

الباب الرابع

النظم المبنية على الأعداد

التعبير بالأعداد:

لقد كان محور العلم الأساسي مرتبطاً بالأعداد حيث كان الهدف الأساسي هو محاولة وصف النظم الطبيعية بالأعداد. في العلم التقليدي لقيت الأعداد اهتماماً كبيراً حيث أنها محور دراسة الرياضيات التقليدية.

لنبدأ بالسؤال التالي: هل توجد نظم أعداد يمكن أن تعطى سلوكاً معقداً؟ الإجابة نعم يمكن أن نجد نظاماً بسيطة تعتمد على قواعد بسيطة جداً من الأعداد ذات سلوك شديد التعقيد.

لنبدأ بالمثل التالي: في نظم العد يمكن أن نستخدم قاعدة 2، 3، 4، ... حتى الرقم 9. في شكل (42) نورد صورة توضح كيف يمكن كتابة الرقم 3829 في نظم عد مختلفة.

$3829 = 3 \times 1000 + 8 \times 100 + 2 \times 10 + 9 \times 1$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">8</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">9</td></tr></table>	3	8	2	9	(base 10)								
3	8	2	9											
$3829 = 5 \times 729 + 2 \times 81 + 2 \times 9 + 4 \times 1$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 10px;">5</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr></table>	5	2	2	4	(base 9)								
5	2	2	4											
$3829 = 7 \times 512 + 3 \times 64 + 6 \times 8 + 5 \times 1$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 10px;">7</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">6</td><td style="padding: 2px 10px;">5</td></tr></table>	7	3	6	5	(base 8)								
7	3	6	5											
$3829 = 1 \times 2401 + 4 \times 343 + 1 \times 49 + 1 \times 7 + 0 \times 1$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr></table>	1	4	1	1	0	(base 7)							
1	4	1	1	0										
$3829 = 2 \times 4296 + 5 \times 216 + 4 \times 36 + 2 \times 6 + 1 \times 1$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">5</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr></table>	2	5	4	2	1	(base 6)							
2	5	4	2	1										
$3829 = 1 \times 3125 + 1 \times 625 + 0 \times 125 + 3 \times 25 + 0 \times 5 + 4 \times 1$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr></table>	1	1	0	3	0	4	(base 5)						
1	1	0	3	0	4									
$3829 = 3 \times 1024 + 2 \times 256 + 3 \times 64 + 3 \times 16 + 1 \times 4 + 1 \times 1$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr></table>	3	2	3	3	1	1	(base 4)						
3	2	3	3	1	1									
$3829 = 1 \times 2187 + 2 \times 729 + 0 \times 243 + 2 \times 81 + 0 \times 27 + 2 \times 9 + 1 \times 3 + 1 \times 1$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr></table>	1	2	0	2	0	2	1	1	(base 3)				
1	2	0	2	0	2	1	1							
$629 = 1 \times 2048 + 1 \times 1024 + 1 \times 512 + 0 \times 256 + 1 \times 128 + 1 \times 64 + 1 \times 32 + 1 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr></table>	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	(base 2)
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1			

شكل (42)

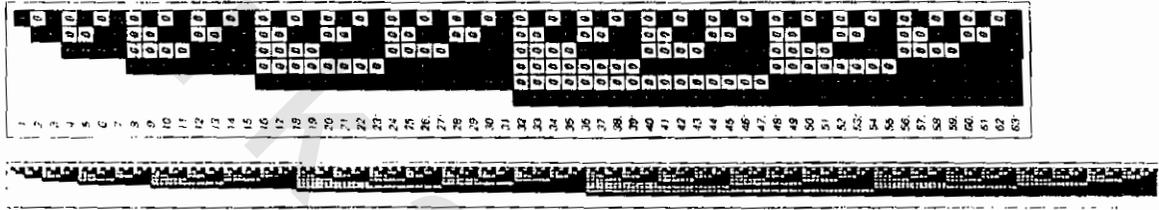
نظام العد الثنائي في السطر الأخير مهم حيث أنه النظام الذي يستخدم في الحاسبات الآلية . في هذا النظام نجد تشابها مع ما ورد في الأوتوماتا الخلوية حيث يمكن أن نعبر عن الواحد بخلية سوداء وعن الصفر بخلية بيضاء .

إن العمليات الحسابية التي تتم على الأعداد لا يمكن لأول وهلة أن تؤدي إلى سلوك معقد أو شديد التعقيد . ولكن كما سنرى ليس هذا صحيحا .

لنبدأ بأخذ متتالية بسيطة مثل ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ إذا تحولنا إلى النظر إلى هذه المتتالية رقميا كما نرى في شكل (٤٣) سوف نلاحظ السلوك شديد التعقيد .

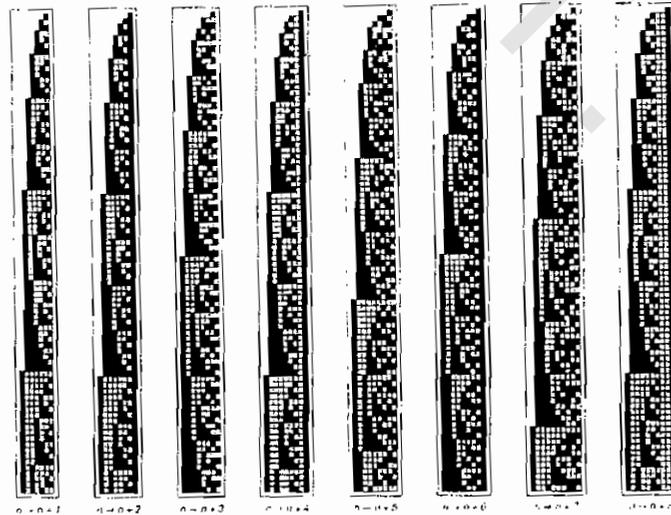
الحساب الأولي

Elementary Arithmetics



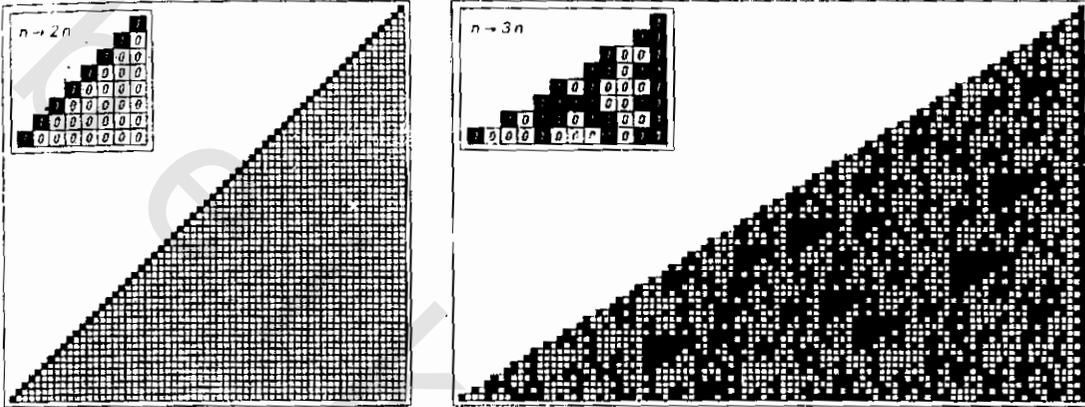
شكل (٤٣)

كما نرى في شكل (٤٤) يمكن أن نضيف في كل خطوة ليس الوحدة فقط وإنما يمكن أن نضيف ٢ ، ٣ ، ٤ وهكذا كما نرى في شكل (٤٤) نحصل على أشكال متداخلة تكرارية وشديدة التعقيد كما هو واضح .



شكل (٤٤)

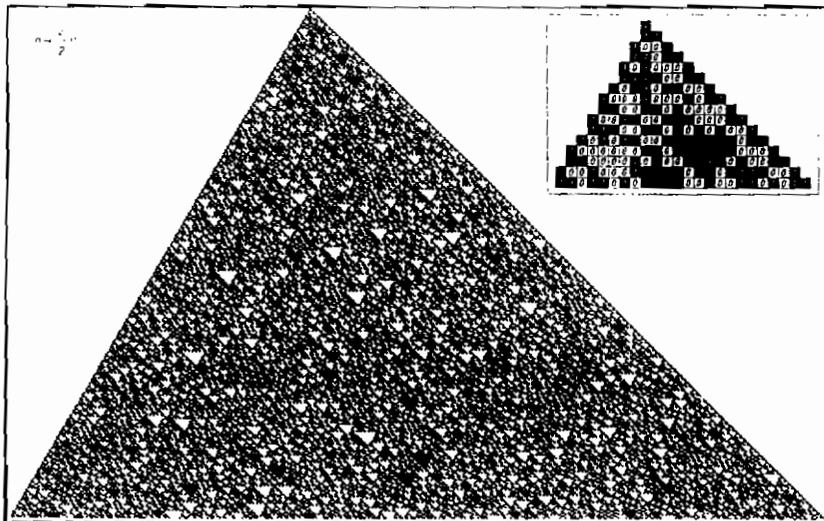
كمثال آخر يمكن أن ندرس ماذا يحدث عندما نضرب متتالية عددية بعدد ما .
 عند الضرب في ٢ نحصل على نتيجة بسيطة عبارة عن إزاحة للخلايا إلى اليسار .
 عند الضرب في الرقم ٣ نحصل على شكل معقد جداً كما هو واضح في شكل (٤٥) حيث تبدو الصورة عشوائية جداً بخالية من سمات التكرارية .



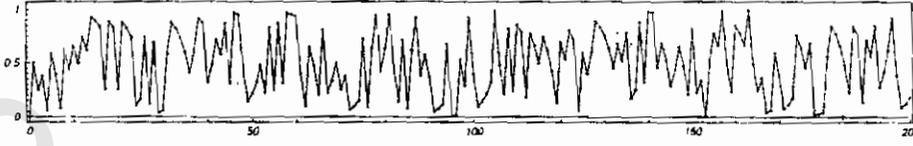
شكل (٤٥)

ولكن ربما يرد إلى الذهن أن هذا التعقيد ناتج عن معالجتنا للمتتاليات في صورتها الرقمية ، ولكن هذا الاستنتاج غير صحيح وسوف نعطي بعض الأمثلة التي سنعالج فيها المتتالية مع الاحتفاظ بسمتها الحجمية .

لنورد المثال الآتي : إذا بدأنا بالرقم ١ ثم ضربناه ١ ، ١,٥ ، ٢,٢٥ ، ٣,٣٧٥ ، ٧,٥٩٣٧٥ ، ١١,٣٩٠٢٥ وهكذا . عند رسم هذه المتتالية نحصل على الصورة المبينة في شكل (٤٦) .



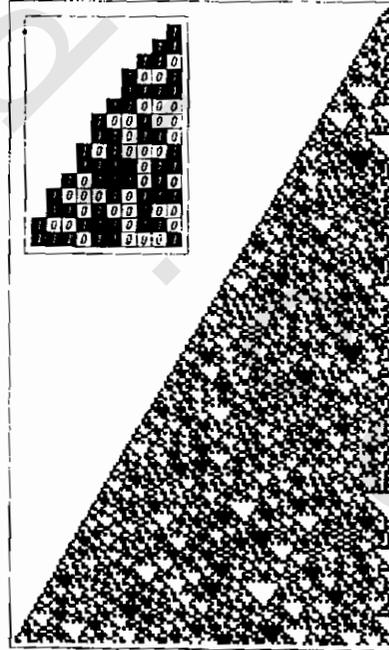
شكل (٤٦)



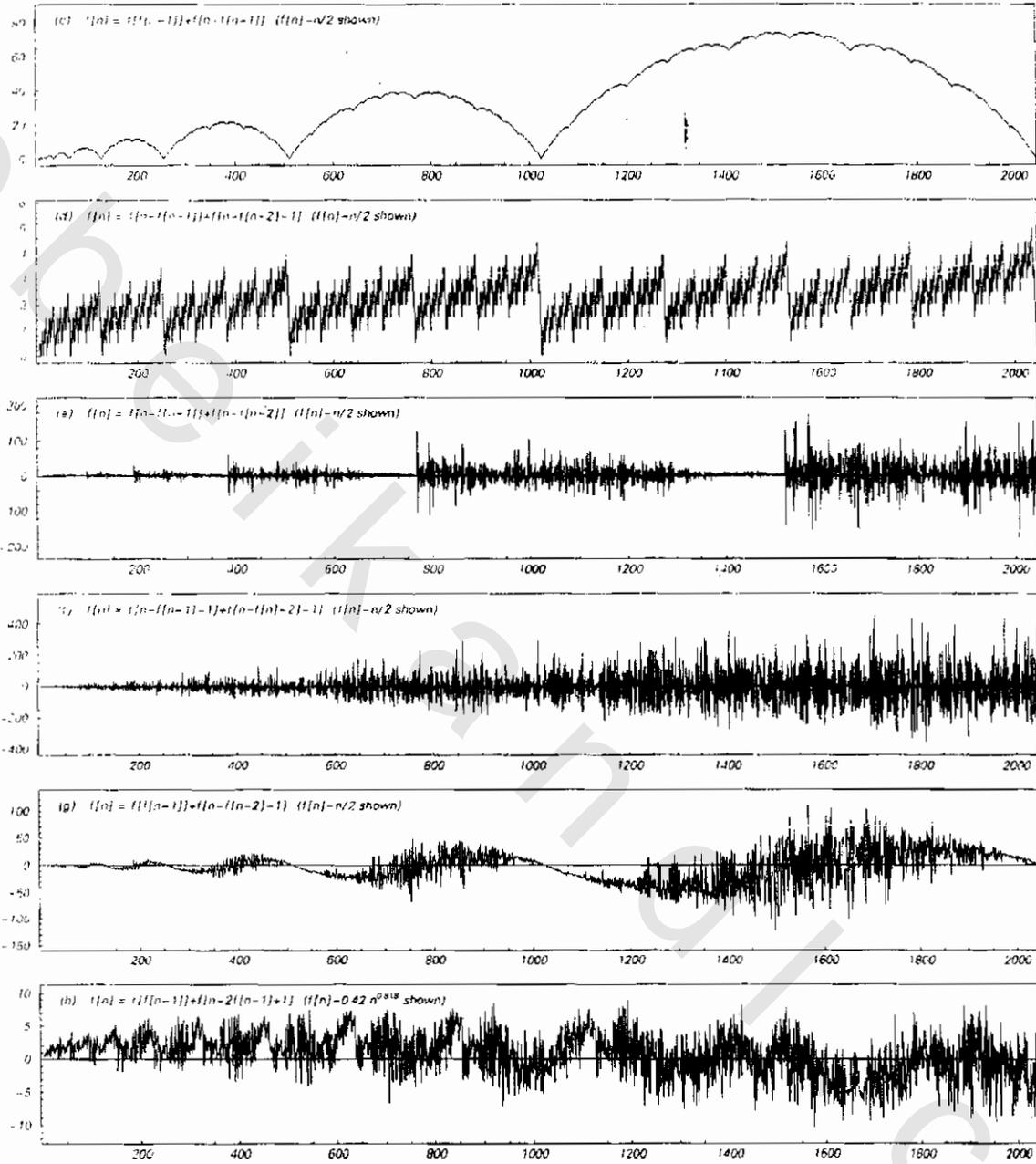
شكل (٤٧)

شكل (٤٧) يوضح العشوائية التامة في هذه المتتالية رغم بساطة القاعدة المستخدمة .

لتغير القاعدة تغييراً بسيطاً . لنضع شرطاً أنه عند الضرب في ١,٥ وحصلنا على عدد زوجي فنضربه في المعامل ١,٥ ، أما إذا حصلنا على عدد فردي لنضف إليه رقم ١ حتى يصبح عدداً زوجياً ثم نضربه في المعامل ٠,٥ لذا نضمن الحصول على أعداد صحيحة مثل ١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٥ ، ٢٤ ، ٣٦ ، ٥٤ ، ٨١ ، ١٢٣ ، ١٨٦ ، ٢٧٦ ، ٤٢٠ ، ٦٣٠ ، ٩٤٥ ، ١٤١٩ ، ٢١٣٠ ، ٣١٩٥ ، ٤٧٩٤ ، وهكذا . بعض هذه الأعداد زوجي والآخر فردي نحصل على الصورة المبينة في شكل (٤٨) والعشوائية تماماً .



شكل (٤٨)



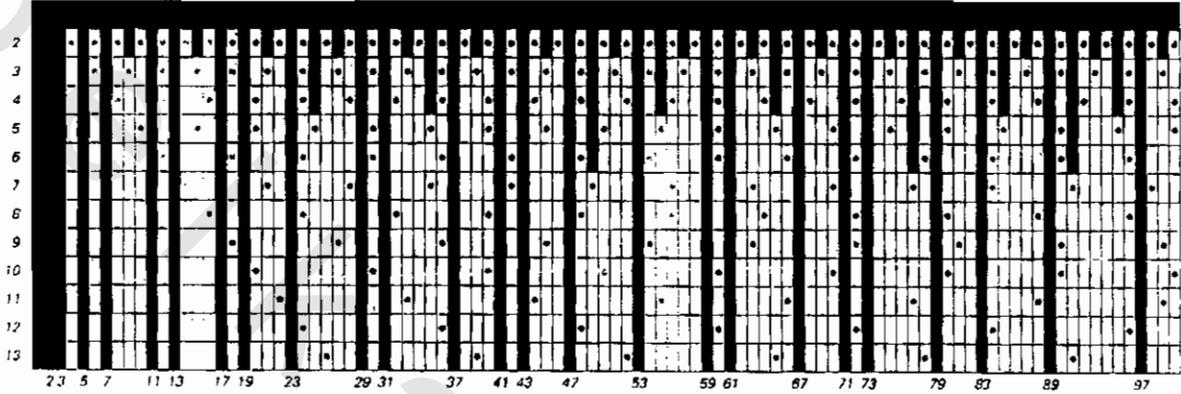
شكل (٥١ ب)

نخلص من كل ذلك أن بعض المتواليات رغم أننا نستخدم قواعد بسيطة مثل الجمع والطرح يمكن أن تؤدي إلى سلوك شديد التعقيد .

الأعداد الأولية هي الأعداد التي لا تقبل القسمة إلا على نفسها وبالطبع على العدد «واحد». هذه المتتالية هي متتالية لا نهائية وهذا معروف منذ حوالي ألفي عام.

The Sequence of Primes

في شكل (٥٢) نورد طريقة لاستخراج الأعداد الأولية .

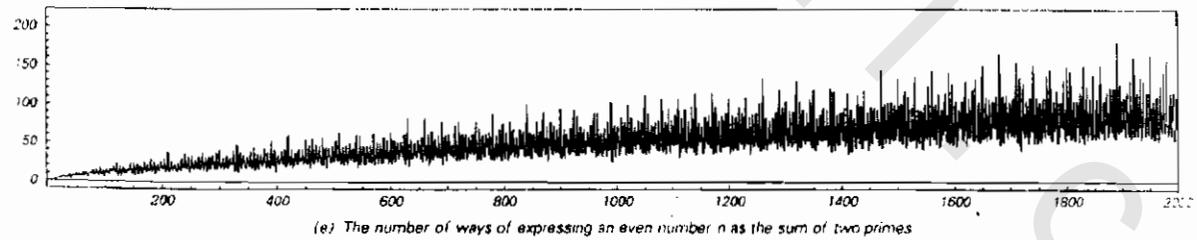
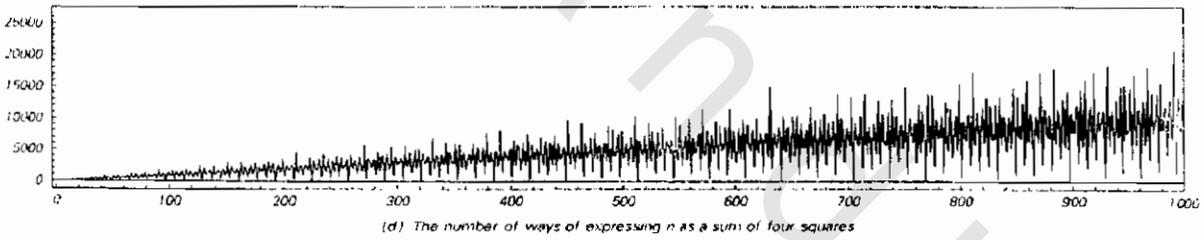
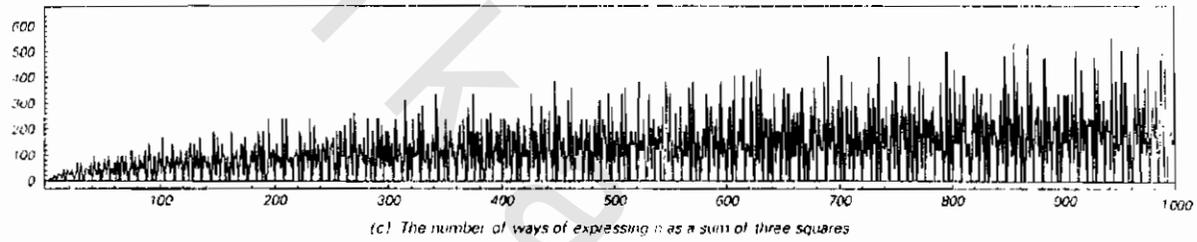
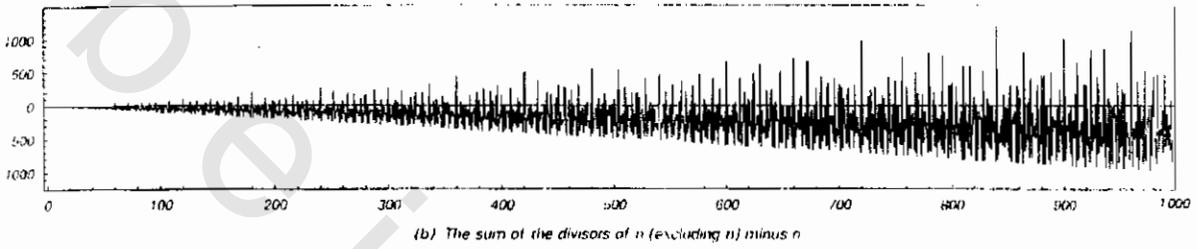
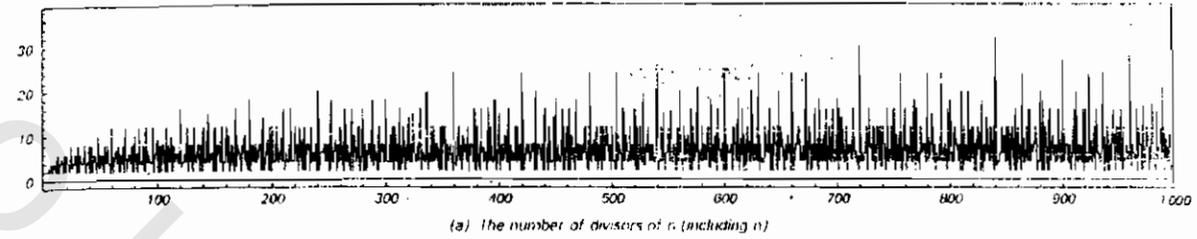


شكل (٥٢)

تنحصر الطريقة في أننا نكتب الأرقام من (١) إلى (١٠٠) ثم نبدأ في شطب الأعداد التي تقبل القسمة على العدد «٢» ثم على العدد «٣» ... وهكذا . ما يتبقى هو الأعداد الفردية تماماً . هذه الطريقة تسمى منخل إيراتوفينيس في عام ٢٠٠ قبل الميلاد .

في شكل (٥٣) نورد نماذج من متتالية الأعداد الأولية مع بعض التصرف حسب القواعد المذكورة مع كل رسم منها ونلاحظ الطبيعة العشوائية تماماً لمثل هذه المتواليات .

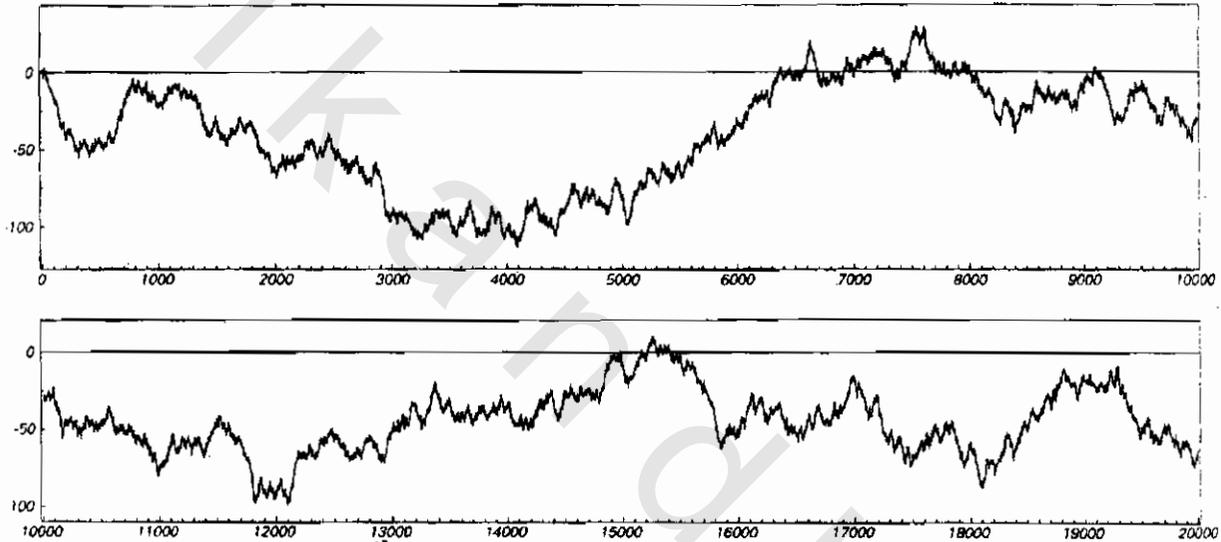
منذ القدم يهتم علماء الرياضة المشتغلون في مجال الأعداد الأولية بوجود نوع من الانتظام في هذه المتتالية ، أما نحن هنا فنهتم بمدى تعقد سلوك هذه المتتالية في شكل (٥٣) نورد أشكالاً لمتواليات تبدي سلوكاً أكثر تعقيداً وحسب القواعد المبينة مع كل رسم .



شكل (٥٣)

رغم أننا لفتنا النظر إلى أن بعض المتواليات يمكن أن تبدى سلوكا شديد التعقيد، ولكن هذا السلوك المعقد موجود بالفعل حتى في الرياضيات الأولية البسيطة خير مثال على ذلك هو قيمة العدد (ط) أي النسبة بين طول محيط الدائرة إلى طول قطرها . هذا العدد (ط) لتقريب كبير نكتبه ٣,١٤ ولكن إذا توخينا دقة عالية فهو ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢٢٣٨٤٦٢٦٤٣٣٨٣٢٧٩٥٠٢٨٨ .

في شكل (٥٤) نورد رسما يبين كيف تتغير قيمة العدد حتى عشرين ألف رقم في النظامين العشري والثنائي .



شكل (٥٤)

كل ما يمكن قوله أن هذه المتتالية عشوائية تماما .

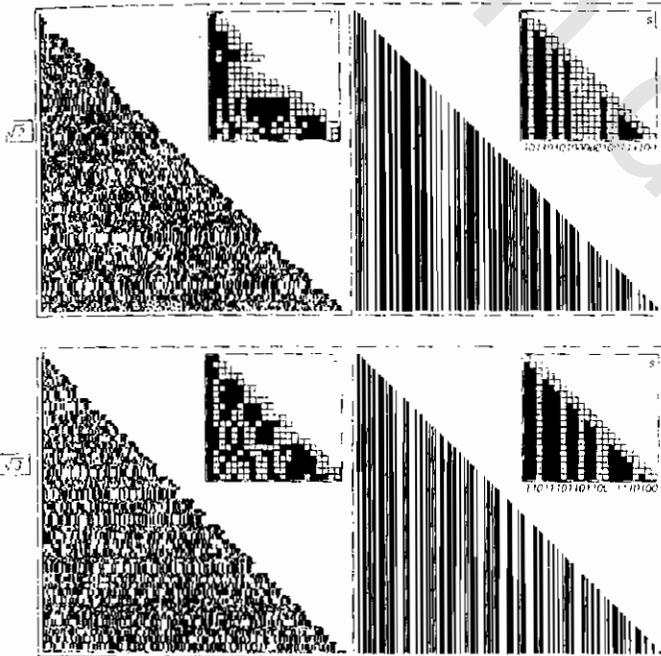
هل هذا السلوك المعقد خاص بالعدد «ط» فقط ؟ لنورد بعض الأعداد مثل ناتج قسمة العدد (٨/٣) . ناتج القسمة هو ٠,٣٧٥٠٠٠٠٠ لأنها قسمة منتهية . مثال آخر : (٣/١) = ٠,٣٣٣٣٣٣٠٠٠٠ ويتكرر الرقم ٣ إلى ما لا نهاية . لكن ناتج قسمة العدد (٧/١) = ٠,١٤٢٨٥٧١٤٢٨٥٧,٠٠٠٠ ويتكرر العدد ١٤٢٨٥٧ إلى ما لا نهاية .

في شكل (٥٥) نورد ناتج قسمة بعض الأعداد الكسرية .

في شكل (٥٧ أ) نورد قيم الجذور التربيعية لعدة أرقام وكما نرى فإنها ذات طبيعة عشوائية تماماً .

$\sqrt{2}$	= 1.414213562373095048801698724209698078569671875376948073176679737990732478462101039
$\sqrt{3}$	= 1.732050807568877293527446341505872366942805253810380628055806979451933016908800037
$\sqrt{5}$	= 2.236067977499789696409173668731276235440618359611525724270897245410520925637804899
$\sqrt{6}$	= 2.449489742783178098197284074705891391965947480656670128432692567250960377457315027
$\sqrt{7}$	= 2.645751311064590590501615753639260425710259183082450180368334459201068823230283628
$\sqrt{8}$	= 2.828427124746190097603377448419396157139343750753896146353359475981464956924214078
$\sqrt{10}$	= 3.162277660168379331998893544432718533719555139325216826857504852792594438639238221
$\sqrt{11}$	= 3.316624790355309849114932730677696683927088545589353597058682146116484642609043847
$\sqrt{2}$	= 1 011010100000100111100110011001111110011101111001110111100110010000100010110010111110110
$\sqrt{3}$	= 1.10111011011001111010111010000101100001001100101010100111001110110010010101101000
$\sqrt{5}$	= 10.0011110001101110111100110111001011111101001000111100000101011110011100111001
$\sqrt{6}$	= 10.011100110001000111000010100000100100100001011100111110100000110010000110010
$\sqrt{7}$	= 10.101001010100111111101010011101001011110001110100110110111100011100111010100111
$\sqrt{8}$	= 10.11010100000100111100110011001111100111011100110010010000100010110010111110110
$\sqrt{10}$	= 11.00101001100010110000011101011011010010110110101001010010000001001010001010111
$\sqrt{11}$	= 11.010100010000111001010010011111110101101111001101000001011010301110111001031001

شكل (٥٧)



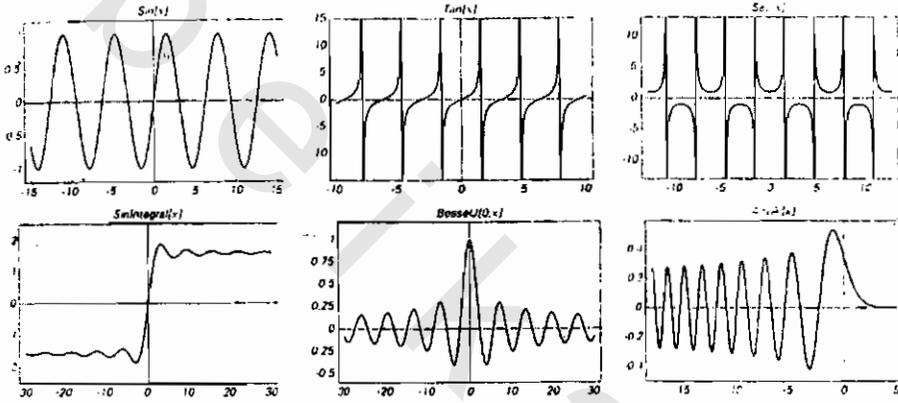
شكل (٥٧ ب)

وكما نرى من شكل (٥٧ب) الصورة شديدة التعقيد رغم بساطة القاعدة من مجرد إيجاد الجذر التربيعي لعدد ما .

لقد كان اهتمامنا منصبا على كيفية التعبير عن الأعداد من خلال دوال أو علاقات رياضية ، ولكن ما هو الحال مع هذه الدوال نفسها ؟
في شكل (٥٨) نورد رسوماً بيانية لمجموعة من الدوال الرياضية .

الدوال الرياضية

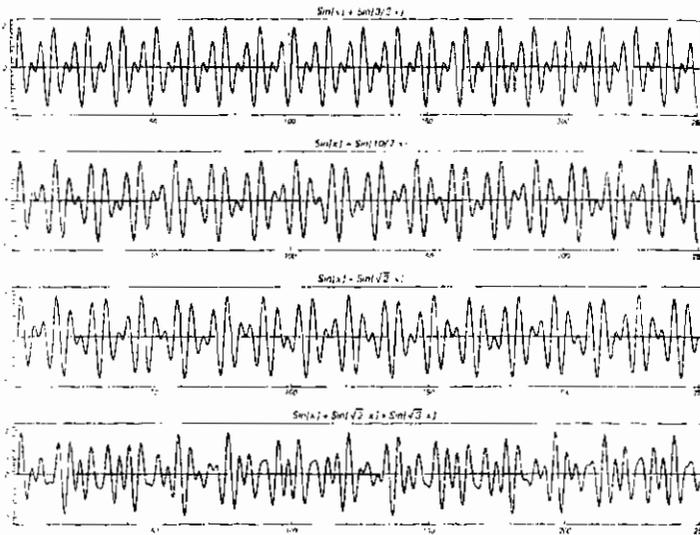
Mathematical Functions



شكل (٥٨)

ولكن إذا نظرنا إلى بعض الدوال التي يتم تركيبها من هذه الدوال البسيطة نجد أن الصورة اختلفت تماماً .

في شكل (٥٩) نرى نتائج جمع بعض الدوال البسيطة . في الرسمين الأولين نحصل على أشكال تكرارية ، أما في الرسمين الأخيرين نجد أن الشكل عشوائي تماماً .



شكل (٥٩)

وهناك أمثلة أخرى على السلوك المعقد للدوال الرياضية والتي تبدو أنها تمثل علاقات بسيطة من ناحية المبدأ .

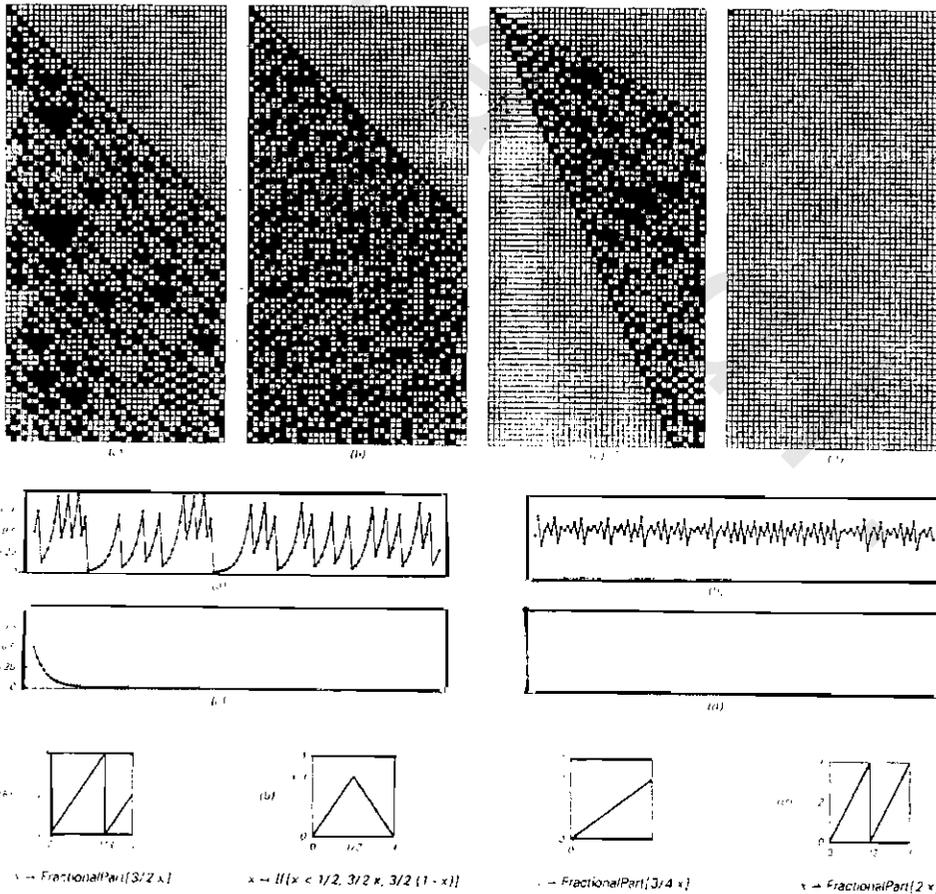
الفكرة الأساسية للخرائط التكرارية هي أن نأخذ عدداً بين الصفر والواحد وبمتتالية من الخطوات نحدث هذا العدد حسب قاعدة معينة المسماة «بالخريطة» . في معظم الحالات التي سوف نوردتها يمكن التعبير عن هذه الخرائط بدوال رياضية قياسية . في النهاية نأخذ عدداً بين الصفر والواحد لينتج حسب قاعدة معينة عدد آخر أيضاً أقل من الواحد الصحيح .

في شكل (٦٠ ، ٦١) نورد عدة أمثلة لمثل هذه الخرائط . في الحالتين أ ، ب نحصل على نفس التعقيد الذي ألفناه في متتاليات الأعداد وأحجام الأعداد . الحالة (ج) توضح التعقد في المتتاليات الرقمية وإن كانت أحجام الأعداد تؤول بسرعة للصفر . الحالة (د) تبدو غير ذات معنى (trivial) ولا تبدى أية تعقيد سواء في متتالية الأرقام أو في أحجام الأعداد .

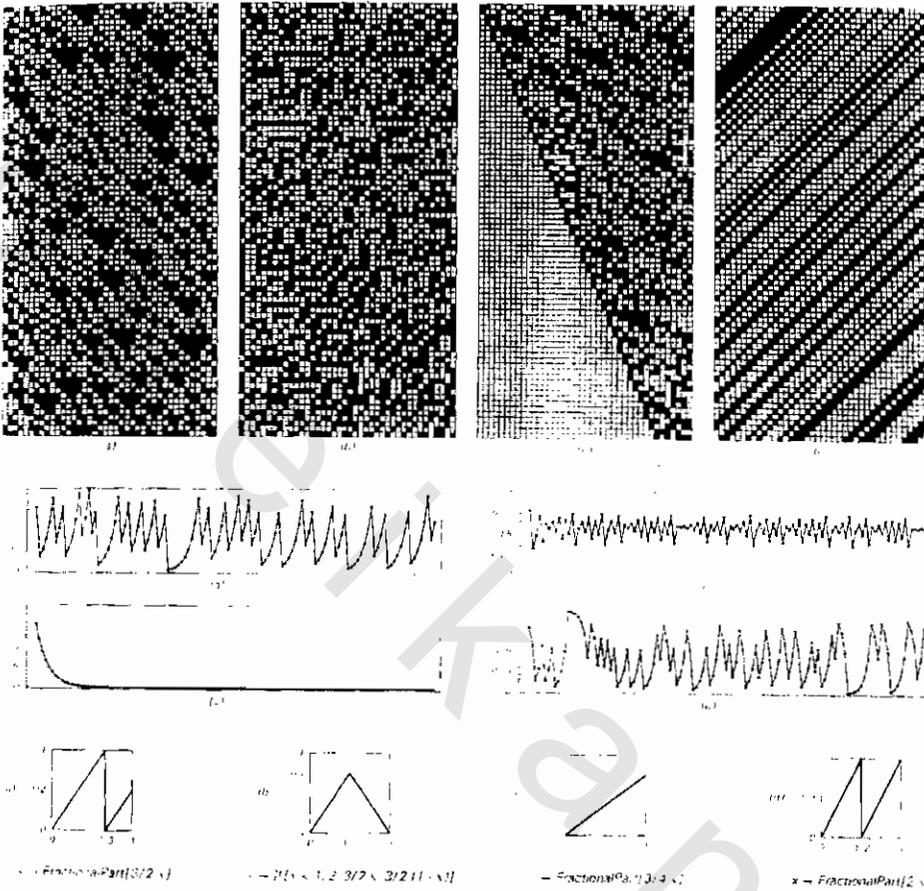
الخرائط التكرارية وظاهرة

الشواش

Iterated Maps and Chaos Phenomenon



شكل (٦٠)

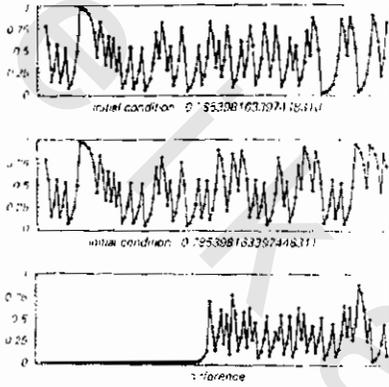
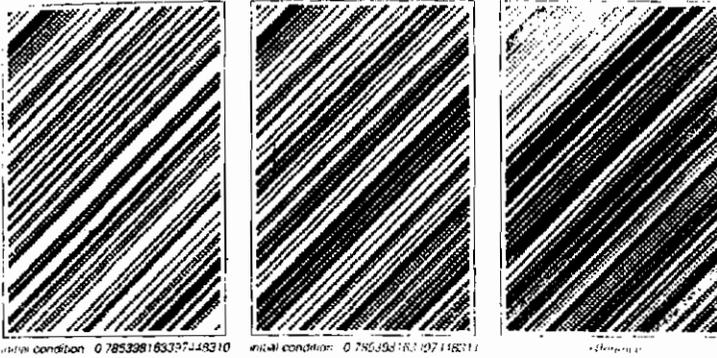


شكل (٦١)

من أهم السمات التي نود أن نلفت لها النظر أن الحالة (د) تمثل متتاليات إزاحة تخلق داخليا سلوكا شديدا التعقيد وكذلك عشوائية ، فهي ليست مجرد ناقل للعشوائية والتعقيد إذا حدث ذلك في الشروط الابتدائية . هنا تكمن إحدى الخصائص الجديدة والتي كانت غامضة إذا عولجت بواسطة الرياضيات التقليدية .

اهتمامنا بهذه السمة ينبع من أن مقارنة أحجام الأعداد لا تعطي نتيجة بديهية حيث أنه إذا كان العددين متقاربين جدا ففي الرياضيات التقليدية لا بد أن يعطيا نتيجتين متقاربتين . لكن في هذا الإطار الذي نستخدمه هناك بعض النظم الحساسة جدا للتغيرات الطفيفة في الشروط الابتدائية .

في شكل (٦٢) نورد نظاما لعددين الفارق بينهما جزء من البليون بليون . النتيجة أن الرسمين متقاربين جدا جدا في البداية ولكن عند لحظة معينة يختلفان

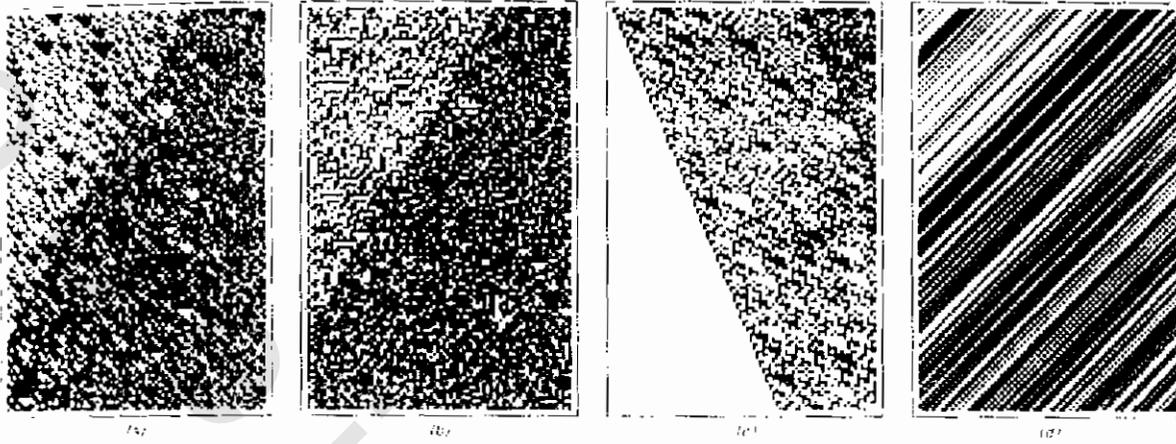


شكل (٦٢)

تمام الاختلاف كما هو موضح في الرسم الذي يمثل ناتج الطرح للمتواليتين . كل هذا لا يفسر ظهور العشوائية . مما نراه سوف تظهر العشوائية إذا كان العدد الذي نبدأ به يعطى متوالية عشوائية .

إن الاكتشاف الذي توصلت له في هذا الكتاب أن النظم التي تظهر عشوائية في السلوك تفعل ذلك حتى وإن كانت شروطها الابتدائية مبسطة إلى أقصى حد .

كذلك تبدى المتتاليات الرقمية نفس السلوك كما هو مبين في شكل (٦٣) ولا تقتصر هذه الخاصية على الخرائط الإزاحية .



شكل (٦٣)

فى النهاية ما توصلت إليه هو أن هذه النظم رغم حساسيتها الفائقة للشروط الابتدائية فليس هذا هو السبب الحقيقى لظهور العشوائية .

فى كل البرامج التى وردت حتى الآن كنا نتعامل مع برامج تأخذ قيما منفصلة (discrete) والتى عبرنا عنها باللونين الأبيض والأسود . فى هذا الباب أوردنا متتاليات كلها تأخذ قيما منفصلة من خلال القيمتين الصفر والواحد الصحيح .

فى هذا الجزء سوف نعالج نظما لا تأخذ اللونين الأسود والأبيض فقط ولكن تأخذ اللون الرمادى بدرجاته المختلفة .

الفكرة هنا أن نأخذ فى الاعتبار اللون الرمادى المتوسط للخلية وكذلك الخلايا المجاورة مباشرة . ثم نأخذ اللون الرمادى حسب قاعدة محددة «الخريطة» تمثل النتيجة التى حصلنا عليها .

فى شكل (٦٤) نرى مثلا لذلك حيث يتدرج لون الخلية من الأسود حتى الأبيض والرمادى بدرجات مختلفة .

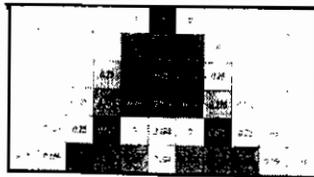
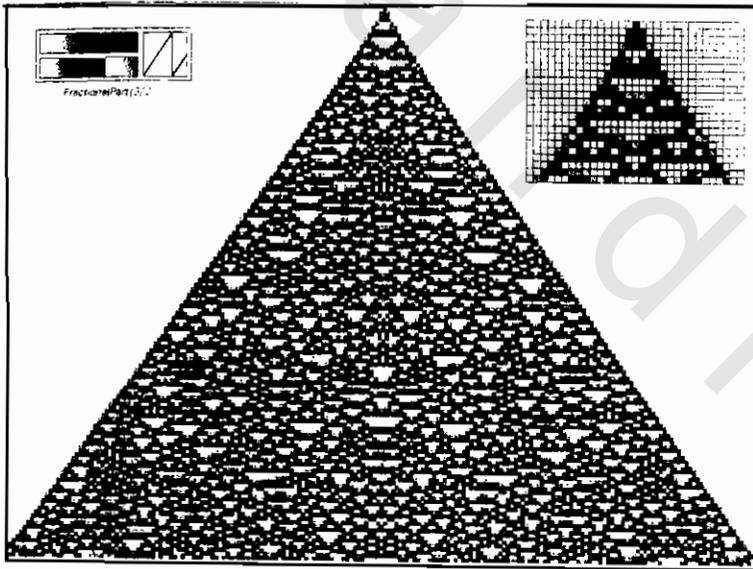
الآتوماتا الخلية الاستمرارية Continuous Cellular Automata



0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.333	0.333	0.333	0	0	0	0
0	0	0	0.111	0.222	0.333	0.222	0.111	0	0	0
0	0	0.037	0.111	0.222	0.259	0.222	0.111	0.037	0	0
0	0.017	0.049	0.123	0.198	0.235	0.198	0.123	0.049	0.017	0
0.001	0.021	0.062	0.123	0.185	0.21	0.185	0.123	0.062	0.021	0.001

شكل (٦٤)

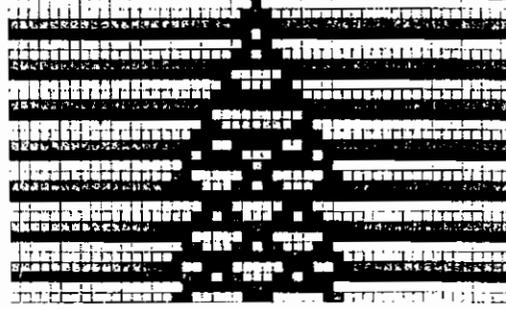
في شكل (٦٥) نرى مثالا آخر حيث نستخدم قاعدة أعقد قليلا حيث نضرب النتيجة في العدد (١,٥) ، ثم نحفظ بالجزء الكسري إذا كانت النتيجة أكبر من الواحد الصحيح .



شكل (٦٥)

في شكل (٦٦) نورد رسما حسب قاعدة إضافة العدد ٠,٢٥ إلى القيمة الناتجة والاحتفاظ بالجزء الكسرى فقط للعدد الناتج .

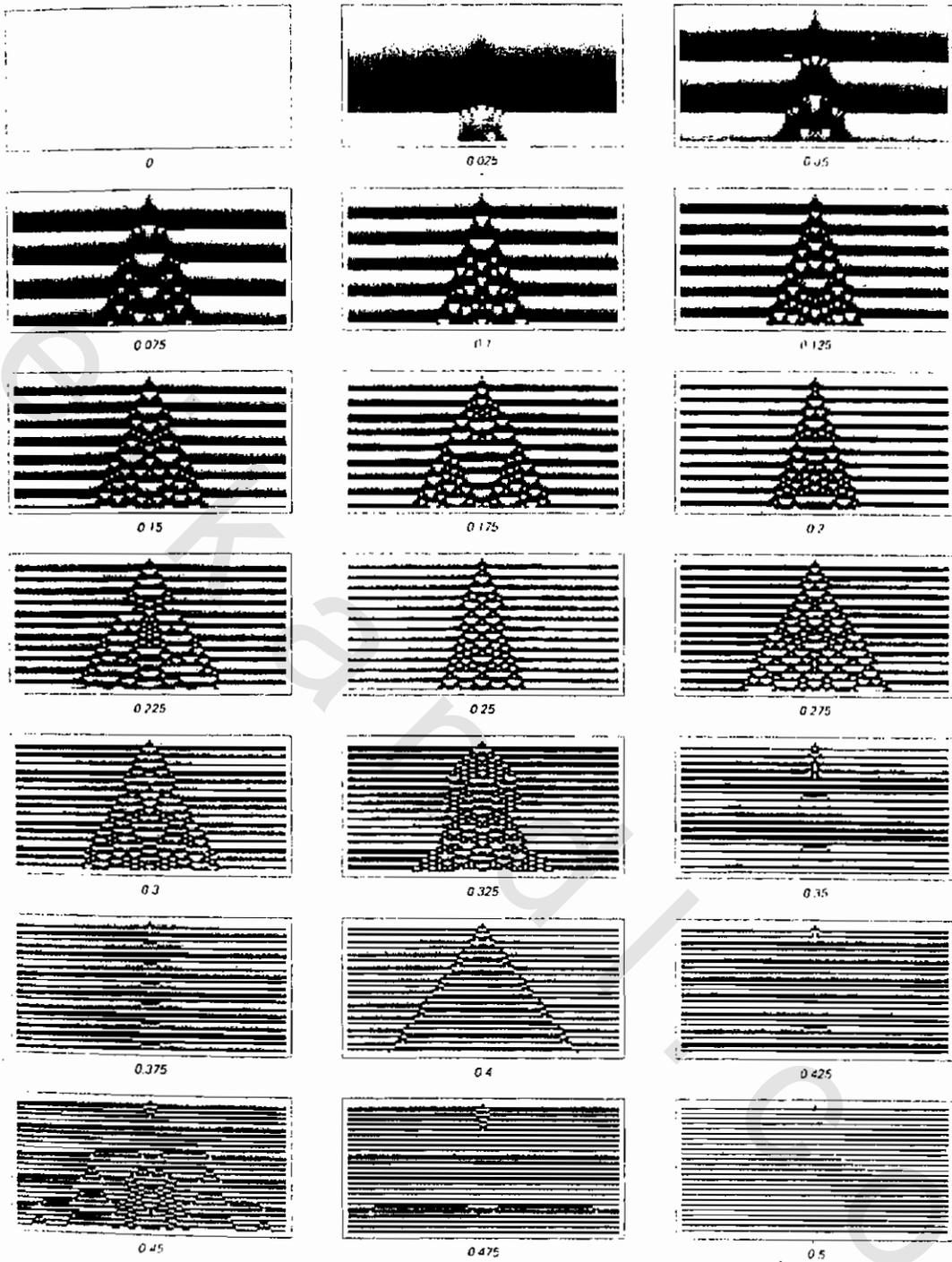
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
0.25	0.25	0.25	0.25		0.25	0.25	0.25	0.25		
			0.611	0.722	0.833	0.732	0.011			
0.75	0.75	0.787	0.861	0.972	0.009	0.972	0.601	0.787	0.75	0.75
			0.049	0.123	0.554	0.901	0.854	0.123	0.049	0.049
0.354	0.271	0.312		0.88	0.127	0.88		0.312	0.271	0.254



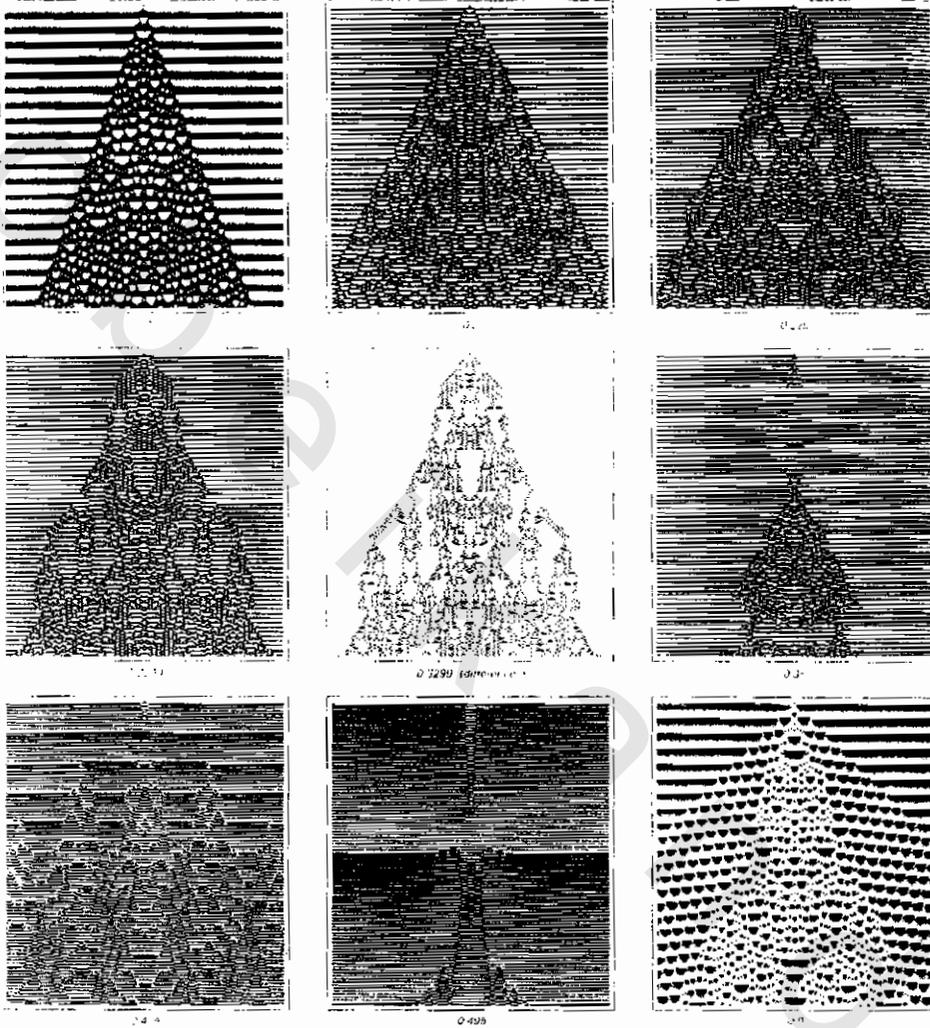
FractionalPart[x+1/4]

شكل (٦٦)

في شكل (٦٧) نورد عدة أشكال توضح السلوك المعقد ، وفي شكل (٦٨) نرى سلوك النظام بعد عدد أكبر من الخطوات حيث تظهر بعض المناطق التي تأخذ قيما منفصلة وإن كانت الصورة توضح درجات استمرارية من اللون الرمادي .



شكل (٦٧)



شكل (٦٨)

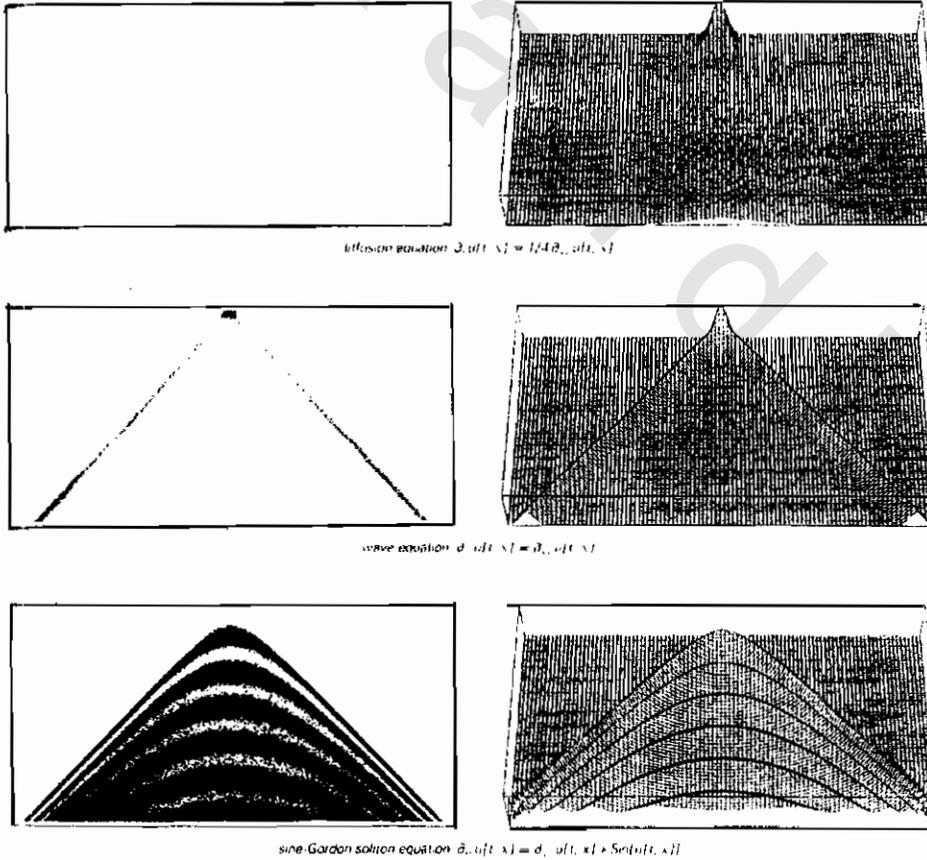
بإدخال الاستمرارية في لون الخلايا تخلصنا من سمة الانفصالية (discreteness) ولكن تظل طريقة تطور البرنامج انفصالية من حيث أن الأوتوماتون الخلوي يتكون من خلايا منفصلة ويتم التطور حسب خطوات انفصالية في الزمن .
من ناحية المبدأ هل يمكن التخلص من السمتين الأخيرتين ؟ الإجابة نعم ولكن لا بد أن نلجأ إلى رياضيات أكثر تجرداً .

يتأني هذا إذا أخذنا درجات اللون الرمادي لتتغير بشكل استمراري في الفراغ والزمن ، بفرض أن كل خلية متناهية الصغر ويستغرق ملؤها فترة زمنية متناهية الصغر أيضاً .

المعادلات التفاضلية الجزئية Partial Differential Equations

هنا يمكن أن يتحقق هذا إذا وضعنا قاعدة لسرعة تغير اللون الرمادي مع الزمن ومعدل تغيره في الفراغ . تعرف هذه القواعد في الرياضيات التقليدية بالمعادلات التفاضلية الجزئية ، والتي تدرس على مدى المائتي سنة السابقة . مثل هذه المعادلات تمثل العمود الفقري لكل الفيزياء التقليدية كمعادلات ماكسويل ، معادلات أينشتاين للجاذبية ، معادلة شرودينجر في ميكانيكا الكم ، ومعادلات هودكين - هكسلي للكيمياء الكهربية للخلايا العصبية .

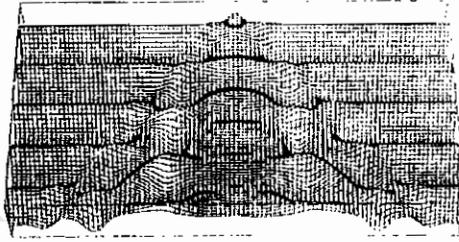
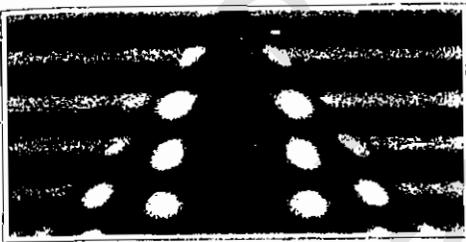
في شكل (٦٩) نورد رسوما لثلاث معادلات تفاضلية شهيرة ، الرسم الأول يوضح معادلة الانتشار ، الرسم الثاني يبين معادلة الموجة والثالث يبين معادلة جوردون - الجيبية والتي تبدي سلوكا معقدا إلى حد ما وإن كانت السمة التكرارية واضحة . ولكن هل يمكن الحصول على سلوك أكثر تعقيدا من معادلات تفاضلية أخرى؟ من ناحية المبدأ نعم ، ولكن الطرق التقليدية في الرياضيات الكلاسيكية لا توضح الطريق للكشف عن هذه المعادلات وتحديدتها أو كيفية الحصول عليها .



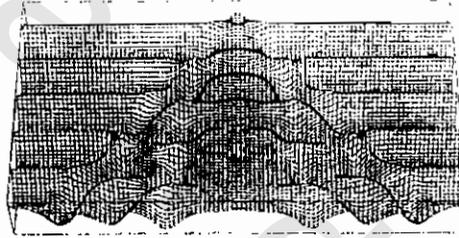
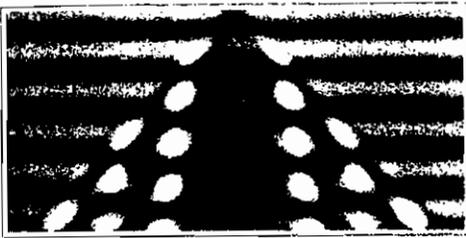
شكل (٦٩)

الفارق هنا أنه في مجال الأوتومات الخلوية نلتزم بقواعد بسيطة معروفة ومحددة، أما في الرياضيات التقليدية يمكن أن تظهر أية علاقة رياضية . فهنا من ناحية المبدأ من السهل التوصل إلى تصنيف يفضى إلى تحديد القواعد التي تؤدي إلى سلوك شديد التعقيد .

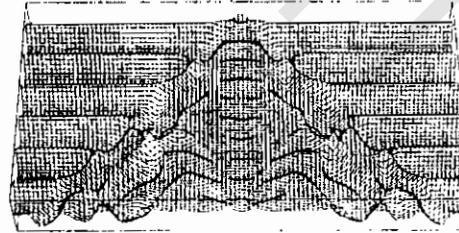
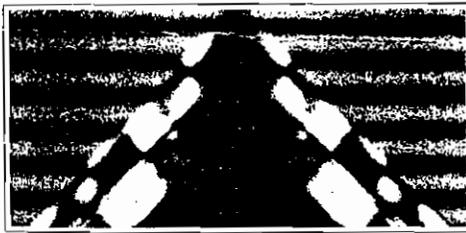
في شكل (٧٠ أ ، ب) نورد أمثلة للمعادلة التفاضلية التي وجدتها حيث الخلفية تكرارية تامة أما الجزء الرئيسي في الصورة شديد التعقيد ، تذكرنا بأمثلة عديدة من الأتوماتا الخلوية الاستمرارية ونظم أخرى تم عرضها في هذا الكتاب .



$$\partial_{xx} u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x) + (1 - u(t, x))^2 (1 + u(t, x))$$



$$\partial_{xx} u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x) + (1 - u(t, x))^2 (1 + 2u(t, x))$$



$$\partial_{xx} u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x) + (1 - u(t, x))^2 (1 + 4u(t, x))$$

شكل (٧٠)

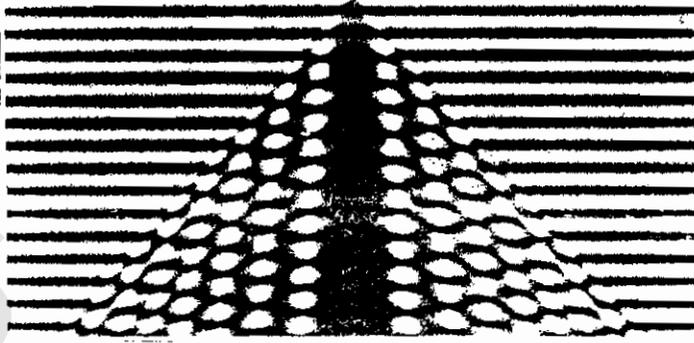


Figure 70a: A grid of horizontal lines with a central dark vertical shape, creating an illusion of depth.

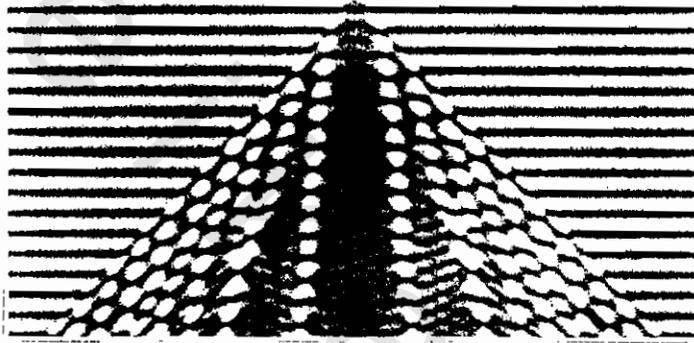


Figure 70b: A grid of horizontal lines with a central dark vertical shape, creating an illusion of depth.

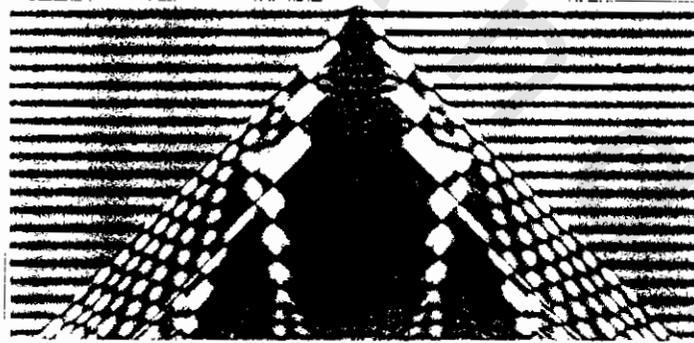


Figure 70c: A grid of horizontal lines with a central dark vertical shape, creating an illusion of depth.

شكل (٧٠ ب)

لنواجه السؤال : هل الفارق بين النظم الاستمرارية وتلك المنفصلية ذا مغزى كبير ؟

كان يبدو أن شدة التعقيد من سمات النظم المنفصلية ، ولكن كما هو واضح من النتائج التي عرضناها فإن هذا الاستنتاج غير صحيح بالمرّة . في الحقيقة يمكن أن نقول إن الكشف عن السلوك المعقد أسهل في النظم المنفصلية عنه في النظم

النظم الاستمرارية مقابل

النظم المنفصلية

Continuous Versus Discrete Systems

الاستمرارية ، كذلك يمكن أن نختبر النظم المنفصلية بطرق أكثر مباشرة من تلك التي تستخدم لاختبار النظم الاستمرارية .

جانب مهم آخر أنه عند اختبار ودراسة النظم الاستمرارية يختلط الأمر أى من السمات التي نراها هي خاصية أصيلة للنظام وأيها نتج عن التقريب وطرق البحث التي اتبعناها .

إن خاصية التعقد قد ظهرت بالتأكيد في الكثير من مجالات العلم الكلاسيكي ولكن حيث أنها لم تكن معروفة ومحددة المعالم تم إهمالها أو إرجاعها إلى قصور في طرق المعالجة والبحث ، ولكن لم تحدد كصفة أصيلة للنظم التي تمت دراستها بالنسبة لى عندما بدأت أعمل مع هذه النظم المنفصلية لم يكن عندي خيار غض النظر عن هذه الظواهر بل كنت مضطراً للاعتراف بها وليس طرحها جانبا . والآن ونحن مسلمون بهذا القدر من المعرفة لابد من العودة لهذه النظم الاستمرارية ومعالجتها ودراستها بالتفصيل مرة أخرى . ما أستطيع الآن أن أجزم به أن كل الظواهر التي توصلنا إليها في النظم المنفصلية ، ليس بالضرورة أن تكون موجودة كلها في النظم الاستمرارية .