الباب الثالث

الكسور الجزئيــة

Partial Fraction

تعريف:

كثيرة الحدود : يقال على الدالة التي لها الصورة

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_0 \neq 0$$

- كثيرة حدود من الدرجة n حيث n عدد صحيح غير سالب.
- **الكسر الجبري القياسي**: هو خارج قسمة كثيرتي الحدود.
- P(x), Q(x) أي أن الكسر الجبري القياسي له الشكل العام:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \ldots\ldots\ldots Q(x) \neq 0$$

- إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام يـسمى **كـسرا غيـر حقيقيا**(والعكس صحيح) ويكتب على الصورة

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{h(x)}{Q(x)}$$

حيث درجة h(x) أقل من درجة Q(x)

حالات الكسور الجزئية

- **الحالة الأولى:**

إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الأولـى أو معـادلات تربيعية قابلة للتحليل تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)(x-c).....(x-n)} =$$

$$= \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + ... + \frac{N}{(x-n)}$$

وبعد ذلك نقوم بضرب طرفي المعادلة في المقام

(x-a)(x-b)...(x-n)

فنحصل على

F(x) = A(x-b)(x-c)….(x-n) + B(x-a).
(x-c)….(x-n)+…+ N(x-a)(x-b)(x-c)...(x-m)

وبعد ذلك نوجد قيمة A,B,C,…., N عن طريق مساواة المعاملات أو عن طريق فرض قيم الx والحصول على معادلات في الثوابت.

أمثلة

مثال1:

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}$$

الحل:

أولا نتأكد أن درجة البسط أقل من درجة المقام وهذا متحقق وثانيـا شكل الكسر من النوع الأول

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{3x+2}$$

بعد ذلك نقوم بالضرب في المقـام (x+2)(3x+2) أو بمعنـى توحيـد

المقامات ينتج أن:

$$5x+2=A(3x+2)+B(x+2)$$

هناك طريقتين لتعيين قيمة الثوابت ولكن نحن سـنتبع عمليـة مـساواة المعاملات:

X: $5 = 3A + B$

الحد المطلق: $2 = 2A + 2B$

or $1 = A + B$

بحل المعادلتان ينتج أن $A = 2$ and $B = (-1)$ أي أن الكسر الأساسي هو:

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{3x+2}$$

مثال2 :

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3}$$

الحل:

أولا درجة البسط أقل من درجة المقام ثانيا واضح أن المقام عبارة عـن معادلة تربيعية قابلة للتحليل لذلك هي تتبع الحالة الأولى وحلها كما يلي:

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3} = \frac{2x+3}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

وبضرب طرفي المعادلة في المقام أو بتوحيد المقامات

$$2x+3=A(x+1)+B(x-3)$$

وعن طريق مساواة المعاملات ينتج

X: $2 = A + B$

الحد المطلق: $3 = A-3B$

بحل هاتين المعادلتين ينتج أن:

ويكون الحل النهائي $A = (9/4)$ and $B = (-1/4)$

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3} = \frac{2x+3}{(x-3)(x+1)} = \frac{9/4}{x-3} - \frac{1/4}{x+1}$$

مثال3 :

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+3)}$$

الحل:

أولا درجة البسط تساوي درجة المقام لذالك نقوم بعمليـة اختـصار أو قسمة مطولة وذلك لجعل درجة البسط أقل من درجة المقام ثانيا المقـام عبارة عن الحالة الأولى

$$x^2+x-6 \overline{)\, x^2 \,} \; 1$$

$$\underline{x^2+x-6}$$

$$\therefore \frac{x^2}{(x-2)(x+3)} = 1 + \frac{-x+6}{(x-2)(x+3)}$$

وبعد ذلك نقوم بتحليل الكسر الجديد والذى يتحقق فيه أن درجة البـسط أقل من درجة المقام:

$$\frac{-x+6}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

وبالضرب في المقام أو بتوحيد المقامات:

$$-x+6 = A(x+3) + B(x-2)$$

وبمساواة المعاملات:

X^1: -1 = A + B

X^0 الحد المطلق: 6 = 3 A -2B

وبحل المعادلتان ينتج أن:

A = (4/5),
B = (-9/5)

ويكون الحل هو

$$\therefore \frac{x^2}{(x-2)(x+3)} = 1 + \frac{-x+6}{(x-2)(x+3)} = 1 + \frac{4/5}{x-2} - \frac{9/5}{x+3}$$

• الحالة الثانية:

• إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الأولـى أو معـادلات تربيعية قابلة للتحليل مكررة تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n(x-b)^m}$$

$$= \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{N}{(x-a)^n} + \frac{C}{(x-b)} +$$

$$+ \frac{D}{(x-b)^2} \ldots + \frac{M}{(x-b)^m}$$

مثال4:

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي

$$\frac{2x^2}{(x-1)^3(x+1)}$$

أولا: درجة البسط أقل من درجة المقام

ثانيا: المقام عبارة عن الحالة الأولى والثانية

$$\frac{2x^2}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

وبعد ذلك نقوم بتوحيد المقامات

$$2x^2 = A(x-1)^3 + B(x+1)(x-1)^2 +$$
$$+ C(x+1)(x-1) + D(x+1)$$

وبمساواة المعاملات

X^3: $0 = A + B$ (1)

X^2: $2 = +3A - B + C$ (2)

X^1: $0 = +3A - B + D$ (3)

الحد المطلق: $4 = -A + B - C + D$ (4)

بجمع المعادلة (2) و(4) ينتج

$$4 = -4A + D$$

ثم بجمع المعادلة (1) و(3) ينتج

$$0 = 4A + D$$

بحل هاتين المعادلتان ينتج أن A = -2 وبالتعويض ينتج D = 2 وبالتعويض في (1) ينتج B =1/2 والتعويض في (2) ينتج C = 1

ويكون الحل النهائي

$$\frac{2x^2}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{-1/2}{(x+1)} + \frac{1/2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3}$$

• الحالة الثالثة:

إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الثانية الغير قابلـة للتحليـل تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{F(x)}{(x^2+ax+b)(x^2+c)..(x^2+d)} =$$

$$=\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)}+\frac{Cx+D}{(x^2+c)}+...+\frac{Nx+M}{(x^2+d)}$$

وبعد ذلك نتبع نفس الخطوات المذكورة في الحالة الأولى.

مثال 5 :

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}$$

الحل:

- أولا واضح أن درجة البسط أقل من درجة المقام:
- ثانيا المقام يحتوي على معادلة من الدرجة الثانية غير قابلة للتحليـل وهناك دمج بين الحالة الأولى والثالثة ويكون الحل كما يلي:

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

وبتوحيد المقامات ينتج أن

$$x^2+15 = A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)$$

وبمساواة المعاملات

X^2: $1 = A + B$

X^1: $0 = 2A - B + C$

الحد المطلق: $15 = 5A - C$

بجمع الثلاث معادلات ينتج أن $A = 2$ وبالتعويض في المعادلة الأولى والثالثة ينتج أن $B=-1$, $C=-5$

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{2}{x-1} - \frac{x+5}{x^2+2x+5}$$

• الحالة الرابعة:

- إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الثانية الغير قابلة للتحليل ومكررة تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{f(x)}{(x^2+ax+b)^n(x^2+c)^m} =$$

$$= \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)} + \frac{Cx+D}{(x^2+ax+b)^2} + \ldots$$

$$+ \frac{Nx+M}{(x^2+ax+b)^n} + \ldots$$

وبعد ذلك نتبع نفس الخطوات المذكورة في الحالة الأولى.

مثال6 :

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}$$

الحل:

أولا: درجة البسط أقل من درجة المقام.

ثانيا: يوجد معادلة تربيعية غير قابلة للتحليل مكرر أي دمج بين الحالـة الأولى والرابعة.

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

وبتوحيد المقامات ينتج أن

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x)(x^2+1) + \\ + (Dx+E)(x)$$

وبمساواة المعاملات:

X^4: $0 = A + B$ (1)

X^3: $0 = C$ (2)

X^2: $0 = 2A + B + D$ (3)

X^1: $0 = C + E$ (4)

الحد المطلق X^0: $1 = A$ (5)

من المعادلة (2) و(4) نستنتج أن $C = E = 0$

ومن المعادلة (5) نستنتج أن $A = 1$

وبالتعويض في المعادلة (1) ينتج $B = -1$

وبالتعويض في المعادلة (3) ينتج $D = -1$

وعلى ذلك يكون الكسر الأساسي هو:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

* * *

تمارين

حلل كلا من الكسور التالية:

1) $\dfrac{2x+3}{(x+1)(x-3)}$ 2) $\dfrac{2x^2+10x-2}{(x+1)(x^2-9)}$

3) $\dfrac{4x^2+2x+4}{(2x+3)^3}$ 4) $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x-4)}$

5) $\dfrac{x^2+2x+5}{(2x^2+6x+7)^2}$

6) أوجد مجموع من الحدود

$$\frac{1}{1(5)}+\frac{1}{5(9)}+\frac{1}{9(12)}+\ldots\ldots$$

ملاحظة:

(في هذا المثال نكتب الصورة العامة لهذه المتسلسلة على صورة $\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ ثم نقوم بتحليل هذا باستخدام الكسور الجزئية)

* * *