الباب العاشر

امتحانات متنوعة وإجاباتها النموذجية

جامعة قناة السويس
الفرقة :إعدادي
كلية هندسة البترول والتعدين
الزمن : ساعة ونصف قسم العلوم والرياضيات الهندسية
المادة : جبر

امتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني 2005-2006

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أ) أوجد المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار "2" ع ن جذور المعادلة

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

ب) باسـ ـتخدام الكـ ـسور الجزئيـ ـة حلـ ـل الكـ ـسر الآتـ ـي:

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}$$

ج) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت أن:

$$\frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + ... + \frac{1}{(n+1)(n+2)} == \frac{n}{2(n+2)}$$

د) أوجد $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 6$ على **(x – 1) (x + 1)**
خارج قسمة المقدار

السؤال الثاني: أ) استخدم طريقة الوضع الزائف لتعيين حلول تقريبية للمعادلة:

$$F(x) = x^2 + x - 1 = 0$$

القريب من النقطة x=1.

ب) حل المعادلة $x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$

ج) حل المعادلة $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 20x + 8 = 0$

د) أوجد الخمسة حدود الأولى في مفكوك المقدار $(1+3x)^{-5}$

السؤال الثالث: أ) أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ب) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربـة أو متباعـدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

ج) أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

د) باستخدام طريقة نيوتن ثلاث مرات أوجـد الجـذر الحقيقـي للمقدار $3x^3 + x^2 - 11x + 6 = 0$

مع تمنياتي بالنجاح **د/ عادل نسيم**

جامعة قناة السويس
كلية هندسة البترول والتعدين
قسم العلوم والرياضيات الهندسية

الفرقة :إعدادي
الزمن : ساعة ونصف
المادة : جبر

تخلفات

امتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني 2005-2006

تاريخ الامتحان 24/ 5/2006

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أ) باستخدام الكسور الجزئية حل الكسر الآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}$$

ب) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت أن: $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}n(n+1)$

ج) أوجد خارج قسمة المقدار $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$ **على (x-2) .**

د) أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار "2" عن جذور المعادلة

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 1$$

السؤال الثاني: أ) استخدم طريقة نيوتن لتعيين حلول تقريبية للمعادلة التالية

$$F(x) = x^3 + x - 1$$

ب) حل المعادلة $x^3 - 9x + 28 = 0$

ج) حل المعادلة $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 20x + 8 = 0$

د) أوجد مفكوك المقدار $(1-2x)^6$

السؤال الثالث: أ) اختبر المتتابعة التالية من حيث التقـارب والتباعـد:

$$\{Z_n\} = 1 + \frac{2}{n}$$

ب) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

ج) أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

مع تمنياتي بالنجاح د/ عادل نسيم

* * *

جامعة قناة السويس
الفرقة : إعدادي
كلية هندسة البترول والتعدين
الزمن : ساعة ونصف
قسم العلوم والرياضيات الهندسية
المادة : جبر

تخلفات

امتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني 2006-2007

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أ) أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار "2"عن جذور المعادلة

$$F(X) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

ب) باستخدام الكسور الجزئية حلل الجذر الآتي:

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3}$$

ج) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت أن :

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots\dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x + 5$ على (2x-1)

د) أوجد خارج قسمة المقدار

لسؤال الثاني : أ) استخدم طريقة الوضع الزائف لتعيين حلول تقريبية للمعادلة

$$F(X) = x^2 + x + 1 = 0$$

القريب من النقطة : x=1

ب) حل المعادلة

$$x^3 - 9x + 28 = 0$$

ج) حل المعادلة

$$x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 20x + 8 = 0$$

د) أوجد الخمسة حدود الأولى في مفكوك المقدار

$$(x+7)^{-2/3}$$

السؤال الثالث: أ) أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ب) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$$

ج) أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

د) باستخدام طريقة نيوتن ثلاث مرات أوجد الجذر الحقيقي للمقدار

3x3+x2-11x+6=0

مع تمنياتي بالنجاح د/ عادل نسيم

❊ ❊ ❊

جامعة قناة السويس
الفرقة:إعدادي
كلية هندسة البترول والتعدين
الزمن: ساعة ونصف
قسم العلوم والرياضيات الهندسية
المادة: جبر

امتحان نهاية التيرم الثاني 2008/2007

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أ): أوجد خارج قسمة المقدار $f(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 + 6x + 13$
على $(x-2)(x-1)$

ب) أوجد المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار "2" عن جذور المعادلة:

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

ج) باستخدام الثلاث طرق أوجد مجموعة الحلول التقريبية لإيجاد الجذور الحقيقية للمسائل التالية:

$$f(x) = x^3 - 5x + 3$$

د) حل المعادلة $x^3 + 6x^2 + 9x + 3 = 0,$

السؤال الثاني: أ) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

ب) باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي: $\dfrac{x^2 + 15}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)}$

ج) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

د) أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة: $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

السؤال الثالث: أ) أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

ب) أوجد قيمة

$$^{1/3}\sqrt{211}$$

مقربا الجواب إلى ثلاثة أرقام عشرية باستخدام نظرية ذات الحدين واستنتج أكبر قيمة للخطأ.

ج) أوجد مفكوك $\frac{1}{3-5x}$ ومتى يكون هذا المفكوك صحيحا.

مع تمنياتي بالنجاح **أستاذ المادة : د/ عادل نسيم**

E-Mail: adel.nasim@yahoo.com

كلية هندسة البترول والتعدين
الزمن : ساعة ونصف
جامعة قناة السويس
الفرقة :إعدادي
قسم العلوم والرياضيات الهندسية **تخلفات**
المادة : جبر

امتحان نهاية التيرم الثاني 2008/2007

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أ) أوجد خارج قسمة المقدار $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 6$
على $(x + 1)(x - 1)$

ب) أوجـد المعادلـة التـي تزيـد جـذورها بمقـدار "2" عـن جـذور المعادلـة:
$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 1$$

ج) استخدم طريقة نيوتن لتعيين حلول تقريبية للمعادلة التالية $F(x) = x^3 + x - 1$

د) أوجد الحل الحقيقي للمعادلة الآتية باستخدام طريقة الوضع الزائف $x^4 = 3,$

السؤال الثاني: أ) حل المعادلة $x^3 - 15x^2 - 33x + 847$

ب) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت
$$1\times 2 + 2\times 3 + ... + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

ج) باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي: $\dfrac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}$

د) اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ من حيث كونها متقاربة أو متباعدة.

السؤال الثالث: أ) أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

ب) أوجد مفكوك المقدار $(2 - 3x)^5$

ج) أوجد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[3]{\frac{20}{9}}$ مقربا إلى أقرب أربعة أرقام عشرية صحيحة ثم أوجـد قيمة الخطأ.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ب) أوجد قيمة $\sqrt[3]{211}$ $^{1/3}$ **مقربا الجواب إلى ثلاثة أرقام عشرية باستخدام نظرية ذات الحدين واستنتج أكبر قيمة للخطأ.**

ج) أوجد مفكوك $\frac{1}{3-5x}$ ومتى يكون هذا المفكوك صحيحا.

مع تمنياتي بالنجاح **أستاذ المادة : د/ عادل نسيم**

E-Mail: adel.nasim@yahoo.com

إجابة امتحان الجبر 2006/2005

السؤال الأول :

(أ) أوجد المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار 2 عند جذور المعادلة

$F(X) = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$

الحل:

باستخدام القسمة على $(X-2)$ نوجد المطلوب

2	2	-3	4	-5	6
		4	2	12	14
2	2	1	6	7	$20 = R_1$
		4	10	32	
2	2	5	16	$39 = R_2$	
		4	18		
2	2	9	$34 = R_3$		
		4			
2	2	$13 = R_2$			
	$2 = Qn$				

$\therefore\ 9(y) = 2y^4 + 13y^3 + 34y^2 + 39y + 20$

وبوضـع $\leftarrow \quad y = (X-2)$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة

$F(X) = 2(X-2)^4 + 13(X-2)^3 + 34(X-2)^2 + 39(X-2) + 20$

(ب) باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي $\dfrac{5X+2}{(X+2)(3X+2)}$

الحل:

$$\frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)} = \frac{a}{(X+2)} + \frac{b}{(3X+2)}$$

وبضرب طرفي المعادلة في $(X+2)(3X+2)$

$$5X + 2 = (3X + 2)\,a + (X + 2)\,b$$
$$5X + 2 = 3aX + 2\,a + bX + 2\,b$$
$$5X + 2 = (3a + b)\,X + 2(a + b)$$

وبمقارنة الطرفين

$$5 = 3\,a + b$$
$$1 = a + b$$
$$4 = 2\,a \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad , \quad b = -1$$
$$\therefore \frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)} = \frac{2}{(X+2)} + \frac{1}{(3X+2)}$$

(ج) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت أن

$$\frac{1}{2X3} + \frac{1}{3X4} + ... + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$$

الحل:

$$\text{at} \quad n = 1 \ , \quad L.H.S = \frac{1}{2X3} = \frac{1}{6}, \quad R.H.S = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}$$

نفرض صحة العلاقة عند $n = k$

$$\therefore \frac{1}{2X3} + \frac{1}{3X4} + ... + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{2(k+2)}$$

ونحاول إثبات صحة العلاقة عند $n = k + 1$

∴ العلاقة المطلوب إثباتها

$$\frac{1}{2X3} + \frac{1}{3X4} + ... + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{k+1}{2(k+3)}$$

$$L.H.S = [\frac{1}{2X3} + \frac{1}{3X4} + ... + \frac{1}{(k+1)(k+2)}] + \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$L.H.S = \frac{k}{2(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$L.H.S = \frac{k^2 + 3k + 2}{2(k+2)(k+3)} = \frac{(k+2)(k+1)}{2(k+2)(k+3)} = R.H.S$$

(د) أوجد خارج قسمة المقدار $f(X) = 4X^3 - 4X^2 + 2$

$X + 6$ على $(X+1)(X-1)$

-1	3	-4	2	6
		-3	7	-9
1	3	-7	9	$-3 = R_1$
		3	-4	
	3	-4	$5 = R_2$	

خارج القسمة $\Rightarrow$ $Q(X) = 3X - 4$

الباقي $\Rightarrow$ $R = 5(X+1) - 3$

$$\forall f(X) = Q(X)[(X+1)(X-1)] + R$$

السؤال الثاني :

(أ) استخدام طريقة الوضع الزائف لتعيين حلول تقريبية للمعادلة

$F(X) = X^2 + X - 1 = 0$

القريب من النقطة $X = 1$

الحل:

نبحث الحل على الفترة $[0, 1]$ حيث $f(0)\,f(1) < 0$

$$C = X_1 = \frac{of(1) - f(0)}{f(1) - f(0)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = .5$$

$$\because f(\frac{1}{2})f(1) < 0$$

$\therefore$ الحل: $\in$ $[\frac{1}{2}, 1]$

$$X_2 = \frac{\frac{1}{2}f(1) - f(\frac{1}{2})}{f(1) - f(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = .6$$

$\because f(.6)f(1) < 0$

∴ الحل: ∈ $[.6,1]$

$$X_3 = \frac{.6f(1) - f(.6)}{f(1) - f(.6)} = \frac{.6 + .04}{1 + .04} = .615$$

$\because f(.615)f(1) < 0$

∴ الحل ينتمي للفترة $[.615, 1]$

$$X_4 = \frac{.615f(1) - f(.615)}{f(1) - f(.615)} = .617$$

∴ الحل التقريبي المطلوب هو .617

(ب) حل المعادلة $X^3 - 15X^3 - 33X + 847 = 0$

الحل:

لإيجاد الحلول المطلوبة نستخدم طريقة كاردان

نتخلص من معامل X^2 وذلك بوضع $X = y + \frac{15}{3} = y + 5$

$X = y + 5 \quad \rightarrow \quad y = X - 5$

أي نحصل على معادلة تنقص جذورها بمقدار 5

5	1	-15	-33	847
		5	-50	-415
5	1	-10	-83	$932 = R_1$
		5	-25	
5	1	-5	$-108 = R_2$	
		5		
5	1	$0 = R_3$		
	$1 = Qn$			

∴ المعادلة تصبح

$$Y^3 = 108y + 432 = 0$$

نوجد قيمة المميز على الصورة

$$\Delta = (\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3 = (216)^2 - (36)^3 = 0$$

∴ يوجد للمعادلة ثلاث جذور حقيقية

نحل المعادلة

$$m^2 + 432\, m + 216 = 0$$
$$\therefore\ m_1 = m_2 = -216$$
$$L = \sqrt[3]{m_1} = -6$$

∴ حلول المعادلة السابقة هي

$$(-L\ ,\ -L\ ,\ 2L) \rightarrow (6, 6, -12)$$

وبإضافة 5 على جذور هذه المعادلة

∴ الجذور المطلوبة هي $(11,\ 11,\ -7)$

(ج) حل المعادلة $X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 20X + 8 = 0$

الحل:

باستخدام طريقة فراري $X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 20X - 8$

نضع الطرف الأيسر في صورة إكمال المربعات

$$(X^2 + 2Xi + L)^2 = X^4 + 4X^3 + (10 + 2)\, X^2 + L^2 - 8)$$
$$= (m\, X + n)^2$$

ومن العلاقة

(معامل X^2) (الحد المطلق) = مربع نصف معامل X

$$(10 + 2L)\,(L^2 - 8) = (2\,L - 10)^2$$
$$L^2 + 3\,L^2 = 12\,L - 90 = 0$$

وبطريقة التخمين نوجد أحد حلول $3 = L$

وهي تحقق المعادلة .

$$\therefore (10 + 2L)\, X^2 + (4L - 20)\, X + (L^2 - 8) = m^2\, X^2 + 2mnX + n^2$$

والمقارنة و at $L = 3$

$$10 + 2L = 16 = m^2$$
$$L^2 - 8 = 1 = n^2$$
$$2mn = 4L + 20 = -18$$

ومنهـ ـا

$$m = 4 , \quad n = -1$$
$$(X^2 + 2X + L)^2 = (mX + n)^2$$
$$(X^2 + 2X + 3)^2 = (4X - 1)^2$$
$$X^2 + 2X + 3 = | 4X - 1 |$$

$$\mathbf{X^2 + 2X + 3 = 4X - 1} \qquad \mathbf{X^2 + 2X + 3 = 4X - 1}$$
$$\mathbf{X^2 - 2X + 4 = 0} \qquad \mathbf{X^2 - 6X + 2 = 0}$$
$$X = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} \qquad X = \frac{-62 \pm \sqrt{36-8}}{2}$$
$$X = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \qquad X = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{2}$$
$$X = 1 \pm \sqrt{3}i \qquad X = -3 \pm \sqrt{7}$$

∴ حلول المعادلة هي

$$(1 \pm \sqrt{3}i, -3 \pm \sqrt{7})$$

(د) أوجد الخمسة حدود الأولى في مفكوك $(1 + 3X)^{-5}$

$$(1+3X)^2 = 1 + (-5)(3X) + \frac{(-5)(-6)}{2!}(-3X)^2$$
$$+ \frac{(-5)(-6)(-7)}{3!}(3X)^3 + \frac{(-5)(-6)(-7)(-8)}{4!}3X^4$$

السؤال الثالث :

(أ) أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)(2-\lambda)-4=0$$

فتكون الجذور هي $\lambda_2 = 6 \quad , \quad \lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{-X_1 + 4X_2 = 0}$$
$$\mathbf{X_1 + 4X_2 = 0}$$
$$\mathbf{X_1 = 4X_2} \Rightarrow$$
$$\underline{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{4X_1 + 4X_2 = 0}$$
$$\mathbf{X_1 + X_2 = 0}$$
$$\underline{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ب) اختبر المتسلسلة حيث كونها متقاربة أو متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+........$$

هذه المتسلسلة عبارة عن متوالية عددية مجموع n من الحدود

$$S_n = 1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

وبالتالي فإن مجموعهما

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n}{2} = \infty$$

$\therefore$ المتسلسلة متباعدة .

(ج) أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

الحل:

$$\because A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$$

$$\det A = (3)(4) - (1)(2) = 10$$

$$adjA = adj\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4 & -1 \\ -2 & +3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{\det A}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .4 & -.1 \\ -.2 & .3 \end{pmatrix}$$

(د) باستخدام طريقة نيوتن ثلاث مرات أوجد الجذر الحقيقي للمقدار

$$3X^3 + X^2 - 11X + 6 = 0$$

الحل:

نبحث الحل على الفترة [0, 1]

$$\forall f(0)f(1) < 0$$

$$\Rightarrow X_0 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f^1(X) = 9X^2 + 2X - 11$$

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f^1(X_0)} = .5 - \frac{1.125}{-7.75} = .645$$

$$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f^1(X_1)} = .645 - \frac{.125}{-5.963} = .6659$$

$$X_3 = X_2 - \frac{f(X_2)}{f^1(X_2)} = .6659 - \frac{.00399}{-5.676}$$

$$X_3 = .6666$$

ومنها الحل الحقيقي للمعادلة هو

.6666

* * *

إجابة امتحان تخلفات 2006/2005

(أ) باستخدام الكسور الجزئية حلل الآتي :

$$\frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)}$$

الحل:

$$\frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)}=\frac{a}{(X+2)}+\frac{b}{(3X+2)}$$

بضرب طرفي المعادلة في المقدار $(X+2)(3X+2)$

$$5X+2=3aX+2a+bX+2b$$
$$5X+2=(3a+b)X+2(a+b)$$

وبمقارنة الطرفين ينتج أن $3a+B=5$

بالطرح $a+b=1$

$$2a=4 \quad \Rightarrow \quad a=2 \quad ، \quad b=-1$$

$$\therefore \frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)}=\frac{4}{X+2}-\frac{1}{(3X+2)}$$

(ب) باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي اثبت أن

$$\frac{1}{2}n(n+1)=\sum_{r=1}^{n} r$$

الحل:

$$\frac{1}{2}n(n+1)=1+2+3+\ldots+n$$

at $n=1$, $L.H.S=\frac{1}{2}(2)=1$

$$R.H.S=1$$

* نفرض صحة العلاقة عن $n=K$

$$\therefore \frac{1}{2}K(K+1) = 1 + 2 + \ldots + K$$

* نحاول إثبات العلاقة عن $n = K + 1$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + K + K + 1 = \frac{1}{2}(K+1)(K+2)$$

$$L.H.S = [1 + 2 + 3 + \ldots + K] + K + 1$$

$$L.H.S = \frac{1}{2}K(K+1) + (K+1)$$

$$= \frac{1}{2}(K+1) + (K+2) = R.H.S$$

$$\therefore \frac{1}{2}n(n+1) = \sum_{r=1}^{n} r$$

(جـ) أوجد خارج قسمة المقدار $f(X) = 2X^3 - 7X^2 + 7X - 2$ على $X - 2$

2	2	-7	7	-2
		4	-6	2
	2	-3	1	$0 = R$

خارج القسمة $\Rightarrow$ $Q(X) = 2X^2 - 3X + 1$

$$\forall f(X) = (X-2)Q(X)$$

(د) أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار 2 عن جذور المعادلة

$$f(X) = X^4 + 6X^3 + 12X^2 + 11X + 1$$

-2	1	6	12	11	1
		-2	-8	-8	-6
-2	1	4	4	3	$-5 = R_1$
		-2	-4	0	
-2	1	2	0	$3 = R_2$	
		-2	0		
-2	1	0	$0 = R_3$		
		-2			

$$1 \qquad -2 = R_4 \qquad , \qquad Qn = 1$$

$$\therefore \; g(y) = y^4 - 2y^3 + 3y - 5$$

وبوضع $y = X + 5$

$$F(X) = (X+5)^4 - 2(X+5)^3 + 3(X+5) - 5$$

(أ) استخدم طريقة نيوتن لتعيين حلول تقريبية للمعادلة الآتية

$$F(X) = X^3 + X - 1$$

* نبحث وجود حل للدالة عند $[0, 1]$ حيث $f(0)\,f(1) < 0$

الحل:

$$X_0 = \frac{1-0}{2} = .5, f^1(X) = 3X^2 + 1$$

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f^1(X_0)} = .5 - \frac{.375}{1.75} = .714$$

$$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f^1(X_1)} = .714 - \frac{.077}{-2.529} = .683$$

$$X_3 = X_2 - \frac{f(X_2)}{f^1(X_2)} = .683 - \frac{.0016}{2.399} = .682$$

$\therefore$ الحل التقريبي للمعادلة هو .682

(ب) حل المعادلة $X^3 - 9X + 28 = 0$

الحل:

نستخدم طريقة كاردان مباشرة نعين المميز

$$\Delta = (\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3 > 0$$

$\therefore$ يوجد للمعادلة جذر حقيقي وجذران تخيليان .

نحل المعادلة

$$m^2 + bm - (\frac{a}{3})^3 = 0$$

$$m^2 + 28 + 27 = 0$$

$m_1 = -1 \quad , \qquad m_2 = (-3)^3$

$L = 3\sqrt{m_1} = 1 \quad , \quad n = 3\sqrt{-27 = -3}$

$L + n = -4$

∴ الجذور للمعادلة هي

$(-4, \qquad -\omega - 3\omega^2, \quad -3\omega - \omega^2)$

$\omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \omega^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$

∴ جذور المعادلة هي

$(-4, 2 + \sqrt{3}i, 2 - \sqrt{3}i)$

(ج) حل المعادلة $X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 20X + 8 = 0$

باستخدام طريقة فراري

$X^4 + 4X^3 = 6X^2 - 20X - 8$

$(X^2 + 2K + L)^2 = (10 + 2L)X^2 + (4L - 20)X + (L^2 - 8)$

$= (mX + n)^2$

$(10 + 2L)\,(L^2 - 8) = (2L - 10)^2$

$L^3 + 3L^2 + 12\,L - 20 = 0$

وبالتخمين $L = 3$ ومنها

$m = 4 \qquad , \qquad n = -1$

$(X^2 + 2X + 3)^2 = (4X - 1)^2$

$X^2 + 2\,X + 3 = |\,4\,X - 1\,|$

$$\mathbf{X^2 + 2\,X + 3 = 4X - 1} \qquad \mathbf{X^2 + 2\,X + 3 = 4X + 1}$$

$X = 1 \pm \sqrt{3}i \qquad\qquad X = -3 \pm \sqrt{7}$

وعلى ذلك فإن جذور المعادلة الأربعة هي

$(1 \pm \sqrt{3}i \quad , \quad -3 \pm \sqrt{7})$

(د) أوجد مفكوك $(1 - 2\,X)^6$

الحل:

$$(1-2X)^6 = 1+6(-2X)+\frac{(6)(5)}{2!}(-2X)^2 + \frac{(6)(5)(4)}{3!}(-2X)^3 + \frac{(6)(5)(4)(3)}{4!}(-2X)^4 + \frac{(6)(5)(4)(3)(2)}{5i}(-2X)^5 + (-2X)^6$$

$$(1-2X)^6 = 1-12X+60X^2-160X^3-24X^4-192X^5+64X^6$$

(أ) اختبر المتتابعة التالية من حيث التقارب والتباعد

$$\{Zn\} = 1+\frac{2}{n}$$

الحل:

$$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 1$$

$\therefore$ المتتابعة متقاربة من $[1]$ فهي نحقق الشرط

$$|Zn-c|1+\frac{2}{n}-1| = |\frac{2}{n}| \geq \varepsilon_0$$

(ب) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{n-1}}$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+.....$$

$$Sn = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....(\frac{1}{2})^{n-1} = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

وهي عبارة عن متتابعة هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول 1

$S = \lim_{n\to\infty} Sn = 2$ $\leftarrow$ مجموعها

∴ المتسلسلة متقاربة ومجموعها 2 .

(ج) أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

الحل:

$$\because A^{-1} = \frac{adjA}{\det A}$$

$$\det A = (3)(4) - (1)(2) = 10$$

$$adjA = adj\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .4 & -.1 \\ -.2 & .3 \end{pmatrix}$$

❋ ❋ ❋

إجابة امتحان التخلفات 2007

السؤال الأول:

بقسمة الطرفين إلى النهاية على (x-2)

2	2	-3	4	-	6
	0	4	2	5	14
				12	
2	2	1	6	7	$20=R_1$
	0	4	10		
				32	
2	2	5	16		
	0	4	18	$39=R_2$	
2	2	9	$34=R_3$		
	0	4			
	Qn=2	$13=R_4$			

فتكون الدالة الجديدة التي تنقص جذورها بمقدار 2 هو

$$G(x)=2y^4+13y^3+34y^2+39y+20$$

بوضع $y=x-2$

$$F(x)=2(x-2)^4+13(x-2)^3+34(x-2)^2+39(x-2)+20$$

ب)

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3}=\frac{2x-3}{(x-3)(x+1)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x-1}$$

2x+3=a(x+1) +b(x+3)

At x=-1   -2+3 = 0 + b×-4

b=-0.25

6+3 = a×4 +0∴ At x=3

a=2.25

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+1}$$

ج)

At n=1   l.h.s.=1^3=1   r.h.s.= $1^2(2\times1^2-1)$=1

l.h.s.=r.h.s.

At n=2 l.h.s.=3^3+1^3=28   r.h.s=$2^2(2\times2^2-1)$=28

L.H.S=R.H.S

At n=3 L.H.S.=$1^3+3^3+5^3$=153 R.H.S=$3^2(2\times3^2-1)$ =153

L.H.S.=R.H.S

At n=k $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3=k^2(2k^2-1)$

At n=k+1 $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3+(2k+1)^3=(k+1)^2(2(k+1)^2-1)$

$k^2(2k^2-1)+(2k+1)^3=(k+1)^2(2(k+1)^2-1)$

L.H.S.=$2k^4+8k^3+4k^3+6k+1=(k+1)^2(2(k+1)^2-1)$= R.H.S.

د)

2x-1=2(x-0.5)

0.5	1	-3	4	1	5
	0	0.5	-5/4	11/8	19/16
	1	-5/2	11/4	19/8	R_1=99/16

$$\frac{99}{16}R=$$

$$Q(X)=2(X^3-\frac{5}{2}X^2+\frac{11}{4}X+\frac{`19}{8}$$

السؤال الثاني:

أ - نختار الفترة

لذلك $(0.5,1)$ لأن $F(0.5) = -0.375$, $f(1)=1$

$$= 0.64 = c\frac{0.5\times 1-1\times(-0.375)}{1-(-0.375)} = \frac{a1F(b1)-b1f(a1)}{F(b1)-f(a1)}X_1 =$$

فتكون الفترة الجديدة $(0.64,1)$

$X_2 = a_{n+1}f(b_n)-b_nf(a_{n+1})$ / $f(b_n)-f(a_n)$ $=0.64\times 1$ - 1×0.0496 / $1-0.0496$ $=0.672=$ c

$F(c)=f(a_{n+2})=F(0.672)=0.124$

وعلى ذلك تكون الفترة الجديدة $(0.67,1)$

$x_3 = a_{n+2}\, f(b_n) - b_n f(_{an+2})$ / $f(b_n)-f(a_{n+2})$ =
$0.672\times 1 - 1\times 0.124$ / $1-0.124$ $=0.674$

So the root is 0.674

ب)

A =-9 b=28

$0 \gg =(b/2)^2+(a/3)^3 = 14^2 - 3^3\Delta$

$\therefore m^2+28m+27=0$

$m_1=1$ $l= m^{1/3}=1$

$m_2=27$ $n=m_2^{1/3}=3$

Roots are $l+n$, $lw+nw^2$, $nw+lw^2$

4, $w+3w^2$, w^2+3w

$\sqrt{3}\ell, -2+\sqrt{3\ell 4}$, $-2-$

ج)

A=4 , b=-6 ,c=20 , d=8

$X^4+4x^3= 6x^2-20x-8$

$(x^2+2x+L)^2=x^4+4x^3+(10+2L)x^2+L^2+4Lx$

$(x^2+2x+L)^2 = (10+2L)x^2 + (4L-20)x + L^2 - 8 = (m\,x +$

$n)^2 = m^2x^2 + 2mnx + n^2$

وبمقارنة المعاملات

$m^2=2(5+L)$, $2mn=2(2L-10)$,
$n^2=L^2-8$
$mn=2L-10$
$m^2n^2=(2L-10)^2$

و بالتعويض

$L^3+3L^2+12L-90=0$

$L=3$ بالتخمين

. $m^2=16$, $mn=4$, $n^2=1$
. $m=\pm4$, $n=\pm1$
$(x^2+2x+L)^2 = (mx+n)^2$
$(x^2+2x+3)^2=(4x-1)^2$ $x^2+2x+3=\pm(4x-1)$
$x^2+2x+3=4x-1$ $x^2+2x+3=-(4x-1)$
$x^2-2x+4=0$ $x^2+6x+2=0$
$\sqrt{7\ell}$ $x=-3\pm\sqrt{3\ell}$ $x=1\pm$

و تكون الجذور هذه

السؤال الثالث:

ب)

باستخدام اختبار المقارنة لأن درجة البسط أقل من درجة المقام

$\frac{1}{n}$ $b_n=\frac{n+2}{n^2}$ $A_n=$

والمتسلسلة متباعدة . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

وبما أن

$\frac{1}{n} \geq \frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}=\frac{n+2}{n^2}$

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n} \geq \sum_{n}^{\infty}=1\frac{n+2}{n^{2}}$$

متباعدة فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^{2}}$$

متباعدة هي الأخرى

د) بفرض أن الفترة التي يوجد بها الحل هي (1,2)

ثم نعين نقطة البداية

$$\frac{b+a}{2}X_{o}=$$

$$=1.347\frac{1.875}{12.25}=1.5-\frac{3x^{3}+x^{2}-11x+6}{9x^{2}+2x-11}=1.5-\frac{f(x_{o})}{f'(x_{o})}X_{1}=x_{o}-$$

$$=1.306\frac{0.329}{8.024}=1.347-\frac{f(x_{2})}{f'(x_{2})}X_{2}=x_{1}-$$

$$=1.302\frac{0.0223}{6.96}=1.306-\frac{f(x_{2})}{f'(x_{2})}X_{3}=x_{2}-$$

The root is 1.302

❊ ❊ ❊

References

1. Peter H. Selby, Steve Slavin, *Practical Algebra: A Self-Teaching Guide, 2nd Edition*, Wiley, ISBN-10 0471530123 ISBN-13 978-0471530121
2. Gilbert Strang, *Linear Algebra and its Applications, Fourth Edition, Thompson Brooks/Cole, ISBN 0030105676.*
3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics, Sixth Edition, Saunders, ISBN 0030295580*
4. R. Birkeland. Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen. *Mathematische Zeitschrift* vol. 26, (1927) pp. 565-578. Shows that the roots of any polynomial may be written in terms of multivariate hypergeometric functions.
5. K. Mayr. Über die Auflösung algebraischer Gleichungssysteme durch hypergeometrische Funktionen. *Monatshefte für Mathematik und Physik* vol. 45, (1937) pp. 280-313.
6. H. Umemura. Solution of algebraic equations in terms of theta constants. In D. Mumford, *Tata Lectures on Theta II*, Progress in Mathematics 43, Birkhäuser, Boston, 1984.
7. George Gheverghese Joseph, *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics* (Penguin Books, 2000).
8. John J O'Connor and Edmund F Robertson, *MacTutor History of Mathematics archive* (University of St Andrews, 2005).
9. I.N. Herstein:*Topics in Algebra*. ISBN 0-471-02371-X
10. R.B.J.T. Allenby: *Rings, Fields and Groups*. ISBN 0-340-54440-6
11. L. Euler: *Elements of Algebra*, ISBN 978-1-89961-873-6

Linear Algebra: Elementary

12. Anton, Howard. *Elementary Linear Algebra,* New York, NY: John Wiley, 1973, 1991. Sixth Edition.
13. Banchoff, Thomas F. and Wermer, John. *Linear Algebra Through Geometry* New York, NY: Springer-Verlag, 1983.
14. Bloom, David M. *Linear Algebra and Geometry* New York, NY: Cambridge University Press, 1979.

15. Curtis, Charles W. *Linear Algebra: An Introductory Approach,* New York, NY: Springer-Verlag, 1984. Fourth Edition.
16. Damiano, David B. and Little, John B. *A Course in Linear Algebra* San Diego, CA: Harcourt Brace Jovanovich, 1988.
17. Fraleigh, John B. and Beauregard, Raymond A. *Linear Algebra,* Reading, MA: Addison-Wesley, 1990. Second Edition.
18. Greub, Werner. *Linear Algebra,* New York, NY: Springer-Verlag, 1975. Fourth Edition.
19. Grossman, Stanley I. *Elementary Linear Algebra,* Philadelphia, PA: Saunders College, 1980, 1991. Fourth Edition.
20. Jacob, Bill. *Linear Algebra* New York, NY: W.H. Freeman, 1990.
21. Kumpel, P.G. and Thorpe, John A. *Linear Algebra with Applications to Differential Equations* Philadelphia, PA: Saunders College, 1983.
22. Lang, Serge. *Introduction to Linear Algebra,* New York, NY: Springer-Verlag, 1986. Second Edition.
23. Leon, Steven J. *Linear Algebra with Applications,* New York, NY: Macmillan, 1980, 1986. Third Edition.
24. Lipschutz, Seymour. Schaum's Solved Problems Series: 3000 Solved Problems in Linear Algebra New York, NY: McGraw-Hill, 1989.
25. Noble, Ben and Daniel, James W. *Applied Linear Algebra,* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1969, 1988. Third Edition.
26. O'Nan, Michael and Enderton, Herbert B. *Linear Algebra,* San Diego, CA: Harcourt Brace Jovanovich, 1990. Third Edition.
27. Rorres, Chris and Anton, Howard. *Applications of Linear Algebra,* New York, NY: John Wiley, 1977, 1984. Third Edition.
28. Rothenberg, Ronald I. *Linear Algebra with Computer Applications* New York, NY: John Wiley, 1983.
29. Smith, Larry. *Linear Algebra* New York, NY: Springer-Verlag, 1978.
30. Strang, Gilbert. *Linear Algebra and Its Applications,* San Diego, CA: Harcourt Brace Jovanovich, 1988. Third Edition.
31. Towers, David A. *Guide to Linear Algebra* Houndmills, England: Macmillan Education, 1988.
32. Tucker, Alan. A Unified Introduction to Linear Algebra: Models, Methods, and Theory New York, NY: Macmillan, 1988.

Linear Algebra: Advanced

33. Brown, William C. *A Second Course in Linear Algebra* New York, NY: John Wiley, 1988.
34. Dieudonne, Jean. *Linear Algebra and Geometry* Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
35. Halmos, Paul R. *Finite-Dimensional Vector Spaces* New York, NY: Springer-Verlag, 1968, 1974.
36. Herstein, I.N. and Winter, David J. *Matrix Theory and Linear Algebra* New York, NY: Macmillan, 1968, 1988.
37. Hoffman, Kenneth and Kunze, Ray. *Linear Algebra,* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1971. Second Edition.
38. Jarvinen, Richard D. Finite and Infinite Dimensional Linear Spaces: A Comparative Study in Algebraic and Analytic Settings New York, NY: Marcel Dekker, 1981.
39. Kaplansky, Irving. *Linear Algebra and Geometry: A Second Course* New York, NY: Chelsea, 1974.
40. Lang, Serge. *Linear Algebra,* New York, NY: Springer-Verlag, 1987. Third Edition.
41. Shilov, G.E. *Linear Algebra* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1971.

Linear Algebra: Matrix Theory

42. Berman, Abraham and Plemmons, Robert J. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences* New York, NY: Academic Press, 1979.
43. Davis, Philip J. *Circulant Matrices* New York, NY: John Wiley, 1979.
44. Gantmacher, Felix. *Matrix Theory,* New York, NY: Chelsea, 1959. 2 Vols.
45. Graybill, Franklin A. Introduction to Matrices with Applications in Statistics Belmont, CA: Wadsworth, 1969.
46. Horn, Roger A. and Johnson, Charles R. *Matrix Analysis* New York, NY: Cambridge University Press, 1985.
47. Householder, Alston S. *The Theory of Matrices in Numerical Analysis* New York, NY: Blaisdell, 1964.
48. Iohvidov, I.S. Hankel and Toeplitz Matrices and Forms: Algebraic Theory New York, NY: Birkhauser, 1982.
49. Johnson, Charles R., ed. *Matrix Theory and Applications* Providence, RI: American Mathematical Society, 1990.

50. Lancaster, Peter and Tismenetsky, Miron. *The Theory of Matrices,* New York, NY: Academic Press, 1985. Second Edition with Applications.
51. Marcus, Marvin and Minc, Henryk. *Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities* Boston, MA: Allyn and Bacon, 1964.
52. Minc, Henryk. *Nonnegative Matrices* New York, NY: John Wiley, 1988.
53. Muir, Thomas. *A Treatise on the Theory of Determinants* Mineola, NY: Dover, 1933.
54. Newman, Morris. *Integral Matrices* New York, NY: Academic Press, 1972.
55. Perlis, Sam. *Theory of Matrices* Reading, MA: Addison-Wesley, 1952.
56. Pullman, N.J. Matrix Theory and its Applications: Selected Topics New York, NY: Marcel Dekker, 1976.
57. Wedderburn, J.H.M. *Lectures on Matrices* Mineola, NY: Dover, 1934, 1964.

58. Campbell, S.L. and Meyer, C.D., Jr. *Generalized Inverses of Linear Transformations* Brooklyn, NY: Pitman, 1979.
59. Goodbody, A.M. Cartesian Tensors: With Applications to Mechanics, Fluid Mechanics and Elasticity New York, NY: Halsted Press, 1982.
60. Greub, Werner. *Multilinear Algebra,* New York, NY: Springer-Verlag, 1978. Second Edition.
61. Roman, Steven. *The Umbral Calculus* New York, NY: Academic Press, 1984.
62. G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations* (3rd Ed, 1996), Johns Hopkins University Press, ISBN 0-8018-5414-8.

❉ ❉ ❉