الباب التاسع

حلول تمارين كتاب الجبر

حل تمارين الباب الأول

تمارين ص17

استخدم طريقة هورنر للقسمة لإيجاد خارج القسمة والباقي للدوال التالية:

(1) $F(1) = 3X^6 - 7X^5 + 2X^4 - X^2 - 6X - 8$ على $(X+2)$

" Solution"

نقوم بكتابة المعاملات ونجري عملية القسمة

$X+2 = 0$ ثم $X= -2$

-2	**3**	**-7**	**5**	**-1**	**-6**	**-8**
		-6	**-26**	**-42**	**-14**	**86**
	3	**-13**	**-21**	**-43**	**-20**	**R= 78**

$Q (X) = 3X^5 -13X^4 - 43X^3 - 20X^2 -20$ خارج القسمة

والبافى هو $R= 78$

(2) $F(X) = 5X^5 - 7X^3 + 6X^2 - 2X + 4$ على $(X-1)$

" Solution"

$X+1 = 0$ ثم $X= 1$

1	**5**	**0**	**-7**	**6**	**-2**	**4**
		5	**5**	**-2**	**4**	**2**
	5	**5**	**-2**	**4**	**2**	**R= 6**

$Q(X) = 5X^4 + 5X^3 - 2X^2 + 4X+2$

- -

(3) $F(X) = X^5 - 5X^4 + 9X^3 - 6X^3 - 6X^2 - 16X + 13$ على

(X2 – 3X +2)

" Solution"

$X^2 - 3X + 2 = 0$ تم $(X-2)\ (X-1) = 0$ تم $X=2,1$

-2	**1**	**-5**	**9**	**-6**	**-16**	**13**
		2	**-6**	**6**	**0**	**-32**
1	**1**	**-3**	**3**	**0**	**-16**	**R_1 = 19**
			1	**-2**	**1**	**1**
	1	**-2**	**1**	**1**	**-15**	**R_2 = -15**

$Q\ (X) = X^3 - 2X^2 + X +^{1}$

$R = R_2\ (X-a) + R_1 = -15\ (X-2) + 19$ ؤ $R= -15\ X + 49$

(4) $F(X) = 3X^4 - 2X^3 + 5X^2 + 4X-3$ على $(2X+3)$

" Solution"

$2X + 3 = 0$ تم $X = \frac{-3}{2}$

$\frac{-3}{2}$		**3**	**-2**	**5**	**4**	**-3**
		-4.5	**-9.75**	**7.125**		**-16.687**
	3	**-6.5**	**-4075**	**11.125**		**R= 19.687**

$Q\ (X) = 4.5X^3 + 9.75X^2 = 7.125X + 16.687$

- -

(5) $F(X) = 5X^4 - 3X^3 - 2X^2 - 3X + 1$ على $(X-2)\ (2X-3)$

" Solution"

X2 = 0 تم X=2) & 2X - 3 = 0 تم $X= \frac{3}{2}$

-2	**5**	**-3**	**-2**	**-3**	**1**
		10	**14**	**24**	**42**
1.5	**5**	**7**	**12**	**21**	**R_1= 43**
		7.5	**21.75**	**50.625**	
	5	**14.5**	**33.75**	**R_2= 71.625**	

$Q(X) = 7.5X^2 + 21.75X + 50,625$

$R = R_2 (X- a) + R_1 = 71.625 (X-2) + 43$ تم R=

تمارين ص35

السؤال الأول :

* أوجد الحل الحقيقي للمعادلات الآتية باستخدام الوضع الزائف :

(1) $F(X) = X^4 - 3$

$F(1) = -3$ $\quad F(2) = 16- 3 = 13$

$F(0.5) = 2.937$ $\quad F(3) = 81$

$F(4) = 253$ $\quad F(5) = 622$

A b

(1 , 2)

$$X_1 = \frac{an\ F(bn) - bn\ F(an)}{F(bn) - F(an)} = \frac{(1X13) - (2X -2)}{(13 - (-2))}$$

$= 1.133 = C$

$X_1 = 1.133$

$F(X_1) = (1.133)^4 - 3 = -1.3502$ $\qquad$ (1.133 ، 2)

الحل يقع في الفترة:

an +1 = C $\quad$ bn +1 = bn

an +1 = 1.133 $\quad$ bn +1 = 2

$$X_2 = \frac{(1.133\ X13) - (2X- 1.35)}{13 + 1.3502} = ,8382 = C$$

$F(X_2) = -2.506$ $\qquad$ (,8382 ، 2)

الحل يقع في الفترة:

an +2 = ,8382 $\quad$ & $\quad$ bn +2 = 2

- -

(2) $F(X) = X^3 - 5X - 5$

$F(1) = -10$ $F(2) = -8$

$F(,5) = -8.375$ $F(3) = 6$

$F(4) = 38$ $F(5) = 94$

A b

(2 ,3)

$$X_1 = \frac{an\ F(bn) - bn\ F(an)}{F(bn) - F\ (an)} = \frac{(2X6) - (3X\ -8)}{6+8}$$

$= 2.57 = C$

$F(X_1) = (2.57)^3 - (5X2.57) -6 = -1.85$

(3 ، 2.75) الحل يقع في الفترة:

$an +1 = 2.57$ $bn +1 = 3$

$X_2 = 2.67$

$F(X_2) = ,6841$

$an +2 = 2.67$ $bn +2 = 3$

(2.67,3) الحل يقع في الفترة:

$X_3 = 2.627$

$an +3 = 2.627$

- -

(3) $F(X) = X^3 - 2X - 5$

$F(1) = -6$ $F(2) = -1$

$F(,5) = -5.875$ $F(3) = 16$

$F(a) = 51$ $F(5) = 110$

A b

(2 ,3)

$$X_1 = \frac{an\ F(bn) - bn\ F(an)}{F(bn) - F\ (an)} = \frac{(2X16) - (3X\ -1)}{16+1}$$

$= 2.05$

$F(X_1) = (2.058)^3 - (2X2.058) -5 = -3996$

الحل يقع في الفترة: (2.058 ، 3)

$an +1 = 2.058$ $\quad$ $bn+1 =3$

$X_2= 2.0809$

$F(X_2) = 0.1512$ $\quad$ (2,0809,3)

الحل يقع في الفترة:

$an +2 = 2,0809$ $\quad$ $bn+2 =3$

$X_3 = 2,0895$

$an +_3 = 2,0895$

السؤال الثاني :

باستخدام الثلاث طرق أوجد مجموعة الحلول التقريبية لإيجاد الجذور الحقيقية :

(1) $F(X) = X^3-5X +3$

" Solution"

الطريقة الأولى: نيوتن

$$Xn +1 = Xn - \frac{F(Xn)}{F^1(Xn)} = Xn - \frac{X^3n - 5Xn+3}{3X^2n - 5}$$

$F(1) = -1$ $\quad$ $F(2) = 1$ $\quad$ a b

$F(3) = 15$ $\quad$ $F(4) = 47$ $\quad$ (1 , 2)

الفترة

$$X_0 = \frac{1+2}{2} \quad \text{و} \quad X1 = X0 - \frac{X^30 - 5X0+3}{3X^20 - 5} =$$

2.1428 $\quad$ وبوضع $n = 0$

$X_2 = ,656619$
$X_3 = ,656617$
$X_4 = ,\ 656616$

X4 هو الحل؛ لأن الفرق قليل جدا

الطريقة الثانية: هورنر

الفترة هي (1 , 2)   ثم F(X)

2	1	0	-5	3
		2	4	-2
2	1	2	-1	$R_1 = 1$
		2	0	
	1	0	$R_2 = -1$	

المعادلة الجديدة التي ينقص جذرها بمقدار2 وبأحمال الجذور الكبيرة

$g(Y) = Y^3 - Y + 1$

$g(Y) = -Y + 1$ ثم $-Y + 1 = 0$ تم $Y = 1$

ثم نأتي بالمعادلة التي ينقص جذرها بمقدار1

1-1	1	-1	1
		1	0
	1	0	R=1

المعادلة التي ينقص جذرها بمقدار (1) هي

$Y^3 - 1 = 0$ تم $Y = 1$

الحل التقريبي هو: 3

الطريقة الثالثة: (الوضع الزائف)

$F(X) = X^3 - 5X + 3$
$F(1) = -1 \qquad F(2) = 1$

$F(3) = 15$ $F(4) = 47$

a b

$$X_1 = \frac{an\,F(bn) - bn\,F(an)}{F(bn) - F(an)} =$$ على الفترة (1 , 2)

$$X_1 = \frac{(1X+1) - (2X-1)}{1-(-1)} \quad \frac{1+2}{2} \quad \frac{3}{2} 5$$
= C

الحل يقع في الفترة: (1.5 , 2)

$F(X_1) = (1.5)^3 - (5X1.5) + 3 = -1.125$

$an + 1 = C$ $bn + 1 = bn$

$an + 1 = 1.5$ $bn + 1 = 2$

$$X_2 = \frac{(1.5X+1) - (2X-1)}{1+1.125} = 1.64 = C$$

الحل يقع في الفترة:

(1.64,2)

$an + 1 = 1.64$ $bn + 1 = 2$ ثم $F(1.64) = -,78$

$X_3 = 1.79$ ثم بسيط الفرق لأن الحل؛ هو X3

----

(2) $F(X) = X^4 - X^3 - 2X - 34$

" Solution"

الطريقة الأولى: (نيوتن)

$$Xn+1 = Xn - \frac{X^4n - X^3n - 2Xn - 34}{4X^3n - 3X^2n - 2}$$

$F(1) = -36$ $F(2) = -30$

$F(3) = 14$ $F(4) = 150$ الفترة (2 , 3)

$X_0 = \dfrac{a + b}{2} \qquad \dfrac{5.5}{2}75$

$$X_1 = 2.7 - \frac{(2.7)^4 - (2.7)^3 - (2X2.7) -34}{(4(2.7)^3) - (3(2.7)^2) -2} = 2.80825$$

X_2= 2.80141
X_3= 2.80137

X3 هو الحل؛ لأن الفرق أقل ما يمكن

الطريقة الثانية: (هورنر)

نأتي بالمعاملة التي ينقص جذورها بمقدار 2

2	**1**	**-1**	**0**	**-2**	**-34**	
		2	**2**	**4**	**4**	
	1	**1**	**2**	**2**	**R_1= -30**	
		2	**6**	**16**		
	1	**3**	**8**	**R_2= 18**		
		2	**10**			
	1	**5**	**R_3= 18**			
		2				
	1	**R_4= 7**				**Qn =1**

وتكون المعادلة الجديدة التي تنقص جذورها بمقدار 2

$g (Y) = Y^4 + 7Y^3 + 18Y^2-30$

بإهمال الحدود الكبيرة

$18 Y^2 + 18Y – 30$ ___

باستخدام القانون العام

$Y = \dfrac{-18 \text{ لى } (18)2 – (4×30 ×18)}{2 × 18} \quad = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{1}{6}$

69

Y= -1.8 ، ,8

وتأتي المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار 8,

,8	1	7	18	18	-30
		,8	6.24	19.3	29.84
	1	7.8	24.24	37.3	R_1= ,16
		,8	6.88	24.8	
	1	8.6	31.12	R_2= 62.2	
		,8	7.52		
	1	9.4	R_3= 38.64		
		,8			
	1	R_4= 10.2			

Qn = 1

وتكون المعادلة الجديدة التي تنقص جذورها بمقدار 8, هي

$H(Z) = Z^4 + 102Z^3 - 38.6Z^2 + 62.2Z - ,16$

وبإهمال الحدود الكبيرة

$-38.6Z^2 + 62.2Z - ,16$

وبنفس الطريقة يكون الحل التقريبي يساوي:

$2 + ,8 + ,06 = 2.86$

الطريقة الثالثة: (الوضع الزائف)

$F(X) = X^4 - X^3 - 2X - 34$

$F(1) = -36$ $\quad$ $F(2) = -30$

$F(3) = 14$ $\quad$ $F(,5) = -35.06$

$F(2.5) = - 15.56$

الحل يقع في الفترة:

a b

(2.5 ، 3)

$$X_1 = \frac{an\ F(bn) - bn\ F(an)}{F(bn) - F(an)} = 2.8\ \frac{(2.5\times14) - (3\times-15.56)}{14 + 15.56}$$

F(2.8) = - ,086 ت -,09 (2, ، ,3) الحل يقع في الفترة:

an +1 = 2.8 bn +1 = 3

$X_2 = 2.6$

F(2.6) = 11.08 (2, ، ,3) الحل يقع في الفترة:

an + 2 = 2,6 bn + 1 = 3

الحل التقريبي $X_3 = 2.7$

السؤال الثالث:

(1) استخدم طريقة هورنر للقسمة لإيجاد خارج القسمة والباقي عند قسمة:

$F(X) = 3X^6 - 7X^5 + 5X^4 - X^2 - 6X-8$

" Solution"

X +2 = 0 ثم X= -2

2	**3**	**-7**	**5**	**0**	**-1**	**-6**	**-8**
		-6	**26**	**-62**	**126**	**-250**	**512**
	3	**-13**	**13**	**-62**	**125**	**- 256**	**R=**
				504	**الباقي**		

خارج القسمة $Q(X)=3X^5-13X^4++31X^3- 62X^2 + 125X - 256$

- -

(2) استخدم طريقة هورنر للقسمة لإيجاد خارج القسمة والباقي عند قسمة:

$F(X) = 5X^5 - 7X^3 + 6X^2 - 2X + 4$ على (X-1)

" Solution"

X-1 = 0 ثم X= 1

2	**5**	**0**	**-7**	**6**	**-2**	**4**
		5	**5**	**-2**	**4**	**2**
	5	**5**	**-2**	**4**	**2**	**R= 6 الباقي**

خارج القسمة $Q(X) = 5X^4 + 5X^3 - 2X^2 + 4X+2$

(3) استخدم طريقة هورنر للقسمة لإيجاد عادة القـسمة والبـاقي عنـد قسمة:

$F(X) = X^5 - 4X^4 + 9X^3 - 6X^2 - 16X+13$ على $(X^2 -3X+2\ )$

" Solution"

$X^2 - 3X + 2 = 0$ تم $X= -2$ ، -1

-2	**1**	**-4**	**9**	**-6**	**-16**	**13**
		-2	**12**	**-42**	**96**	**-160**
	1	**-6**	**12**	**-48**	**80**	**R= -147**
					الباقي	

خارج القسمة $Q(X) = X^4 - 6X^3 + 21X^2 - 48X + 80$

السؤال الرابع :

إذا كانت $F(X) = 2X^3 - 8X^2 + 5$

أوجد $(g(X))$ التي تزيد عن جذور $(F(X))$ بمقدار 2 وأيضاً $(h(X))$ التي تنقصر جذورها بمقدار 3 عن $9(X)$

" Solution"

-2	**2**	**-8**	**0**	**5**
		-4	**24**	**-48**
	2	**-12**	**24**	**$R_1 = -43$**
		-4	**32**	
	2	**-16**	**$R_2 = 56$**	
		-4		
	2	**$R_3 = - 20$**		
	$Q_n = 2$			

$G(X) = Q_n(X) . X^n + pn . X^{n-1} + R_1$ 2 هي

المعادلة التي تزيد بمقدار

$G(X) = 2X^3 - 20X^2 - 43$

- -

(X-3) تم *X = 3*

-2	**2**	**-20**	**-43**
		6	**42**
	2	**-14**	**R_1 = -1**
		6	
	2	**R_2 = -8**	
	Q_n = 2		

المعادلة التي تنقص بمقدار 3 عنg(X)

$h(X) = 2X^3 - 8X^2 - 1$

السؤال الخامس :

أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار 2 عن جذور المعادلة

$F(X) = X^4 - 2X^3 - 3X^2 - 5X + 4$

" Solution"

(X + 2) تم Xs – 2

-2	**1**	**-2**	**-3**	**-5**	**4**
		-2	**+8**	**-10**	**-30**
	1	**-4**	**+5**	**-15**	**R_1 = 34**
		-2	**12**	**-34**	
	1	**-6**	**17**	**R_2 = - 49**	
		-2	**16**		
	1	**-8**	**R_3 = 33**		
		-2			
	1	**R_4 = - 10**			
	Q_n = 1				

المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار 2 هي

$G(X) = X^4 - 10X^3 + 34$

- -

السؤال السادس :

باستخدام طريقة نيوتن ثلاث مرات أوجد الجذر الحقيقي :

(1) $3X^3 + X^2 - 11X + 6 = 0$

" Solution"

$$Xn + 1 = Xn - \frac{F(Xn)}{F^1(X\,n)} = Xn - \frac{3X^3n + X^2n - 11Xn + 6}{gX^2n + 2Xn - 11}$$

$F(1) = 3 + 1 - 11 + 6 = -1$ & $F(2) = 24 + 4 - 22 + 6 = 12$

$F(\,,5\,) = 1.125$ & $F(1.5) = 1.875$

$F(-1) = 15$ & $F(-2) = 8$ الفترة هي (1 ، ,5)

$n = 0$

وبوضع $X_0 = \frac{a + b}{2} = ,75$

$$X_1 = X0 - \frac{3X^30+X^20 - 11X0+6}{gX^20 + 2X0 - 11} = ,75 - \frac{(3X(075)^3)+(,75)^2-(11X,75)+6}{(gX(,75)^2 +(\,2X,75) - 11} = ,6599$$

$$X_2 = ,6549 - \frac{(3X(,65)^3) + (,6549)^2-(11X,6549) +6}{(gX(,6549))^2n + (2X,6549) - 11} = ,6665$$

$$X_3 = ,6665 - \frac{(3X(,6665)^3) + (,6665)^2 - (11X,6665) +6}{(\,g\,X(,6665)^2) + (2X,6665)-11} = 6666$$

(2) $2X^3 + 3X - 4 = 0$

" Solution"

$$Xn + 1\ Xn - \frac{2X^3n + 3Xn - 4}{6X^2n + 3}$$

F(1) = 1 F(2) = 18

F(,5) = - 2.25 F(1.5) = 7.25 الفترة هي (1 ، 5,) تم

F(-1) = - 9 F(-2) = -26

$$X_0 = \frac{a + b}{2} = ,75$$

$$X_1 = X_0 - \frac{-2X_03 + 3X_0 - 4}{6X^20 + 3} = ,75 - \frac{(2X(,75)^2) + (3X,75) - 4}{(6X(,75)^2) + 3}$$

= ,84801

X_2 = ,85043

X_3 = ,85073 الحل الحقيقي:

تمارين ص47

طريقتي كاردان وفراري

حل المعادلات الآتية :

ملاحظات:- الجزر (§) - الزاوية (*α) -[™=22/7]-*

`(1) $X^3 – 18X – 35 = 0$

" Solution"

a = -18 b = -35

$$\Delta = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-18}{3}\right)^3 + \left(\frac{-35}{2}\right)^2 =$$

90.25 آ 0

يكون للمعادلة جذر حقيقي وجذران تخيليان مترافقان

$m^2 - 35m + 216 = 0$

$(m - 8)(m - 27) = 0$

$m_1 + 8$ ، $m_2 = + 27$

$L = m_1 = + 2$ ثم $n = m_2 = + 3$

الجذور هي

$(+ 5, + 2w + 3w2, + 2w2 + 3w)$

- -

(2) $X^3 - 12X + 16 = 0$

" Solution"

$\Delta = \quad (a/3)^3 + (\quad b/2^2) \; = \quad \left(\frac{12}{3}\right)^3 + \left(\frac{16}{2}\right)^2 = 0$

يكون للمعادلة جذور حقيقية (جذران متساويان)

$m^2 + 16m + 64 = 0$

$(m + 8) (m + 8) = 0$

$m_1 = m_2 = -8$

$L = m \frac{1}{3} = -2 \qquad\qquad 1 = n = - 2$

الجذور هي:

$(- 4, + 2, + 2)$

- -

(3) $X^3 + 6X^2 + 9X + 3 = 0$

" Solution"

لابد من إكمال المربع للتخاص من المد التربيعي بالتعويض في المعادلة

$X = Y - \frac{a1}{3a0} = Y - \frac{6}{3} = Y - 2$

وباستخدام هورنر القسمة التركيبية

-2	1	6	9	3
		-2	-8	-2
-2	1	4	1	R = 1
		-2	-4	
-2	1	2	R = -3	
		-2		
	1	0		
	1			

Y3 – 3Y + 1 = 0

a = - 3 b = 1

$$\Delta = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-3}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-3}{4} > 0$$

$$r^2 = -\left(\frac{a}{3}\right)^3 \qquad \text{Cos0} = \frac{b}{2r}$$

$$r = 1 \qquad \text{Cos0} = \frac{-1}{2}$$

α= 120 , α= 2™ /3

ثم نعين الجذور من العلاقة : k = 0,1,2 : 2Cos (2 ™/3+ 2 ™k) / 3

at: k= 0 الجذر الأول = 2Cos (2 ™+ 6 ™*0) / 9 = 1,99985

at: k= 1 الجذر الثاني = 2Cos (2 ™+ 6 ™*1) / 9 = 1,99762

at: k= 2 الجذر الثالث = 2Cos (2 ™+ 6 ™* 2) / 9 = 1,99272

(4) $X^4 + 6X^3 + 12X^2 + 14X + 3 = 0$

" Solution"

a = 6 b = 12 c = 14 d = 3

$X^4 + 6X^3 = -12X^2 - 14X - 3$

$(X^2 + \frac{6}{2} X + L^2) = \frac{62}{2} X^2 + L^2 + 2LX^2 + 6LX -$

$12X^2 - 14X - 3$

$(X^2 + 3 + L^2) = 9X^2 + L^2 + 2LX^2 + 6LX + 6LX - 12X^2$
$- 14X - 3$

$(X^2 + 3X + L)^2 = -3X^2 + 2LX + 6XL - 14 + L3 - 3 =$
$X^2 (-3 + 2L) + 2X (3L -7) + L^2 -3$

$(X^2 + 3X + L)^2 = (mX + n)2\ m2X^2 + 2mnX + n2$

$m^2 = (-3 + 2L)$

$n^2 = L^2 - 3$

$mn = 3L - 7$

$(-3 + 2L) (L^2 -3) = (3L -7)^2$

$-3L^2 + 9 + 2L^3 - 6L = 9L^2 + 49 - 42L + 2L^3 - 12L^2 +$
$36L - 40 = 0$

وباستخدام طريقة التخمين لحالة المعادلة التكعيبية

$L = 2$ ومنها

$mn = -1$

$m^2 = (-3 + 2L) = 1$, $m = + 1$

$n^2 = (4 - 3) = 1$, $n = + 1$

$+ (X -1) + (mX + n)$

$X^2 + 3X + 2 = X -1$ ومنها المعادلة التربيعية الأولى

$X^2 + 2X + 3 = 0$

ومنها حلها $(X + 3) (X - 1) = 0 , \quad X = -3 \text{ ، } X = 1$

والمعادلة الثانية هي $X^2 + 3X + 2 = -X + 1$

$X^2 + 4X + 1 = 0$

$$X = \frac{-4 + \quad 16 - 14}{2} = \frac{-4 + \quad 12}{2} = -2 + \S 3$$

وتكون الجذور الأربعة

$(-3 \text{ ، } 1) , (-2 \pm \S 3)$

(5) $X^4 + 32X - 60 = 0$

" Solution"

$a = 0 \qquad b = 0 \qquad c = 32 \qquad d = 60$

$X^4 + 0X^3 + 32X - 60 = 0$

$X^4 + 0X^3 = -32 + 60$

$(X^2 + 0 + L)^2 = X^4 + L^2 + 2LX^2$

$X^4 = (X^2 + L)^2 - L^2 - 2LX^2$

$-32X + 60 = (X + L)^2 - L^2 - 2LX^2$

$(X^2 + L)^2 = L^2 + 2LX^2 - 32X + 60 = 2LX^2 - 32X + L^2 + 60$

$(mX + n)^2 = m2X^2 + 2mn + n^2$

$2mn = -32$

$mn = -16$

$m^2n^2 = 256$

$2L (L^2 + 60) = 256$

$2L^3 + 120L - 256 = 0$

$L = 2$

$\therefore m^2 = 2L = 4$

$m = + 2$

$\therefore \; n^2 = L^2 + 60 = 4 + 60 = 64$

$n = + 8$

$(mX + n) = + (2X - 8)$

ومنها المعادلة التربيعية الأولى

$X^2 + 2 = 2X - 8$

$X^2 - 2X + 10 = 0$

$(X - 5)(X + 2) = 0 , \quad X = 5 ، X = -2$

ومنها حلها

والمعادلة الثانية $X^2 + 2 = - 2X + 8$

هي

$X^2 + 2X - 6 = 0$

$(X + 4)(X - 2) = 0 , X = - 4 ، X = 2$

الجذور هي

$(5 ، - 2) , \quad (- 4 ، 2)$

(6) $X^3 - 12X - 16 = 0$

" Solution"

$a = -12 \qquad b = - 16$

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(\frac{-16}{2}\right)^2 + \left(\frac{-12}{3}\right)^3$$

$= \text{zero}$

$$m^2 + bm - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

$m^2 - 16m + 64 = 0$

$(m - 8)(m - 8) = 0$

$m = + 8$

$L = 3 \quad m = + 2$

$(+ 4, - 2 , - 2)$ الجذور هي

---

(7) $(X - 3) (X - 5) (X + 6) (X + 8) = 504$

" Solution"

a = 6 b = - 97 c = 258 d = - 168

$(X - 3) (X - 5) = X2 -8X + 15$ تم (1)

$(X -6) (X -8) = X^2 -14X + 48$ تم (2)

$(X^2 -8X + 15) (X^2 + 14X + 48) = X^4 + 14X^3 + 48X - 8X^3 - 112X^2 - 384 + 15X^2 + 210X + 720 = 504$

$X^4 + 6X3 - 97X^2 + 258X - 168 = 0$ المعادلة هي

$X^4 + 6X3 - 97X^2 + 258X - 168$

$(X2 + 3X + L)^2 = (\frac{36}{4} + 2L + 97) X^2 + (6L - 258) X + L^2 + 168$

$(X^2 + 3X + L)^2 = (9 + 2L + 97) X^2 + (6L - 258) X + L^2 + 168$

$(X^2 + 3X + L)^2 = (mX + n)^2$

$m^2 = 9 + 2L + 97$

$n^2 = L2 + 168$

$mn = 6L - 258 - 6L - 258$

$m^2n^2 = \frac{1}{4} (mn)2$

$(9 + 2L + 97) (L2 + 168) = \frac{1}{4} (6L + 258)^2 = \frac{1}{4} (L + 43)^2$

$9L^2 - 1512 + 2L^3 + 336L + 97L^2 + 16296 = \frac{1}{4} L^2 + \frac{86}{4} L + \frac{1849}{4} X^4$

$36L^2 - 6048 + 8L^3 + 1344L + 388L^2 + 65184 = L^2 + 861 + 1849$

$8L^3 + 423L^2 + 1258 + 57287 = 0$

وبذلك نحصل على المعادلة التكعيبية ولدينا طريقتان لإيجاد جذورها إما بطريقة التخمين أو بطريقة كاردان، ونظراً لكبر الأرقام وصعوبة تخمين قيمة L نستخدم كاردان، وهنا لابد من إكمال المربع للتخلص من الحـد التربيعي

$$L = Y - \frac{a1}{3a0} = Y - \frac{423}{3} = Y – 141$$

-141	**8**	**423**	**1258**	**57287**
		-1128	**99405**	**-14193483**
-141	**8**	**-705**	**100663**	**R_1 = -14136196**
			-1128	**258453**
-141	**8**	**-1833**	**R_2 – 359116**	
			-1833	
	8	**0**		

$$8Y^3 + 359116Y – 14136196 = 0$$

$$Y^3 + \frac{89779}{2} Y – 1767024,5 = 0$$

a = 44889,5 b = - 1767024,5

$$مم = \left(\frac{a}{3} \right)^3 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 = 4,130792397X1012 >>> 0$$

$$m^2 – 1767024,5m – 124081426000 = 0$$

$$m = \frac{- (-1767024,5) + \quad (- 1767024,5)2 – (4X1X – 12408142600)}{2}$$

$m^1 = 1834656.4$ & $m^2 = -67631,9$

$(163,1 \; , \; 142,4w + 40.7w^2 \; , \; 122,4w^2 + 40,7w)$ ومنها

الجذور الثلاث

(8) $X^3 - 12X - 9 = 0$

" Solution"

$a = -12 \qquad b = -9$

$$\Delta = \left(\frac{+a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-12}{3}\right)^3 + \left(\frac{-9}{2}\right)^2 = -43,75 < 0$$

$$r = -\left(\frac{a}{3}\right)^3 = 8 \qquad CosO = \frac{-9}{16} = -,5625$$

$\alpha = 124.22 = ,69$ ™

ثم نعين الجذور من العلاقة :

$k = 0,1,2$

at: $k = 0$ الجذر الأول $= 4Cos \dfrac{,69 ™}{3} = 1,99985$

at: $k = 1$ الجذر الثاني $= 4Cos((,69™ + 2™)/3) = 3,9951$

at: $k = 2$ الجذر الثالث $= 4Cos \dfrac{,69 ™ + 4 ™}{3} = 1,99272$

---

(9) $X^3 - 3X + 1 = 0$

" Solution"

$a = -3 \qquad b = 1$

$$\Delta = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-3}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -,75 < 0$$

$$r = -\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \qquad 1 = 1 \qquad CosO = \frac{1}{2}$$

O = 600 =

2 Cos   k = 0,1,2   ثم نعين الجذور من العلاقة

k = 0 , الجذر الأول = 2Cos $\frac{™+ Zero}{9}$ = 1,99996

k = 1 , الجذر الثاني = 2Cos $\frac{™+ 6\ ™}{9}$ = 1,99818

k = 2 , الجذر الثالث = 2Cos $\frac{™+ 12\ ™}{9}$ = 1,99373

حلول تمارين الجبر على الباب الثاني: الاستنتاج الرياضي صفحة 60

(1) باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي أثبت العلاقات

1) $\frac{1}{1\times x}+\frac{1}{2\times 3}+...+n=\frac{n}{n+1}$

Solution

في البداية سنثبت صحة العلاقة في حالة $n = 1, 2$

ثم نفترض أن العلاقة صحيحة في حالة $n = k$

ثم نثبت صحة العلاقة في حالة $n = k + 1$

At $n = 1$

$L.H.S=\frac{1}{1\times 2}=1/2$

$R.H.S=\frac{1}{1+1}=1/2$ $\therefore L.H.S=R.H.S$

At $n = 2$

$L.H.S=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$R.H.S=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$ $\therefore L.H.S=R.H.S$

ثم نفترض أن العلاقة صحيحة في حالة $n=k$

$$\therefore \frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+k=\frac{k}{k+1}$$

At $n=k+1$

المطلوب إثباته هو

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+k+(k+1)=\frac{(k+1)}{(k+2)}$$

$$L.H.S=[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+k]+(k+1)=\frac{k}{k+1}+k+1$$

$$=\frac{k+(k+1)^2}{k+1}=\frac{k^2+3k+1}{k+1}=\frac{k+1}{l+2}$$

عن طريق إجراء القسمة المطولة .

(2) اثبت أن

(3) $n=n+1$

أي عدد صحيح (طبيعي) يساوي العدد الذي يليه

At $n=1$

$L.H.S=1$

$R.H.S=1+1="2"=1$ $\therefore$ $L.H.S=R.H.S$

At $n=2$

$L.H.S=2$

$R.H.S=2+1="3"=2$ $\therefore$ $L.H.S=R.H.S$

ثم نفترض أن العلاقة صحيحة في حالة $n=k$

$\therefore$ "$k=k+1$"

At $n=k+1$

$\therefore$ المطلوب إثباته هو

"$k+1$" = "$k+2$"

$L.H.S=$ ["k"] $+1$

$\therefore L.H.S=[k+1]+1=k+2=R.H.S$

$\therefore L.H.S = R.V.S$

$\therefore$ العلاقة صحيحة .

(4) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

At $n = 1$

$L.H.S = (+1)^0$

$R.H.S = (-1)^0 \frac{1\times 2}{2} = 1$ $\qquad \therefore L.H.S = R.H.S$

At $n = 2$

$L.H.S = 1 - 2^2 = 1 - 4 = -3$

$R.H.S = (-1)^{2-1} \frac{2(3)}{2} = -3$ $\qquad \therefore L.H.S = R.H.S$

هنا نفترض أن العلاقة صحيحة.

$\Rightarrow$ At $n = k$

$$\therefore 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k-1} - k^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2}$$

At $n = k + 1$

المطلوب إثباته هو

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k-1} - k^2 + (-1)^k .(k+1)^2 = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$L.H.S = [1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k-1}.k^2] + [(-1)^k].(k+1)^2$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2$$

$$= \frac{(-1)^k .(k+1)}{2} [\frac{(-1)k}{2} + \frac{(k+1)}{2}] = (-1)^k \frac{(k+1)}{2} [\frac{1}{2} k + 1]$$

$$= (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2} = R/H.S$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة .

(5) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

Solution

At $n = 1$

$$L.H.S=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$$

$$R/H.S=1-\frac{1}{2!}=\frac{1}{2} \qquad \therefore L.H.S=R.H.S$$

At $n=2$

$$L.H.S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}=\frac{5}{6}$$

$$R.H.S=1-\frac{1}{3!}=\frac{5}{6} \qquad \therefore L.H.S=R.H.S$$

هنا نفترض أن العلاقة صحيحة.

At $n=k \quad \Rightarrow$

$$\therefore \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{k}{(k+1)!}=-1\frac{1}{(k+1)!}$$

At $n=k+1$

المطلوب إثباته هو أن

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{K}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+2)!}$$

$$L.H.S=[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{k}{(k+1)!}]+\frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$=-1\frac{1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}=-1[\frac{1}{(k+2)!}(k+2-k-1)]$$

$$=1-\frac{1}{(k+2)!} \qquad \#$$

(6) $2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2(2^n-1)$

At $n=1$

$L.H.S = 2$

$R.H.S=2(2^1-1)=2 \qquad \therefore L.H.S= R.H.S$

At $n=2$

$L.H.S = 2+2^2=6$

$R.H.S=2(2^2-1)=2\ 6 = 3\ \times \qquad \therefore L.H.S= R.H.S$

نفترض أن العلاقة صحيحة

At $n = k$ $\Rightarrow$

$\therefore 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2\,(2^k - 1)$

At $n = k + 1$

يكون المطلوب إثباته على الصورة

$2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2\,(2^{k+1} - 1)$

$\therefore\ L.H.S = [2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k] + 2^{k+1}$

$= 2(2^k - 1) + 2^{k+1}$

$= 2 \text{ - } 2^k - 2 + 2^{k+1}$

$= 2.(2^{k+1}) - 2$

$= 2(2^{k+1} - 1)$ #

$\therefore\ L.H.S = R.H.S$

$\therefore \Rightarrow$ العلاقة صحيحة

(7) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2\,(2n^2 - 1)$

At $n = 1$

$L.H.S = 1^3 = 1$

$R.H.S = 1^2(2\ 1 = (1 - 1^2 \times$ $\therefore\ L.H.S = R.H.S$

At $n = 2$

$\therefore\ L.H.S = 1^3 + 3^3 = 28$

$R.H.S = 2^2(2 \text{ - } 2^2 - 1) = 28$ $\therefore\ L.H.S = R.H.S$

نفترض أن العلاقة صحيحة

At $n = k$ $\Rightarrow$

$\therefore\ 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k - 1)^3 = k^2\,(2k^2 - 1)$

At $n = k + 1$

المطلوب إثباته على الصورة

$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k - 1)^3 + 2(k + 1)^3 = (k + 1)^2\,(2(k+1)^2 - 1)$

$L.H.S = [1^3 + 3^3 + \ldots + 2(k - 1)^3] + (2k + 1)^3$

$= k^2 (2k^2 - 1) + (2k + 1)^3$
$= 2k^4 + 8k^3 + 4k^2 + 6k^2 + 6k + 1$
$=(k + 1)^2 - [2(k + 1)^2 - 1]$
$\therefore L.H.S = R.H.S$

$\therefore$ العلاقة صحيحة.

تمارين الجبر على الباب الثالث صفحة 70

(1) اثبت

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+n=\frac{n}{n+1}$$

At $n = 1$

$$L.H.S = \frac{1}{1\times2} = 1/2$$

$$R.H.S = \frac{1}{1+1} = 1/2$$

At $n = \text{k}$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+k=\frac{k}{k+1}$$

At $n = k + 1$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)}{(k+2)}$$

$$L.H.S = [\frac{1}{1\times2}+\ldots+k]+(k+1)$$

$$=\frac{k}{k(k+1)}+(k+1)$$

$$=\frac{1}{(k+1)}+(k+1)$$

$$=\frac{1+k+1}{(k+1)}$$

$$=\frac{k+2}{(k+1)}=R.h.S$$

(2) اثبت قانون دي موافر باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي

$$[R(\cos\theta + t\sin\theta)]^n = R^n[\cos\theta n + t\sin\theta n]$$

حيث $R \Rightarrow const$

At $n = 1$

$l.h.s = R(\cos\theta + t\sin\theta) \Rightarrow \theta$

$R.h.s = R(\cos\theta + t\sin\theta)$

At $n = k$

$[R(\cos\theta + t\sin\theta)]^k = R^k[\cos\theta k + t\sin\theta k]$

At $n = k + 1$

$[R(\cos\theta + t\sin\theta)]^{(k+1)} = R^{(k+1)}[\cos\theta(k+1) + \sin\theta(k+1)]$

$l.h.s = R^{(k+1)}[\cos\theta + \sin\theta]^{(k+1)}$

$= R^{(k+1)}[\cos\theta(k+1) + \sin\theta(k+1)]$

$= R.h.s$

(3) اثبت أن كل عدد طبيعي يساوي العدد الذي يليه

$n = n + 1$

At $n = 1$

$l.h.s = 1 + 1 = 2$

$R.h.s = 2$

At $n = k$ $\qquad k = k + 1$

At $n = k + 1$

$k + 1 = k + 2$

$L.H.S = k + 2 = (k + 1) + 1 = k + 2 = R.H.S$

(4) اثبت

$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1}$
$\frac{n(n+1)}{2}$

At $n = 1$

$L.H.S = 1$

$R.H.S = (-1)^0 \frac{2}{2} = 1$

At $n = 2$

$L.H.S = -4$

$R.H.S = (-1)^1 \frac{2\times 3}{2} = -4$

At $n = k$

$\therefore 1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{k-1}-k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$

At $n = k+1$

$1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^k(k+1)^2 = (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$[1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{k-1}k^2]+(-1)^k(k+1) =$

$(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2 = (-1)^k\frac{k+1)}{2}[-k+2k+2] = l.h.s$

$= (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2} = R/H.S$

(5) اثبت أن

$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!}$

At $n = 1$

$L.H.S = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2\times 1} = \frac{1}{2}$

$R/H.S = 1-\frac{1}{2!} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

At $n = k+1$

$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{k+1}{(k+2)!} = 1-\frac{1}{(k+2)!}$

$L.H.S = \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{k+1}{(k+2)!} = [\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{k}{(k+1)!}]$

$+\frac{(k+1)}{(k+2)!} = [1-\frac{1}{(k+1)!}]+\frac{k+1}{(k+2)!} = 1-[\frac{1}{(k+1)!}-\frac{k+1}{9k+2)!}]$

$= 1-\frac{1}{(k+2)!}[k+2-k-1]$

$= 1-\frac{1}{(k+2)!}$

$R.H.S = 1 - \frac{1}{(k+2)!}$

(6) اثبت

$2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2\,(2^n - 1)$

At $n = 1$ $\quad l.h.s = 2$

$R.H.S = 2(2 - 1) = 2$

At $n = k$

$2 + 2^2 + 2^3 + \ldots. + 2^k = 2(2^k - 1)$

At $n = k + 1$

$2 + 2^2 + 2^3 + \ldots. + 2^{k+1} = 2\,(2^{(k+1)} - 1)$

$l.h.s = [2 + 2^2 + 2^3 + \ldots. + 2^k] + 2^{k+1}$

$= 2.(2^k + 1) + 2 = 2^{k+1} + 2 + 2^{k+1}$

$= 2[2^{k+1}] + 2$

$= 2[2^{k+1} = 1]$

$= R.H.S$

(7) اثبت

$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2\,(2n^2 - 1)$

At $n = 1$

$L.H.S = 1^3 = 1$

$R.H.S = 1(2 - 1) = 1$

At $n = k$

$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k - 1)^3 = k^2\,(2k^2 - 1)$

At $n = k + 1$

$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k - 1)^3 + 2(k + 1)^2\ [2(k+1)^2 - 1]$

$L.H.S = [1^3 + 3^3 + \ldots + 2(k - 1)^3] + (2k + 1)^3$

$= k^2\,(2k^2 - 1) + (2k + 1)^3 = 2k^4 + 8k^3 + 4k^2 + 6k + 1$

$=(k + 1)^2 - [2(k + 1)^2 - 1] = R.H.S$

اقتراح إثبات قانون نيوتن

نفرض دالة $(y = f(x))$ وتقطع المحور x عند النقطة x_1

والمطلوب إيجاد قيمة x_1

$\therefore$ نفرض نقطة أخرى x_0 تقترب من x_1

من تعريف المشتقة الأولى

$$f'(x_1) = \lim_{x_0 \to x_1} \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

ولكن

$$f(x_1) = 0$$

$$f'(x_1) = \lim_{x_0 \to x_1} \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$= \lim_{x_0 \to x_1} \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1}$$

(1)

ولكن عندما تنطبق x_0 على x_1

$$f'(x_1) = f'(x_0)$$

$$f'(x_1) = \lim_{x_0 \to x_1} f'(x_0) \qquad (2)$$

وبالتعويض بـ (2) في (1)

$$\lim_{x_0 \to x_1} f'(x_0) = \lim_{x_0 \to x_1} \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\lim_{x_0 \to x_1} f'(x_0) - \lim_{x_0 \to x_1} \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = 0$$

$$\lim_{x_0 \to x_1} f'(x_0) - \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = 0$$

أي أنه عندما $x_1 \simeq x_0$ فإن النهاية تقترب من [0]

$$f'(x_0) - \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ومنـه

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

إجابة الباب الثالث في الجبرصفحة 79

(1) $\frac{2x+3}{(x+1)(x-3)}$

$\therefore$ درجة البسط أقل من درجة المقام

وهذه هي الحالة الأولى

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)}$$

وبالضرب في المقام $(x-3)(x+1)$ أو بتوحيد المقامات

$$2x + 3 = A(x-3) + B(x+1)$$

وبالتعويض بأصفار المقام أي $x = 3$, $x = -1$

At $x = -1$

$$-2 + 3 = -4A \Rightarrow A = \frac{-1}{4}$$

At $x = 3$

$$6 + 3 = 4B \Rightarrow B = \frac{9}{4}$$

ومنها

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x-3)} = \frac{\frac{-1}{4}}{(x+1)} + \frac{\frac{9}{4}}{(x+3)}$$

(2) $\frac{2x^2+10x-2}{(x+1)(x^2-9)}$

نلاحظ أن درجة البسط أقل من المقام

ونلاحظ أنه من الحالة الأولى

$$\frac{2x^2+10x-2}{(x+1)(x+3)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-3}$$

$$2x^2 + 10\,x - 2 = A(x-3)(x+3) + B(x-3)(x+1) + C(x+1)(x+3)$$

وبالتعويض بأصفار المقام

x = -1, 3, -3

At x = -1

$$2+10-2=+8A \Rightarrow A=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

At x = 3

$$18+30-2=24C \Rightarrow C=\frac{86}{24}=\frac{23}{12}$$

At x = - 3

$$18-30-2=12B \Rightarrow B=\frac{-14}{12}=\frac{-7}{6}$$

ومنهـا

$$\frac{2x^2+10x-2}{(x+1)(x+3)(x-3)}=\frac{\frac{5}{4}}{x+1}+\frac{\frac{-7}{6}}{x+3}+\frac{\frac{23}{12}}{x+3}$$

(3) $\frac{4X^2+2X+4}{(2X+3)^3}$

$$=\frac{A}{2X+3}+\frac{B}{(2X+3)^3}+\frac{C}{(2X+3)^3}$$

بالضرب في المقام $(2X+3)^3$

$$4X^2 + 2X + 4 = A\,(2X+3)^2 + B\,(2X+3) + C$$

وبالتعويض عند أصفار المقام at $X=\frac{-3}{2}$

$10 = C$

وبمقارنة معامل X^2

$4 = 4A \Rightarrow A = 1$

وبمقارنة معامل X

$2 = 12A + 2B$

$2B = -10 \Rightarrow B = -5$

ويكون

$$\frac{2X^2+2X+4}{(2X+3)^3} = \frac{1}{2X+3} = \frac{-5}{(2X+3)^2} + \frac{10}{(2X+3)^2}$$

(4) $\frac{1}{(X-1)(X^2+X-4)}$

∵ درجة البسط أقل من درجة المقام

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+X-4)} = \frac{A}{X-1} + \frac{BX+C}{X^2+X-4}$$

وبالضرب في المقام

$1 = A(X^2 + X - 4) + (BX + C)(X - 1)$

وبالتعويض عن أصفار المقام

at $X = 1$

$1 = -2A \Rightarrow A = \frac{-1}{2}$

وبمقارنة عوامل X^2

$A + B = 0$

وبمقارنة الحد المطلق : $C = 1$

$B = \frac{1}{2} \Rightarrow A = -B$

ويكون

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+X-4)} = \frac{\frac{-1}{2}}{X-1} + \frac{\frac{1}{2}X+1}{X^2+X-4}$$

(5) $\frac{X^2 = 2X+5}{(2X^2+6X+7)^2}$

$$\frac{X^2 = 2X+5}{(2X^2+6X+7)^2} = \frac{A_1X+B_1}{2X^2+6X+7} + \frac{A_2X+B_2}{(2X^2+6X+7)^2}$$

وبالضرب X $(X^2+6X+7)^2 2)$

$$X^2 + 2X + 5 = (A_1 X + B_1)(2X^2 + 6X + 7) + A_2 X + B_2$$

وبمقارنة معامل X^3

$$2A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

وبمقارنة معامل X^2

$$1 = 6A_1 + 2B_1 \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2}$$

وبمقارنة معامل X

$$2 = 7A_1 + 6B_1 + A_2 \Rightarrow A_2 = -1$$

وبمقارنة الحد المطلق

$$6 = 7B_1 + B_2$$

$$B_2 = \frac{3}{2}$$

ويكون

$$\frac{X^2 = 2X+5}{(2X^2+6X+7)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{2X^2+6X+7} + \frac{-X+\frac{3}{2}}{(2X^2+6X+7)^2}$$

اختبر تقارب أو تباعد المتتابعات الباب الرابع صفحة 73

(1) $\{2_n\} = \frac{2n^2}{n+1}$

Solution

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n+1} = \frac{2x\infty}{1+0} = \infty$$

$\therefore$ Sequence is divergent

(2) $\{2_n\} = \frac{1}{n-3}$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-3} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1-\frac{3}{\infty}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

$\therefore$ Sequence is convergent to zero

(3) $\{2_n\} = \frac{-1}{n-3}$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n-3} = 0$$

$\therefore$ Sequence is convergent to zero

(1) $\frac{1}{1n2} + \frac{1}{1n3}........ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1n(n+1)}$

بالمقارنة بالمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)1n(n+1)}$ المتباعدة نجد أن

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1n(n+1)} > \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)1n(n+1)}$$

$\therefore$ Sequence is divergent .

نجري اختبار النهاية

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

So divergent

بإجراء اختبار القسمة

(3) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} . \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^1} = \frac{1}{2} < 1$$

$\therefore$ convergent

بإجراء اختبار القسمة

(4) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n+1}{n2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n2^n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}<1$$

$\therefore$ convergent

بإجراء اختبار التكامل

(5) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1n(n)}{n}$

$$\int_1^{\infty}\frac{1n(n)}{n}dn=\left(\frac{1n^2(n)}{2}\right)_1^{\infty}=\infty$$

Divergent

بإجراء الجذر النوني

(6) $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}<1$$

$\therefore$ convergent

بإجراء اختبار الجذر النوني

إجابة تمارين صفحة 97

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(x+i)^n$

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{(x+i)^n}=|x+i|<1$$

$-1<x<1$ متقاربة في

عند $x=1$ متقاربة

عند $x=-1$ متباعدة تذبذبية

On $-1<x\le 1$

بإجراء القسمة

$$(2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}n!}{2n+1!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}(n+1)!}{(2n+3)!}\cdot\frac{2n+1!}{n!.x^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2.(n+1)!}{(2n+3)(2n+2)}=0<1$$

$\therefore$ convergent on R

بإجراء اختبار القسمة

$$(3)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(x-a)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x-a)}{(2n+3)(2n+2)}=0<1$$

$\therefore$ convergent on R

بإجراء اختبار الجذر النوني

$$(4)\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$$

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{n^2x^2}=nx$$

نقطة التقارب هي $\{x=0\}$

بإجراء اختبار القسمة

$$(5)\ \frac{x}{e^x}+\frac{2x}{e^{2x}}........=\sum_{1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)x}{e^{nx+x}}\cdot\frac{e^{n2}}{nx}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{ne^x}=\frac{1}{e^x}$$

$e^x>1 \qquad e^x>e^o \qquad \therefore x>0$

فترة التقارب $]0,\infty[$

$$(6)\ \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}........=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$$

المتسلسلة متقاربة $\therefore$ هي متقاربة عند $|x|>1$

(7) $in(x)+1n^2........\sum_{n=1}^{\infty} 1n^n(x)$

بإجراء الجذر النوني

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{1n^n(x)} = 1n(x) < 1$$

المتسلسلة متقاربة عند

$\therefore x \geq 1$

تمارين الجبر على الباب الخامس صفحة 108

(1) حل المعادلات الآتية باستخدام طريقة جاوس :

1) $3X + Y = -5$

$2X - 3Y = 6$

$$\left.\begin{matrix} 3X + Y = -5 \\ 2X + 3Y = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

بحذف X من المعادلة الثانية :

$$\left.\begin{matrix} 3X + Y = -5 \\ \frac{7}{3}Y = \frac{28}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & \frac{7}{3} & \frac{28}{3} \end{vmatrix}$$

وبالتعويض بـ $Y = 4$ في المعادلة الأولى :

$\therefore \quad Y = 4$

$3X + 4 = -5 \quad \Rightarrow \quad X = -5$

2) $X - 2Y = -8$

$5X + 3Y = -1$

$$\left.\begin{matrix} X + 2Y = -8 \\ 5X + 3Y = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

بحذف X من المعادلة الثانية :

$$\left.\begin{matrix} X - 2Y = -8 \\ 13Y = 39 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 13 & 39 \end{vmatrix}$$

$\therefore \quad Y = 3$

وبالتعويض في المعادلة الأولى

$X - 16 = -8 \quad \Rightarrow \quad X = -2$

3)- $7X - Y - 2Z = 0 \quad , \quad 9X - Y - 3Z = 0 \quad ,$
$2X + 4Y - 7Z = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 7X - Y - 2Z = 0 \\ 9X - Y - 3Z = 0 \\ 2X + 4Y - 7Z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 7 & -1 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right|$$

بحذف X_1 من المعادلتين الثانية والثالثة نحصل على :

$$\left.\begin{array}{l} 7X - Y - 2Z = 0 \\ \frac{2}{7}Y - \frac{37}{7} = 0 \\ 30/7Y - 9/7Z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 7 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & -3/7 & 0 \\ 0 & 30/7 & -9/7 & 0 \end{array}\right|$$

بحذف Y من المعادلة الثالثة :

$$\left.\begin{array}{l} 7X - Y - 2Z = 0 \\ \frac{2}{7}Y - \frac{3*}{7} = 0 \\ 36/7Z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 7 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & -3/7 & 0 \\ 0 & 30/7 & -9/7 & 0 \end{array}\right|$$

$\therefore Z = 0 \quad , \quad 2/7Y \quad - 3/7 X 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y =$
0

$7X - 0 \quad 2 \; X \; 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0$

4) $-3X - Y + Z = -2 \quad , \quad X + 5Y + 2Z = 6 \quad , \quad 2X$
$+ 3Y + Z = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 3X - Y + Z = -2 \\ X + 5Y + 2Z = 6 \\ 2X + 3Y + Z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

بحذف X من المعادلتين الثانية والثالثة نحصل على :

$$\left.\begin{array}{l} 3X - Y + Z = -2 \\ 16Y + 5Z = 20 \\ 11/3Y + Y36 = 3/4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 16 & 5 & 20 \\ 0 & 11/3 & 1/3 & 4/3 \end{vmatrix}$$

بحذف 7 من المعادلة الثالثة :

$$\left.\begin{array}{l} 3X - Y + Z = -2 \\ 16Y + 5Z = 20 \\ 39Y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 16 & 5 & 20 \\ 0 & 39 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\therefore\ Y = 0 \qquad 16\,X\,0 + 5Z = 20 \ \Rightarrow\ Z = 4$

$3X - 0 + 4 = -2 \ \Rightarrow\ X = -2$

5) $5X + 3Y - 3Z = -1$, $3X + 2Y - 2Z = -1$, $2X - Y + 2Z = 8$

$$\left.\begin{array}{l} 5X - 3Y - 3Z = -1 \\ 3X + 2Y - 2Z = -1 \\ 2X - Y + 2Z = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

بحذف X من المعادلتين الثانية والثالثة :

$$\left.\begin{array}{l} 5X + 3Y - 3Z = -1 \\ 1/5Y - 1/5Z = 2/5 \\ -11/5Y + 16/5Z = 42/5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1/5 & -1/5 & -2/5 \\ 0 & -11/5 & 16/5 & 42/5 \end{vmatrix}$$

بحذف Z من المعادلة الثالثة :

$$\left.\begin{array}{l} 5X + 3Y - 3Z = 1 \\ 1/5Y - 1/5Z = -2/5 \\ 5/5Y = 10/5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1/5 & -1/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$Y = 2 \qquad 2/5 - Z/5 = -2 \ \Rightarrow\ Z = 4$

$5X + 2X\,3 - 3\,X\,Y = 1 \ \Rightarrow\ X = 1$

إجابة تمارين الباب الخامس ص 114

أوجد معكوس المصفوفات الآتية :

1) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{row1} - \text{row3}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{column 2} - \ 6\ \text{column6}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{row2} - 5/3\ \text{row1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -12 & 0 & 0 \\ -5/3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{row1} - \text{row2}$$

$$\begin{vmatrix} -9 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{row 2+ \ row3}$$

$$\begin{vmatrix} -9 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{colum2+ \ colum1}$$

$$\begin{vmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow \text{colum1+ 3 colum3}$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow \text{colum1+ colum3}$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2/3 & 5/3 & -4/3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{row3-} \ 1/3 \ \text{row1}$$

$$26 \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 40/3 & 16/3 & 25/3 \\ 2/3 & 5/3 & -4/3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{7row2- row3}$$

$$26Xg \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 100/3 & 40/3 & 49/3 \\ 2/3 & 5/3 & -4/3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{row2- 4row1}$$

$$26 \begin{vmatrix} -3 & -2 & \\ -2 & & \\ 100 & 40 & 49 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \rightarrow$$ معكوس المصفوفة

3) $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$

$$A = \frac{1}{\det A} adjA$$

$det \ = \ 2 \, X(-5) \ = (X0 = \ -10$

$$adjA = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{-1}{10} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4) $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

$detA = 2X(-1) - 0 = -2$

$$adjA = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5) $A = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$det A = (-1) X 3 - 5X 2 = -13$

$$adjA = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{-1}{13}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3/13 & 1/13 \end{vmatrix}$$

إجابة تمارين الباب الخامس ص121

- أوجد الدالة المميزة والجذور والموجهات المميزة لكل مما يأتي :

a) $F(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)(-3-\lambda) = 0 \Rightarrow X_1 = 1, X_2 = -3$

- عند $X = 1$

$AX = \lambda_1 X$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix}$$

$X_1 + 0 = X_1 \quad \Rightarrow \quad X_1 = X \quad \therefore X_1 : X_2 = X : 0 = 1:0$

$0 - 3X_2 = X_2 \quad \Rightarrow \quad X_2 = 0$

$$\therefore X_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

عند $\lambda = -3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3X_1 \\ -3X_2 \end{vmatrix}$$

$X_1 = -3X_1 \qquad X_1 = 0$

$-3X_2 = -3X_2 \quad X_2 = X \quad \Rightarrow \quad X_1 : X_2 = 0 : X = 0 : 1$

$$X_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -8 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(-2-\lambda)(8-\lambda)+16=0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda - 16 + 16 = 0$

$\lambda^2 - \lambda = 0 \qquad \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = 6$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$-2X_1 + 2X_2 = 0$

$-8X_1 + 8X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 : X_2 = 1 : 1$

$$\therefore X_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

عند $\therefore \lambda = 6$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -8 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6X_1 \\ 6X_2 \end{vmatrix}$$

$-2X_1 + 2X_2 = 6X_1$

$-8X_1 + 8X_2 = 6X_2$

$2X_2 = 8X_1 \quad \Rightarrow \quad X_1 : X_2 = 1 : 4$

$$X_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}$$

C)

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$X_1 = 0$

$X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 : X_2 = 0 : 0$

$$X = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

d)

$$\begin{vmatrix} 4\text{-}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 8\text{-}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6\text{-}\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (4-\lambda)(8-\lambda)(6-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 4 \quad = 8 \quad , \quad \lambda_2 \quad , \quad \lambda_3 = 6$

- عند $\therefore \lambda = 4$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4X_1 \\ 4X_2 \\ 4X_3 \end{vmatrix}$$

$4X_1 = 4X_1 \quad \Rightarrow \quad X_1 = X$

$8X_2 = 4X_2 \quad \Rightarrow \quad X_2 = 0$

$6X_3 = 4X_3 \quad \Rightarrow \quad X_3 = 0$

$\therefore \ X_1 : X_2 : X_3 = 1 : 0 : 0$

$$X_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

- عند $\therefore \lambda = 8$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8X_1 \\ 8X_2 \\ 8X_3 \end{vmatrix}$$

$4X_1 = 8X_1 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 0$

$8X_2 = 8X_2 \quad \Rightarrow \quad X_2 = X$

$6X_3 = 8X_3 \quad \Rightarrow \quad X_3 = 0$

$\therefore \ X_1 : X_2 : X_3 = 0 : 1 : 0$

$$X_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

- عند $\therefore \lambda = 6$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6X_1 \\ 6X_2 \\ 6X_3 \end{vmatrix}$$

$4X_1 = 6X_1 \Rightarrow X_1 = 0$

$8X_2 = 6X_2 \Rightarrow X_2 = X$

$6X_3 = 6X_3 \Rightarrow X_3 = 0$

$\therefore X_1 : X_2 : X_3 = 0 : 0 : 1$

$$X_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

e)

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 6 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(\lambda+\lambda^2-12)+2(2\lambda-6)+3(-4+1+\lambda)=0$$

$(3-\lambda)[\lambda^2-\lambda-12-4-3]=0$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4-885$, $\lambda_3 = 3-885$

- عند $\therefore \lambda = 3$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3X_1 \\ 3X_2 \\ 3X_3 \end{vmatrix}$$

$3X_1 - 2X_1 + 3X_3 = 3X_1$

$-2X_1 - X_2 + 6X_3 = 3X_2$

$X_1 + 2X_2 + 0 = X_3$

$-2X_2 + 3X_3 = 6$ $\qquad X_2 : X_3 = 3 : 2$

$X_1 = 3\ X_3\ =\ 3X_3 \quad \Rightarrow \quad X_1 =\ 0$

$\therefore\ X_1 :\ X_2\ :\ X_3 =\ 0 : 3 : 2$

$$X_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}$$

- عند $\therefore \lambda = 4.9$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4.9X_1 \\ -4.9X_2 \\ -4.9X_3 \end{vmatrix}$$

$3\ X_1 -\ 2\ X_1\ + 3X_3\ =\ -4.9\ X_1$

$-2\ X_1 -\ \ X_2\ + 6X_3\ =\ -4.9\ X_2$

$X_1 +\ 2\ X_2\ \ +\ 0\ =\ \ -4.9\ X_3$

$7.9\ \ X_1\ -\ 2\ X_2\ + 3\ X_3$

$-2\ X_1 + 3.9\ X_2 + 10.9\ X_3 = 0$

$X_1 + 2\ X_2 + 4.9\ X_3\ \Rightarrow\ \ X_1 =(-\ 2\ X_2\ \ -\ 4.9\ X_3)$

$-2\ (-2\ X_2 - 4.9\ X_3) - 2\ X_2 = 3X_3 = 0$

$4X_2 + 9.8\ X_3 - 2X_2 + 3X_3 = 0 \qquad \Rightarrow \quad X_2 :\ X_3 = -\ 32 :\ 15$

$X_1 = -2X_2 + 147/46\,X_2 \Rightarrow X_1 = \frac{19}{64} X_2$

$X_1 :\ X_2 = 19\ :\ 64 \quad , \quad X_1 :\ X_3 = 64 : -\ 30$

$\therefore\ X_1 :\ X_2\ :\ X_3 =\ 19\ :\ 64\ :\ -\ 30$

$$X_2 = \begin{vmatrix} 19 \\ 64 \\ -30 \end{vmatrix}$$

- عند $\therefore \lambda = 3.9$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3.9X_1 \\ 3.9X_2 \\ 3.9X_3 \end{vmatrix}$$

$3\ X_1 -\ 2\ X_1\ + 3X_3\ =\ 3.9\ X_1$

$-2X_1 - X_2 + 6X_3 = 3.9X_2$

$X_1 + 2X_2 + 0 = 3.9X_3$

$-0.9X_1 = 2X_2 + 3X_3 = 0$

$-2X_1 - 4.9X_2 + 6X_3 = 0$

$X_1 + 2X_2 - 3.9X_3 \Rightarrow X_1 = (-2X_2 + 3.9X_3)$

$-2(-X_2 + 3.9X_3) - 4.9X_2 + 6X_3 = 0$

$4X_2 - 7.8X_3 - 4.9X_2 + 6X_3 = 0$

$-0.9X_2 - 1.8X_3 = 0$

$X_2 = -2X_3 \Rightarrow X_2 : X_3 = -2 : 1$

$X_1 = 4X_3 + 3.9X_3$

$X_1 = 7.9X_3 \Rightarrow X_1 : X_3 = 7.9 : 1$

$\therefore X_1 : X_2 : X_3 = 7.9 : -2 : 1$

$$\therefore X_3 = \begin{vmatrix} 7.9 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

f)

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 4-\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 3 \quad , \quad \lambda_2 = 4 \quad , \quad \lambda_3 = 1$

- عند $\therefore \lambda = 3$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3X_1 \\ 3X_2 \\ 3X_3 \end{vmatrix}$$

$3X_1 = 3X_1 \Rightarrow X_1 = X$

$5X_1 + 4X_2 = 3X_2$

$3X_1 + 6X_2 = X_3 = 3X_3$

$5X_1 = -X_2 \Rightarrow X_1 : X_2 = -1 : 5$

$3X_1 - 30X_1 + X_3 = 3X_3$

$X_1 : X_3 = -27 : 2$

$X_1 : X_2 = -27 : 135$

$\therefore X_1 : X_2 : X_3 = -27 : 135 : 2$

$$X_1 = \begin{vmatrix} -27 \\ 135 \\ 2 \end{vmatrix}$$

- عند $\therefore \lambda = 4$

$3X_1 = 4X_1 \Rightarrow X_1 = 0$

$5X_1 + 4X_2 = 4X_2$

$3X_1 + 6X_2 + X_3 = 4X_3$

$6X_2 = 3X_3 \qquad X_2 : X_3 = 1 : 2$

$\therefore X_1 : X_2 : X_3 = 0 : 1 : 2$

$$X_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

- عند $\therefore \lambda = 1$

$3X_1 = X_1 \Rightarrow X_1 = 0$

$5X_1 + 4X_2 - X_2 \Rightarrow X_2 = 0$

$3X_1 + 6X_2 + X_3 = X_3 \Rightarrow X_2 = X$

$X_1 : X_2 : X_3 = 0 : 0 : 1$

$$X_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

إجابة تمارين صفحة 114

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلات

$3X_1 = X_1 \rightarrow X_1 = 0$

$5X_1 + 4X_2 = X_2 \rightarrow X_2 = 0$

$$3X_1 + 6X_2 + X_3 = X_3 \rightarrow X_3C : C \in R$$

وبذلك يكون المتجه المميز الأول هو:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix} : C \in R$$

ثانيا: عندما

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3X_1 \\ 3X_2 \\ 3X_3 \end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلة

$$3X_1 = 3X_1 \qquad \therefore \; X_1 = C : C \in R$$
$$5X_1 + 4X_2 = 3X_2$$
$$3X_1 + 6X_2 + X_3 = 3X_3$$

وفي كل المعادلات نجد أن:

$$X_1 \; : \; X_2 \; : \; X_3 \; = \; C \; : \; -5\,C \; : \; 13_1\,5C$$
$$= \; 1 \; : \; -5 \; : \; 13_1\,5$$

وبذلك يكون المتجه المميز الثاني هو:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -13_1 5 \end{pmatrix}$$

ثالثا: عندما $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4X_1 \\ 4X_2 \\ 4X_3 \end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلات

$$3X_1 = 4X_1 \rightarrow X_1 = 0$$
$$5X_1 + 4X_2 = 4X_2 \qquad \therefore \; X_2 = C : C \in R$$

$$3X_1 + 6X_2 + X_3 = 4X_3$$
$$0 + 6C = 3X_3 \qquad \therefore\ X_3 = 2C$$

وفي كل المعادلات نجد أن

$$X_1 : X_2 : X_3 = 0 : 1 : 2$$

ويكون المتجه المميز الثالث هو:

إجابة تمارين صفحة 150

* أوجد الدالة المميزة والجذور والمتجهات المميزة لكل مما يأتي:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

للحصول على الدالة المميزة والجذور المميزة لحل المعادلة

$$F(\lambda) = | A - \lambda \pm 1 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$F(\lambda) = (1-\lambda)(-3-\lambda) = 0$$
$$\therefore \lambda_1 = 1 \quad ، \quad \lambda_2 = -3$$

وللحصول على المتجهات المميزة لحل المعادلة

$$AX = \lambda X$$

عندما $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

فنحصل على المعادلات

$$\therefore X_1 = X_1$$
$$\therefore -3X_2 = X_2]$$
$$\therefore 4X_2 = 0 \qquad \therefore X_2 = 0$$

أي عدد ينتمى إلى مجموع الأعداد الحقيقية = X_1

وبذلك يكون قيمة المتجه الأول هي

$$X_1 = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} : C \in R$$

وعندما $\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3X_1 \\ -3X_2 \end{pmatrix}$$

$X_1 = -3\, X_1 \qquad \therefore\ 4\, X_1 = 0$

$-3\, X_2 = -3\, X_2 \qquad X_2 = X_2$

وتكون قيمة المتجه الثاني هي:

$$X_1 = \begin{pmatrix} o \\ C \end{pmatrix} : C \in R$$

(b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$

للحصول على الدالة المميزة والجذور ونكون المعادلة

$-16 - 8\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 16 = 0$

$\therefore \lambda^2 - 6\lambda = 0 \qquad \lambda(\lambda - 6) = 0 \qquad \therefore \lambda=0, \quad \lambda=6$

وللحصول على الخدمات المميزة تكون المعادلة

$AX = \lambda X$

أولا: علما بأن $\lambda = 0$

$\therefore 0 = \lambda X$

$\lambda = 0$

$\therefore\ 0 = 0$

$0 = 6X \qquad \therefore\ X = 0 \qquad \lambda = 6$

وبالتالي تكون قيمة المتجه المميزة هي:

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ونفس الكلام ينطبق على المصفوفة (c)

(d) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

للحصول على الجذور المميزة تكون المعادلة

$$F(A) = |A - \lambda \pm 1 = \begin{pmatrix} 4\text{-}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 8\text{-}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6\text{-}\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\therefore\ (4-\lambda)(8-\lambda)(6-\lambda) = 0$

∴ الجذور المميزة هي $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 8, \quad \lambda_3 = 6$

وللحصول على المتجهات المميزة تكون المعادلة

$AX = \lambda X$

أولا: عندما $\lambda_1 = 4$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4X_1 \\ 4X_2 \\ 4X_3 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ 4X_1 = 4X_1 \quad , \quad 8X_2 = 4X_2$
$6X_3 = 4X_3$

$\therefore\ X_1 = C : \quad C \in R \quad , \quad X_2 = X_3 = 0$

وبذلك تكون قيمة المتجه الأول هو $X = \begin{pmatrix} C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : C \in R$

ثانيا: عندما $\lambda_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6X_1 \\ 6X_2 \\ 6X_3 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ 4X_1 = 6X_1 \quad , \quad 8X_2 = 6X_2$
$6X_3 = 6X_3$

$\therefore\ X_1 = X_2 \quad , \quad X_3 = C : \quad C \in R$

وبذلك تكون قيمة المتجه المميز الثاني هو: $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix} : C \in R$

ثالثا: عندما $\lambda_3 = 8$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8X_1 \\ 8X_2 \\ 8X_3 \end{pmatrix}$$

$\therefore \ 4X_1 = 8X_1 \quad , \quad 8X_2 = 8X_2$

$6X_3 = 6X_3$

$\therefore \ X_1 = X_3 \quad , \quad X_2 = C : \ C \in R$

وبذلك تكون قيمة المتجه المميز الثاني هو: $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ 0 \end{pmatrix} : C \in R$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

للحصول على الدالة المميزة والجذور المميزة تكون المعادلة

$$F(\lambda) = (A - 1) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ -2 & -1-\lambda & 6 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

وتكون المعادلة

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 21\lambda - 45 = 0$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 = 3 \quad , \quad \lambda_3 = -5$$

وللحصول على المتجهات المميزة تكون المعادلة

$$AX = \lambda X$$

أولا: عندما $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3X_1 \\ 3X_2 \\ 3X_3 \end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلات

$$2X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 3X_1$$
$$-2X_1 - X_2 + 6X_3 = 3X_2$$
$$X_1 + 2X_2 = 3X_3$$

وفي كل المعادلات نجد أن:

$$X_1 : X_2 : X_3 = 1 : 1 : 1$$

وبذلك يكون المتجه الأول هو:
$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ثانيا: عندما $\lambda = -5$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5X_1 \\ -5X_2 \\ -5X_3 \end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلات

$$\therefore 2X_1 - 2X_2 + 3X_3 = -5X_1$$
$$-2X_1 - X_2 + 6X_3 = -5X_2$$
$$X_1 + 2X_2 = -5X_3$$

وفي كل المعادلات نجد أن

$$X_1 : X_2 : X_3 = 1 : -2 : 1$$

وبذلك يكون المتجه الأول هو:
$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

للحصول على الدالة المميزة والجذور والمتجهات المميزة تكون المعادلة

$$F(\lambda) = (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3\text{-}\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 4\text{-}\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 1\text{-}\lambda \end{pmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلة

$$(3-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

الجذور المميزة هي: $\lambda_3 = 4$ $\lambda_2 = 3$

$$\therefore \lambda_1 = 1$$

وللحصول على المتجهات المميزة تكون المعادلة:

$$AX = \lambda X$$

أولا: عندما $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلات

$$3X_1 = X_1 \to X_1 = 0$$
$$5X_1 + 4X_2 = X_2 \to X_2 = 0$$
$$3X_1 + 6X_2 + X_3 = X_3 \to X_3 C : C \in R$$

وبذلك يكون المتجه المميز الأول هو:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix} : C \in R$$

ثانيا: عندما

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3X_1 \\ 3X_2 \\ 3X_3 \end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلة

$$3X_1 = 3X_1 \qquad \therefore\ X_1 = C : C \in R$$
$$5X_1 + 4X_2 = 3X_2$$
$$3X_1 + 6X_2 + X_3 = 3X_3$$

وفي كل المعادلات نجد أن

$$X_1 : X_2 : X_3 = C : -5C : 13_1 5C$$
$$= 1 : -5 : 13_1 5$$

وبذلك نكون المتجه المميز الثاني هو:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -13_1 5 \end{pmatrix}$$

ثالثا: عندما $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4X_1 \\ 4X_2 \\ 4X_3 \end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلات

$$3X_1 = 4X_1 \rightarrow X_1 = 0$$
$$5X_1 + 4X_2 = 4X_2 \qquad \therefore\ X_2 = C : C \in R$$
$$3X_1 + 6X_2 + X_3 = 4X_3$$
$$0 + 6C = 3X_3 \qquad \therefore\ X_3 = 2C$$

وفي كل المعادلات نجد أن

$$X_1 : X_2 : X_3 = 0 : 1 : 2$$

ويكون المتجه المميز الثالث هو:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$1)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\ A = 12$$

$$adJA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 18 & -18 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 18 & -18 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-5}{12} & 3 & 0 \\ 1,5 & -18 & 12 \end{pmatrix}$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\ A = 78$$

$$adJA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -5 & -2 & 15 \\ 29 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{78} & \frac{1}{78} & \frac{-1}{26} \\ \frac{-5}{78} & \frac{-1}{39} & \frac{5}{26} \\ \frac{29}{78} & \frac{-2}{38} & \frac{-3}{26} \end{pmatrix}$$

أوجد معكوس المصفوفات الآتية :

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0,1 \\ 0 & -0,2 \end{pmatrix}$$

4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

det A = -2

$$adJA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

det = -3 – 10 = - 13

$$adJA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

❊ ❊ ❊