الباب السادس

البرمجة الخطية

Linear Programming

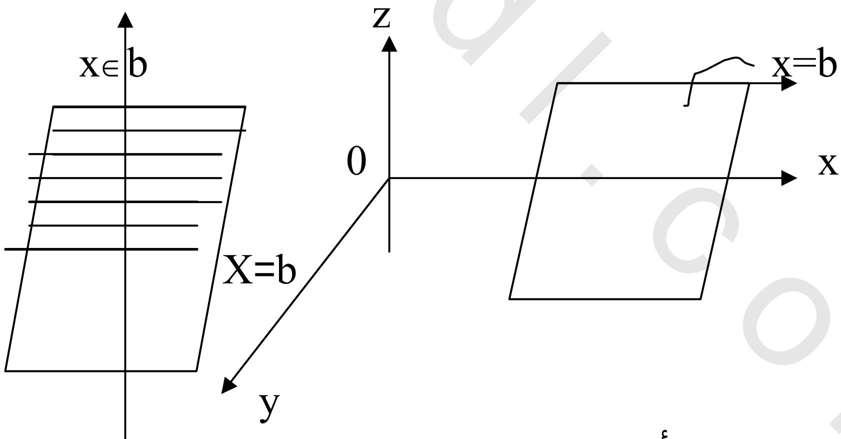
تعريف:

هى أسلوب رياضي لحل المشاكل التي يمكن صياغتها في شكل خطـي عن طريق المتباينات.

المستويات والمتباينات

Planes& Inequalities

المتساوية $x = b$ حيث $b \in R$ (b قيمة ثابتة) تمثل نقطة أو عدد b في فراغ ذو بعد واحد أي على خط مستقيم للأعداد الحقيقية. بينما تمثـل مستقيما يوازي محور y في فراغ ذي بعدين (أي مـستوي xy) ذي ثلاثة أبعاد. b 0



المتباينة $b>x$ أو $x<b$

حيث $b \in R$ تمثل فئة جميع النقط الواقعة علـى يـسار النقطـة (أو

المستقيم أو المستوى) حسب طبيعة الفراغ.

المتباينة

$x \geq b$ أو $x \leq b$ حيث $b \in R$ تمثل فئة جميع النقط الواقعة على $x = b$ وعلى يسارها (انظر الشكل).

بالمثل المتساوية التي من الدرجة الأولى

$$4x + 3y = 120 \qquad (1)$$

تمثل خطا مستقيما في فراغ ذي بعدين (مـستوى) ويمـر بـالنقطتين (30,0), (0,40) وبمعنى آخر فهي تمثل فئة جميع النقط (x,y) الواقعة على المستقيم (1) أي تحقق متساويته.

المستقيم (1) يقسم المستوى xy إلى ثلاث مناطق؛ الأولى منهـا هـي المستقيم نفسه، والثانية هي نصف المستوى الذي يحتـوي علـى نقطـة الأصل (0,0) وجميع النقط (x,y) التي تحقق المتباينة

$$4x + 3y < 120$$

المتباينتان:

$$4x + 3y \leq 120$$

تمثلان فئة جميع النقط في المنطقة الأولى والثانية.

المتباينتان:

$$4x + 3y \geq 120$$

تمثلان فئة جميع النقط الواقعة في المنطقتين الأولى والثالثـة. وبمـا أن المستويات

$$4\lambda x + 3\lambda y \leq 120\lambda$$

لكل λ تمثل نفس المستقيم **4x + 3y = 120**

فان المتباينات

$$4\lambda x + 3\lambda y = 120\lambda$$

هما بعينهما المتبايناتان **4x + 3y ≤120**

إذا كانت λ موجبة وهي نفسها المتبايناتان

$$4\lambda x + 3\lambda y \geq 120\lambda$$

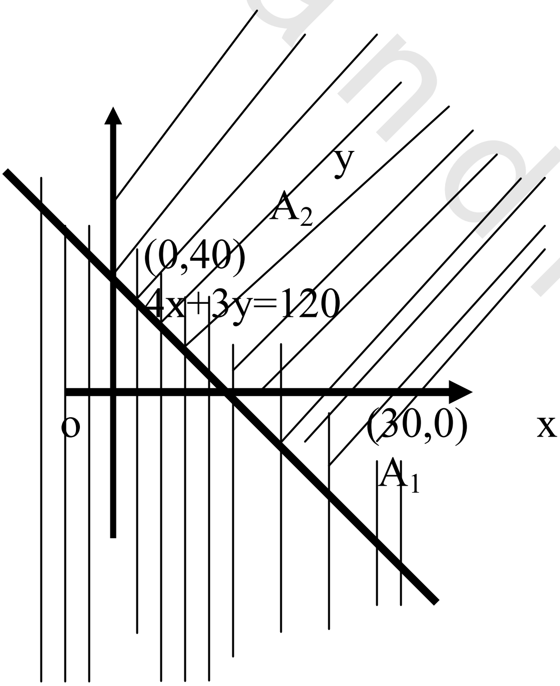
إذا كانت λ سالبة.

- فئة جميع النقط

4x + 3y ≤120

ويمكن كتابتها على الصورة:

$$A_1 = \{p(x, y) : 4x + 3y - 120 \leq 0 \}$$



والفئة $4x+3y\geq 120$

يمكن كتابتها على الصورة

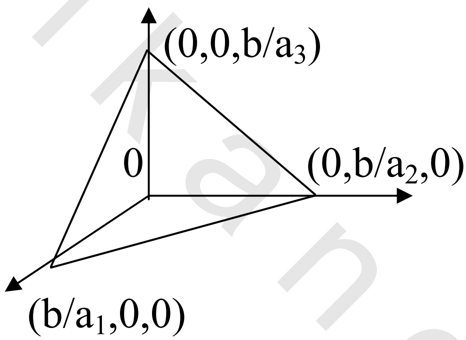
$$A_2=\{p(x,y):4x+3y-120\geq 0\}$$

وعلى العموم فئة جميع النقط p(x,y) في الفراغ ذي n بعد والتي

تحقق المتباينتين $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \qquad x_{i\leq b}$

حيث a_i , b ثوابت ليسوا جميعا أصفار.

يمكن كتابتها بالصورة:



$$A_n=\{p(x_1,x_2,...,x_n):a_1x_1+a_2x_2+..$$
$$...+a_nx_n-b\leq 0\}$$

عند n=1

$$A_1=\{p(x_1):a_1x_1-b\leq 0\}$$

عند n=2

$$A_2=\{p(x_1,x_2):a_1x_1+a_2x_2-b\leq 0\}$$

عند n=3

$$A_3=\{p(x_1,x_2,x_3):a_1x_1+a_2x_2+$$
$$+a_3x_3-b\leq 0\}$$

عند n=n

$$A_n = \{p(x_1, x_2, ..., x_n) : a_1x_1 + a_2x_2 + ..$$
$$... + a_nx_n - b \le 0 \}$$

a_1 ,a_2 ,a_3 لست جميعها أصفار وتمثل جميع النقط الواقعة في نصف الفراغ ذى الثلاثة أبعاد وعلى المستوى المنصف للفراغ الذي يحقـق المتباينتان $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \le b$

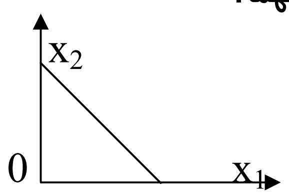
أمثلة على المتباينات الخطية والغير خطية في متغيرين

خطوات رسم المتباينات:

1- تحويل المتباينة إلى معادلة وذلك باستخدام علامة التباين وتحويلها إلى علامة (=) فمثلا لو ادينا المتباينة:

2- حل المتباينة وذلك بوضع $x_1=0$ وإيجاد قيمة x_2 ثم وضع $x_2=0$ وإيجاد قيمة x_1 وبذلك يمكن الحصول على نقطتين

3- يتم تمثيل النقاط أحدهما على المحور الأفقي x_1 ، والأخرى على المحور الرأسي x_2 ثم توصيل الخط بينهما.



4- التظليل أعلى الخط إذا كانت المتباينة أكبر من .

التظليل أسفل الخط إذا كانت المتباينة أقل من.

مثال:

ارسم المتباينة الآتية:

$$2x_1 + 4x_2 \le 16, \qquad x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0,$$

الحل:

1- تحويل المتباينة إلى معادلة

$$2x_1 + 4x_2 = 16$$

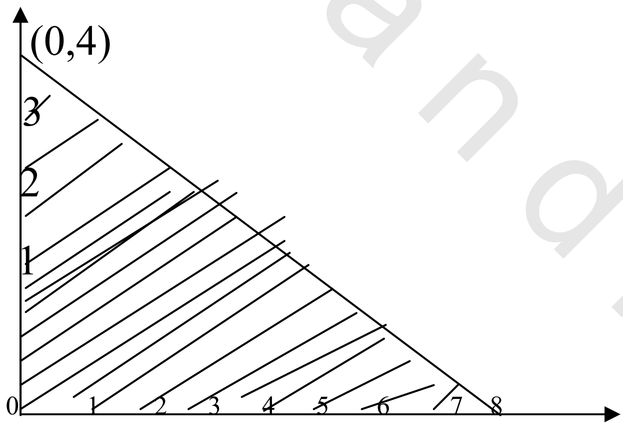
2- وضع $x_1 = 0$ وإيجاد قيمة x_2

$$2x_0 + 4x_2 = 16 \Rightarrow x_2 = \frac{16}{4} = 4 \qquad (0.4)$$

ثم وضع $x_2 = 0$ وإيجاد قيمة x_1

$$2x_1 = 16 \Rightarrow x_1 = 8$$

إذن النقطة الثانية هي (0,8)



3- رسم المعادلة

4- التظليل لأسفل

لأن المتباينة أقل من

(8,6)

مثال:

اجعل المتباينة $2x_1 + 3x_2$ أقل ما يمكن بشرط

$$x_1 + 2x_2 \le 8, \qquad x_1 + x_2 \ge 2,$$

$$x_1 \ge 1, \qquad x_2 \ge 0$$

الحل:

1- رسم المتباينات ثم تحويلها ثم حلها ثم الرسم:

$$x_1 + 2x_2 = 8, \qquad\qquad x_1 + x_2 = 2$$

Put

$x_1 = 0 \Rightarrow at \quad x_1 = 0 \Rightarrow$

$_2 = 0 \Rightarrow (0,4) \qquad x_2 = 0 \Rightarrow (0,2)$

$at \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8$

$x_2 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 2$

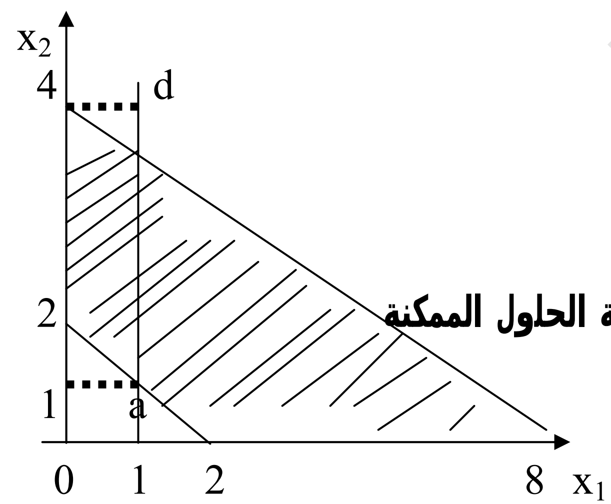
إذن النقطة الثانية $(2,0)$ النقطة الثانية $(8,0)$

إذن $x_1 = 1$ ترسم مباشرة بعمل خط حراسي عند (1) على المحور الأفقي موازيا للمحور الرأسي.

- رسم المتباينات على نفس الشكل:

دعنا نضع النقاط التالية:

$$a \rightarrow (1,1), b \rightarrow (2,0), c \rightarrow (8,0), d \rightarrow (1,3)$$



At a=(1,1) → 2(1)+3(1)=5

At b= (2,0) → 2(2)+3(0) = 4

At c= (8,0) → 2(8)+3(0) = 16

At d= (1,3.5) → 2(1) + 3(3.5) = 12.5

إذن نقطة الحل الأمثل هي النقطة (2,0) b لأنها أعطت أقل قيمة للدالة 4 والتي كانت أقل ما يمكن.

مثال: اجعل المتباينة $4x_1 + 6x_2$

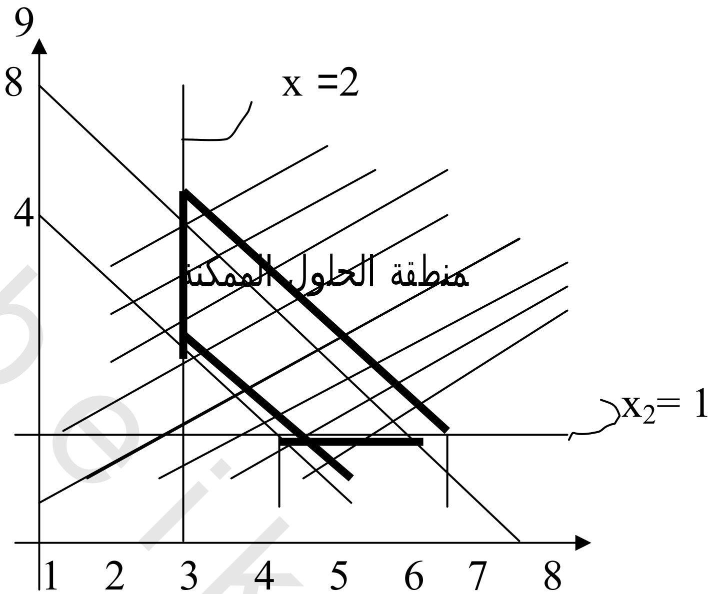
أعظم ما يمكن بشرط أن:

$$9x_1 + 8x_2 \le 72,$$
$$7x_1 + 5x_2 \le 35 \quad x_1 \ge 2 \quad x_2 \ge 1,$$

الحل:

$$9x_1 + 8x_2 \le 72, \qquad 7x_1 + 5x_2 = 35$$
$$at \qquad x_1 = 0, \Rightarrow \quad 8x_2 = 72$$
$$at \qquad x_1 = 0, \Rightarrow \quad 5x_2 = 35$$
$$\therefore x_2 = 0, \Rightarrow (0,9), \quad x_2 = 7 \Rightarrow (0,7)$$
$$at \qquad x_2 = 0, \Rightarrow 9x_1 = 72, \quad at\, x_2 = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$x_1 = 8 \quad (8,0), 7x_1 = 35 \quad \therefore x_1 = 5(5,0)$$

إذن $x_1 = 2$ لاتحل وترسم مباشرة من (2) على المحـور الأفقـي، $x_2 = 1$ بخط رأسي من (1) على المحور الرأسي



a(4.2,1),b(7,1),c(2,6.5),d(2,4)

a(4.2,1)) → 4(4.2) + 6(1) = 22.8

At b (7,1)→ 4(7)+6(1)= 34

At c (2,6.5)) → 4(2)+6(6.5)=47

At d (2,4)→ 4(2)+ 6(4) = 32

إذن نقطة الحل الأمثل هي النقطة c(2,6.5) لأنها أعطت أكبر قيمة للدالة (47).

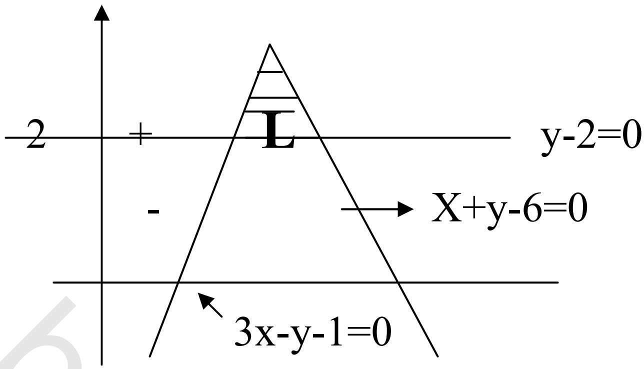
مثال: حل المتباينة التالية موضحا إجابتك برسم مناسب

$$A_1 = \{p(x,y) : 3x - y \prec 1\},$$

$$A_2 = \{p(x,y) : x + y \leq 6\},$$

$$A_3 = \{p(x,y) : y \succ 2\}$$

الحل: التقاطع $L = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$



ويمثل المنطقة المظللة

$$L=\{p(x,y)::3x-y\succ 1, x+y\leq 6, y-2\succ 0\}$$

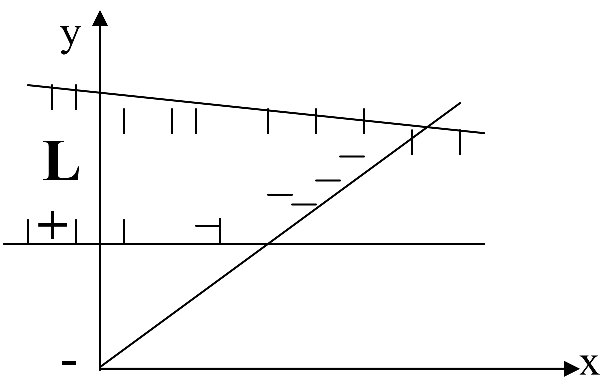
مثال:

حل المتبينات الآتية مع الإيضاح برسم مناسب

$$A_1=\{p(x,y):x-2y-6\leq 0\},$$
$$A_2=\{p(x,y):x+y\prec 6\},$$
$$A_3=\{p(x,y):y\succ 1\}$$

الحل:

التقاطع يعطينا المنطقة L اللانهائية.

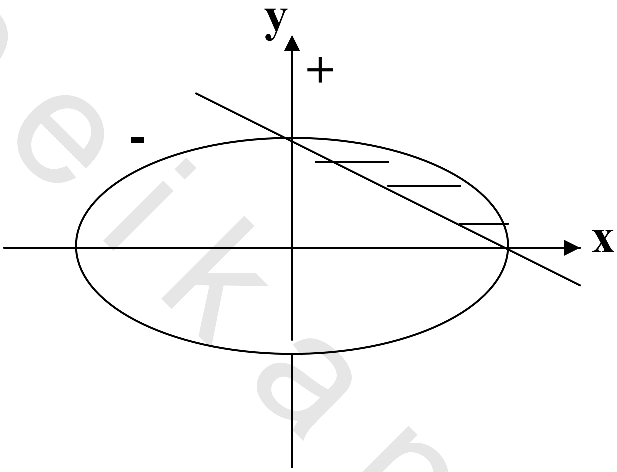


مثال:

حل المتباينات التالية مع إيضاح بياني مناسب

$$A_1 = \{p(x,y): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \prec 1 \},$$

$$A \ = \{p(x,y): x + y \succ 4 \}.$$



الحل:

التقاطع

$$L = A_1 \bigcap A_2$$

يعطينا المنطقة المظللة.

بعض القواعد في المتباينات

إذا كان

1) **a> b, a> 0, b> 0, c> 0, d< 0, m>0**

فإن

2) a+c> b+c, a-c >b-c b-c . .(1)
a.c> bc , a/c> b/c . (2)

أي أن جمع وطرح وضرب وقسمة كمية موجبة في الطرفين لا تغير إشارة التباين.

Ad< bd , a/d < b/d (3)

c/a< c/b (4)

لأن a/ab >b/ab اى 1/b > 1/a

$a^m > b^m$ $a^m > b^m$

أي ضرب أو قسمة أو رفع لأس سالب يغير إشارة التباين.

(6) أما إذا كانت a,b,c كلها موجبة وكان

a< c , b< d

فإن **a/b< c/d**

(7) لكل عدد حقيقي a نعرف القيمة المطلقة

|a| (أو القيمة العددية) كما يلي

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a \prec 0 \end{cases}$$

مثال:

$$|\pm 2| = 2, \quad |0| = 0$$

والآن إذا كان العددين a,b حقيقيين ، b>0 فإن

$$-|a| = |a|,$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$|a| \prec b \Leftrightarrow -b \prec a \prec b,$$

$$|a| \leq \quad \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$$

مثال: حل المتباينتين ووضح بيانيا

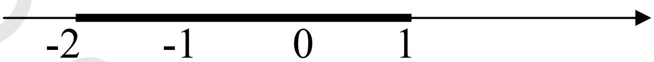
$$3x+3 \succ -1, \qquad 4-3x \succ 2$$

$$3x+3 \succ -1 \Rightarrow 2x \succ -4 \Rightarrow x \succ -2$$

$$4-3x \succ 2 \Rightarrow 3x \prec 2 \Rightarrow x \prec \frac{2}{3}$$

أي أن الحل يمثل بالفئة

$$\{x \in R : -2 \prec x \prec 2/3\}$$



المعنى الهندسي:

أ- $|a-b|$ تمثل المسافة بين القطتين $(a,0),(b,0)$

ب- حل المتباينة $|x-a| \prec b$ يعني هندسيا النقط x

حيث المسافة بينها وبين a أقل من b لأن

$$|x-a| \prec b \Leftrightarrow -b \prec x-a \prec b$$

$$\Leftrightarrow a-b \prec x \prec a+b$$

ج- إذا كان $a_1, a_2, \dots, a_n$ أعدادا حقيقية فإن

$$|\ a_1, a_2, \dots, a_n \ | \le |a_1| + |a_2| \dots + |a_n|$$

مثال: أوجد العدد الحقيقي الموجب M بحيث يكون

$$|x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5| \prec M$$

لجميع قيم x التي تقع في الفترة التالية $-2 \prec x \prec 2$

الحل:

$$|x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5| \le$$

$$|x^4| + |-2x^3| + |3x^2| + |-4x| + 5 =$$

$$= |x|^4 + 2|x|^3 + 3|x|^2 + 4|x| + 5 \prec$$

$$\prec 2^4 + 2.2^3 + 3.2^2 + 4.2 + 5 = 57$$

وبالتالي يمكن اعتبار أن العدد M=57

مثال:

حل المتباينة

$$2x^5 - 3x^4 \succ -x^3$$

لدينا

$$2x^5 - 3x^4 + x^3 \succ 0$$

$$2x^3(x-1)(x-\frac{1}{2}) \succ 0$$

وينعدم الطرف الأيسر(مثلا L) عند القيم

x=0,1/2,1

وباعتبار قيم أخرى للمتغير x بين القيم السابقة نجد أن:

x	2	3/4	1/4	1-
إشارة L	+	-	+	-

أي أن:

$$\frac{1}{2} \prec x \prec 1 \quad L \succ 0, \quad x \succ 1$$

$$x \prec 1 \quad L \succ 0, \quad 0 \prec x \prec \frac{1}{2}$$

$$\therefore 2x^5 - 3x^4 \succ -x^3 \Leftrightarrow$$

$$x \succ 1$$

$$or \quad 0 \prec x \prec 1/2$$

ويمكن تمثيل الحل بالفئة التالية

$$\{x \in R : 0 \prec x \prec 1/2, x \succ 1\}$$

وكذلك يمكن تمثيله بيانيا كما يلي

- - -   - -   +   ++   +++

$\longrightarrow$

(-)   0   (+)   1/2   (-)   (1)   (+)

مثال:

حل المتباينة

$$\frac{210}{3x-2} - \frac{50}{x}$$

الحل:

لدينا

$$\frac{210}{3x-2} - \frac{50}{x} \prec 0 \Leftrightarrow \frac{60x+100}{x(3x-2)} \prec 0 \qquad (1)$$

وينعدم البسط عند $x = -5/3$ وينعدم المقام عند القيم $x = 0,\ x = 2/3$

x	-2	-1	1/2	1
إشارة الطرف الأيسر (1)	-	+	-	+

أي أن:

$$\frac{210}{3x-2} \prec \frac{50}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad x < -\frac{5}{3}, or \quad 0 < x < \frac{2}{3}$$

ويمكن تمثيل الحل بالفئة التالية

$$\{x \in R : x \prec -5/3, 0 < x < 2/3\}$$

وكذلك يمكن تمثيله بيانيا كما يلي

وكتطبيق على المتباينات سندرس:

البرمجة الخطية Linear Programming

وتهتم بحل نوع خاص جدا من المسائل والتي تكون العلاقة بين متغيراتها **خطية** للدالة المراد إيجاد النهاية العظمى والصغرى لها وكذلك للـشروط الواقعة على تلك الدالة.

وسوف نعتبر هنا في هذا الجزء المسائل المحتوية على متغيريين فقـط ويمكن إيضاح الحل بيانيا لهذا النوع من المسائل.

ملحوظة مهمة:

مع ملاحظة أننا سبق وأن درسنا الحل الجبري كما في الأمثلة السابقة

مثال:

أوجد الحل والإيضاح الهندسي لمسألة البرمجة الخطية التالية:

$$3x + 5y \geq 15, \qquad 5x + 2y \leq 10, x,$$

$$y \geq 0, \qquad \max. f(x, y) = 5x + 3y$$

أي أوجد قيم (x,y) التي تحقق المتباينات الثلاثة المعطاة وتعطي نهايـة

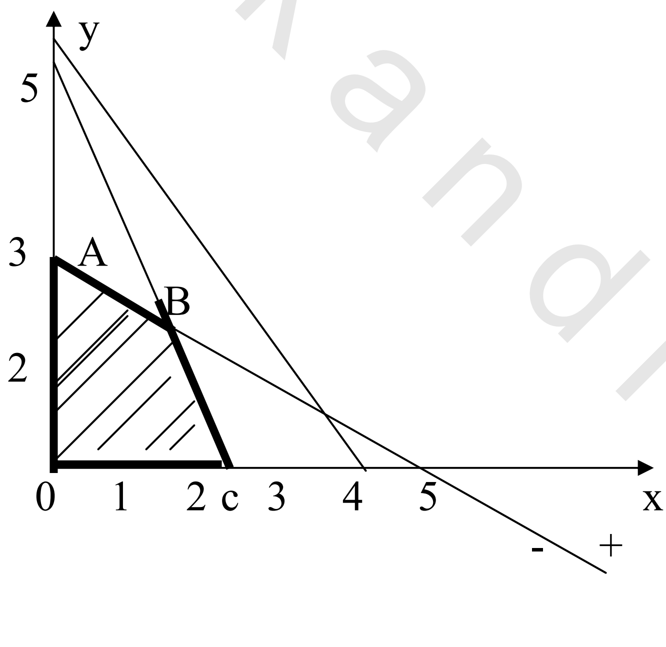
عظمى للدالة f .

الحل: سوف نرسم أولا المنطقة التي تتحقق بالمتباينات المعلومة وهـي المظللة في الشكل التالي.

ملاحظة: اتبع نفس الخطوات السابقة للحصول على الرسم المعطى.

والآن لأي قيمة ثابتة للمتغير f نرى أن 5x+3y = f تمثل خطا مستقيما بحيث أن أى نقطة عليه تعطي القيمة f وبتغير قيمة f نحصل على خط آخر موازي للخط السابق، وهكذا لأن ميل أي خط مستقيم منها يكون على الصورة: $f = c_1 x + c_2 y$

ويساوي القيمة $-c_1/c_2$ وهو لا يتوقف على الثابت وهذا الميل يساوي3/5-



ونود الآن معرفة المستقيم الذي يعطينا أكبر قيمة f والذي تكون إحـدى نقطة في المنطقة المظللة أو حدودها ويتحقق ذلك إذا مر المستقيم

F = 5 x + 3 y

بالرأس B للمضلع OABC فنجد أن

$$f_{\max.} = 12.37$$

حيث إن القيمة B هي B(10.53, 3.368)

يلاحظ هنا أن القيمة العددية للمقدار $c_1 x + c_2 y$

تتناسب طرديا مع طول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم

$$f(cons\tan t) = c_1 x + c_2 y$$

لأن الجزء المقطوع يساوي f / c_2 أي يتناسب مع f ومن ثم يمكن تحليليا إيجاد أن القيم التالية صحيحة:

$$f(0) = 0,..f(c) = 10,..f(a) = 9,..f(b)12.37$$

نرى أن النقطة B تعطي نهاية عظمى، النقطة o تعطي نهاية صغرى.

مثال:

أوجد النهاية العظمى للدالة $(2.5x + y)$

إذا حققت (x, y) المتباينات

$$3x + 5y \leq 15,..5x + 2y \leq 10,..x \geq 0,..y \geq 0$$

الحل:

مثل المثال السابق (انظر الشكل السابق) ، ولكننا نرى أن المستقيم

$$2.5x + y = f(cons\tan t)$$

يمكن أن ينطبق بتمامه على الضلع BC لأنه يوازيه وواضح أنه في هذا الوضع نحصل على نهاية عظمى للدالة أي أن أي نقطة علـى الـضلع BC تعطينا نهاية عظمى وبذلك يكون لدينا عدد لا نهائي من الحلـول، ويلاحظ أن

$$f(c) = 5,..f(B) = 5,..f(A) = 3$$

مثال:

أوجد النهاية الصغرى للدالة

$$2x+3y$$

إذا حققت x,y المتباينات آلاتية:

$$2x+3y \le 4, \qquad 6x+2y \ge 8,$$

$$x+5y \ge 4, \qquad x \le 3, \qquad y \le 3$$

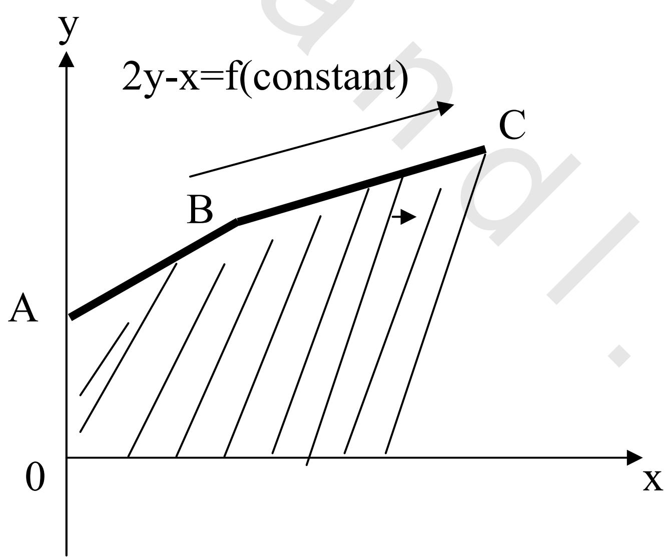
الحل:

انظر الشكل الآتي فنرى أن

$$2x+3y = f\,(cons\tan t)$$

يوازي $-0.5x+y=2$ وكذلك $f_{\max.}=4$

لأي نقطة على المستقيم BC الذي يمتد إلى ما لا نهاية.



* * *

تمارين

أوجد حل المتباينات الآتية:

1) $x^2 - x - 12 \prec 0$ 2) $2x^2 + 6x + 2 \succ 0$

3) $6x^5 - x^4 \prec x^3$ 4) $x^3 \prec x$

5) $x^3 + x^2 \prec x + 2$ 6) $\frac{2x}{3} - \frac{x^2 - 3}{2} + \frac{1}{2} \prec \frac{x}{6}$

7) $\frac{10}{6 - 8x} \prec \frac{5x - 2}{5x}$

أوجد الحل والإيضاح الهندسي لمسائل البرمجة الخطية التالية:

8) $2x + 3y \le 6,..x + 4y \le 4,..$
$x, y \ge 0, MaxZ = x + 1.5y$

9) $5x + 10y \le 50,..x + y \ge 1,..y \le 4$
$x, y \ge 0, MinW = 2x + y$

10) $x - y \ge 0,..x - 5y \ge -5,.$
$x, y \ge 0, MinF = 2x - 10y$

11) $x + y \le 2,.. - x - 5y \ge -10,..$
$x, y \ge 0, MaxW = -5y$

* * *