frac{5}{10}$$

١ – احتمال حدوث زيادة في مبيعات الشركة هو $P(B)$ ونحصل عليــه مـــن قـــانون الاحتمال الكلي كالآتي

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i)\, P(B|A_i) \\ &= P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3) \\ &= \frac{3}{10}\times\frac{6}{10}+\frac{5}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{5}{10}=\frac{66}{100} \end{aligned}$$

٢ – المطلوب هو $P(A_3|B)$ وبتطبيق نظرية بييز ، إذن

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)\,P(B|A_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)\,P(B|A_i)}=\frac{\frac{2}{10}\times\frac{5}{10}}{\frac{66}{100}}=\frac{10}{66}$$

مثـــال ٢٢ :

ثلاثة صناديق متشابهة تحتوي على كرات ملونة كما بالجدول الآتي :

الكرات	الصندوق I	الصندوق II	الصندوق III
حمراء R	3	2	5
بيضاء W	5	1	3
سوداء B	2	3	1
المحتـــوى	10	6	9

تم اختيار صندوق عشوائياً وسحبت منه كرة ، فإذا كانت الكرة المســحوبة ســوداء أوجــد احتمال أن تكون الكرة المسحوبــة من الصندوق II .

الحـــــل : المطلوب هو حساب $P(II \mid B)$ وفي هذا المثال يوجد لدينا تجربة عشــــوائية ذات مرحلتين

المرحــلة الأولى : هي اختيار صندوق عشوائياً من ثلاثة صناديق

والمرحـــلة الثانية : هي اختيار كرة عشوائياً من الصندوق الذي تم اختياره في التجربة الأولى

وحيث أن الصناديق الثلاثة متشابهة فإن احتمال اختيار أياً منها متساوي ، أي أن

$$P(I) = P(II) = P(III) = \tfrac{1}{3}$$

ومن محتويات الصناديق نجد أن

$$P(B \mid I) = \tfrac{2}{10} \quad , \quad P(B \mid II) = \tfrac{3}{6} \quad , \quad P(B \mid III) = \tfrac{1}{9}$$

وبتطبيق نظرية بييز ، إذن

$$P(II \mid B) = \frac{P(II)\,P(B \mid II)}{P(I)\,P(B \mid I) + P(II)\,P(B \mid II) + P(III)\,P(B \mid III)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{6}}{\frac{1}{3} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{15} + \frac{1}{6} + \frac{1}{27}} = \frac{45}{73}$$

مثـــال ٢٣ :

صندوق يحتوى على 20 كرة منها 7 كرات حمراء والباقي كرات زرقـــاء ســـحبت كرتـــين عشوائياً على الترتيب واستبعدتا من الصندوق دون النظر إلى ألوانها وبعد ذلك سحبت كـــرة ثالثة عشوائياً من الصندوق ووجد أنها حمراء ، ما احتمال أن تكون الكرتان اللتان ســحبتا أولاً من اللون الأحمر ؟

الحـــل : في هذا المثال يوجد لدينا تجربة عشوائية ذات مرحلتين

المرحـــلة الأولى : هي سحب كرتين عشوائياً على الترتيب من الصندوق دون النظر إلى ألوانهـا وفي هذه الحالة قد تكون الكرتان من اللون الأحمر أو مختلفتا اللون أو من اللون الأزرق .

والمرحـــلة الثانية : هي سحب كرة ثالثة عشوائياً من الصندوق وبه 18 كرة .

نفرض A_1 هو الحدث أن تكون الكرتان اللتان سحبتا أولاً من اللون الأحمر وأن A_2 هـــو الحدث أن تكون الكرتان اللتان سحبتا أولاً مختلفتا اللون وهذا يعنى أن الكرة المـــسحوبة أولاً تكون حمراء والثانية زرقاء أو أن الكرة المسحوبة أولاً زرقاء والثانية حمراء ونفرض A_3 هـــو الحدث أن تكون الكرتان اللتان سحبتا أولاً من اللون الأزرق . وكذلك نفـــرض أن B هـــو الحدث أن الكرة الثالثة المسحوبة تكون حمراء ، والمطلوب هو حساب $P(A_1|B)$. إذن

$$P(A_1)=\frac{7}{20}\times\frac{6}{19}=\frac{21}{190} \quad , \quad P(B|A_1)=\frac{5}{18}$$

$$P(A_2)=\frac{7}{20}\times\frac{13}{19}+\frac{13}{20}\times\frac{7}{19}=\frac{91}{190} \quad , \quad P(B|A_2)=\frac{6}{18}$$

$$P(A_3)=\frac{13}{20}\times\frac{12}{19}=\frac{78}{190} \quad , \quad P(B|A_3)=\frac{7}{18}$$

وبتطبيق نظرية بييز ، إذن

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}$$

$$=\frac{\frac{21}{190}\times\frac{5}{18}}{\frac{21}{190}\times\frac{5}{18}+\frac{91}{190}\times\frac{6}{18}+\frac{78}{190}\times\frac{7}{18}}=\frac{105}{1197}$$

٥ - شجرة الاحتمال Probability Tree

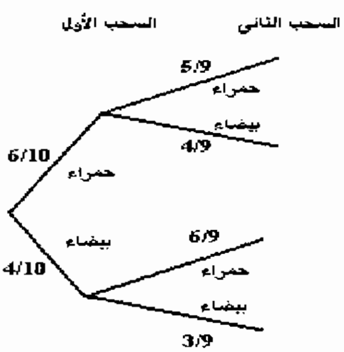
إذا كان لدينا مجموعة حوادث تمثل تجزيئا لفضاء العينة لتجربة عشوائية ما ، وكان لدينا حدث يأتي من هذه المجموعة من الحوادث فإن شجرة الاحتمال تعتبر من الطرق المناسبة لحساب احتمال مثل هذا الحدث حيث يتم تمثيل فضاء العينة بأصل الشجرة ، ونمثل تجزي فضاء العينة بفروع الشجرة ، ونمثل تجزي كل فرع بفروع جديدة فى الشجرة وهكذا . ويمكن الاستفادة من شجرة الاحتمال أيضا في تمثيل نتائج التجربة العشوائية المتعددة المراحل وتعيين احتمال كل فرع من فروع الشجرة التي تمثل هذه التجربة حيث يتم استخدام نظرية حاصل الضرب للاحتمال المشروط لحساب احتمال أي ناتج ممثل بمسار معطى في شجرة الاحتمال والأمثلة الآتية توضح لنا أسلوب الحل باستخدام شجرة الاحتمال .

مثـال ٢٤ :

صندوق يحتوى على 6 كرات حمراء ، 4 كرات بيضاء تم سحب كرتان من الصندوق بطريقة عشوائية واحدة تلو الأخرى وبدون إرجاع .باستخدام شجرة الاحتمال أوجد احتمال

١ – أن تكون الكرتان من اللون الأحمر . ٢ – أن تكون الكرتان من نفس اللون .

الحل : نلاحظ أن التجربة ذات مرحلتين ، فعند سحب الكرة الأولى فإنها تكون إما حمراء أو بيضاء وهذا يمثل المرحلة الأولى ، ومع كل لون من هذه الألوان يرتبط لونان (الأحمر والأبيض) كنتيجة لسحب الكرة الثانية وهذا يمثل المرحلة الثانية .



$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

$\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$

$\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$

$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

ونمثل هذه التجربة بشجرة الاحتمال حيث حسبنا احتمال كل فرع من فروع الشجرة كما موضح بالشكل .

١– لحساب احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأحمر نأخذ المسار حمراء ثم حمراء فيكون الاحتمال هو $\frac{1}{3}$.

٢– لحساب احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون نأخذ المسار حمراء ثم حمراء والمسار بيضاء ثم بيضاء فيكون الاحتمال هو $\frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$

مثـال ٢٥ :

يحتوي صندوق A على 9 ورقات مرقمة من 1 إلى 9 ويحتوي صندوق B على 5 ورقـات مرقمة من 1 إلى 5 ، اختير صندوق بطريقة عشـوائية وسحبت منه ورقـة ، باسـتخدام شجرة الاحتمال للتجربة أوجد

١ – احتمال أن تكون الورقة المسحوبة تحمل رقم زوجي .

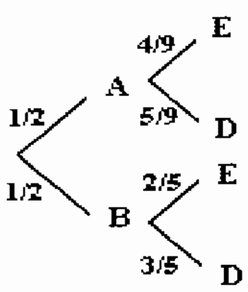
٢ – إذا كان رقم الورقة المسحوبة زوجياً فأوجد احتمال أن الورقة سحبت من الصندوق A .

الحـل : التجربة ذات مرحلتين

المرحلة الأولى:اختيار صندوق إما A أو B وهذه يمثلها فرعين بالشجرة واحتمال أياً منهم $\frac{1}{2}$.

المرحلة الثانية:سحب ورقة عشوائياً من الصندوق الذي تم اختياره في المرحلـة الأولى وهـذه الورقة تكون إما زوجية E أو فردية D .

ونمثل هذه التجربة بشـجرة الاحتمـال حيث حسبنا احتمال كل فرع من فـروع الشجرة كما موضح بالشكل ، وبـالنظر إلى شجرة الاحتمال والاحتمالات المرتبطة بكل فرع نسـتطيع إيجـاد احتمـالات الحوادث المختلفة للتجربة .



$$\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

١ – لحساب احتمال أن تكون الورقة المسحوبة تحمل رقم زوجي $P(E)$ نلاحظ في شجرة الاحتمال أنه يوجد مساران يؤديان إلى سحب رقم زوجي E ، إذن

$$P(E)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{9}+\frac{1}{5}=\frac{19}{45}$$

٢ – لحساب احتمال أن تكون الورقة قد سحبت من الصندوق A إذا كان رقـم الورقـة المسحوبة زوجياً أي لحساب $P(A|E)$

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{2/9}{19/45}=\frac{10}{19}$$

مثـــال ٢٦:

ثلاثة صناديق تحوى كرات ملونة موزعة كما يلى :

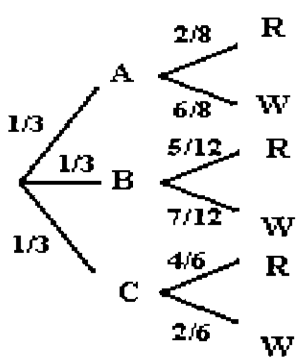
الكرات	الصندوق A	الصندوق B	الصندوق C
حمراء R	2	5	4
بيضاء W	6	7	2

اخترنا أحد الصناديق بصورة عشوائية وسحبنا منه كرة عشوائياً .ارسم شـــجرة الاحتمـــال واستنتج منها:

١ – احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء .

٢ – إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق B .

الحل : التجربة ذات مرحلتين المرحلة الأولى هي اختيار صندوق إما A أو B أو C وهـــذه يمثلها ثلاثة فروع بالشجرة واحتمال أياً منها $\frac{1}{3}$. والمرحلة الثانية هي سحب كرة عشوائياً من الصندوق الذي تم اختياره في المرحلة الأولى وهذه الكرة تكون إما حمـــراء R أو بيضـــاء W ونمثل هذه التجربة بشجرة الاحتمال حيث حسبنا احتمال كل فرع من فروع الشجرة كمـــا موضح بالشكل .



$\frac{1}{3} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{12}$

$\frac{1}{3} \times \frac{6}{8} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{3} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{36}$

$\frac{1}{3} \times \frac{5}{12} = \frac{7}{36}$

$\frac{1}{3} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{9}$

$\frac{1}{3} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$

١ – لحساب احتمال أن تكـــون الكرة المسحوبة بيضـــاء P(W) نلاحظ في شجرة الاحتمال أنـــه يوجد ثلاث مسارات تـــؤدى إلى سحب كرة بيضاء W ، إذن

$$P(W) = \frac{1}{4} + \frac{7}{36} + \frac{1}{9} = \frac{20}{36}$$

٢– لحساب احتمال أن تكون الكرة من الصندوق B إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء W

$$P(B \mid W) = \frac{P(B \cap W)}{P(W)} = \frac{7/36}{20/36} = \frac{7}{20}$$

مثـــال ٢٧ :

صندوقان متشابهان ، يحتوى الصندوق الأول على 3 كرات حمراء ، 2 كرة بيضاء ويحتوى الصندوق الثاني على 2 كرة حمراء ، 5 كرات بيضاء . تم اختيار صندوق بطريقة عشوائية ثم سحبت منه كرة عشوائياً ووضعت في الصندوق الآخر بدون النظر إلى لونها ثم سحبت كرة من هذا الصندوق الآخر . ارسم شجرة الاحتمال للتجربة واستنتج منها ما يأتى :

١ – احتمال أن تكون الكرتان في السحب الأول والثاني من نفس اللون .

٢– احتمال أن تكون الكرة فى السحب الثانى بيضاء .

٣– احتمال أن تكون الكرة فى السحب الثانى بيضاء بشرط أن الكرة فى السحب الأول كانت حمراء.

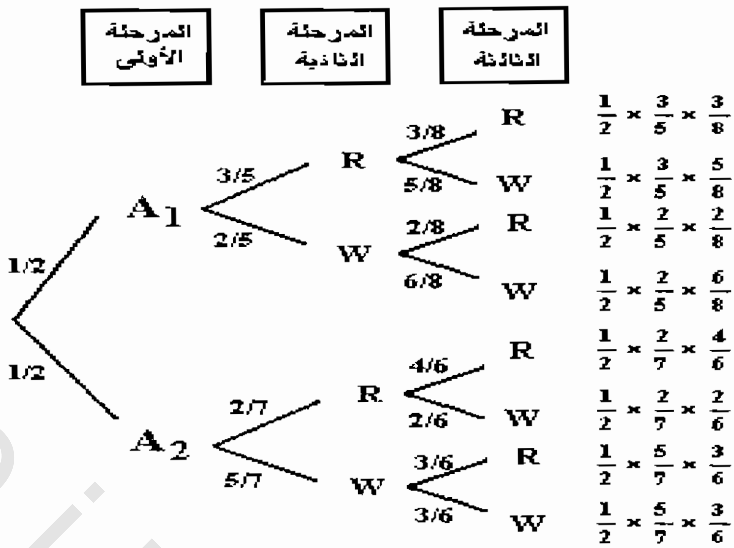
٤ – احتمال أن تكون الكرة فى السحب الثانى بيضاء بشرط أن الكرة فى السحب الأول كانت من الصندوق الأول .

الحـــل :

التجربة ذات ثلاثة مراحل ، الأولى هي اختيار أما الصندوق الأول A_1 أو الصندوق الثـاني A_2 وهذه يمثلها فرعان بالشجرة واحتمال أياً منها $\frac{1}{2}$ لأن الصندوقان متشابهان ، والمرحلة الثانية هي سحب كرة عشوائياً من الصندوق الذي تم اختياره في المرحلة الأولى وهذه الكـرة تكون إما حمراء R أو بيضاء W ويمثل ذلك فرعان بالشجرة في كل اختيار من المرحلة الأولى ، والمرحلة الثالثة هي سحب كرة عشوائياً من الصندوق الآخر بعد أن نضيف أليه الكرة الـتي تم سحبها في المرحلة الثانية وفي هذه الحالة يزداد عدد الكرات في هذا الصندوق بمقـــدار كـرة واحدة وقد تكون هذه الكرة إما حمراء R أو بيضاء W ويمثل ذلك فرعان بالشجرة في كـل اختيار من المرحلة الثانية وبالتالي يمكن تمثيل التجربة بشجرة الاحتمال حيث حسبنا احتمـال كل فرع من فروع الشجرة كما موضح بالشكل .

١ – الحدث B أن تكون كلتا الكرتان من نفس اللون نحصل عليـه مـن المسـارات الأول والرابع والخامس والثامن . إذن

$$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{6}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{901}{1980}$$



٢- الحدث C أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء نحصل عليه من المسارات الثاني والرابع والسادس والثامن . إذن

$$P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{947}{1680}$$

٣- الحدث D أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء بشرط أن الكرة في السحب الأول حمراء نحصل عليه من المسارات الثاني والسادس . إذن

$$P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{79}{336}$$

٤ - الحدث E أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء بشرط أن الكرة في السحب الأول من الصندوق الأول نحصل عليه من المسارات الثاني والرابع . إذن

$$P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{6}{8} = \frac{27}{80}$$

٦ - الأحداث المستقلة Independent Events

نفرض أن A , B حدثان من فضاء العينة S لتجربة عشوائية ما ، ونفرض أن $P(B)>0$, $P(A)>0$. بوجه عام ، نعلم أن الاحتمال المشروط للحدث A إذا عُلم B لا يساوى احتمال وقوع الحدث A ولكن إذا حدث وكان $P(A|B)=P(A)$ في هذه الحالة نقول أن الحدث A مستقل عن الحدث B وهذا يعنى أن علمنا بوقوع الحدث B لن يؤثر في فرصة وقوع الحدث A ، ومن تعريف الاحتمال المشروط

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

إذن

$$P(A|B)=P(A) \quad \Rightarrow \quad \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=P(B)$$

$$\Rightarrow \quad P(B|A)=P(B)$$

ومن هذا نستنتج أنه إذا كان الحدث A مستقل عن الحدث B فإن الحدث B يكون أيضا مستقل عن الحدث A ، وبمعنى آخر ، إذا كان علمنا بوقوع الحدث B لن يؤثر في فرصة وقوع الحدث A فإن علمنا بوقوع الحدث A لن يؤثر في فرصة وقوع الحدث B . ومن هذا يمكننا القول أن علاقة الاستقلال هي علاقة تماثل على مجموعة كل الأحداث من فضاء العينة ، وكنتيجة لخاصية التماثل التى تحققها علاقة الاستقلال فإنه بدلا من تقديم تعريف لاستقلال الحدث A عن الحدث B وتقديم تعريف لاستقلال الحدث B عن الحدث A فإننا نأخذ تعريف لاستقلال الحدثان A , B كما في التعريف الآتي :

تعريف ٢ : الحدثان المستقلان

يقال أن الحدثان A , B مستقلان Independent إذا كان

$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$$

وفى هذه الحالة نقول أن مجموعة الأحداث { A , B } هي مجموعة مستقلة من الأحداث وإذا كان الحدثان غير مستقلان فإنه يقال انهما يعتمدان على بعضهما Dependent .

ملاحظة :

في التعريف السابق لاستقلال حدثان A , B لم نشترط أن $P(A) > 0$ أو $P(B) > 0$

وبالتالي فإن

١ - أي حدث A بحيث $P(A)=0$ يكون مستقل عن كل حدث آخر B .

٢ - أي حدث A بحيث $P(A)=1$ يكون مستقل عن كل حدث آخر B .

مثـــال ٢٨ :

في تجربة إلقاء عملة معدنية متزنة مرتين نفرض أن الحدث A هو ظهور صورة في الرمية الأولى ونفرض أن الحدث B هو ظهور صورة في الرمية الثانية .

هل A , B أحداث مستقلة ؟

الحـــل :

في تجربة إلقاء عملة معدنية متزنة مرتين فإننا نحصل على فضاء العينة المنتظم S

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

حيث H تعنى ظهور وجه الصورة ، T تعنى ظهور وجه الكتابة .

وحيث أن الحدث A هو ظهور صورة في الرمية الأولى

والحدث B هو ظهور صورة في الرمية الثانية ،

إذن

$$A = \{HH, HT\} \ , \ B = \{HH, TH\} \ , \ A \cap B = \{HH\}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \ , \ P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \ , \ P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

وحيث أن

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)\,P(B)$$

إذن A , B أحداث مستقلة .

مثـــال ٢٩:

صندوق يحتوى على 5 كرات حمراء ، 7 كرات بيضاء . تم سحب كرتان مـــن الصنـــدوق بطريقة عشوائية واحدة تلو الأخرى .نفرض أن الحدث A هو أن تكون الكرة الأولى حمـــراء ونفرض أن الحدث B هو أن تكون الكرة الثانية حمراء .

١ – إذا كان السحب مع الإرجاع هل الحدثان A , B مستقلان ؟

٢ – إذا كان السحب بدون إرجاع فهل الحدثان A , B مستقلان ؟

الحـــل :

١ – السحب مع الإرجاع

في هذه الحالة $P(B)=\frac{5}{12}$, $P(A)=\frac{5}{12}$ وباستخدام القاعدة الأساسية للعد فإن

$$P(A\cap B)=\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}=\frac{25}{144}$$

وحيث أن $P(A\cap B)=\frac{25}{144}=P(A)\,P(B)$ إذن الحدثان A , B مستقلان .

٢ – السحب بدون إرجاع

لحساب احتمال B نستخدم قانون الاحتمال الكلي

$$P(B)=P(A)\,P(B|A)+P(A')\,P(B|A')$$

وحيث أن

$$P(A)=\frac{5}{12}\quad ,\quad P(A')=1-P(A)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}\quad ,$$

$$P\left(B|A\right)=\frac{4}{11}\qquad ,\qquad P\left(B|A'\right)=\frac{5}{11}$$

إذن

$$P(B)=\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}+\frac{7}{12}\times\frac{5}{11}=\frac{5}{12}$$

ومن ذلك ينتج أن $P\left(B|A\right)\neq P(B)$

إذن الحدثان A , B غير مستقلان .

مثـــال ٣٠:

في تجربة اختيار عددا عشوائياً من مجموعة الأعداد $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ نفـــرض أن الحدث A هو اختيار عدد يقبل القسمة على 2 والحدث B هو اختيار عدد يقبل القســـمة على 3 و الحدث C هو اختيار عدد يقبل القسمة على 5 . هل الحدثان

١ – A , B مستقلان ؟ ٢ – A , C مستقلان ؟ ٣ – B , C مستقلان ؟

الحــل : الأحداث A , B , C هي

$$A = \{2n : 1 \le n \le 50\},$$
$$B = \{3n : 1 \le n \le 33\},$$
$$C = \{5n : 1 \le n \le 20\}$$

إذن

$$P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{33}{100}, \quad P(C) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

١ – هل الحدثان A , B مستقلان ؟

الحدث $A \cap B$ هو اختيار عدد يقبل القسمة على كل من 3 , 2 أي يقبل القسمة على 6 إذن

$$A \cap B = \{6n : 1 \le n \le 16\}, \quad P(A \cap B) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$$

وحيث أن $P(A \cap B) \ne P(A)\,P(B)$ ، إذن الحدثان A , B غير مستقلان .

٢ – هل الحدثان A , C مستقلان ؟

الحدث $A \cap C$ هو اختيار عدد يقبل القسمة على كل من 5 , 2 أي على 10 إذن

$$A \cap C = \{10n : 1 \le n \le 10\}, \quad P(A \cap C) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

وحيث أن $P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$ ، إذن الحدثان A , C مستقلان .

٣ – هل الحدثان B , C مستقلان ؟

الحدث $B \cap C$ هو اختيار عدد يقبل القسمة على كل من 5 , 3 أي على 15 إذن

$$B \cap C = \{15n : 1 \le n \le 6\}, \quad P(B \cap C) = \frac{6}{100}$$

وحيث أن $P(B \cap C) \ne P(B)\,P(C)$ ، إذن الحدثان B , C غير مستقلان .

مثـــال ٣١ :

إذا كان الحدث A يعنى أن للعائلة أطفال من النوعين (ذكور وإناث) والحدث B يعنى أن للعائلة ولد واحد على الأكثر ، أثبت أن

١ – إذا كان للعائلة ثلاثة أطفال فإن الحدثان A , B مستقلان .

٢ – إذا كان للعائلة طفلان فإن الحدثان A , B غير مستقلان .

الحــل :

١ – إذا كان للعائلة ثلاثة أطفال فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{ bbb , bbg , bgb , bgg , gbb , gbg , ggb , ggg \}$$

إذن

$$A = \{ bbg , bgb , bgg , gbb , gbg , ggb \}$$

$$B = \{ bgg , gbg , ggb , ggg \}$$

$$A \cap B = \{ bgg , gbg , ggb \}$$

$$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad , \quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

وحيث أن $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ إذن الحدثان A , B مستقلان .

٢ – إذا كان للعائلة طفلان فإن فضاء العينة يكون

$$S = \{ bb , bg , gb , gg \}$$

إذن

$$A = \{ bg , gb \}$$

$$B = \{ bg , gb , gg \}$$

$$A \cap B = \{ bg , gb \}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{3}{4} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

وحيث أن $P(A \cap B) \neq P(A)\,P(B)$ إذن الحدثان A , B غير مستقلان .

مثـــال ٣٢ :

يوجد في مدينة مـــا وحدتين لإطفاء الحرائق مستقلتين عن بعضهما البعض ، فإذا كان احتمـــال وصول الأولى إلى مكان حريق ما في الوقت المناسب هو 0.95 واحتمـــال وصول الثانية لنفس المكان هو 0.90 فما احتمال وصول إحدى الوحدتين على الأقل إلى مكان الحريـــق المذكور ؟

الحـــل :

نفرض أن الحدث A هو وصول وحدة الإطفاء الأولى إلى مكان الحريق
وأن الحدث B هو وصول وحدة الإطفاء الثانية إلى مكان الحريق

إذن

$$P(A) = 0.95 \quad , \quad P(B) = 0.9$$

وحيث أن وحدتي الإطفاء مستقلتين عن بعضهما البعض ، إذن A , B حدثان مســـــتقلان ، ومن تعريف الأحداث المستقلة

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B) = (0.95) \times (0.9) = 0.855$$

احتمال وصول إحدى الوحدتين على الأقل إلى مكان الحريـــق المذكور هو $P(A \cup B)$

وحيث أن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

إذن

$$P(A \cup B) = 0.95 + 0.9 - 0.855 = 0.995$$

نظريـــة ٦: إذا كان الحدثان A , B مستقلان فإن الحدثان A , B' يكونان مســـتقلان .

البرهـــان :

حيث أن A , B حدثان مستقلان فإن $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

وسوف نحاول إثبات أن A , B' حدثان مســـتقلان ، أي نحاول إثبات أن

$$P(A \cap B') = P(A)\ P(B')$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)\,P(B) \\ &= P(A)\,(1 - P(B)) \\ &= P(A)\,P(B') \end{aligned}$$

ملاحظة : إذا كان الحدثان A , B مستقلان فإن الحدثان A' , B' يكونان مستقلان .

ويمكن التحقق من ذلك باستخدام التعريف ومن قانون ديمورجان

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= 1 - P(A) - P(B)[1 - P(A)] \\ &= [1 - P(A)][1 - P(B)] \\ &= P(A')P(B') \end{aligned}$$

كما يمكن التحقق من ذلك أيضا عن طريق تطبيق النظرية السابقة على الحدثان A , B فنحصل على أن A , B' حدثان مستقلان ثم تطبيق النظرية مرة ثانية على الحدثان B' , A فنحصل على أن A' , B' حدثان مستقلان . ومن هذا نستنتج أنه إذا كان الحدثان A , B مستقلان فإن علمنا بوقوع الحدث A أو علمنا بعدم وقوع الحدث A لن يؤثر في فرصة وقوع أو عدم وقوع الحدث B والعكس صحيح .

نظرية ٧ :

إذا كان الحدثان A , B أحداث متنافية وكان $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ فإن الحدثان A , B يكونان غير مستقلان أي انهما يعتمدان على بعضهما .

البرهان:

نفرض أن A , B أحداث متنافية ، أي أن $A \cap B = \Phi$ ونفرض أن $P(B)>0$, $P(A)>0$ باستخدام أسلوب البرهان بالتناقض نفرض أن عكس المطلوب هو الصواب ، أي نفرض أن الحدثان A , B مستقلان . إذن من تعريف الأحداث المستقلة فإن $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ وحيث أن $P(A \cap B)=0 \Rightarrow A \cap B = \Phi$ إذن $P(A)\,P(B) = 0$ وهذا يعني أنه إما $P(A) = 0$ أو $P(B) = 0$ وهذا يناقض الفرض $P(A) > 0$, $P(B) > 0$

إذن الفرض أن الحدثان A , B مستقلان هو فرض خاطئ ، وبالتالي فإن الصواب هو أن الحدثان A , B يكونان غير مستقلان .ومن جهة أخرى نحن نعلم انه إذا كان A , B أحداث متنافية فإن وقوع أحدهما ينفي وقوع الحدث الآخر ، أي أنه إذا وقع أحدهما فإن احتمال وقوع الحدث الآخر يساوى صفر .

والآن باتباع نفس الأسلوب السابق عند تعريف استقلال حدثان فانه يمكن مد تعريف الاستقلال إلى ثلاثة أحداث A , B , C حيث نقول الهم أحداث مستقلة إذا كان علمنا بوقوع أحدهما أو إذا كان علمنا بالوقوع المشترك لأي زوج من هذه الأحداث لن يؤثر في فرصة وقوع الأحداث المتبقية . أي أن الأحداث الثلاثة A , B , C تكون مستقلة إذا كان المجموعات $\{A,B\} , \{A,C\} , \{B,C\} , \{A,B\cap C\} , \{B,A\cap C\} , \{C,A\cap B\}$ جميعها مجموعات مستقلة من الأحداث . إذن الأحداث الثلاثة A , B , C تكون مستقلة إذا كان

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$$
$$P(A\cap C) = P(A)\,P(C)$$
$$P(B\cap C) = P(B)\,P(C)$$
$$P(A\cap(B\cap C)) = P(A)\,P(B\cap C)$$
$$P(B\cap(A\cap C)) = P(B)\,P(A\cap C)$$
$$P(C\cap(A\cap B)) = P(C)\,P(A\cap B)$$

ونلاحظ أن هذه العلاقات يمكن إنقاصها حيث أن العلاقات الثلاثة الأولى بالإضافة إلى العلاقة $P(A\cap B\cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ تؤدى إلى العلاقات الثلاثة الأخيرة . إذن تعريف استقلال ثلاثة أحداث يمكن صياغته في الصورة المختصرة الآتية :

تعريف ٣: استقلال ثلاثة أحداث

الأحداث الثلاثة A , B , C تكون مستقلة Independent إذا كان

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$$
$$P(A\cap C) = P(A)\,P(C)$$
$$P(B\cap C) = P(B)\,P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$$

وفى هذه الحالة نقول أن مجموعة الأحداث $\{A,B,C\}$ هي مجموعة مستقلة من الأحداث .

والمثال الآتي يوضح لنا أن الشرط $P(A\cap B\cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ وبوجه عام ، غير كافئ لاستقلال مجموعة الأحداث $\{A,B,C\}$.

مثال ٣٣:

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين ، نفرض الحدث A هو أن يظهر في الرمية الثانية أياً من الأرقام 1 , 2 , 5 ونفرض الحدث B هو أن يظهر في الرمية الثانية أياً من الأرقـام 6 , 5 , 4 ونفرض الحدث C هو أن مجموع ما يظهر في الرميتين يساوى 9 .

عدد عناصر فضاء العينة S في هذه التجربة يساوى 36 ، والأحداث كالآتي :

$$A = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}$$

$$B = \{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}$$

$$C = \{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\}$$

$$A \cap B = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}$$

$$A \cap C = \{(4,5)\}$$

$$B \cap C = \{(3,6),(4,5),(5,4)\}$$

$$A \cap B \cap C = \{(4,5)\}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad , \quad P(A \cap C) = \frac{1}{36} \quad , \quad P(B \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36}$$

نلاحظ أن

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = P(A)\, P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{4} = P(A)\, P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{4} = P(B)\, P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = P(A)\, P(B)\, P(C)$$

وهذا المثال يوضح لنا أن الشرط $P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C)$ متحقـق وبالرغم من ذلك فإن مجموعة الأحداث $\{A, B, C\}$ غير مستقلة .

تعريف ٤ : الأحداث المستقلة مثنى مثنى Pair-wise Independent

إذا كان A , B , C ثلاثة أحداث وكان علمنا بوقوع أياً منها لا يؤثر في فرصة وقوع الحدثان الآخران فإننا نقول أن الأحداث الثلاثة مستقلة مثنى مثنى ، وفى هذه الحالة نقول أن مجموعة الأحداث $\{A, B, C\}$ هي مجموعة مستقلة مثنى مثنى .

إذن مجموعة الأحداث $\{A, B, C\}$ تكون مجموعة مستقلة مثنى مثنى إذا كان

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)\ P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)\ P(C)$$

وفى حالة أن مجموعة الأحداث $\{A,B,C\}$ مستقلة مثنى مثنى نلاحظ انه تم إغفال دراسة أن الوقوع المشترك لأي حدثين قد يؤثر في فرصة وقوع الحدث الثالث المتبقي وهذا هو الفرق بين الاستقلال مثنى مثنى Pair-wise Independent واستقلال الأحداث Independent والمثال الآتي يوضح الفرق بين النوعين من استقلال الأحداث .

مثال ٣٤ :

يصل شخص إلى مكتبه كل يوم في وقت عشوائي بين الساعة الثامنة 8:00 والساعة التاسعة 9:00 صباحا . نفرض أن الحدث A هو أن يصل هذا الشخص إلى مكتبه غدا ما بين الساعة 8:15 والساعة 8:45 صباحا ونفرض أن الحدث B هو أن يصل الشخص إلى مكتبه غدا ما بين الساعة 8:30 والساعة 9:00 صباحا ونفرض أن الحدث C هو أن يصل الشخص إلى مكتبه غدا إما بين الساعة 8:15 والساعة 8:30 أو بين الساعة 8:45 والساعة 9:00 صباحا . هل مجموعة الأحداث $\{A, B, C\}$ مستقلة مثنى مثنى أم مستقلة ؟

الحل :

في هذه التجربة فإن فضاء العينة S يمثله فترة زمنية بين الساعة 8:00 والساعة 9:00 أي انه فترة زمنية مقدارها 60 دقيقة والحدث A يمثله فترة زمنية بين الساعة 8:15 والساعة 8:45 أي انه فترة زمنية مقدارها 30 دقيقة والحدث B يمثله فترة زمنية بين الساعة 8:30 والساعة 9:00 أي انه فترة زمنية مقدارها 30 دقيقة والحدث C يمثله فترة زمنية إما بين

الساعة 8:15 والساعة 8:30 أو بين الساعة 8:45 والساعة 9:00 أي انه فترة زمنية مقدارها 30 دقيقة . إذن

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

الحدث $A \cap B$ يمثله الفترة الزمنية المشتركة بين A , B ومقدارها 15 دقيقة وبالمثل الحدث $A \cap C$ والحدث $B \cap C$ كل منهم يمثل فترة زمنية مقدارها 15 دقيقة بينما الحدث $A \cap B \cap C$ لا يمثل أي فترة زمنية مشتركة ، أي أن

$$A \cap B \cap C = \Phi$$

إذن

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \quad ,$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

وحيث أن الحدثان $B \cap C$ ، A لا يوجد فترة زمنية مشتركة بينهما ، إذن هما حدثان متنافيان وحيث أن احتمال كل منهم اكبر من الصفر لذلك فهما حدثان غير مستقلان ، وبالتالي فإن مجموعة الأحداث $\{ A , B , C \}$ غير مستقلة وهذا يتحقق أيضا من الشرط

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)\, P(B)\, P(C)$$

ونلاحظ أن

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

أي أن الحدثان A , B مستقلان ،

وبالمثل A , C مستقلان وأيضا B , C مستقلان ،

إذن مجموعة الأحداث $\{A , B, C\}$ مستقلة مثنى مثنى .

والآن يمكن تعريف استقلال أكثر من ثلاث أحداث بنفس الأسلوب الذي اتبعناه من قبل ، فنقول أن مجموعة الأحداث $\{A_1, A_2, \ \dots \ , A_n\}$ مستقلة إذا كان علمنا بوقوع أحدهما أو إذا كان علمنا بالوقوع المشترك لأي عدد من هذه الأحداث لن يؤثر في فرصة وقوع الأحداث المتبقية . ويمكن صياغة التعريف في الصورة المختصرة الآتية :

تعريف ٥ :

مجموعة الأحداث $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ تسمى أحداث مستقلة إذا كان لكل مجموعة جزئية منها بالصورة $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$, $i_k \le n$, $k \ge 2$ فإن

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

وفى الحقيقة فإن هذا التعريف لا يقتصر على عدد منتهى من الأحداث ولكن يمكن توسيعه ليشمل عدد لا نهائي من الأحداث ، فمتتابعة الأحداث $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ تسمى أحداث مستقلة إذا كان لكل مجموعة جزئية منتهية من المتتابعة بالصورة $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$, $k \ge 2$ فإن

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

ومن التعريف نجد أن مجموعة الأحداث $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ تكون مستقلة إذا كان لكل التركيبات الممكنة $1 \le i < j < k < \ldots \le n$ فإن العلاقات الآتية تكون متحققة :

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)\, P(A_j)\, P(A_k)$$

$$\vdots$$

$$P(A_i \cap A_j \cap \ldots A_n) = P(A_i)\, P(A_j) \ldots P(A_n)$$

نلاحظ أن العلاقة الأولى تصف $\binom{n}{2}$ من المعادلات ، والعلاقة الثانية تصف $\binom{n}{3}$ من المعادلات ، ... ، والعلاقة الأخيرة تصف $\binom{n}{n}$ من المعادلات . إذن مجموعة الأحداث $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ تكون مستقلة إذا تحقق جميع المعادلات التى تصفها العلاقات السابقة وعدد هذه المعادلات يساوى $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n}$ ومن نظرية ذات الحدين فإن

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n - \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = 2^n - n - 1$$

أي أن عدد المعادلات التي يجب تحقيقها لإثبات أن مجموعة الأحداث $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ مستقلة هو $2^n - n - 1$.

مثـــال ٣٥ :

ثلاثة طلاب يقوم كل منهم على حده بدراسة مشكلة معينة بغرض الوصول إلى حل لها ، وكان احتمال أن يصل الطالب الأول إلى حل هـــو $\frac{2}{3}$ ، واحتمال أن يصل الطالب الثاني إلى حـــل هو $\frac{3}{4}$ ، واحتمال أن يصل الطالب الثالث إلى حل هو $\frac{4}{5}$. أوجد مـــا يأتي :

١ – احتمال عدم التوصل إلى حـــل .

٢ – احتمال التـــوصـــل إلى حـــل .

٣ – احتمال توصل جميع الطلاب إلى حـــل .

٤ – احتمال توصل طالب واحد فقط إلى حـــل .

٥ – احتمال توصل طالبين فقـــــط إلى حـــل .

الحــــل :

نفرض الحدث A هو أن يصل الطالب الأول إلى حل ونفرض الحدث B هـــو أن يصـــل الطالب الثاني إلى حل ونفرض الحدث C هو أن يصل الطالب الثالث إلى حل .إذن

$$P(A)=\frac{2}{3} \quad , \quad P(B)=\frac{3}{4} \quad , \quad P(C)=\frac{4}{5}$$

وحيث أن الطلاب الثلاثة يقوم كل منهم على حده بدراسة المشكلة ، إذن الأحداث الثلاثة A , B , C تكون أحداث مستقلة .

١ – احتمال عدم التوصل إلى حـــل .

عدم التوصل إلى حل هو الحدث $(A\cup B\cup C)'$ وباستخدام قانون ديمورجان

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C)' &= P(A'\cap B'\cap C') \\ &= P(A')P(B')P(C') \\ &= [1-P(A)]\times[1-P(B)]\times[1-P(C)] \\ &= \left(1-\tfrac{2}{3}\right)\times\left(1-\tfrac{3}{4}\right)\times\left(1-\tfrac{4}{5}\right)=\tfrac{1}{60} \end{aligned}$$

٢ – احتمال التـــوصـــل إلى حـــل .

التوصل إلى حل هو الحدث $A\cup B\cup C$. إذن

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(A\cup B\cup C)'=1-\frac{1}{60}=\frac{59}{60}$$

٣ – احتمال توصل جميع الطلاب إلى حـــل .

توصل جميع الطلاب إلى حـــل هو الحدث $A \cap B \cap C$ ، وحيث أن A , B , C أحداث مستقلة ، إذن

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

٤ – احتمال توصل طالب واحد فقط إلى حـــل .

توصل طالب واحد فقط إلى حـــل هو الحدث E حيث

$$E = (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$$

إذن

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C) \\ &= P(A)\ P(B')\ P(C') + P(A')\ P(B)\ P(C') + P(A')\ P(B')\ P(C) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{9}{60} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

٥ – احتمال توصل طالبين فقـــــط إلى حـــل .

توصل طالبين فقـــــط إلى حـــل هو الحدث F حيث

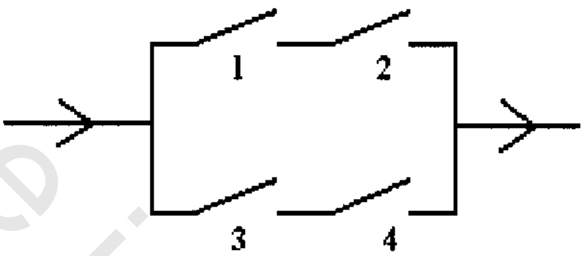
$$F = (A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$$

إذن

$$\begin{aligned} P(F) &= P(A \cap B \cap C') + P(A \cap B' \cap C) + P(A' \cap B \cap C) \\ &= P(A)\ P(B)\ P(C') + P(A)\ P(B')\ P(C) + P(A')\ P(B)\ P(C) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{26}{60} = \frac{13}{30} \end{aligned}$$

مثـــال ٣٦ :

الشـــكل المعطى يوضح دائرة كهربائية ذات أربعة مفاتيح مستقلة عن بعضها البعض سواء في الغلق أو الفتح واحتـــمال الغلق هو p واحتـــمال الفتح هو $1\text{-}p$.



أوجد احتمال مرور التيار بالدائرة الكهربائية .

الحـــل :

نفرض أن A_i هو الحدث أن المفتاح في الموضع i يكون مغلق حيث $1 \le i \le 4$

ومن المعلوم أن التيار الكهربائي يمر في الدائرة إذا كان المفتاح رقم 1 والمفتاح رقم 2 في وضع الأقفال ON أو إذا كان المفتاح رقم 3 والمفتاح رقم 4 في وضع الأقفـــال ON ، أي إذا وقع على الأقل الحدث $A_1 \cap A_2$ أو الحدث $A_3 \cap A_4$ وبالتالي فإن التيار الكـــهربائي يمر في الدائرة إذا وقع الحدث

$$\left(A_1 \cap A_2\right) \cup \left(A_1 \cap A_2\right)$$

وحيث أن الأحداث الأربعة مستقلة ، إذن الاحتمال المطلوب نحصل عليه كالآتي :

$$P\left(\left(A_1 \cap A_2\right) \cup \left(A_3 \cap A_4\right)\right) = P\left(A_1 \cap A_2\right) + P\left(A_3 \cap A_4\right) - P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right)$$

$$= P\left(A_1\right) P\left(A_2\right) + P\left(A_3\right) P\left(A_4\right) - P\left(A_1\right) P\left(A_2\right) P\left(A_3\right) P\left(A_4\right)$$

$$= p^2 + p^2 - p^4$$
$$= p^2\left(2 - p^2\right)$$

٧ - التجارب المستقلة Independent Experiments

ناقشنا فيما سبق فضاء الاحتمال المتعلق بتجربة عشوائية كُررت عدداً محدوداً من المرات مثل تجربة رمى قطعة نقود معدنية عدد محدود من المرات أو مثل تجربة رمى حجر نرد عدد محدود من المرات . ويمكن صياغة مفهوم التجارب المتكررة رياضيا كما يلي :

تعريف ٦ :

نفرض S فضاء احتمال منتهى ، حاصل الضرب الكارتيزي n من المرات لفضاء الاحتمال S يكوّن فضاء الاحتمال T لعدد n من التجارب أو المحاولات المتكررة ويعرف بالصورة

$$T = S \times S \times \ \dots \ \times S = \{ (s_1 , s_2 , \ \dots \ , s_n) \ : \ s_i \in S \}$$

واحتمال أي حدث أولى $\{ (s_1 , s_2 , \ \dots \ , s_n) \} \subset T$ يكون

$$P(\{ (s_1 , s_2 , \ \dots \ , s_n) \}) = P(\{s_1\}) \times P(\{s_2\}) \times \ \dots \ \times P(\{s_n\})$$

ونلاحظ من التعريف أن فضاء العينة T يمثل عدد n من المحاولات المستقلة ويتكون من عناصر S المرتبة التي على الصورة $(s_1 , s_2 , \ \dots \ , s_n)$ واحتمال أي حدث أولي من فضاء العينة T يكون ذو شكل خاص هو حاصل ضرب لاحتمالات الأحداث الأولية من S وهذا الشكل الخاص يمنحنا طريقة سهلة لحساب الاحتمالات ، وعند التعامل مع التجارب المستقلة سوف نهمل الأقواس { } فمثلا الحدث $\{ (s_1 , s_2 , \ \dots \ , s_n) \}$ سوف يكتب بالصورة $(s_1 , s_2 , \ \dots \ , s_n)$ أو في الصورة $s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n$ للاختصار ، وحيث أن المحاولات المستقلة هي في مجموعها تجربة عشوائية فإنه يمكن رسم الشجرة البيانية للتجربة وسوف نلاحظ أن الشجرة البيانية في هذه الحالة تحقق الخواص الآتية :

١- كل فرع يؤدى إلى نفس الناتج يكون له نفس الاحتمال .

٢ - كل نقطة تفرع يكون لها نفس النواتج .

مثـــال ٣٧ :

في سباق للخيل بين ثلاثة من الجياد a , b , c كان احتمالات الفوز $\frac{1}{6} , \frac{1}{3} , \frac{1}{2}$ علـــى الترتيب ، فإذا تسابقت الجياد الثلاثة مرتين معاً فأوجد

١ – احتمال أن الجواد a يفوز بالسباق في المرتين .

٢ – احتمال أن نفس الجواد يفوز بالسباق في المرتين .

٣ – احتمال أن يفوز الجواد a بالسباق الأول ويفوز الجواد c في السباق الثاني .

٤ – احتمال أن يفوز الجواد b في السباق الثاني .

٥ – احتمال عدم تكرار الفوز في المرتين لأياً من الجياد الثلاثة .

الحـــل :

عندما تتسابق الجياد الثلاثة فإن فضاء العينة S يكون $S = \{ a , b , c \}$ حيث

$$P(a) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(b) = \frac{1}{3} \quad , \quad P(c) = \frac{1}{6}$$

وعندما تتسابق الجياد الثلاثة مرتين فإن فضاء العينة T يكون

$$\begin{aligned} T &= S \times S \\ &= \{ a , b , c \} \times \{ a , b , c \} \\ &= \{ aa , ab , ac , ba , bb , bc , ca , cb , cc \} \end{aligned}$$

١ – الحدث أن الجواد a يفوز بالسباق في المرتين هو aa

$$P(aa) = P(a) \times P(a) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

٢ – الحدث أن نفس الجواد يفوز بالسباق في المرتين هو $A = \{ aa , bb , cc \}$

$$P(A) = P(aa) + P(bb) + P(cc)$$

$$= P(a) \times P(a) + P(b) \times P(b) + P(c) \times P(c)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$$

٣ – الحدث أن يفوز الجواد a بالسباق الأول ويفوز الجواد c في السباق الثاني هو ac

$$P(ac) = P(a) \times P(c) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

٤ – الحدث أن يفوز الجواد b في السباق الثاني هو $B = \{ ab , bb , cb \}$.

$$P(B) = P(ab) + P(bb) + P(cb)$$

$$= P(a) \times P(b) + P(b) \times P(b) + P(c) \times P(b)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

٥ – الحدث عدم تكرار الفوز في المرتين لأياً من الجياد الثلاثة هو

$$C = \{ ab , ac , ba , bc , ca , cb \}$$

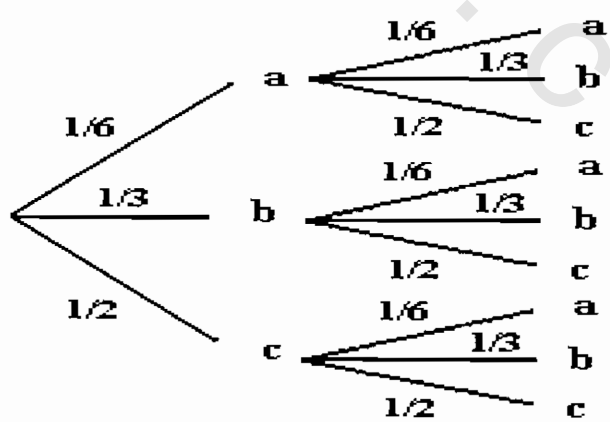
وهو نفسه مكملة الحدث فوز نفس الجواد في المرتين ، أي انه مكملة الحدث

$$A = \{ aa , bb , cc \}$$

إذن

$$P(C) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

وبرسم الشجرة البيانية للمحاولات المستقلة في هذا المثال نلاحظ أن أي نقطة تفرع لها نفس النواتج a , b , c وأن أي فرع يؤدى إلى الناتج a له الاحتمال P (a) وأي فرع يؤدى إلى الناتج b له الاحتمال P (b) وأي فرع يؤدى إلى الناتج c له الاحتمال P (c) كما هو موضح بالرسم



مثـــال ٣٨ :

فريق لكرة القدم في أي مباراة يلعبها يكون احتمال فـــوزه 0.6 واحتمـــال تعادلـــه 0.3 واحتمال خسارته 0.1 فإذا لعب هذا الفريق ثلاث مباريات فأوجد ما يأتي :

١– احتمال فوز الفريق في المباريات الثلاثة .

٢– احتمال فوز الفريق في مباريتين على الأقل .

٣– إذا كان الفريق يحصل على ثلاث نقاط في حالة الفوز ونقطة واحدة في حالة التعـــادل ولا يحصل على أي نقطة في حالة الخسارة فأوجد احتمال أن الفريق يحصل على 7 نقاط علـــى الأقل في مجموع المباريات الثلاث .

الحـــل : نفرض أن a يرمز إلى فوز الفريق ، b يرمز إلى تعـــادل الفريـــق ، c يرمـــز إلى خسارة الفريق في أي مبـــاراة يلعبـــها. إذن فضـــاء العينـــة $S = \{a, b, c\}$ ويكـــون $P(a)=0.6\ ,\ P(b) = 0.3\ ,\ P(c) = 0.1$ وإذا لعب الفريق ثلاث مباريات فإن فضاء العينة يكون

$$T = S\times S \times S = \{a, b, c\}\times\{a, b, c\}\times\{a, b, c\}$$

١– نفرض الحدث A هو فوز الفريق في المباريات الثلاثة ، إذن

$$A = \{aaa\} \quad , \quad P(A) = P(aaa) = (0.6)\times(0.6)\times(0.6) = 0.216$$

٢– نفرض الحدث B هو فوز الفريق في مباريتين على الأقل ، إذن

$$B = \{aaa, aab, aba, baa, aac, aca, caa\}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(aaa) + P(aab) + P(aba) + P(baa) \\ &\quad + P(aac) + P(aca) + P(caa) \\ &= (0.6)^3 + (0.6)^2\times(0.3) + (0.6)^2\times(0.3) + (0.6)^2\times(0.3) \\ &\quad + (0.6)^2\times(0.1) + (0.6)^2\times(0.1) + (0.6)^2\times(0.1) \\ &= 0.216 + 3\times(0.108) + 3\times(0.036) = 0.648 \end{aligned}$$

٣– نفرض الحدث C أن الفريق يحصل على 7 نقاط على الأقل في مجموع المباريات الثـلاث ، إذن الحدث C هو فوز الفريق في مباريتين على الأقل ودون هزيمة

$$C = \{aaa, aab, aba, baa\}$$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(aaa) + P(aab) + P(aba) + P(baa) \\ &= (0.6)^3 + (0.6)^2\times(0.3) + (0.6)^2\times(0.3) + (0.6)^2\times(0.3) \\ &= 0.216 + 3\times(0.108) = 0.54 \end{aligned}$$

مثـــال ٣٩ :

امتحان في مقرر اللغة الإنجليزية به 10 أسئلة ، الستة أسئلة الأولى بنظام الصواب والخطأ true - false والأسئلة الباقية بنظام الاختيار من متعدد multiple choice حيث لكل سؤال أربع إجابات منها إجابة واحدة فقط صواب . أحد الطلاب لم يكن مستعد للاختبار وأجاب على جميع الأسئلة بالتخمين . أوجد

١ – احتمال أن تكون الإجابة صواب على جميع الأسئلة .

٢ – إذا كان النجاح في الاختبار يتطلب أن تكون الإجابة صواب على 5 أسئلة على الأقل من الأسئلة الستة الأولى بنظام الصواب والخطأ وعلى 3 أسئلة على الأقل من الأسئلة الأربعة الباقية بنظام الاختيار من متعدد فأوجد احتمال رسوب هذا الطالب .

الحـــل :

عندما يجيب الطالب على أي سؤال من الأسئلة العشرة في الاختبار فانه أما أن تكون الإجابة صواب t أو تكون خطأ f وبالتالي فإن فضاء العينة يكون $S = \{ t , f \}$ وعندما يجيب الطالب على الأسئلة العشرة فإن فضاء العينة يصبح

$$T = \{ (s_1 , s_2 , \ldots , s_{10}) : s_i \in S \ , \ 1 \le i \le 10 \}$$

حيث في الأسئلة الستة الأولى بنظام الصواب والخطأ فإن

$$P(s_i) = \frac{1}{2} \quad , \quad 1 \le i \le 6$$

و في الأسئلة الأربعة الباقية $7 \le i \le 10$ بنظام الاختيار من متعدد فإن

$$P(s_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & , \quad s_i = t \\ \\ \dfrac{3}{4} & , \quad s_i = f \end{cases}$$

١ – نفرض الحدث A أن تكون الإجابة صواب على جميع الأسئلة ، إذن

$$P(A) = \prod_{i=1}^{10} P(s_i) = \left(\prod_{i=1}^{6} P(s_i) \right) \times \left(\prod_{i=7}^{10} P(s_i) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^6 \times \left(\frac{1}{4} \right)^4 = \frac{1}{2^{14}} = 0.00006$$

٢- نفرض الحدث B أن تكون الإجابة صواب على 5 أسئلة على الأقل من الأسئلة الستة الأولى بنظام الصواب والخطأ وعلى 3 أسئلة على الأقل من الأسئلة الأربعة الباقية بنظام الاختيار من متعدد ، إذن الحدث B هو اتحاد الأربعة أحداث المتنافية الآتية :

الحدث B_1 هو الإجابة صواب على 5 أسئلة من الستة الأولى وعلى 3 من الأربعة الباقية

الحدث B_2 هو الإجابة صواب على 5 أسئلة من الستة الأولى وعلى 4 من الأربعة الباقية

الحدث B_3 هو الإجابة صواب على 6 أسئلة من الستة الأولى وعلى 3 من الأربعة الباقية

الحدث B_4 هو الإجابة صواب على 6 أسئلة من الستة الأولى وعلى 4 من الأربعة الباقية

وحيث أن الإجابة صواب على 5 أسئلة من الستة الأولى يتم بطرق عددها $\binom{6}{5}$ واحتمال كل منها $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ والإجابة صواب على 3 أسئلة من الأربعة الباقية يتم بطرق عددها $\binom{4}{3}$ واحتمال كل منها $\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$ ، إذن

$$P(B_1) = \binom{6}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right) = 0.0044$$

وبالمثل

$$P(B_2) = \binom{6}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \binom{4}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0.0004$$

$$P(B_3) = \binom{6}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right) = 0.0007$$

$$P(B_4) = \binom{6}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \binom{4}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0.0001$$

وحيث أن B هو اتحاد أحداث متنافية $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ ، إذن

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) \\ &= 0.0044 + 0.0004 + 0.0007 + 0.0001 = 0.0056 \end{aligned}$$

والحدث رسوب الطالب يكون B' وبالتالي فإن احتمال رسوب هذا الطالب يكون

$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.0056 = 0.9944$.

الفصل 4

تمارين

١ – أخذت عينة تتكون من 100 طالب من طلاب قسم الرياضيات بكلية التربية ووجد أن نسبة النجاح 87% في امتحان مقرر الاحتمالات ، 90% في امتحان مقرر التفاضل والتكامل ، 82% في المقررين معاً . تم اختيار طالب عشوائياً من هذه العينة ووجد انه ناجح في امتحان مقرر الاحتمالات . ما احتمال أن هذا الطالب الذي اخترناه عشوائياً يكون ناجح في مقرر التفاضل والتكامل ؟

٢ – في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة .

١ – إذا عُلم أن العدد الذي ظهر أقل من 5 ، فما احتمال أن يكون عدد زوجي ؟

٢ – إذا عُلم أن العدد الذي ظهر أكبر من 4 ، فما احتمال أن يكون عدد فردى ؟

٣ – أوجد احتمال أن يظهر عدد فردى بشرط أن يكون اكبر من 2 .

٣ – في تجربة إلقاء حجري نرد متميزين ، إذا كان مجموع الوجهين الظاهرين اكبر من 6 فما هو احتمال أن يكون أحد حجري النرد يظهر عليه الرقم 3 ؟

٤ – نفرض أن A , B حدثان بحيث أن

$$P(A) = 0.35 \quad , \quad P(B) = 0.45 \quad , \quad P(A \cap B) = 0.25$$

أوجد $P(B' | A')$, $P(A' | B')$, $P(B | A)$, $P(A | B)$.

٥ – نفرض أن A , B حدثان بحيث أن

$$P(A) = \frac{5}{8} \quad , \quad P(B) = \frac{3}{8} \quad , \quad P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

أوجد $P(B | A')$, $P(A | B')$, $P(B | A)$, $P(A | B)$.

٦ – أوجد $P(B|A)$, $P(A|B)$ في الحالات الآتية :

١– إذا كان $A \subseteq B$.

٢– إذا كان $B \subseteq A$.

٣– إذا كان A , B أحداث متنافية .

٤– إذا كان $A \cap B = \Phi$.

٧ – أثبت أنه لأي حدثان A , B من فضاء عينة S لتجربة عشوائية ما فإن

١ – $P(A|B) > P(A)$ إذا وفقط إذا كان $P(B|A) > P(B)$.

٢ – $P(A|B) \geq \dfrac{\alpha+\beta-1}{\beta}$ حيث $P(A)=\alpha$, $P(B)=\beta$.

٨ – إذا كان $P(E|F') \geq P(G|F')$ ، $P(E|F) \geq P(G|F)$

فأثبت أن $P(E) \geq P(G)$

٩– في مدينة ما ومن مجموعة العائلات التي لديها طفلان تم اختيار عائلة عشوائياً ووجد أن هذه العائلة لديها ولد ، وبفرض أن احتمال وجود ولد متساوي مع احتمال وجود بنت فأوجد احتمال أن الطفل الآخر في هذه العائلة يكون ولد .

١٠– من مجموعة العائلات في مدينة ما والتى لديها 3 أطفال تم اختيار عائلة بطريقة عشوائية ووجد أن هذه العائلة لديها بنت ، وبفرض أن احتمال وجود ولد متساوي مع احتمال وجود بنت فأوجد احتمال أن يكون هذه العائلة ليس لديها أطفال ذكور .

١١– في مدينة ما كان احتمال أن يعيش أي شخص لمدة 70 عام على الأقل يساوى 0.65 واحتمال أن يعيش لمدة 85 عام على الأقل يساوى 0.35 ، تم اختيار شخص عشوائياً من هذه المدينة ووجد أن عمره 70 عام فما هو احتمال أن يبقى هذا الشخص على قيد الحياة حتى يصل به العمر إلى 85 عام .

١٢– صندوق يحتوى على 4 كرات مرقمة من 1 إلى 4 . سحبت كرتان على الترتيب وبفرض الحدث A هو أن مجموع الرقمان يساوى 5 والحدث B_i هو أن الكرة المسحوبة أولا تحمل الرقم i . أوجد $P(B_i|A)$, $P(A|B_i)$ حيث $i \in \{1,2,3,4\}$ في كل من الحالات الآتية :

١ – السحب مع الإرجاع .

٢ – السحب بدون إرجاع .

١٣ – في استطلاع للرأي للتعرف على أراء الناس حول موضوع ما ، سواء بالموافقة أو عـــدم الموافقة أخذت عينة من مجموعة أشخاص شملت رجال وإناث وكانت نتائج الاســـتطلاع كما موضح بالجدول الآتي :

	موافق	غير موافق	المجموع
رجال	520	80	600
إناث	180	220	400
المجموع	700	300	1000

فإذا تم اختيار شخص من العينة بصورة عشوائية أوجد احتمال ما يأتي :

١– أن يكون رجل إذا علمنا أنـــه غير موافق .

٢– أن يكون موافق إذا علمنا أنها أنثى .

١٤– في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين ومتميزين .أوجد احتمال أن يكون مجموع ما يظـــهر على الوجهين أقل من 7 في كل من الحالات الآتية :

١ – إذا ظهر العدد 3 على حجر النرد الثاني .

٢ – إذا ظهر العدد 3 على حجر واحد على الأقل .

٣ – إذا ظهر العدد 3 على حجر واحد على الأكثر .

١٥– في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين وجد أن مجموع ما يظهر على الوجهين يقبل القســـمة على 5 . أوجد احتمال ظهور الرقم 5 على كل من حجري النرد في الحالات الآتية :

١ – حجري نرد متميزين .　　　　٢ – حجري نرد متماثلين .

١٦– في تجربة إلقاء حجري نرد متزنين إذا علمت أن الرقمين الظاهرين مختلفـــين ، أحســـب احتمال كل مما يأتي :

١–مجموع الرقمين الظاهرين يساوى 7 .

٢–مجموع الرقمين الظاهرين أكبر من 7 .

٣–مجموع الرقمين الظاهرين يقبل القسمة على 3 .

١٧– تصل حافلة إلى محطة ما يومياً في وقت عشوائي بين الساعة 7:00 والساعة 7:20 صباحا . وصل شخص إلى المحطة في الساعة 7:00 صباحا وانتظر الحافلة حتى الساعة 7:10 ولم تصل فما هو احتمال أن تصل الحافلة خلال 5 دقائق أخرى على الأكثر .

١٨– يتحرك قطار من مدينة a إلى مدينة d مرورا بالمدينة b ثم المدينة c . حدث عطل للقطار في مكان ما عشوائي فإذا علمت أن القطار قد شوهد يمر بالمدينة b فما هو احتمال أن يكون العطل قد حدث للقطار بعد مروره بالمدينة c علما بأن المسافة بين المدينتين a , d تساوى 900 كيلومتر وهى ضعف المسافة بين المدينتين a , c وثلاث أمثال المسافة بين المدينتين b , c .

١٩– مزرعة سمكية صغيرة بها 100 سمكة من نوعين A , B بينها 30 من النوع A والباقي من النوع B ، وضعت شبكة صغيرة فاصطادت 10 سمكات . أوجد احتمال أن 3 منها من النوع A إذا علمت انه على الأقل 4 منها من النوع B .

٢٠– سحبت 8 ورقات عشوائياً من أوراق اللعب (الكوتشينة) ، فإذا علمت أن ثلاث ورقات منها على الأقل كانت صور فأوجد احتمال أن الورقات الخمس الأخرى تكون أيضا صور .

٢١– في تجربة سحب كارت بطريقة عشوائيةً من مجموعة تتكون من 50 كارت مرقمة بالصورة 49 , ... , 02 , 01 , 00 نفرض أن مجموع أرقام العدد الذي يظهر على الكارت المسحوب تساوى α وأن حاصل ضرب أرقام العدد الذي يظهر على الكارت المسحوب يساوي β . أوجد

1 - $P(\alpha=7 \mid \beta=0)$.

2 - $P(\alpha=i \mid \beta=0)$, $0\le i\le 13$.

٢٢– في مزرعة ما يوجد 20 رأس من الغنم 4 منها مصابة . لاستبعاد الأغنام المصابة تم اختيار الغنم واحدة بعد الأخرى فإذا وجدنا أن الأغنام الثلاثة الأولى التي تم اختيارها جميعها سليم فما هو احتمال أن الاختيار الرابع يكون أحد الأغنام السليمة .

٢٣– عائلة لديها ثلاثة أطفال ، مع مراعاة الأسبقية في الولادة أوجد :

١– احتمال أن يكون للعائلة بنت واحدة فقط بشرط أن يكون الطفل الأكبر بنت .

٢– احتمال أن يكون للعائلة ولداً واحد على الأقل إذا عُلم أن الطفل الأكبر ولد .

٣– احتمال أن يكون للعائلة ولدان إذا عُلم أن الطفل الأكبر بنتاً .

٤– احتمال أن يكون للعائلة ولد على الأكثر إذا عُلم أن أحد الطفلين ولداً .

٢٤– قام رجل بزيارة عائلة لديها ثلاثة أطفال ، ودخل طفلين إلى الغرفة أحدهما ولد والآخر بنت ، أوجد احتمال أن يكون الطفل المتبقي بنت إذا كان

١ – من المعلوم أن الطفل المتبقي هو اصغر الأطفال .

٢ – ليس هناك أية معلومات عن الطفل الآخر .

٢٥– ألقيت عملة معدنية متزنة أربع مرات . أوجد احتمال أن الرمية الرابعة تكون صورة في كل من الحالات الآتية :

١ – الرميات الثلاثة الأولى جميعها صور .

٢ – الرميات الثلاثة الأولى بها صورتان على الأقل .

٢٦– صندوق يحتوي على 20 وحدة من إنتاج ما بها 8 وحدات معيبة ، اختيرت 3 وحدات من الصندوق بطريقة عشوائية واحدة تلو الأخرى بدون إرجاع ، أوجد :

١ – احتمال أن تكون الوحدات الثلاث معيبة .

٢ – احتمال أن تكون الوحدة الأولى والثانية سليمة بينما الثالثة معيبة .

٣ – احتمال أن تكون واحدة على الأكثر معيبة .

٢٧– صندوق يحتوي على 8 وحدات من إنتاج ما بها 2 وحدة معيبة ، وللتعرف على الوحدات المعيبة تم سحب الوحدات من الصندوق بطريقة عشوائية واحدة بعد الأخرى وبدون إرجاع .

١– أوجد احتمال سحب الوحدتين المعيبتين في أول وثاني سحب .

٢– أوجد احتمال أن تتوقف عملية السحب بعد السحب الرابع .

٢٨– صندوق يحتوي على 20 وحـدة من إنتاج ما بها 8 وحدات معيـبة ، وللتعرف علـى الوحدات المعيبة تم سحبها وفحصها واحدة بعد الأخرى عشوائياً وبـدون إرجـاع ، أوجد ما يأتي :

١–احتمال أن الوحدات الأربعة الأولى التي تم فحصها جميعها وحدات معيبة .

٢–احتمال أنه في الوحدات الأربعة الأولى التي تم فحصها يوجد على الأقـل وحدتـان معيبتان .

٢٩– صندوقان يحتوى الأول على 50 وحدة من إنتاج ما منها 4 وحدات معيبـة ويحتـوى الصندوق الثاني على 80 وحدة من نفس الإنتاج منها 6 وحدات معيبة . ألقي حجـر نرد متزن مرة واحدة فإذا ظهر وجه يحمل عدد زوجي نختار عشوائياً وحدة من الصندوق الأول وخلاف ذلك نختار عشوائياً وحدة من الصندوق الثاني . أوجد احتمال أن الوحدة التي تم اختيارها تكون معيبة .

٣٠– صندوقان يحتوى الأول على 40 مصباح كهربائي منها عدد 5 مصابيح معيبة ويحتـوى الصندوق الثاني على 70 مصباح كهربائي منها عدد 4 مصابيح معيبة . ألقي حجـري نرد متزنين فإذا كان مجموع ما يظهر على الوجهين اكبر من 8 نختار عشوائياً مصباح من الصندوق الأول وخلاف ذلك نختار عشوائياً مصباح من الصندوق الثاني . أوجد احتمال أن المصباح الذي تم اختياره يكون مصباح سليم .

٣١– جميع الطلاب في الفرقة الأولى بقسم الرياضيات بكلية التربية جامعة عين شمس يدرسـون مقرر حساب التفاضل والتكامل ومقرر الفيزياء العامة ولقد أوضحت الإحصائيـات في نهاية العام أن 21 % من الطلاب حصلوا على تقدير جيد جـدا في مقـرر حسـاب التفاضل والتكامل وأن 14 % حصلوا على تقدير جيد جدا في كل مـن المقررين . اختير طالب عشوائياً من هؤلاء الطلاب ووجد انه حاصل على تقدير جيد جدا في مقـرر حساب التفاضل والتكامل فما هو احتمال أن هذا الطالب يكون قد حصل على تقديـر جيد جدا في مقرر الفيزياء العامة .

٣٢- ثلاث ماكينات تنتج على الترتيب 25% ، 35% ، 40% من الإنتاج الكلي لأحد المصانع ، وكانت نسبة إنتاج قطعة تالفة في الماكينات الثلاث على الترتيب هي 2% ، 4% ، 3% . إذا سحبت قطعة من الإنتاج الكلي عشوائياً ، فما احتمال أن تكون غير تالفة ؟

٣٣- أربعة ماكينات تنتج على الترتيب 15% ، 20% ، 30% ، 35% من وحدات الإنتاج الكلي لأحد المصانع وكانت نسبة إنتاج وحدة تالفة في الماكينات الأربعة هي 1% ، 5% ، 4% ، 3% على الترتيب . إذا سحبت وحدة من الإنتاج الكلي عشوائياً

١ - أوجد احتمال أن تكون تالفة .

٢ - أوجد احتمال أن الوحدة المسحوبة كانت من الماكينة الرابعة إذا علمت أنها تالفة .

٣ - أرسم شجرة الاحتمال للتجربة واستنتج منها المطلوب السابق .

٣٤- يتنافس أربعة أشخاص على منصب مدير لأحد الأندية الرياضية ، وكان احتمال الفوز لهم 30% , 10% , 35% , 25% على الترتيب . وإذا كان احتمال بناء صالة العاب مغطاة إذا فاز الشخص الأول 0.6 وإذا فاز الشخص الثاني 0.4 وإذا فاز الشخص الثالث 0.5 وإذا فاز الشخص الرابع 0.45 .

١ - أوجد احتمال بناء صالة العاب مغطاة في النادي.

٢ - إذا تم بناء صالة العاب مغطاة في النادي فما هو احتمال أن يكون الشخص الثالث قد فاز بالمنصب ؟

٣٥- تقوم أحد الشركات باستئجار 35 % من السيارات للموظفين من معرض 1 لتأجير السيارات والباقي من معرض II فإذا كان نسبة 8 % من سيارات المعرض I ونسبة 5 % من سيارات المعرض II تتعرض للأعطال خلال فترة التأجير . ركب أحد الموظفين سيارة من هذه السيارات ، أوجد احتمال حدوث عطل . وإذا علمت أن الشركة قررت إنهاء التعاقد مع المعرض الذي يحدث عطل في إحدى سيارته وحدث بالفعل عطل في أحد السيارات فما هو احتمال أن يتم إنهاء التعاقد مع المعرض II .

٣٦– يتنافس ثلاثة أشخاص في سباق عالمي للسباحة ، وكانت احتمالات الفوز لهم 0.3 للأول و 0.5 للثاني و 0.2 للثالث . وإذا كان احتمال تحطيم الرقم العالمي السابق إذا فاز الشخص الأول هو 0.5 وإذا فاز الشخص الثاني هو 0.6 وإذا فاز الشخص الثالث هو 0.4 .

١ – أوجد احتمال عدم تحطيم الرقم العالمي السابق .

٢ – إذا حدث تحطيم للرقم العالمي السابق فما هو احتمال أن يكون الشخص الأول قد فاز بالسباق ؟

٣ – إذا لم يحدث تحطيم للرقم العالمي السابق فما هو احتمال أن يكون الشخص الثاني قد خسر السباق ؟

٣٧– مصنع للسيارات في سنة ما انتج 5000 سيارة من أربعة ألوان منها 1000 سيارة حمراء ، 1500 سيارة بيضاء ، 1750 سيارة زرقاء ، 750 سيارة خضراء . تم اكتشاف عيب في نظام التبريد في 750 سيارة من هذا الإنتاج منها 100 سيارة حمراء ، 120 سيارة بيضاء ، 280 سيارة زرقاء والباقي من السيارات الخضراء . اخترنا سيارة عشوائياً من هذا الإنتاج لونها ابيض ، ما هو احتمال أن يكون بها عيب في نظام التبريد ؟

٣٨– ثلاثة صناديق متشابهة تحتوي على كرات ملونة كما بالجدول الآتي :

الكرات	الصندوق I	الصندوق II	الصندوق III
حمراء	3	2	5
بيضاء	5	1	3
سوداء	2	3	1
المحتوى	10	6	9

تم اختيار صندوق عشوائياً وسحبت منه كرة ، أوجد

١ – احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .

٢ – إذا وجدنا أن الكرة المسحوبة حمراء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق II .

٣ – إذا وجدنا أن الكرة المسحوبة بيضاء فما هو احتمال أنها ليست من الصندوق III .

٣٩- مجموعة أقلام وزعت عشوائياً وبالتساوي على أربعة أشخاص A , B , C , D وبها 24 قلم أزرق ، 4 أقلام حمراء فإذا علمت أن الشخص B لديه قلم أحمر واحد فأوجد

١- احتمال أن الشخص C يكون معه الأقلام الحمراء الثلاثة الباقية .

٢- احتمال أن الشخص A لا يكون معه أياً من الأقلام الحمراء الثلاثة الباقية .

٣- احتمال وجود قلم احمر مع كل من الأشخاص A , C , D .

٤٠- أربعة صناديق متشابهة تحتوي على كرات ملونة يحتوى الأول على 10 كرات منها 7 بيضاء والباقي حمراء ويحتوى الثاني على 15 كرة منها 9 بيضاء والباقي سوداء ويحتوى الثالث على 16 كرة منها 9 بيضاء ، 5 حمراء والباقي سوداء ويحتوى الرابع على 20 كرة منها 8 بيضاء ، 7 حمراء والباقي سوداء ، اختير صندوق من الصناديق الأربعة عشوائياً وسحبت منه كرة بشكل عشوائي . أوجد احتمال سحب كرة سوداء ، وإذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق الرابع .

٤١- ستة صناديق متشابهة تحتوي على مصابيح كهربائية كما بالجدول الآتي :

	الصندوق 1	الصندوق 2	الصندوق 3	الصندوق 4	الصندوق 5	الصندوق 6
مصابيح سليمة	20	25	40	30	15	45
مصابيح معيبة	1	3	4	2	0	5

القي حجر نرد متزن مرة واحدة وتم سحب مصباح عشوائياً من الصندوق الذي يحمل الرقم الظاهر على وجه حجر النرد . أوجد

١- احتمال أن المصباح سليم .

٢- احتمال أن المصباح سحب من الصندوق الرابع إذا عُلم انه مصباح معيب .

٣- احتمال أن المصباح سحب من صندوق يحمل رقم فردى إذا عُلم انه مصباح سليم .

٤- احتمال أن المصباح سحب من صندوق يحمل رقم زوجي إذا عُلم انه مصباح معيب.

٤٢– إذا كانت محتويات صندوقين كما بالجدول

	الصندوق I	الصندوق II
ساعات ذهبية G	3	2
ساعات فضية S	5	3
مجموع الساعات	8	5

اختير أحد الصندوقين عشوائياً وأخذت منه ساعة بطريقة عشوائية ، ارسم شجرة الاحتمال للتجربة وأوجد ما يأتي :

١– احتمال أن الساعة التي أخذت كانت ساعة ذهبية .

٢– احتمال أن الساعة التي أخذت كانت ساعة فضية .

٣– احتمال أن الساعة التي أخذت كانت من الصندوق الثاني إذا علم أنها فضية .

٤٣– لدينا ثلاثة صناديق تحوي كرات ملونة موزعة كما بالجدول الموضح ، اخترنا أحد الصناديق بطريقة عشوائية وسحبنا منه كرة عشوائياً .

الكرات	الصندوق A_1	الصندوق A_2	الصندوق A_3
حمراء R	3	2	2
بيضاء W	5	1	3
المحتوى	8	3	5

ارسم شجرة الاحتمال للتجربة واستنتج منها ما يأتي :

١– احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .

٢– إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق A_1 .

٤٤–كيس يحتوى على ثلاث قطع نقود اثنتان عاديتان وواحدة ذات صورتين ، اختيرت قطعة من الكيس بطريقة عشوائية ثم ألقيت ، إذا ظهر وجه الصورة فإن القطعة نفسها تلقى مرة أخرى بينما إذا ظهر وجه الكتابة فأننا نختار قطعة نقود من القطعتين المتبقيتين بالكيس ثم تلقى ، أوجد

١ – احتمال ظهور الصورة في المرتين .

٢ – احتمال عدم ظهور الصورة في المرة الثانية .

٤٥– يحتوي وعاء A على x كرة حمراء ، y كرة بيضاء ويحتوي وعاء B على z كرة حمراء ، w كرة بيضاء.

١– إذا اختير وعاء عشوائياً وسحب منه كرة عشوائياً فما احتمال أن تكون حمراء.

٢ – إذا سحبت كرة عشوائياً من الوعاء A ووضعت في الوعاء B ثم سحبت كرة عشوائياً من الوعاء B فما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانيا بيضاء .

٤٦–صندوق يحتوى على 10 كرات منها 3 كرات حمراء والباقي كرات بيضاء ، سحبت كرة عشوائياً من الصندوق بدون إرجاع وأضيفت كرة من اللون المخالف للكرة المسحوبة وسحبت بعد ذلك كرة ثانية من الصندوق . أرسم شجرة الاحتمال للتجربة وأوجد ما يأتي :

١ – احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض .

٢ – احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون .

٣ – احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني حمراء .

٤ – احتمال أن تكون الكرتان مختلفتان في اللون .

٤٧–صندوق يحتوى على 22 كرة منها 9 كرات حمراء والباقي كرات بيضاء ، سحبت كرتين عشوائياً على الترتيب واستبعدتا من الصندوق دون النظر إلى ألوانها وبعد ذلك سحبت كرة ثالثة عشوائياً من الصندوق ووجد أنها بيضاء ، ما احتمال أن تكون الكرتان اللتان سحبتا أولاً من اللون الأحمر ؟

٤٨– صندوق يحتوى على 9 كرات حمراء ، 7 كرات بيضاء ، 6 كرات زرقاء تم سحب كرتان من الصندوق بطريقة عشوائية واحدة تلو الأخرى وبدون إرجاع . أرسم شجرة الاحتمال للتجربة وأوجد ما يأتي :

١ – احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض .

٢ – احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون .

٣ – احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني حمراء .

٤ – احتمال أن تكون الكرتان مختلفتان في اللون .

٤٩– يحتوي صندوق A على 15 ورقة مرقمة من 1 إلى 15 ويحتوي صندوق B على 8 ورقات مرقمة من 1 إلى 8 ، اختير صندوق بطريقة عشوائية وسحبت منه ورقة ، باستخدام شجرة الاحتمال للتجربة أوجد

١ – احتمال أن تكون الورقة المسحوبة تحمل رقم فردى .

٢ – إذا كان رقم الورقة المسحوبة فردياً فأوجد احتمال أنها سحبت من الصندوق B .

٥٠– صندوقان متشابهان ، يحتوى الصندوق الأول على 10 كرات حمراء ، 12 كرة بيضاء ويحتوى الصندوق الثاني على 20 كرة حمراء ، 9 كرات بيضاء . تم اختيار صندوق بطريقة عشوائية ثم سحبت منه كرة عشوائياً ووضعت في الصندوق الآخر بدون النظر إلى لونها ثم سحبت كرة من هذا الصندوق الآخر . ارسم شجرة الاحتمال للتجربة واستنتج منها ما يأتي :

١ – احتمال أن تكون الكرتان في السحب الأول والثاني من اللون الأحمر.

٢ – احتمال أن تكون الكرتان في السحب الأول والثاني من نفس اللون.

٣ – احتمال أن تكون الكرتان في السحب الأول والثاني مختلفتا اللون.

٤– احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء .

٥– احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني حمراء بشرط أن الكرة في السحب الأول كانت حمراء.

٦ – احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء بشرط أن الكرة في السحب الأول كانت من الصندوق الثاني .

٥١- صندوقان متشابهان ، يحتوى الصندوق الأول على 10 كرات حمراء ، 12 كرة بيضاء ويحتوى الصندوق الثاني على 20 كرة حمراء ، 9 كرات بيضاء . تم اختيار صندوق بطريقة عشوائية ثم سحبت منه كرتان عشوائياً ووضعتا في الصندوق الآخر بدون النظر إلى لونهما ثم سحبت كرة من هذا الصندوق الآخر . ارسم شجرة الاحتمال للتجربة واستنتج منها ما يأتي :

١ - احتمال أن الكرتان في السحب الأول والكرة في السحب الثاني بيضاء .

٢ - احتمال أن الكرتان في السحب الأول والكرة في السحب الثاني من نفس اللون.

٣- احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء .

٤- احتمال أن الكرة في السحب الثاني حمراء بشرط أن الكرتان في السحب الأول كانتا مختلفتا اللون .

٥- احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني بيضاء بشرط أن الكرتان في السحب الأول كانتا من الصندوق الأول .

٥٢-يحتوي صندوق A على 5 كرات حمراء ، 3 كرات بيضاء ويحتوي صندوق B على كرة حمراء وكرتان بيضاء . ألقي حجر نرد متزن فإذا ظهر عدد يقبل القسمة على 3تسحب كرة من الصندوق A وتوضع في الصندوق B ثم تسحب كرة من الصندوق B وخلاف ذلك تسحب كرة من الصندوق B وتوضع في الصندوق A ثم تسحب كرة من الصندوق A . ارسم شجرة الاحتمال للتجربة واستنتج منها ما يأتي :

١ - احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض .

٢ - احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون .

٣- احتمال أن تكون الكرة في السحب الثاني حمراء .

٥٣- في تجربة إلقاء عملة معدنية متزنة ثلاث مرات نفرض أن الحدث A هو ظهور صورة في الرمية الأولى ونفرض أن الحدث B هو ظهور صورة في الرمية الثانية ونفرض أن الحدث C هو ظهور صورة في الرمية الثالثة . وضح استقلال الأحداث A , B , C .

٥٤– صندوق يحتوى على 9 كرات حمراء ،5 كرات بيضاء . تم سحب كرتان من الصندوق بطريقة عشوائية واحدة تلو الأخرى .نفرض أن الحدث A هو أن تكون الكرة الأولى حمراء ونفرض أن الحدث B هو أن تكون الكرة الثانية بيضاء .

١ – إذا كان السحب مع الإرجاع هل الحدثان A , B مستقلان ؟

٢ – إذا كان السحب بدون إرجاع فهل الحدثان A , B مستقلان ؟

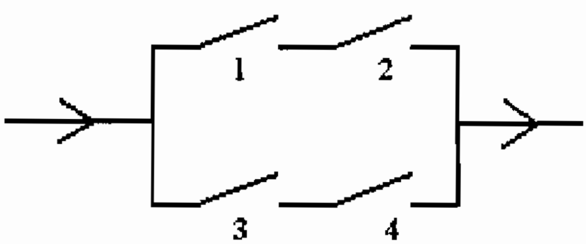
٥٥– إذا كان الحدث A يعنى أن للعائلة أطفال من الذكور والإناث والحدث B يعنى أن للعائلة ولد واحد على الأقل ، والحدث C يعنى أن للعائلة ولد واحد على الأكثر . وضح استقلال الأحداث A , B , C في الحالات الآتية :

١ – إذا كان للعائلة ثلاثة أطفال .

٢ – إذا كان للعائلة طفلان .

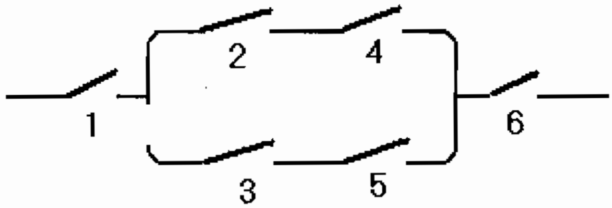
٥٦–في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين ، نفرض الحدث A هو أن يظهر في الرمية الثانية أياً من الأرقام 1 , 2 , 5 ونفرض الحدث B هو أن يظهر في الرمية الثانية أياً من الأرقام 5 , 6 ونفرض الحدث C هو أن مجموع ما يظهر في الرميتين أقل من 9 . وضح استقلال الأحداث A , B , C .

٥٧–الشكل المعطى يوضح دائرة كهربائية ذات أربعة مفاتيح مستقلة عن بعضها البعض سواء في الغلق أو الفتح واحتمال الفتح هو p واحتمال الغلق هو p-1



أوجد احتمال عدم مرور التيار بالدائرة الكهربائية .

٥٨–الشكل المعطى يوضح دائرة كهربائية ذات ستة مفاتيح مستقلة عن بعضها البعض سواء في الغلق أو الفتح واحتمال الغلق هو p واحتمال الفتح هو p-1



أوجد احتمال مرور التيار بالدائرة الكهربائية .

٥٩– في تجربة اختيار عددا عشوائياً من مجموعة الأعداد $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ نفرض أن الحدث A هو اختيار عدد يقبل القسمة على 3 والحدث B هو اختيار عدد يقبل القسمة على 4 و الحدث C هو اختيار عدد يقبل القسمة على 6 .

١– هل مجموعة الأحداث A , B , C مستقلة مثنى مثنى ؟

٢– هل مجموعة الأحداث A , B , C مستقلة ؟

٦٠– إذا كان $P(A) = 0.4$ ، $P(C|A) = 0.5$, $P(A|C) = 0.4$

١ – هل A , C مستقلان ؟

٢ – ما هو احتمال C ؟

٣ – أوجد $P(A \cup C)$.

٦١– يصل شخص إلى مكتبه كل يوم في وقت عشوائي بين الساعة الثامنة 8:00 والساعة التاسعة 9:00 صباحا . نفرض أن الحدث A هو أن يصل هذا الشخص إلى مكتبه غدا بعد الثامنة بعشرة دقائق على الأكثر ونفرض أن الحدث B هو أن يصل الشخص إلى مكتبه غدا قبل الساعة 8:30 ونفرض أن الحدث C هو أن يصل الشخص إلى مكتبه إما بين الساعة 8:15 والساعة 8:30 أو بين الساعة 8:45 والساعة 9:00 صباحا .

هل مجموعة الأحداث $\{A, B, C\}$ مستقلة مثنى مثنى أم مستقلة ؟

٦٢-أحد فرق كرة القدم في أي مباراة يلعبها يكون احتمال فوزه 0.7 واحتمال تعادله 0.2 واحتمال خسارته 0.1 فإذا لعب هذا الفريق أربع مباريات فأوجد ما يأتي :

١- احتمال فوز الفريق في المباريات الأربعة .

٢- احتمال فوز الفريق في مباريتين على الأقل .

٣- احتمال فوز الفريق في مباريتين على الأقل وعدم هزيمته .

٤- احتمال عدم فوز الفريق في أي مباراة .

٥- إذا كان الفريق يحصل على ثلاث نقاط في حالة الفوز ونقطة واحدة في حالة التعادل ولا يحصل على أي نقطة في حالة الخسارة فأوجد احتمال أن الفريق يحصل على 9 نقاط على الأقل في مجموع المباريات الأربعة .

٦٣-امتحان في مقرر اللغة الإنجليزية به 20 سؤال ، العشرة أسئلة الأولى بنظام الصواب والخطأ true - false والأسئلة الباقية بنظام الاختيار من متعدد multiple choice حيث لكل سؤال ثلاث إجابات منها إجابة واحدة فقط صواب . أحد الطلاب لم يكن مستعد للاختبار وأجاب على جميع الأسئلة بالتخمين . أوجد

١- احتمال أن تكون الإجابة صواب على جميع الأسئلة .

٢- احتمال أن تكون الإجابة خطأ على جميع الأسئلة .

٣- احتمال أن تكون الإجابة صواب على الأسئلة الزوجية وخطأ على الأسئلة الفردية .

٤- إذا كان النجاح في الاختبار يتطلب أن تكون الإجابة صواب على 5 أسئلة على الأقل من الأسئلة الستة الأولى بنظام الصواب والخطأ وعلى 3 أسئلة على الأقل من الأسئلة الأربعة الباقية بنظام الاختيار من متعدد فأوجد احتمال رسوب هذا الطالب .

٦٤-في أحد الأيام قام مندوب مبيعات لأحد شركات الأدوية بالمرور على 16 صيدلية لعرض أنواع أدوية من إنتاج الشركة فإذا كان احتمال أن يتعاقد على توزيع الأدوية لكل من الصيدليات يساوى 0.1 فما هو احتمال أن يتعاقد على توزيع الأدوية مع صيدلية واحدة على الأقل في هذا اليوم .

ملحق

المجموعات Sets

١ - مقدمة Introduction

مفهوم المجموعة يستخدم كثيراً في الرياضيات فالطلاب يدرسون نظرية المجموعات بشكل أو بآخر في جميع المستويات في الرياضيات بدءاً من المدرسة الابتدائية وصولاً إلى الجامعة حتى أنه يمكننا القول بأن نظرية المجموعات تمثل فكرة موحدة تربط كل فروع الرياضيات بل واكثر من ذلك فهي تعتبر وسيلة ناجحة جدا لتوحيد لغة الرياضيات . وفى المفهوم الرياضي فإن كلمة مجموعة Set تطلق فقط على التجمعات من الأشياء المتمايزة والمعرفة تعريفا جيداً وهذه الأشياء تسمى عناصر المجموعة elements وهى محددة تحديداً دقيقاً لا يقبل الغموض بمعنى أنه لأي عنصر فإننا نستطيع الحكم على ما إذا كان العنصر موجود ضمن عناصر المجموعة أم غير موجود ، ومن أمثلة المجموعات :

- مجموعة كتب الرياضيات فى مكتبة كلية التربية بجامعة عين شمس .
- مجموعة أسماء الطلاب بالفصل .
- مجموعة شهور السنة الميلادية .

بينما " أسماء الطلاب طوال القامة بالفصل " لا تمثل مجموعة لأنها غير معرفة تعريفا جيدا ، ويرمز للمجموعة بأحد الحروف الكبيرة ... A, B,C, بينما يرمز لعناصر المجموعة بالحروف الصغيرة ... a , b , c, وإذا كان العنصر a ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a ينتمي إلى المجموعة A ويكتب $a \in A$ حيث الرمز $\in$ يمثل الانتماء أما إذا كان العنصر a ليس من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب $a \notin A$ حيث الرمز $\notin$ يمثل عدم الانتماء . ويمكن وصف المجموعة بكتابة عناصرها بين قوسين من النوع { } على أن توضع فواصل بين العناصر ، وترتيب العناصر داخل المجموعة ليس له أهمية وكذلك تكرار عنصر في المجموعة لا يغير من المجموعة لان

العبرة بالعناصر المختلفة داخل المجموعة وتسمى هذه الطريقة لوصف المجموعة بطريقة السرد أو القائمة فمثلا المجموعة $\{a,e,i,o,u\}$ هي نفسها المجموعة $\{a,e,a,o,u,i,o,u\}$ وإذا كانت المجموعة تحتوى على عناصر كثيرة فإننا نستخدم ثلاث نقاط ، ... ، لوصف أن المجموعة تحتوى على عناصر أخرى ومن السهل على القارئ تقديرها ومعرفتها بسهولة فمثلا إذا كانت A هي مجموعة الأعداد الصحيحة من العدد 1 إلى العدد 100 فإنه يمكن كتابة A بالصورة $A=\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ ولأي مجموعة S فإن عدد عناصرها يرمز له بالرمز $n(S)$ وعندما يكون $n(S)< \infty$ فإن المجموعة S تسمى مجموعة منتهية Finite Set وخلاف ذلك فإن المجموعة S تسمى مجموعة غير منتهية Infinite Set فمثلا المجموعة $A=\{1,2,3, \ldots ,100\}$ مجموعة منتهية وعدد عناصرها $n(A) = 100$ بينما المجموعة $B=\{2,4, 6, \ldots\}$ مجموعة غير منتهية ويرمز لذلك $n(B) = \infty$. وإذا كانت المجموعة لا تحتوى على أي عنصر فإنها تسمى بالمجموعة الخالية ويرمز لها بالرمز Φ أو بالرمز $\{\ \}$ فمثلا إذا كانت S هي مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من 5 واصغر من 3 فإن S تكون هي المجموعة الخالية . وتوجد طريقة ثانية لوصف المجموعات تسمى بطريقة الصفة المميزة حيث يتم كتابة أحد عناصر المجموعة مع ذكر الصفة المميزة للمجموعة ويعبر عنها بالصورة $\{x \mid p(x)\}$ وتقرأ مجموعة العناصر x التي تحقق الخاصية $p(x)$ والمتغير x يمثل عنصر اختياري من عناصر المجموعة والخط الرأسي " | " يعنى حيث أن فمثلا

– مجموعة شهور السنة الميلادية يعبر عنها بالصورة $\{x \mid$ x اسم شهر في السنة الميلادية $\}$

– مجموعة الأعداد الزوجية يعبر عنها بالصورة $\{x \mid$ x عدد زوجي $\}$

– مجموعة حل المعادلة $x^2-9=0$ يعبر عنها بالصورة $\{x \mid x^2 - 9 = 0\}$.

– مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 10 يعبر عنها بالصورة

$\{x \mid$ x عدد صحيح موجب أقل من عشرة $\}$

وإذا كانت A , B مجموعتان غير خاليتان فإن حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة A في المجموعة B يكون مجموعة يرمز لها A x B وتعرف بالصورة

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

فمثلا إذا كانت $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b\}$ فإن $A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

٣ - المجموعات الجزئية Subsets

إذا كانت A , B مجموعتان بحيث أن كل عنصر في المجموعة A موجود أيضاً في المجموعة B ، أي إن المجموعة A محتواه بالكامل في المجموعة B ، في هذه الحالة يقال أن المجموعة A مجموعة جزئية Subset من المجموعة B ويرمز لذلك $A \subseteq B$ أو $B \supseteq A$. وإذا كانت $A \subseteq B$ ولكن يوجد عنصر واحد على الأقل في المجموعة B وغير موجود في المجموعة A في هذه الحالة يقال أن A مجموعة جزئية فعلية Proper Subset من المجموعة B ويرمز لذلك $A \subset B$ أو $B \supset A$. وحيث إن المجموعة الخالية Φ لا تحتوى على أي عنصر إذن لا يمكن إيجاد عنصر في المجموعة الخالية Φ وغير موجود في أي مجموعة A وبالتالي فإن المجموعة الخالية Φ تكون مجموعة جزئية من أي مجموعة A ($\Phi \subseteq A$) كما أن أي مجموعة تكون مجموعة جزئية من نفسها ($A \subseteq A$) .
وبفرض المجموعة $A = \{a , b\}$ فإن كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة A تكون $\Phi , A , \{a\}, \{b\}$ وعددها يساوى 2^2 وبالمثل للمجموعة $B = \{a , b , c\}$ فإن كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة B تكون $\Phi, B, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$ وعددها يساوى 2^3 وبوجه عام إذا كانت المجموعة A تحتوى على n من العناصر ($n(A) = n$) فإن عدد المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة A يساوى 2^n . ومجموعة كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة A تسمى مجموعة القوة Power Set للمجموعة A ويرمز لها بالرمز $\rho(A)$.

مثال ١ : نفرض المجموعتان $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$ إذن $p(A) = \{\Phi, A, \{a\}, \{b\}\}$
ومجموعة القوة للمجموعة B $p(B) = \{\Phi, B, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

ويقال أن المجموعتين A , B متساويتين ويرمز لذلك $A = B$ إذا وفقط إذا احتويتا على نفس العناصر بمعنى أن كل عنصر في المجموعة A موجود في المجموعة B ($A \subseteq B$) وكل عنصر في المجموعة B موجود في المجموعة A ($B \subseteq A$) . وفى أي مناقشة خاصة بالمجموعات فإنه يتحتم علينا تعيين مجموعة ثابتة بحيث أن جميع المجموعات التي نتعامل معها في المناقشة تكون مجموعات جزئية منها وفى هذه الحالة نسمى تلك المجموعة الثابتة بالمجموعة الشاملة Universal Set ويرمز لها بالرمز U وبالتالي فإنه لأي مجموعة A فإن $\Phi \subseteq A \subseteq U$.

٣ - العمليات على المجموعات Set Operations

إذا كانت A , B مجموعتان فإن تقاطعهما هو مجموعة جميع العناصر المشتركة التي تنتمي إلى كل من A , B معاً ويرمز لذلك $A \cap B$ أي إن

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

واتحادهما هو المجموعة التي تحتوى على جميع العناصر الموجودة في A أو الموجودة في B أو كليهما ويرمز لذلك $A \cup B$ أي إن

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

حيث الرمز $\wedge$ هو أداة الوصل " و and " والرمز $\vee$ هو أداة الفصل " أو or " وهى من أدوات الربط في لغة المنطق ، وبوجه عام إذا كانت $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ مجموعات فإن تقاطعها يعرف بالصورة

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{ x \mid \forall \quad 1 \le i \le n \ , \ x \in A_i \}$$

واتحادها يعرف بالصورة

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{ x \mid \exists \quad 1 \le i \le n \ : \ x \in A_i \}$$

ويقال للمجموعتين A , B إنهما منفصلتين إذا وفقط إذا كان $A \cap B = \Phi$ ومكملة المجموعة A في المجموعة الشاملة U يرمز لها A' وتعرف بأنها مجموعة كل العناصر الموجودة في U والغير موجودة في المجموعة A أي إن

$$A' = \{ x \mid x \in U \wedge x \notin A \}$$

ونلاحظ أن مكملة U تكون المجموعة الخالية Φ ($U' = \Phi$) ومكملة Φ تكون المجموعة الشاملة U ($\Phi' = U$) ولأي مجموعة A فإن $A'' = A$. والفرق بين المجموعتان A , B يرمز له $A - B$ ويعرف كالآتي :

$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \} = A \cap B'$$

والفرق المتماثل بين المجموعتان A , B يرمز له $A \Delta B$ (ويقرأ A دلتا B) ويعرف كالآتي

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

مثال ٢ :

نفرض المجموعة الشاملة $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ ونفرض المجموعات

$$A=\{a,c,d,h\}\ ,\ B=\{b,c,d\},C=\{b,d,f,h\}$$

في الجدول الآتي نضع بعض العمليات على المجموعات A,B,C

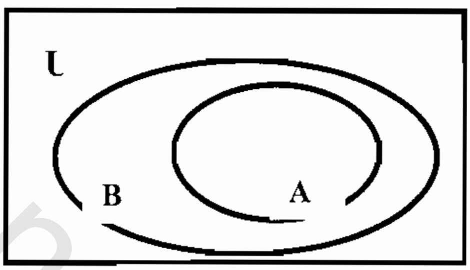
$A\cap B=\{c,d\}$
$A\cap C=\{d,h\}$
$B\cap C=\{b,d\}$
$A\cup B=\{a,b,c,d,h\}$
$A\cup C=\{a,b,c,d,f,h\}$
$B\cup C=\{b,c,d,f,h\}$
$A-B=\{a,h\}$
$B-A=\{b\}$
$B-C=\{c\}$
$A\Delta B=\{a,b,h\}$
$A'=\{b,e,f,g\}$
$A''=\{b,e,f,g\}'=A$
$B'=\{a,e,f,g,h\}$
$A'\cup B'=\{a,b,e,f,g,h\}$
$(A\cap B)'=\{a,b,e,f,g,h\}=A'\cup B'$
$A'\cap B'=\{e,f,g\}$
$(A\cup B)'=\{e,f,g\}=A'\cap B'$
$A\cap B\cap C=\{d\}$
$A\cup B\cup C=\{a,b,c,d,h,f\}$
$(A\cap B\cap C)'=\{a,b,c,e,f,g,h\}$
$(A\cup B\cup C)'=\{e,g\}$
$A-(B\cup C)=\{a\}$
$(A\cup B)-C=\{a,c\}$
$A\cap(B-C)=\{a,d,h\}$

٤- أشكال فن Venn Diagrams

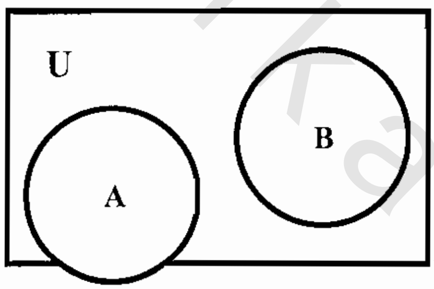
جون فن عالم رياضى إنجليزي (١٨٣٤ – ١٩٢٣) . وهو أول من استخدم الأشكال لتمثيل المجموعات . وأشكال فن ما هي إلا وسيلة تعليمية بسيطة لتوضيح العلاقة بين المجموعات ، وهى تساهم في تصور وأدراك وحل الكثير من الصعوبات المتعلقة بالمنطق ونظرية المجموعات ، وفى أشكال فن كثيرا ما نستخدم الشكل المستطيل ليمثل المجموعة الشاملة U بينما توضع المجموعات الجزئية على هيئة أشكال بيضاوية أو دائرية داخل هذا المستطيل . وفى الأمثلة الآتية نبين كيفية استخدام أشكال فن في توضيح العلاقة بين المجموعات .

مثال ٣:

العلاقات $A \cap B = \Phi$, $A \subset B$, موضحة للمجموعتين A , B في أشكال فن الآتية:

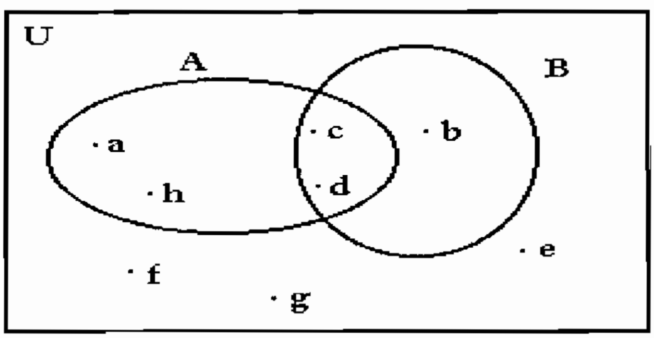


شكل فن يوضح $A \subset B$ حيث نلاحظ أن المجموعة A واقعة داخل المجموعة B

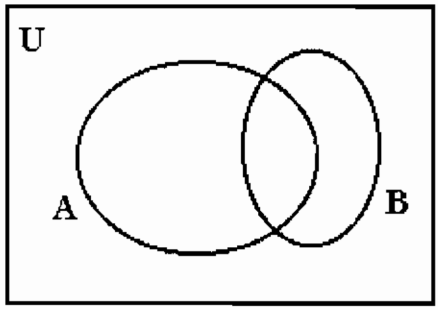


شكل فن يوضح $A \cap B = \Phi$ حيث نلاحظ أن المجموعتين A , B منفصلتين .

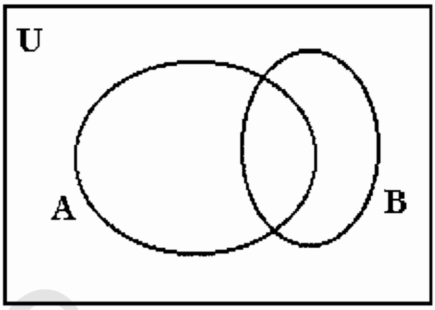
مثال ٤ : نفرض المجموعة الشاملة $U = \{ a ,b, c ,d ,e ,f ,g ,h \}$ ونفرض المجموعتان $A=\{a,c,d,h \},B=\{ b,c,d \}$. العلاقة بين المجموعات U,A,B موضحة بشكل فن الآتي :



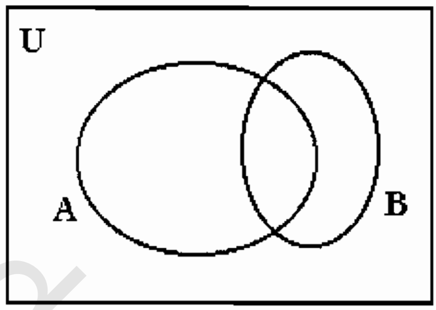
نفرض المجموعتان الغير خاليتان A , B من مجموعة شاملة U .العمليـــــات على المجموعات (التقاطع – الاتحاد – المكملة – الفرق – الفرق المتماثل) موضحة في أشكال فن الآتية :



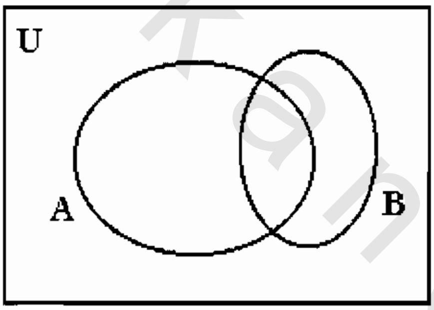
الجزء المظلل يمثل $A \cup B$



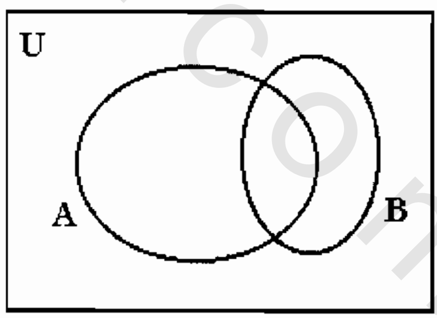
الجزء المظلل يمثل $A \cap B$



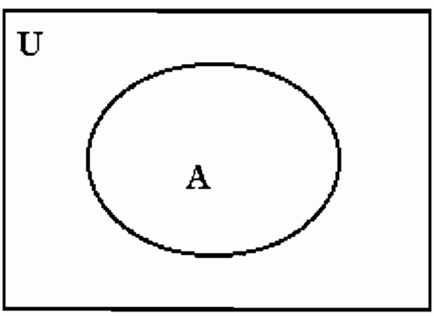
الجزء المظلل يمثل $B - A = B \cap A'$



الجزء المظلل يمثل $A - B = A \cap B'$

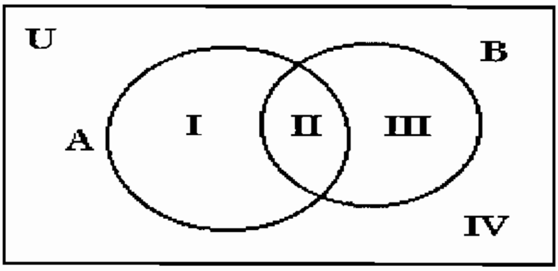


الجزء المظلل يمثل $A \,\Delta\, B$



الجزء المظلل يمثل A'

وعند التعامل مع مجموعتين A , B من مجموعة شاملة U ، ولكي نتمكن من توضيح جميع العلاقات بينهما فإنه يفضل استخدام شكل فن الآتي :



ونقوم بإعطاء رقم لكل منطقة بالشكل وهذا يمكننا من مناقشة المناطق المختلفة بالشكل ، فمثلا

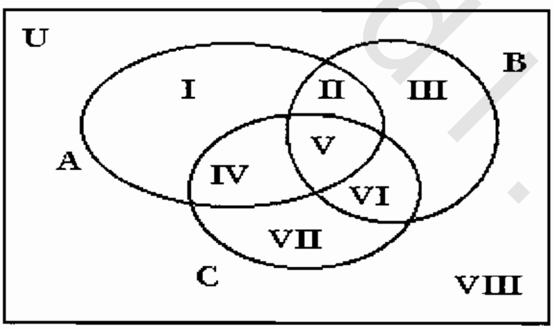
$A \cap B$ يمثلها المنطقة II

$A \cup B$ يمثلها المناطق I , II , III

$A - B$ يمثلها المنطقة I

$(A \cup B)'$ يمثلها المنطقة IV

وعند التعامل مع ثلاث مجموعات A , B , C من مجموعة شاملة U ولكي نتمكن من توضيح جميع العلاقات بينها فإنه يفضل استخدام شكل فن الآتي :



ونقوم بإعطاء رقم لكل منطقة بالشكل وهذا يمكننا من مناقشة المناطق المختلفة بالشكل ، فمثلا

$A \cap B \cap C$ يمثلها المنطقة V

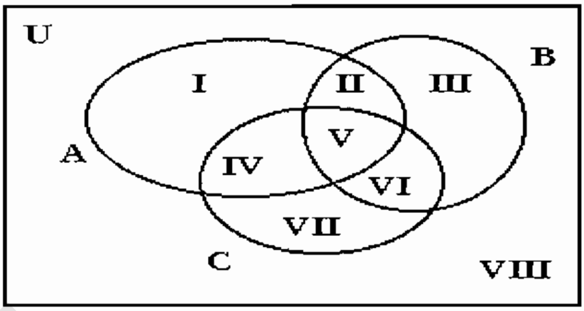
$A \cup (B \cap C)$ يمثلها المناطق I , II , IV , V , VI

$(A \cup B) \cap C$ يمثلها المناطق IV , V , VI

$(A \cup B)'$ يمثلها المناطق VII , VIII

مثال ٥ : نفرض ثلاث مجموعات A , B , C من مجموعة شاملة U . استخدم أشكال فن في توضيح المجموعة $(A \cap B) \cup (C - A)$.

الحل : في شكل فن نقوم بتظليل $A \cap B$ ويمثلها المناطق V , II



ثم نقوم بتظليل $C - A$ ويمثلها المناطق VI , VII وبالتالي فـإن $(A \cap B) \cup (C - A)$ يمثلها المناطق VII , VI , V , II المظللة بالشكل .

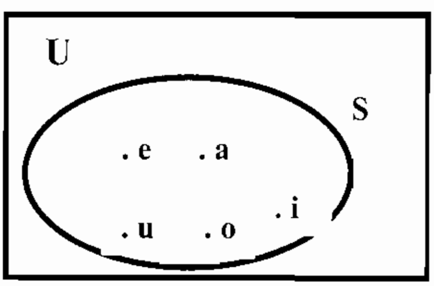
وفائدة أشكال فن لا تقتصر فقط على توضيح العلاقة بين المجموعات وإنما يمكن اسـتخدامها في التعرف على عدد العناصر في المجموعات المختلفة فإذا كانت المجموعة S تحتوى على n من العناصر المختلفة أي إن $n(S) = n$ فإنه يمكن توضيح العناصر على شكل فن بطريقتين:

الطريقة الأولى: يتم فيها كتابة العناصر داخل الدائرة الممثلة للمجموعة S وهذه الطريقة تكون صعبة في حالة إذا كانت المجموعة S تحتوى على عدد كبير من العناصر.

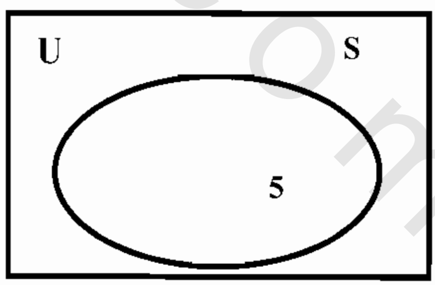
الطريقة الثانية: يتم فيها كتابة العدد الممثل لعدد العناصر داخل الدائرة الممثلة للمجموعة S.

مثال ٦ :

للمجموعة $S = \{a, e, i, o, u\}$ فإنه يمكن توضيح العناصر على شكل فن كالآتي :

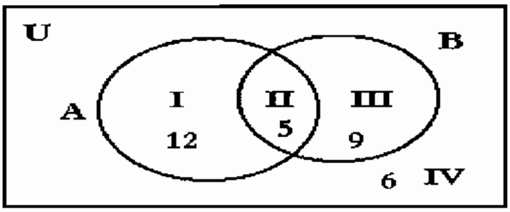


$S = \{a, e, i, o, u\}$



$n(S) = 5$

مثال ٧ : في شكل فن الآتي



الأعداد $6 , 9 , 5 , 12$ تمثل أعداد العناصر في المناطق IV , III , II , I على الترتيب

ومن الشكل يمكن استنتاج كل مما يأتي :

$n(A) = 12 + 5 = 17$, $n(A') = 9 + 6 = 15$

$n(B) = 5 + 9 = 14$, $n(A \cup B) = 12 + 5 + 9 = 26$

$n(A \cap B) = 5$, $n(A \Delta B) = 12 + 9 = 21$

نظرية ١ : إذا كانت B , A مجموعتين منتهيتين فإن

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

وكنتيـــجة لهذه النظريـــــة فإنه إذا كانت B , A مجموعتـــين منتهيتين ومنفصــــلتين فإن $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ وكذلك إذا كانت A , B , C ثلاث مجموعات منتهية فإن

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

وأشكال فن يمكن استخدامها فى حل المسائل التى تحتوى على مجموعات متشابكة من البيانات كما نوضح فى الأمثلة الآتية :

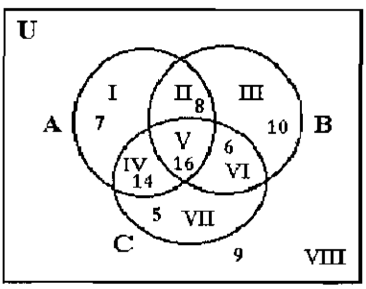
مثال ٨ : في مجموعة معينة تتكون من 75 طالب بكلية التربية وجد أن 16 طالب يدرســـون الرياضيات والفيزياء واللغة الإنجليزية ، 24 طالب يدرسون الرياضيات والفيزياء ، 30 طالب يدرســـون الرياضيات واللغة الإنجليزية ، 22 طالب يدرســـون الفيزياء واللغة الإنجليزية ، 7 طلاب يدرسون الرياضيات فقط ، 10 طلاب يدرسون الفيزياء فقط ، 5 طلاب يدرسون اللغة الإنجليزية فقط . أوجد ما يأتي :

(١) – عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات .

(٢) – عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ولا يدرسون الفيزياء .

(٣) – عدد الطلاب الذين لا يدرسون أيا من المقررات الثلاث .

الحل : هذه المثال يحتوى على مجموعات متشابكة من البيانات لذلك يمكن تمثيلها باستخدام أشكال فن . ونلاحظ بالمثال انه يوجد ثلاث مقررات دراسية وبالتالي يكون لدينا ثلاث دوائر في شكل فن ، نفرض المجموعة A تمثل مجموعة الطلاب الدارسين لمادة الرياضيات ، المجموعة B تمثل مجموعة الطلاب الدارسين للفيزياء والمجموعة C تمثل مجموعة الطلاب الدارسين اللغة الإنجليزية .ومن المفضل أن نبدأ مع البيانات الأكثر وضوحا والتي يمكن وضعها مباشرة داخل شكل فن لتمثل الأساس الذي ننطلق منه لإكمال باقي البيانات داخل الشكل وفى هذا المثال نلاحظ أن البيانات الأكثر وضوحا هي الطلاب الذين يدرسون المقررات الثلاث وعددهم 16 وهذا يعنى أن المنطقة V الممثلة لتقاطع المجموعات الثلاث $A \cap B \cap C$ تحتوى على 16 عنصر لذلك نضع العدد 16 في المنطقة V . وإذا أخذنا الطلاب الذين يدرسون الرياضيات والفيزياء ويمثلهم $A \cap B$ في المنطقتين V, II وعددهم 24 وحيث أن المنطقة V وضع بها العدد 16 من قبل إذن يتبقى 8 طلاب وبالتالي نضع العدد 8 في المنطقة II وحيث أن 30 طالب يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ويمثلهم $A \cap C$ في المنطقتين V , IV وحيث أن المنطقة V وضع بها العدد 16 من قبل إذن نضع العدد 14 في المنطقة IV وبالمثل نضع العدد 6 في المنطقة VI لأن 22 طالب يدرسون فيزياء ولغة إنجليزية وحيث أن 7 طلاب يدرسون الرياضيات فقط فانهم ينتمون إلى المنطقة I وبالمثل نضع 10 طلاب في المنطقة III التي تمثل الطلاب الذين يدرسون الفيزياء فقط وكذلك نضع 5 طلاب في المنطقة VII التي تمثل الطلاب الذين يدرسون اللغة الإنجليزية فقط ، ومجموع الأعداد الموجودة في شكل فن 66 وحيث أن عدد الطلاب في المجموعة يساوى 75 إذن يتبقى 9 طلاب في المنطقة VIII وبالتالي نحصل على شكل فن الموضح . والآن يمكننا الإجابة عن الأسئلة المطلوبة وغيرها وذلك بمجرد النظر إلى شكل فن الموضح . إذن



(١) – عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات =

$45 = 7 + 8 + 14 + 16$

(٢) – عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ولا يدرسون الفيزياء = $26 = 7+14 + 5$

(٣) – عدد الطلاب الذين لا يدرسون أيا من المقررات الثلاث = 9 .

مثال ٩ :

في مجموعة معينة تتكون من 120 طالب بكلية التربية وجد أن 100 طالب يدرسون على الأقل واحدة من اللغات الإنجليزية ، الفرنسية ، الألمانية . ووجد أن 65 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية ، 45 طالب يدرسون اللغة الفرنسية ، 42 طالب يدرسون اللغة الألمانية ، 20 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والفرنسية ، 25 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والألمانية ، 15 طالب يدرسون اللغة الفرنسية والألمانية . أوجد عدد الطلاب الذين يدرسون اللغات الثلاث ووضح عدد الطلاب في كل من المناطق الثمانية بشكل فن .

الحل : نفرض A , B , C ترمز إلى مجموعات الطلاب الذين يدرسون اللغة الإنجليزية ، الفرنسية ، الألمانية . وحيث أن 100 طالب يدرسون على الأقل واحدة من اللغات الثلاث إذن

$$n(A \cup B \cup C) = 100$$

وبالتعويض فى القانون

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

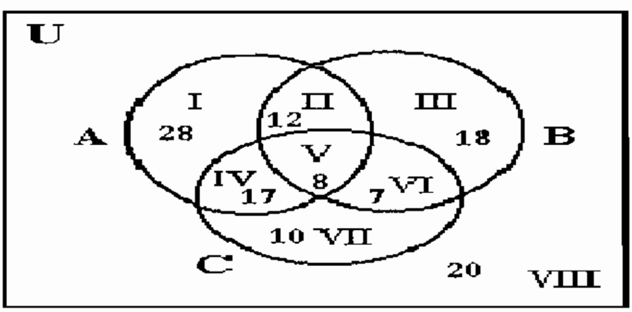
إذن

$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + n(A \cap B \cap C)$$

وبالتالي

$$n(A \cap B \cap C) = 8$$

أي أن 8 طلاب يدرسون اللغات الثلاث . والآن نستخدم هذه النتيجة لملء شكل فن كما وضحنا بالمثال السابق ، وبالتالي عدد الطلاب في كل من المناطق الثمانية بشكل فن يكون كما موضح بالشكل الآتي :



٥ - جداول الانتماء Membership Tables

يمكن تعريف جداول الانتماء بطريقة مماثلة للطريقة التي يعرف بها جداول الحقيقة في المنطق فإذا كانت $A \neq \Phi$ وكان x عنصرا ما فإنه إما أن يكون $x \in A$ أو $x \notin A$

وإذا كان A , B مجموعتين غير خاليتين وكـلٌ x عنصرا ما فإن الجدول الآتي يصف الاحتمـــالات الممكنة لانتماء العنصـــر x أو عدم انتمائـــه في المجموعتين A , B وجداول الانتماء للعمليـــات على المجموعات موضحة كالآتي :

A	B
$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$

A	A'
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$

جدول الانتماء للمكملة A'

A	B	$A \cup B$
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول الانتماء للاتحاد $A \cup B$

A	B	$A \cap B$
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول الانتماء للتقاطع $A \cap B$

A	B	$A \Delta B$
$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول الانتماء للفرق المتماثل $A \Delta B$

A	B	$A - B$	$B - A$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول الانتماء للفرق $A - B$ ، $B - A$

ونلاحظ من جدول الانتماء للاتحاد $A \cup B$ أن

$$x \notin A \cup B \quad \Rightarrow \quad x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B$$

كما نلاحظ من جدول الانتماء للتقاطع $A \cap B$ أن

$$x \notin A \cap B \quad \Rightarrow \quad x \notin A \quad \vee \quad x \notin B$$

ولإثبات أن $A \subseteq B$ نفرض $x \in A$ ونحاول إثبات أن $x \in B$. وتعتبر جداول الانتماء وسيلة ناجحة وسهلة جدا لبرهنة الكثير من الخواص والنظريات المتعلقة بالمجموعات .

مثال ١٠ :

باستخدام جداول الانتماء أثبت أن $A - B = A \cap B'$

الحل :

بتكوين جدول الانتماء

A	B	B'	$A - B$	$A \cap B'$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$

$\uparrow \qquad \uparrow$

العمودين الرابع والخامس منطبقان كما يظهر بالجدول وبالتالي يتحقق أن $A - B = A \cap B'$

مثال ١١ :

باستخدام جداول الانتماء أثبت أن $(A \cap B)' = A' \cup B'$

الحل :

بتكوين جدول الانتماء

A	B	$A \cap B$	A'	B'	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$

العمودين السادس والسابع منطبقان وبالتالي يتحقق أن $(A \cap B)' = A' \cup B'$

٦ - جبر المجموعات Algebra of Sets

نفرض أن A , B , C مجموعات جزئية من مجموعة شاملة U . في الجدول الآتي نعرض قائمة من القوانين تسمى جبر المجموعات ويمكن التحقق من صحتها باستخدام جداول الانتماء .

اسم القانون	جبر المجموعات
قوانين اللانمو Idem potent Laws	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
قوانين الإبدال Commutative Laws	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
قوانين الدمج Associative Laws	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
قوانين التوزيع Distributive Laws	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
قوانين الوحدة Identity Laws	$A \cup \Phi = A \quad , \quad A \cap U = A$ $A \cup U = U \quad , \quad A \cap \Phi = \Phi$
قوانين المكملة Complement Laws	$A \cup A' = U \quad , \quad A \cap A' = \Phi$ $U' = \Phi \quad , \quad \Phi' = U \quad , \quad A'' = A$
قوانين ديمورجان De Morgan's Laws	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ونلاحظ من الجدول أن هناك تشابه كبير بين قوانين جبر المجموعات وقوانين جبر التقارير في المنطق الرياضي ، ويأتي هذا التشابه من التناظر بين العمليات الأساسية في جبر المجموعات (الاتحاد $\cup$ والتقاطع $\cap$ والمكملة) وأدوات الربط المنطقية في جبر التقارير (الوصل $\vee$ والفصل $\wedge$ والنفي $\sim$) . ونلاحظ في الجدول أن القوانين مرتبة في صورة ثنائيات (أزواج) وهذا الترتيب يعتمد على مبدأ هام في جبر المجموعات يسمى مبدأ الثنائية (الترافق) وينص على أن صحة متطابقة ما في جبر المجموعات تقتضي صحة متطابقة أخرى تسمى بالمتطابقة الثنائية (المرافقة) ونحصل عليها من إحلال ظهور $\cap, \cup, \Phi, U$ محل $\cup, \cap, U, \Phi$ على الترتيب . ونلاحظ في أزواج القوانين بالجدول أن كل قانون مرافق للآخر .

مثال ١٢ : باستخدام التعاريف اثبت صحة قانون ديمورجان $(A \cup B)' = A' \cap B'$

الحل : من شرط تساوى مجموعتان نحاول إثبات

$1 - (A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$ $\qquad$ $2 - A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

ولإثبات (1) نفرض أن $x \in (A \cup B)'$

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A' \quad \wedge \quad x \in B' \\ &\Rightarrow x \in A' \cap B' \end{aligned}$$

وبالتالي ينتج أن $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$

ولإثبات (2) نفرض أن $x \in A' \cap B'$

$$\begin{aligned} x \in A' \cap B' &\Rightarrow x \in A' \quad \wedge \quad x \in B' \\ &\Rightarrow x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B)' \end{aligned}$$

وبالتالي ينتج أن $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

ويمكن إثبات ما سبق باستخدام التضمين $\Leftrightarrow$ كالآتي : نفرض أن $x \in (A \cup B)'$

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A' \quad \wedge \quad x \in B' \\ &\Leftrightarrow x \in A' \cap B' \end{aligned}$$

وبالتالي ينتج أن $(A \cup B)' = A' \cap B'$. ووفقا لمبدأ الثنائية فإن القانون المرافق $(A \cap B)' = A' \cup B'$ يكون متحقق أيضا .

مثال ١٣ : باستخدام قوانين جبر المجموعات اثبت صحة

$$A - (B \cup C) = (A - B) - C$$

الحل : من تعريف الفرق $\qquad A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)'$

قانون ديمورجان $\qquad = A \cap (B' \cap C')$

قانون الدمج $\qquad = (A \cap B') \cap C'$

من تعريف الفرق $\qquad = (A - B) - C$

مثال ١٤ :

في الجدول الآتي نضع بعض المتطابقات في جبر المجموعات ونوضح المتطابقة المرافقة لكل منها .

المتطابقة	المتطابقة المرافقة
$A \cap A' = \Phi$	$A \cup A' = U$
$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \Phi$
$A \cap (B \cup A) = A$	$A \cup (B \cap A) = A$
$A \cap (B \cup C)' = (A \cap B') \cap C'$	$A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$
$(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$	$(\Phi \cup A) \cap (B \cup A) = A$
$(U \cup A) \cup (A \cap \Phi) = U$	$(\Phi \cap A) \cap (A \cup U) = \Phi$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ملحق

تمارين

١ – إذا كانت $A = \{a, b, c, d\}$

(أ) – اكتب جميع المجموعات الجزئية للمجموعة A .

(ب) – اكتب جميع المجموعات الجزئية B بحيث يكون $\{b\} \subseteq B$ ، $B \subseteq A$ ، $B \neq A$.

(ج) – اكتب جميع المجموعات الجزئية C بحيث يكون $n(C) \leq 2$.

(د) – فى الجدول الآتي وضح أى من العبارات الآتية صحيح وأيها خطأ ؟ ولماذا ؟

$a \in A$	$n(\{a\}) = n(\{b\})$	$\Phi \subseteq \{a\}$
$\{a, b\} \in A$	$\{\{a, b\}\} \in p(A)$	$\Phi \in A$
$\{a, d\} \subseteq \{b, d, c\}$	$\{a, b\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$	$\Phi \in p(A)$
$\{a, b\} \subseteq p(A)$	$\{c\} \subseteq \{\{a\}, \{c\}\}$	$\Phi \subseteq p(A)$
$\{a, c\} = \{c, a, c\}$	$\{d\} \in \{\{d, c\}, \{c\}\}$	$\Phi \in p(\Phi)$

٢ – اكتب كل من المجموعات الآتية باستخدام الصفة المميزة

(1)- $A = \{3, 6, 9, \ldots, 99\}$
(2)- $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$
(3)- $C = \{1, 3, 5, \ldots\}$
(4)- $A = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$

٣ – إذا كانت $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, e\}$ فأوجد كل من

$A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $p(B)$, $p(A \cap B)$, $p(A - B)$, $p(A \times B)$

٤ – إذا كانت $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ فأوجد $n(X)$ في كل من

(1)– $X = \{x \mid (x \in A) \wedge (2x > 17)\}$

(2)– $X = \{x \mid (x \in A) \wedge (x^2 \geq x!)\}$

٥ – إذا كانت $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{2,3,6,12\}$, $C = \{1,2,3,4,5,6,9\}$ مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة $U = \{1,2,3, \ldots, 12\}$ فأستخدم أشكال فن في إيجاد كل مما يأتي:

$A \cup B$, $A \cup (B \cap C)$, $A - (B \cup C)$, $B - C'$

$(A \cap B)'$, $A \cap (B' - C)$, $A' \cap (B \cup C)'$, $(A' \cup C')'$

٦ – نفرض أن A , B , C مجموعات جزئية من مجموعة شاملة U . أستخدم أشكال فن في وصف كل من المجموعات الآتية :

$$A \cup B' \quad , \quad A \cap (B \cup C) \quad , \quad A \cap (B \Delta C) \quad , \quad B \cap C'$$
$$(A \cap B)' \quad , \quad A - (B \cap C) \quad , \quad A' \cap (B \Delta C)' \quad , \quad (A' \cup C')'$$

٧ – نفرض أن A , B , C مجموعات جزئية من مجموعة شاملة U . رتب المجموعات الآتية بحيث تكون كل واحدة منها محتواة في المجموعة التي تليها :

$$A \cup B \quad , \quad A \cap B \quad , \quad A \cup B \cup C \quad , \quad A \cap B \cap C \quad , \quad \Phi' \quad , \quad A$$

٨ – وضح كل من القوانين الآتية باستخدام أشكال فن ثم أثبت كل منها باستخدام جداول الانتماء وكذلك أثبت كل منها باستخدام التعاريف :

1 - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3 - $A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$

4 - $A \cap (B \cup A) = A$

5 - $(A \cap B)' = A' \cup B'$

6 - $A \Delta B = B \Delta A$

7 - $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

٩ – باستخدام جبر المجموعات أثبت كل مما يأتي :

1 - $(A \cup (B' \cap C))' = (A' \cap B) \cup (A \cup C)'$

2 - $A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$

١٠ – في عينة من 225 طالب بأحد الكليات تم سؤال كل منهم عن الألعاب التي يمارسونها ، فإذا كان 62 طالب يمارسون كرة القدم ، 53 يمارسون كرة السلة ، 65 يمارسون العاب القوى ، 19 يمارسون كرة القدم وكرة السلة ، 14 يمارسون كرة القدم والعاب القوى ، 21 يمارسون كرة السلة والعاب القوى ، 8 لا يمارسون أيا من الألعاب الثلاث . استخدم أشكال فن في إيجاد عدد الطلاب الذين يمارسون لعبة واحدة فقط .

المراجع

1- Harold J. Larson : Introduction to Probability Theory and Statistical Inference , Third Edition , John Wiley & Sons , 1982 .

2- Lipschurtz , Seymour : Set Theory and Related Topics , Schaum's Outline Series . McGraw – Hill , New York , 1964 .

3- Rohatgi , V.K . : An Introduction to Probability and Mathematical Statistics , John Wiley & Sons , 1976 .

4- Saeed Ghahramani : Fundamentals of Probability , Prentice Hall , 1996 .

5- Sqymour Lipschutz : Probability , Schaum's Outline Series , McGraw – Hill , New York , 1974 .

6- Stupecki , J . : Elements of Mathematical Logic and Set Theory Oxford 1967 .

7- William M . Setek, Jr. : Fundamentals of Mathematics , Prentice Hall , 1996 .