الباب الأول

الأخطـــاء
ERRORS

تنشأ الأخطاء فى علم التحليل العددى من أكثر من مصدر . فهناك أخطاء من إستعمال الصيغ التقريبية Approximate Forms ذاتها ، وعادةً ما تكون النظرية قد وضعت صيغة لهذا الخطأ . وهناك أخطاء ناشئة من إستعمال هذه الصيغ كالذى يكتفى فى حساباته بعدد معين من المنازل العشرية ، فينشأ خطأ التقريب Rounding off Error أو خطأ الاقتطاع Truncation Error . ويشتهر خطأ الاقتطاع فى حسابات المتسلسلات اللانهائية مثل:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots\dots \to \infty$$

فإذا إكتفينا بعدد معين من الحدود عند الحساب (ويجب أن نفعل ذلك) فإن خطأ الاقتطاع يظهر بقوة فى النتائج . وهناك أخطاء تنشأ من البيانات المستخدمة كشروط إبتدائية أو حدية للمعادلات المطلوب حلّها وأخطاء تنشأ تبعاً لنوع الحاسب الرقمى أو الآلة الحاسبة المستخدمة . وهناك أخطاء شخصية تنشأ من عدم دقة المستعمل للطريقة فى حساباته اليدوية أو عدم اتباعه للخطوات المقررة فى الطريقة كيفما يجب .

وهناك أخطاء تنشأ من سوء استعمال لغة الحاسب العليا المستخدمة فى البرمجة على الحاسب كأن يخزن عدداً حقيقياً فى حقل أعداد صحيحة .. وهكذا ، هناك العديد من الأخطاء سنكتفى بتعريف بعضها فى هذا الباب .

(١-١) الخطأ المطلق ABSOLUTE ERROR :

إذا كانت القيمة الصحيحة المضبوطة للحل هى x_o وكانت القيمة التقريبية x، فإن الخطأ المطلق يُعرف كالتالى :

$$\text{الخطأ المطلق} = |x - x_o|$$

(١-٢) الخطأ النسبى RELATIVE ERROR :

وهو يُعرّف كالتالى :

$$\text{الخطأ النسبى} = \left|\frac{x_o - x}{x_o}\right| = \left|1 - \frac{x}{x_o}\right|$$

مثال (١-١) : إذا علمت أن جذر المعادلة المعطاة يجب أن يكون $x_o = 1.55$ بينما باتباع طريقة عددية معينة حصلت على قيمة تقريبية $x = 1.49$ ، فما هو الخطأ المطلق E وما هو الخطأ النسبى E_r .

الحل :

$$E = |x - x_o| = |1.49 - 1.55| = |-0.06| = 0.06$$

$$E_r = \left|\frac{x_o - x}{x_o}\right| = \left|1 - \frac{x}{x_o}\right| = \left|1 - \frac{1.49}{1.55}\right| = 0.039$$

(١-٣) خطأ الاقتطاع TRUNCATION ERRORS :

وغالبا ما يظهر فى حسابات المتسلسلات اللانهائية Infinite Series مثل :

$$f(x) = f(x_o) + (x - x_o)f`(x_o) + \frac{(x - x_o)^2}{2!}f``(x_o) + \ldots\ldots \to \infty$$

وهى مفكوك تايلور حول x_o، بافتراض أن المتسلسلة متقاربة فى فترة I وأردنا حساب $f(x_1)$ (حيث $x_1 \in I$) ، فإن :

$$f(x_1) = f(x_o) + (x - x_o)f`(x_o) + \frac{(x_1 - x_o)^2}{2!}f``(x_o) + \ldots\ldots\ldots \to \infty$$

فإذا اكتفينا بـ N حداً ، أى أن :

$$F(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f`(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f``(x_0) + \ldots + \frac{(x_1 - x_0)^{N-1}}{(N-1)!} f^{N-1}(x_0)$$

لاحظ أننا اكتفينا بعدد محدود من الحدود ، وبالتالى يكون خطأ الإقتطاع هو :

$$E_t(x_1) = f(x_1) - F(x_1) = \frac{(x_1 - x_o)^N}{(N)!} f^N(x_o) + \frac{(x_1 - x_o)^{N+1}}{(N+1)!} f^{N+1}(x_o) + \ldots\ldots \rightarrow \infty$$

وهو خطأ لا يمكن إهماله عامة .

مثال (١-٢) : احسب قيمة تقريبية لـ e وذلك باستخدام المتسلسلة :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots \rightarrow \infty$$

الحل : يمكننا من خلال المتسلسلة السابقة تكوين الجدول التالى :

القيمة التقريبية لـ e	متسلسلة $e^x(x=1)$	عدد الحدود
1.000,000	$e^x \approx 1$	1
2.000,000	$e^x \approx 1 + x$	2
2.500,000	$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$	3
2.666,667	$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$	4
2.708,336	$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$	5
2.716,667	$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$	6
....	....	.....

لاحظ أن خطأ الاقتطاع يقل كلما أخذنا حدوداً جديدة (قيمة e لتسعة منازل عشرية هى $e \cong 2.718,281,828$) ولاحظ أيضا أنه عند الاكتفاء بستة حدود فقط ، هناك اتفاق فى منزلتين عشريتين ، أى أن $e \cong 2.71$. والعدد الكافى من الحدود الذى يعطينا عدداً معيناً مرغوبا فيه من المنازل العشرية يُحسب باستعمال الصيغة الآتية (وهى صيغة هامة فى علم التقريب) :

إذا كان $\left\|x_{n+1} - x_n\right\| < 0.5 \times (10)^{-k}$ فإنه يقال أن x_n, x_{n+1} كتقريبين متتاليين لقيمة x متفقان فى عدد k من المنازل العشرية .

فمثلا إذا كانت $x_n = 1.549271$ وكانت $x_{n+1} = 1.553427$ فبالعين المجردة نلاحظ أن هناك إتفاق فى المنزلة العشرية الأولى (أى أن $k = 1$) . ولكن باستخدام الصيغة الرياضية السابقة سنجد أن :

$$|x_{n+1} - x_n| = 0.004156 = 0.4156(10)^{-2} < 0.5x(10)^{-2} \Rightarrow k = 2$$

أى أنهما متفقان فى منزلتين عشريتين . لذلك فإن الإكتفاء بالعين المجردة لتحديد عدد المنازل العشرية المتفقة بين عددين ، بالأكثر يساوى الحقيقة ولا يمكن أن يتعداها .

مثال (١-٣) : إذا كانت $x = 1.553427$ وكانت $x_0 = 1.541271$ ، فكم عدد المنازل العشرية المتفقة بينهما ؟

الحل :

$$|x_0 - x| = 0.012156 = 0.12156 \ (10)^{-1} < 0.5x(10)^{-1} \Rightarrow k = 1$$

أى أنهما متفقان فى منزلة عشرية واحدة .

(١-٤) حساب أقصى قيمة للخطأ لدالة كثيرة المتغيرات

The Maximum Error for Functions of Multi-Variables

الدالة كثيرة المتغيرات يرمز لهـا بـالرمز : $f\,(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$ حيث n هو عدد المتغيرات المستقلة . من المعروف أن Δf لهذه الدالة يُحسب من القانون التالى :

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\Delta x_3 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

ولحساب أقصى خطأ لهذه الصيغة ، نأخذ القيم العددية لكل حد على حدة ليصبح :

$$\boxed{\begin{aligned} |\Delta f|_{max} &= \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right||\Delta x_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right||\Delta x_2| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\right||\Delta x_3| + \ldots\ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right||\Delta x_n| \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right||\Delta x_i| \end{aligned}}$$

ولحساب أقصى خطأ نسبى نقسم على القيمة العددية للدالة . أى أن :

$$\boxed{\left|\frac{\Delta f}{f}\right|_{max} = \frac{1}{|f|}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right||\Delta x_i|}$$

مثال (١-٤) : احسب أقصى خطأ مطلق ونسبى للدالة $f\,(x,y,z) = \dfrac{xy}{z}$ علما بأن :

$$x = 1 \pm 0.01 \quad , \quad y = 2 \pm 0.03 \quad , \quad z = 3 \pm 0.04$$

الحل :

$$f(x,y,z)=\frac{xy}{z} \Rightarrow f|_{(1,2,3)}=\frac{(1)(2)}{(3)}=\frac{2}{3} \Rightarrow |f|=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{z} \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}=\frac{2}{3} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{z} \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{xy}{z^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}=-\frac{2}{9} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|=\frac{2}{9}$$

فى حين أن $|\Delta x|=0.01\ ,\ |\Delta y|=0.03\ ,\ |\Delta z|=0.04$ ، ومن ثـم يكون أقصـى خطـأ مطلق هو

$$|\Delta f|_{max}=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y|+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right||\Delta z|$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)x\left(\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)x\left(\frac{3}{100}\right)+\left(\frac{2}{9}\right)x\left(\frac{4}{100}\right)=\frac{23}{900}$$

فى حين يكون أقصى خطأ نسبى هو

$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right|_{max}=\frac{|\Delta f|}{|f|}=\left(\frac{23}{900}\right)x\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{23}{600}$$

(١-٥) خطأ التقريب ROUNDING OFF ERROR :

من المعروف أنه يمكننا تقريب الأعداد لأى عدد من المنازل العشرية نريدها اتباعـاً لقاعدة " أنه إذا كانت المنزلة العشرية بها رقم أكبر من أو يساوى 5 فإننـا نزيد واحداً علـى المنزلة العشرية السابقة لها مباشرةً ونكتفى بذلك ، وإذا كان غير ذلك إكتفينا بالمنزلة العشـرية السابقة دون إضافة " . فمثلا

$$x = 1.67823$$

لرقم عشرى واحد	$\cong 1.7$
لرقمين عشريين	$\cong 1.68$
لثلاثة أرقام عشرية	$\cong 1.678$

وهكذا .

بالطبع سينشأ من هذه العملية خطأ واضح ويكون خطيراً إذا ما ضُرب العدد فى عددٍ كبير (مثل الضرب فى 100 فى مثالنا السابق) أو تـم قسـمته علـى عددٍ صغير (مثل القسمة على 0.001 فى مثالنا السابق) . فإذا ما توالت عمليات الضرب والقسمة والجمع والطرح وتوالت عمليات التقريب على النحو السابق فإن أخطاءً عظيمة فى قيمة العدد يمكن حسابها .

* * * * *

تمرينات عامة على الباب الأول

(١) إذا كانت

$$W = f.m^2 - \frac{u}{z}$$

حيث

$$f = 2.3 \pm 0.1 \quad , \quad m = 1.5 \pm 0.01 \quad , u = 0.5 \pm 0.005 \quad , \quad z = 2.5 \pm 0.001$$

أوجد أقصى خطأ نسبى فى W .

(٢) احسب عدد المنازل العشرية المتفقة بين أزواج الأعداد الآتية :

(i)	1.55672	,	1.49238
(ii)	1.5×10^{-3}	,	15.02×10^{-4}
(iii)	2.0132	,	2.0523

(٣) احسب قيمة e^{-2} مقربا الجواب لثلاثة منازل عشرية مستعملا مفكوك الدالة e^x حول نقطة (x=0) أو مفكوك ماكلورين . ثم احسب الخطأ النسبى فى هذا الحساب إذا علمت أن القيمة المضبوطة لستة أرقام عشرية هى $e^{-2} = 0.135335$.

(٤) احسب الخطأ المطلق فى التعبير الرياضى التالى إذا ما طُلب منك التقريب لمنزلتين عشريتين

$$x = \frac{2.567832}{0.01} + (1000) \times (2.7189)$$

(٥) إذا كان $w = e^{2x} \sin 6y$ فأوجد قيمة أكـبر خطــأ فـــى حســـاب w إذا علمـــت أن $x = 2.0 \pm 0.003$ وأن $y = 5.0 \pm 0.007$.

(٦) أوجــد قيمـــة أكـبر خطــأ نســبى لــــ m حيــث $m = e^{-w} \sin\left(\frac{L\pi}{2}\right)$ حيـــث $\frac{L}{2} = 0.5 \pm 0.01$ و $w = 1.5 \pm 0.05$.

* * * * *