الباب الثامن

خواص المصفوفات

Properties of Matrices

المصفوفات: هي مجموعة من الأرقام بترتيب له دلالة معينـة مكتوبـة على شكل مستطيل داخل قوسين

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

في شكل (1) يسمى هذا الشكل المصفوفة وتسمى الأرقام *a, b, c, d* عناصر المصفوفة (elements) والخطوط الأفقية تسمى المـصفوفة الموجبة (rows or row vectors) والخطوط الرأسية تسمى الأعمـدة الموجبة (columns or column vectors)

المصفوفات ذات m صفوف ، n أعمدة يطلق عليها $(m\times n)$ matrix (*m* by *n*) matrics or . يعبر عن المصفوفة السابقة بـ A or (a_{ij}) حيث a_{ij} هو العنصر العام الموجود في الصف رقم i والعمود j في شكل (2) يحتوي على عمود واحد فقط يـسمى (column vector or column matrix) . في شكل (3) يحتوي على صف واحد فقط ويسمى (row vector or row matrix) .

Square matrix المصفوفة المربعة

هى المصفوفة التي عدد أعمدتها يساوي عدد صفوفها ورتبة المصفوفة هو عدد الصفوف أو الأعمدة .

ويسمى $(a_{11}, a_{22}....., a_{nn})$ القطر الرئيسي (principle diagonal) .

تعريف : تساوي مصفوفتين Equation of matrices

يكون $A = B$ أي $(a_{ij}) = (h_{ij})$ إذا كـان A, B لهمـا نفـس عـدد الصفوف وعدد الأعمدة .

وكان $a_{jk} = b_{jk}$ for $j = 1,2,3,....,m, k = 1,2,3,....,n$

Addition of matrices جمع المصفوفات

جميع المصفوفات يعرف فقط للمصفوفات التي لها نفس عدد الصفوف ونفس عدد الأعمدة فإذا كان

$A = (a_{jk})mB = (b_{jk}), C = (C_{jk})$

وكان كل من المصفوفات A, B, C matrix $(m \times n)$

$C_{jk} = a_{jk} + b_{jk}$ for $j = 1,2,3,....,m, k = 1,2,3,....,n$

فإنه يمكن كتابة $C = A + B$

لاحظ أننا نحصل $A + B$ بجمع العناصر المناظرة للمصفوفين A, B

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Zero matrix المصفوفة الصفرية

هي مصفوفة كل عناصرها تساوي صفر

$$a_{ij} = 0(0,0,0), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تعريف :

يرمز بها بالرمز A - وهي مصفوفة نحصل عليها من ضـرب كـل عنصر من عناصر A في (1-) أي

$$A=(a_{ij})\Rightarrow -(A)=(-a_{ij})$$

وتسمى المصفوفة $-A$ المعكوس الجمعي للمصفوفة A .

من التعريفات السابقة نجد أن خواص جمع المصفوفات لها نفس خواص جمع الأعداد

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B – C) = A + B + C$

$A + 0 = A$

$A + (-A) = 6$

difference of two matrices طرح المصفوفات

إذا كان $A=(a_{ij}),\quad B=(b_{ij}),\quad D=(d_{ij})$

وكان كل من المصفوفات الثلاث ذات نظم matrix $(m\times n)$

$d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\quad \text{for}\quad j=1,2,........,m$

$i = 1,2,………,n$

فإنه يمكن كتابة $D=A-B$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow A-B\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$$

ضرب المصفوفة في عنصر

ليكن A مصفوفة وليكن العدد λ فيكون

$$A\lambda=\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{1} & \lambda a_{12} & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{2n}\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

$$ijA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow A+A2A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & -2\end{pmatrix}$$

Transpose of a matrix A^T المصفوفة المبدولة

إذا كان $A=(a_{ij})$ matrix $(m\times n)$ فإن A^T $(in\times m$ matrix)

$$A^T=(a_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & a_{m2}\\ a_{in} & a_{2n} & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 3 & 8 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

المصفوفة المتماثلة والمتماثلة عكسيا

Symmetric and skew symmetric matrices

يقال للمصفوفة المربعة $A=(a_{ij})$ إنها متماثلة symmetric إذا كان $A^T = A$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad , \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

ويقال للمصفوفة المربعة $A=(a_{ij})$ إنها skew symmetric إذا كان $A^T = A$

$$a_{ij} = - a_{ji} \quad , \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 6\\ 4 & 6 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 6\\ 4 & 6 & 5\end{pmatrix}=A$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -8\\ -3 & 0 & -1\\ 8 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}0 & -3 & 8\\ 3 & 0 & 1\\ -8 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

مصفوفة متماثلة عكسيا Skew symmetric matrix

المصفوفة المثلية Triangular matrix

المصفوفة المربعة $A=(a_{ij})$ التي عناصرها أعلى القطـر الرئيـسي أو أسفله كلها أصفارا .

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

مصفوفة مثلثية عليا   مصفوفة مثلثية سفلى

المصفوفة القطرية The diagonal matrix

المصفوفة المربعة $A=(a_{ij})$ التي عناصرها أعلى القطر، أسفل القطـر كلها تساوي أصفارا تسمى diagonal matrix

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

مصفوفة الوحدة I ≡ the unit matrix

$$I, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

هى مصفوفة قطرية كل عناصر قطرها تساوي الوحدة .

ضرب المصفوفات Multiplication of Matrices

لدينا مصفوفات $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{jk}]$

تعرف عملية الضرب AB بشرط معين لابد من توافره وهو "عـدد أعمدة المصفوفة الأولى A يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية B" .

لذلك نفرض أن المصفوفة A من نوع $m\times n$ وعليـه، لكـي يتحقـق الشرط المذكور يجب أن تكون عدد الصفوف في B مساوية العـدد n (عند الأعمدة في A) أي أن المصفوفة B من نوع $n\times p$.

بالنسبة للمصفوفة $A=[a_{ij}]$ وهي من نوع $m\times n$ نجد أن

$$i = 1, 2, \ldots\ldots, m \quad , \quad j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

أما بالنسبة للمصفوفة $B=[b_{jk}]$ وهي من نوع $n\times p$ نجد أن

$$j = 1, 2, \ldots\ldots, n \quad , \quad k = 1, 2, \ldots\ldots, p$$

تعرف المصفوفة AB بالمصفوفة $C=[c_{ik}]$

$$C_{ik} = a_{i1}\times b_{1k} + a_{i2}\times b_{2k} + \ldots\ldots + a_{in}\times b_{nk}$$

هذا العنصر يقع في الصنف i والعمود k في المصفوفة c .

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & = & B \\ m\times n & \leftrightarrow & n\times p & & m\times p \\ \downarrow & & \downarrow & & \end{array}$$

عدد الأعمدة في A عدد الصفوف في B

مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 19 & 22 \end{pmatrix}$$

خواص ضرب المصفوفات

Properties of Matrices Multiplication

أولا :

ضرب المصفوفات خاضع لقوانين التنسيق (Associated lows) وقوانين التوزيع (distributive lows) بالنسبة لجمع المصفوفات

(i) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

(ii) $(A+B)C = AC + BC$

$C(A+B) = CA + CB$

مع مراعاة أن عملية الضرب ممكنة .

ثانيا :

هل حاصل ضرب المصفوفات إبدالي أو بعبارة أخرى

$AB = BA$ بالطبع لا لأسباب كثيرة .

1- ليس من الممكن أن نكون AB , BA في الوقت نفسه فمثلاً إذا كانت A من نوع 2×3 ، B من نوع 3×5 فإنه يمكن تكوين AB ، لايمكن تكوين BA .

2- حتى في الحالات التي يمكن تكوين فيها AB , BA فليس من الضرورى أن يكون AB , BA من نفس النوع .

3- أيضا إذا أمكن تكوين المصفوفين AB , BA وكأننا من نفس النوع عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \&$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ثالثا: The cancellation low

غير صحيح على العموم

أي أنه إذا كان $AB = 0$ فإنه ليس من الضروري أن تكون A أو B مساوية للمصفوفة الصفرية .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

رابعا :

لأي مصفوفة مربعة A من نوع $n\times n$

$$A\,I = A \ , \ I\,A = A$$

حيث I هي مصفوفة الوحدة من نفس النوع .

خامسا :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

القوى الصحيحة الموجبة للمصفوفة المربعة

نفرض أنه لدينا مصفوفة مربعة A . *تعرف المصفوفة* A^2 هكذا

وهكذا $A^2 = A.A \quad , \quad A^3 = A^2 A = (A, A).A$

قاعدة لأي مصفوفة مربعة A

$$A^m.A^n = A^{m+n} = A^n.A^m$$

$$(A^m)^n = A^{mn}$$

$A^2.A^3 = A^5 \quad , \quad (A^2)^3 = A^6$

فمثلاً : القوى الصحيحة السالبة للمصفوفة (غير المنعزلة)

يقال للمصفوفة المربعة A إنها مصفوفة غير منعزلة (non – singular matrix) إذا كان محددا

$\det A = |A| \neq 0$

أما إذا كان $|A| = 0$ تسمى منعزلة (singular matrix)

لتعريف المصفوفة A^{-1} يلزمنا التعريف الآتي :

المصفوفة المرتبطة adjoint matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ولنفرض أن A_{ij} يرمز للعامل المرافق (co-factor) للعنصر a_{ij} في المحدد $|A|$. نكون مصفوفة أخرى تعتمد عناصرها على هذه العوامل المرافقة هكذا .

1- يستبدل كل عنصر بالعامل المرافق له .

2- نوجد محور المصفوفة (transpose) وذلك بجعل المصفوفة أعمدة تسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة المرتبطة للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز a_{dj} (وهذا الرمز هو اختصار adjoint of A)

تعريف :

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت هناك مصفوفة B بحيث يكون $AB = I = BA$ حيث I هي وحدة المصفوفات يقال للمصفوفة B إنها معكوس للمصفوفة A .

1- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ adj A

2- معكوس أي مصفوفة مربعة Ai (في حالة وجوده) وحيد .

3- الشرط اللازم والكافي لكي يوجد للمصفوفة المربعة معكوس أن تكون غير منعزلة $|A| \neq 0$

4- معكوس حاصل ضرب مصفوفتين هو حاصل ضرب معكوسى المصفوفتين بالترتيب المخالف $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

مثال:

إذا كان $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ أوجد قيمة A^{-1}

$$|A| = 14 \quad , \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال:

إذا كان $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ أوجد A^{-1} ثم حقق أن

$$A\,A^{-1} = I = A^{-1}A$$

لحساب A^{-1} نتأكد أولاً أن A مصفوفة غير منعزلة $(|A| \neq 0)$

$$|A| = -12 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-12} adjA = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -2 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -2 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

قاعدة :

إيجاد معكوس المصفوفة التي من نوع $2\times 2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1- نستبدل عنصرى القطر الرئيسى (وهما a, d) أى كل منهما يحب مكان الآخر

2- نغير إشارتي العنصرين الأخرين وهما c , b

3- نقسم عناصر المصفوفة الناتجة على قيمة محددة A

مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=7, A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

حل المعادلات الآتية باستخدام معكوس المصفوفة A^{-1}

لتكن المعادلات الآتية

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 &= b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

أو بالاختصار $A\,X = b$ .... (1)

حيث

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

فإنه يمكن إثبات أن حل كل من المعادلات (1) هو

$$\underline{X} = A^{-1}\ \underline{b}$$

البرهان :

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \Rightarrow$$
$$I\,\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \qquad (A^{-1}A = I)$$
$$\underline{x} = A^{-=1}\underline{b} \qquad (I\,\underline{x} = \underline{x})$$

مثال:

حل المعادلتين الآتيتين باستخدام معكوس المصفوفة

$$3\,x_1\ -2\ x_2\ =\ 4$$
$$X_1 +\ 4\ x_2 = 6$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \underline{x} = A^{-1}\underline{b} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 28 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

فيكون حل المعادلتين هو $x_1 = 2,\ \ x_2 =\ 1$

مثال:

باستخدام معكوس المصفوفة أوجد حل المعادلات :

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \ = 2$$
$$x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 5$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \ \ = -3$$

يمكن كتابة المعادلات الثلاث على الصورة :

أو $A\,x = b$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{46}\begin{pmatrix} 13 & 3 & -17 \\ 2 & 4 & 8 \\ 11 & -1 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = x = A = A^{-1}b = \frac{1}{46}\begin{pmatrix} 13 & 3 & -17 \\ 2 & 4 & 8 \\ 11 & -1 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = -1$

المعادلة المميزة للمصفوفة (المربعة)

Characteristic Equation for the matrices

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ فاثبت أن $A^2 - 5\ A - 6\ \ I = 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 60 \\ 5 & 21 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = -5A - 6I = \begin{pmatrix} 16 & 60 \\ 5 & 21 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16\text{-}10\text{-}6 & 60\text{-}60 \\ 505 & 21\text{-}15\text{-}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

والآن تكون المصفوفة $A - \lambda\ I$ (حيث I *مصفوفة الوحدة* 2×2) ثم يكون محدد هذه المصفوفة كما يلي :

`

$$|\ A - \lambda\ I\ | = \begin{vmatrix} 2\text{-}\lambda & 12 \\ 1 & 3\text{-}\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 12$$

$$= \lambda^2 - 5\ \lambda - 6 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

تسمى كثيرة الحدود هذه بكثيرة الحدود المميزة للمصفوفة .

Characteristic polynomial $|\ A - \lambda\ I\ | = D(\lambda) = \det(\lambda)$

كما تسمى المعادلة الناتج

$\lambda 2-5\lambda-6=0$ ………………… (3)

بالمعادلة المميزة للمصفوفة characteristic equation of matrix

وتسمى جذور هذه المعادلة بالجذور المميزة للمصفوفة

Characteristic roots – eigen values $|\lambda-A\ I|=0$

وبمقارنة (1) & (3) نلاحظ أنه يمكن الحصول على المعادلة (1) من المعادلة (3) بوضع A بدلا من λ بوضع $6I$ بدلا من 6 . ويقال إن المصفوفة A تحقق المعادلة المميزة لها .

نظرية كايلي هاملتون:

كل مصفوفة مربعة A تحقق المعادلة المميزة لها .

نتيجة :

إذا كانت $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_n$ هي الجذور المميزة للمصفوفة A يمكن كتابتها على الصورة

$$(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)..........(\lambda-\lambda_n)$$

نظرية كايلي هاملتون Kayli Hamelton

تأخذ الصورة

$$(A-\lambda_1\ I)(A-\lambda_2\ I)...........(A-\lambda_n\ I)=0$$

أو

$$\prod_{r=1}^{n}\ (A-\lambda_r I)=0$$

ملحوظة :

يجب أن يلاحظ في (4) أن

$$A-\lambda rI\neq 0\ ;\ r=1,2,......,n$$

وذلك لأن في جبر المصفوفات $AB = 0$ لا تعني أن

$$A = 0 \quad \text{أو} \quad B = 0$$

مثال:

إذا كانت
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
فأوجد:

(i) كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة A والمعادلة المميزة لها .

(ii) الجذور المميزة للمصفوفة A وحقق نظرية كايلي – هاملتون .

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

المعادلة المميزة للمصفوفة هي (2) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

لإيجاد الجذور المميزة نلاحظ $\lambda - 1$ احد العوامل للعدد يحقق المعادلة

معنى ذلك $(\lambda - 1)$ عامل للطرف الأيسر من المعادلة

$$\lambda^3 - \lambda - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + a\lambda - 6)$$

بمقارنة معامل λ^2 في الطرفين نجد أن

$$-1 + a = -2 \quad \& \quad a = -1$$

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (2) على الصورة

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0, (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$
$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 3 \quad , \quad \lambda_3 = -2$$

وبالنسبة لتحقيق نظرية كيلي هاملتون أي أن

$$A^3 - 2A^2 - 5A + 6I = 0$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = Aa^2 \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 17 \\ 13 & 4 & 11 \\ 13 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^3 = 1A^2 - 5A \begin{pmatrix} 14 & -4 & 17 \\ 13 & 4 & 11 \\ 13 & 11 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 06\, I$$

تمرين:

اثبت أن

$$A\ 4 = 9\, A\, 2 + 4\, A - 12\, I$$

مثال:

إذا كانت A هي المصفوفة المذكورة في مثال: (1) ، (n) عدد صحيح موجب فاثبت أن

$$30A^n = (5\alpha - 2\beta)A^2(8\beta - 5\alpha)A = 6(5 - \beta)I$$

حيث

$$\alpha = 3^n - 1 \quad , \quad \beta = 3^n - (-2)^n$$

الحل:

الجذور المميزة هي 1 ,3 ,2- فتكون كثيرة الحدود المميزة لها هي

$$-(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

إيجاد $30\ A^n$ كتعبير خطي بدلالة A^2, A, I نتبع الخطوات الآتية:

1- نقسم $30\lambda^n$ على كثيرة الحدود ولنفرض أن خارج القسمة هو $p(\lambda)$ الباقي سيكون من الدرجة الثانية في λ (لاحظ أن المقسوم عليه

من الدرجة الثالثة) وليكن الباقي $a\lambda^2 + b\lambda + 2$

2- يمكن كتابة العلاقة

$$30\lambda^n = P(\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2) + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

3- نضع A بدلا من λ

$$30A^n = P(A)(A-I)(A-3I)(A-2I) + A^2 + bA + cI$$
$$= P(A)x0 + aA^2 + bA + cI$$

وذلك من نظرية كايلي هاملتون أي أن

$$30A^n = aA^2 + bA + cI$$

4- لإيجاد الثوابت a, b, c بالتعويض عن λ بالقيم 2- ,3 ,1 وهي الجذور المميزة .

$$\left.\begin{array}{l}30 = a+b+c\\ \\ 30(3)^n = 9a+3b+c\end{array}\right\} 8a+2b = 30(3^n-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ 30(-2)^n - 4a - 2b + c\end{array}\right\} 5a+5b = 30(3^n(-2)^n)$$

$$\left.\begin{array}{l}4a+b = 15\alpha\\ a+b = 6\beta\end{array}\right\} a+5\alpha-2\beta, b = 8\beta-5\alpha$$

$$c = 30 - a - b = 30 - 6\beta \Rightarrow$$

بالتعويض عن a, b, c نحصل على

$$30A^n = (5\alpha-2\beta)A^2 + (8\beta-5\alpha)A + 6(5-\beta)I$$

مثال:

مصفوفة مربعة من نوع 3×3 جذورها المميزة 0 ,1 ,2 اثبت أن

$$A^n = (2^{n-1}-1)A^2 + (2-2^{n-1})A$$

حيث إن الجذور المميزة للمصفوفة هي 0 ,1 ,2 فتكون كثيرة الحـدود هى

$-(\lambda-0)(\lambda-1)(\lambda-2)$

باتباع الخطوات السابقة في المثال السابق:

$$\lambda^n = P(\lambda).\lambda(\lambda-1)(-2) + a\lambda^2 = b\lambda + c \qquad (1)$$

$$A^n = 0 \qquad\qquad +a\lambda^2 + b\lambda + cI$$

لإيجاد a, b, c تعوض في (1) عن λ بـالقيم 2, 1, 0 نحـصل على

$$0 = c$$

$$1\, a + b + c$$

$$2^n = 4\, a + 2\, b + c$$

$$a = 2^{n-1} - 1 \qquad , \qquad b = 2 - 2^{n-1}$$

$$A^n = (2^{n-1} - 1)\; A^2 + (2 - 2^{n-1})\, A$$

المتجهات المميزة للمصفوفة Eigen vectors

ليكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة معلومة من نوع $n\times n$ وليكن $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ معادلة موجهة تمثل n معادلة x هي مصفوفة عمود غير صفري من نوع $n\times 1$

$$Ax - \lambda x = Ax - \lambda Ix = 0 \quad A - \lambda Ix = 0 \qquad (1)$$

إذا كانت x هي $(x_1, x_2, ..., x_n)$ فإن المعادلة (1) تكتب على الصورة .

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda x_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = \lambda x_n$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_2 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0$$
$$(A - \lambda I)X = 0$$

لنعتبر الحالتين الآتيتين

$$a - |A - \lambda I| \neq 0$$

في هذه الحالة نجد مباشرة باستخدام قاعدة كرام لحل المعادلات الخطية أن

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_n = 0$$

وهذا يعطينا $x = 0$ وهو الحل التافه

في هذه الحالة يوجد حل آخر غير $x = 0$ لكن $|A - \lambda I| = 0$ هي المعادلة المميزة للمصفوفة A ، λ يمكن أن تأخذ قيمة أي واحد من الجذور المميزة للمصفوفة .

لنفرض أن λ هي إحدى هذه الجذور . لهذه القيمة تتحقـق المعادلـة (1)، (2) وعلينا أن نبحث عن حل غير الحل التافه للمعادلة المصفوفة.

$$(A - \lambda_1 I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & .....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & .....a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & .....a_{nn} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ويطلق على الموجهات $\underline{x}$ المناظرة لقيم λ eigen vectors

مثال:

أوجد القيم الذاتية والموجهات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 5\text{-}\lambda & 4 \\ 1 & 2\text{-}\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = 0$$

فتكون الجذور هي $\lambda_2 = 6$, $\lambda_1 = 1$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$4X_1 + 4X_2 = 0$

$X_1 + X_2 = 0$

$$X_1 - X_2 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 6$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-X_1 + 4X_2 = 0$

$X_1 + 4X_2 = 0$

$$X_1 = 4X_2 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

مثال:

أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال:

أوجد القيم الذاتية والموجهات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال:

أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

المعادلة المميزة للمصفوفة $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 0$$
$$X_1 + 0.X_2 + X_3 = 0$$

$$\frac{X_1}{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{X_2}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{X_3}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{X_1}{-2} = \frac{X_2}{-2} = \frac{X_3}{-2} \Rightarrow$$

$$\frac{X_1}{-1} = \frac{X_2}{1} = \frac{X_3}{1} = a \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 0$$
$$X_1 - 3X_2 + X_3 = 0$$

$$\frac{X_1}{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{X_2}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{X_3}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{X_1}{-11} = \frac{X_2}{-1} = \frac{X_3}{14} = -b \Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ & 6 \\ -14 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$$ حيث a, b, c ثوابت اختيارية