

الباب الرابع

الاستكمال

INTERPOLATION

(١-٤) مقدمة :

إذا ما كان المنحنى موصوفاً بمجموعة من النقاط (x_i, y_i) , $i \in I^+$ فكيف يمكن وصف هذا المنحنى بشكل مستمر Continuous curve . هذه المشكلة الرياضية يمكن علاجها بأكثر من أسلوب . فى هذا الباب من الكتاب تكون هناك قضية أخرى مصاحبة لهذه المشكلة وهى قضية معرفة y عند قيمة x ليست بجدول النقاط المُعطى ، وتُسمى هذه القضية قضية الاستكمال . ويجب التفرقة بين نوعين من القضايا :

- الأولى : أن النقطة المطلوبة داخل نقاط الجدول Interior ، وبالتالي تُسمى المشكلة فى هذه الحالة " استكمال داخلى " Interpolation .
- الثانية : أن تكون النقطة المطلوبة خارج نقاط الجدول Exterior ، وبالتالي تُسمى المشكلة فى هذه الحالة " استكمال خارجى " Extrapolation .

لاحظ أن المنحنى الذى نحسبه فى هذا الباب يجب أن يمر بجميع النقاط المُعطاه فى الجدول . فإذا كان المنحنى هو $y = f(x)$ ، فإن :

$$y_i = f(x_i) \quad , \quad \forall i$$

وبالتالى إذا عُلمت قيمة x فإن $y = f(x)$ وكذلك إذا عُلمت قيمة y فإن $x = f^{-1}(y)$ سواء كان الاستكمال داخلى أو خارجى .

مثال توضيحي :

فى تجربة معملية Experiment فى معمل الحرارة أخذت القراءات التالية لدرجات الحرارة x وطول قضيب y من المعدن :

x ($^{\circ}\text{C}$)	0	10	20
y (cm)	150	151	155

أوجد علاقة خطية بين x, y ثم أوجد طول القضيب المعدنى عند :

$$\cdot x = 15^{\circ} \text{ (i)}$$

$$\cdot x = 50^{\circ} \text{ (ii)}$$

$$\cdot \text{أوجد } x \text{ المناظرة لـ } y = 153 \text{ cm (iii)}$$

الحل :

العلاقة العامة للخط المستقيم هى $y = ax + b$ ومعلوم أنه يكفى شرطان فقط لمعرفة a, b ، ولذلك سنختار النقطتين $(0,150)$ ، $(20,155)$ حتى نكون غطينا فترة : $x \in [0,20]$. وبالتالي نحصل على المعادلات الآتية :

$$\text{(i) } 150 = b$$

$$\text{(ii) } 155 = 20a + 150b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4}$$

وتكون المعادلة هى :

$$y = \frac{1}{4}x + 150$$

وتسمى العلاقة السابقة صيغة الاستكمال أو حدودية الاستكمال Interpolation Polynomial

(i) استكمال داخلى عند $x = 15^\circ$ لأن $x \in [0, 20]$:

$$y = \frac{1}{4}(150) + 150 = 153.75 \text{ cm.}$$

(ii) استكمال خارجى عند $x = 50^\circ$ لأن $x \notin [0, 20]$:

$$y = \frac{1}{4}(50) + 150 = 162.5 \text{ cm.}$$

(iii) استكمال عكسى :

$$153 = \frac{1}{4}x + 150 \Rightarrow x = 4(3) = 12^\circ \text{ C}$$

ملحوظة :

الخط المستقيم لا يمر بكل نقاط الجدول (الثلاثة) ويعتبر هذا التقريب سيئا لأنه لم يستخدم كل بيانات الجدول . ولتحسين حدودية الاستكمال لا بد من أخذ كل البيانات فى الاعتبار ، وبالتالي سيكون من الدرجة الثانية وصورتها العامة :

$$y = ax^2 + bx + c$$

المعاملات الثلاث a, b, c تحتاج إلى ثلاثة شروط رياضية وهى المرور بالثلاث نقاط . ولكن ستكون المعادلات أصعب (نوعا ما) من المعادلات السابقة .

وعامة لو كانت البيانات ذات بعد $(n+1)$ ستكون حدودية الاستكمال من درجة (n) ،

أى على الصورة :

$$y = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

والمعادلات هي :

$$y_j = \sum_{i=0}^n a_i x_j^i, \quad 1 \leq j \leq n+1$$

وهي معادلات خطية في a_i عددها $n+1$. أي أن :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & \dots & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

ولا يخفى على القارئ مشاكل حل المعادلات الخطية ، ولذلك نلجأ إلى طرق أخرى للاستكمال سنوجز شرح بعضها كما يأتي :

(٤-٢) طريقة لاجرانج LAGRANGE :

وهي طريقة عامة للاستكمال ، بمعنى أنها تستعمل سواء كانت الفروق بين بيانات المتغير المستقل x ثابتة (متساوية) أم غير متساوية . وحدودية لاجرانج المستخدمة في هذه الطريقة هي :

$$L_n^{(k)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_n)}$$

والفروق المحسوبة في المقام تتجنب $(x_k - x_k)$ وفي البسط تتجنب $(x - x_k)$. ويمكن كتابة الصيغة على الصورة :

$$L_n^{(k)}(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

أى أن هناك حدودية من درجة (n) : $L_n^{(k)}(x)$ لكل نقطة من نقاط البيانات البالغ عددها (n+1) وتكون حدودية الاستكمال هي :

$$y = y_0 L_n^{(0)}(x) + y_1 L_n^{(1)}(x) + y_2 L_n^{(2)}(x) + \dots + y_n L_n^{(n)}(x)$$

أو في صورة مختصرة :

$$y = \sum_{i=0}^n y_i L_n^{(i)}(x)$$

لاحظ أن المتغير المستقل x يكون حدوديات لاجرانج التى لها درجة ثابتة n (وهى عدد نقاط الجدول مطروحاً منه واحد) . أما المتغير التابع y فى الجدول فيظهر فى صيغة الاستكمال .

ولحساب الفروق الظاهرة فى بسط ومقام حدوديات لاجرانج نستخدم الجدول التالى :

X	(X - X ₀)	(X - X ₁)	(X - X ₂)	(X - X _n)
X ₀	<u>(X - X₀)</u>	(X ₀ - X ₁)	(X ₀ - X ₂)	(X ₀ - X _n)
X ₁	(X ₁ - X ₀)	<u>(X - X₁)</u>	(X ₁ - X ₂)	(X ₁ - X _n)
X ₂	(X ₂ - X ₀)	(X ₂ - X ₁)	<u>(X - X₂)</u>	(X ₂ - X _n)
.....
X _n	(X _n - X ₀)	(X _n - X ₁)	(X _n - X ₂)	<u>(X - X_n)</u>

وفى هذا الجدول لا يتم حساب عناصر القطر الرئيسى فى مصفوفة الفروق . ثم من الجدول مباشرة نحسب حدوديات لاجرانج كالتالى :

$$L_n^{(0)}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \dots (x_0 - x_n)}$$

$$L_n^{(1)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)}$$

وهكذا حتى نحسب :

$$L_n^{(n)}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

مثال (٤-١) : كون حدودية الاستكمال باستعمال طريقة لاجرانج للنقاط الآتية :

x	-1	2	4
y	3	7	5

الحل :

نكون جدول الفروق :

	<u>(x + 1)</u>	(x + 2)	(x - 4)
x ₀ = -1	<u>(x + 1)</u>	-3	-5
x ₁ = 2	3	<u>(x - 2)</u>	-2
x ₂ = 4	5	2	<u>(x - 4)</u>

وبالتالى :

$$L_2^{(0)}(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(-3)(-5)} = \frac{1}{15}(x-2)(x-4)$$

$$L_2^{(1)}(x) = \frac{(x+1)(x-4)}{(3)(-2)} = -\frac{1}{6}(x+1)(x-4)$$

$$L_2^{(2)}(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(5)(2)} = \frac{1}{10}(x+1)(x-2)$$

وتكون حدودية الاستكمال :

$$y = (3)\left(\frac{1}{15}\right)(x-2)(x-4) + (7)\left(-\frac{1}{6}\right)(x+1)(x-4) + (5)\left(\frac{1}{10}\right)(x+1)(x-2)$$

وبضرب الأقواس وتجميع الحدود المتناظرة نحصل على :

$$y = -\frac{7}{15}x^2 + \frac{9}{5}x + \frac{79}{15}$$

وبالتالى نستطيع الحصول منها على أى استكمال داخلى أو خارجى أو استكمال عكسى إذا

طلب ذلك . فمثلا عند $x = 0$ تكون $y = \frac{79}{15}$ ، وعند $x = 5$ تكون $y = \frac{59}{15}$ ، وعند $y = 0$ نجد أن $x = 1.95$ و $x = -5.8$ ونختار $x = -5.8$ ونرفض الأخرى (لماذا ؟) .

(٤-٢-١) الخطأ فى الاستكمال فى طريقة لاجرانج :

نظرية :

دعنا نفترض أن حدودية الاستكمال هى $P_n(x)$ وأن الدالة المقربة بالاستكمال هى $f(x)$ دالة متصلة من رتبة n وأن تفاضلها من رتبة $(n+1)$ موجود لجميع قيم x المنتمية للفترة $[a, b]$ ، فإن الخطأ :

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

حيث $c \in [a, b]$.

حالات خاصة :

$$(i) E_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f^{(2)}(c) , c \in [x_0, x_1]$$

$$(ii) E_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} f^{(3)}(c) , c \in [x_0, x_2]$$

مثال (٢-٤) : دع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ أو $f(x) = \text{erf}(x)$ وتسمى دالة الخطأ . فإذا

x	1.2	1.3
$f(x)$	0.3849	0.4832

أخذنا قيمتين لها وليكن $E_1(1.22)$ ، أوجد

(أى الخطأ فى حساب $f(x)$ عند $x = 1.22$ وذلك بطريقة لاجرانج .

الحل :

من الصيغة الخاصة بالخطأ عند $n = 1$:

$$E_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} f^{(2)}(c) \quad c \in [1.2, 1.3]$$

وبالتالى :

$$E_1(x) = \frac{(x - 1.2)(x - 1.3)}{2} f''(c)$$

ولكن :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-2x) e^{-x^2}$$

وبالتالي :

$$f''(c) = \frac{-2c}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2}, \quad c \in [1.2, 1.3]$$

$$\Rightarrow E_1(x) = -\frac{c}{\sqrt{2\pi}} (x-1.2)(x-1.3) e^{-c^2}$$

$$\Rightarrow |E_1(x)| \leq \frac{(1.3)}{\sqrt{2\pi}} |x-1.2| |x-1.3| e^{-(1.2)^2}$$

$$\Rightarrow |E_1(x)| \leq 0.123 |x-1.2| |x-1.3| = |E_1(x)|_{\max}$$

وعند $x = 1.22$

$$|E_1(x)| \leq 0.123 |1.22 - 1.2| |1.22 - 1.3| = 0.1968 \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-3}$$

إن القيمة الاستكمالية المحسوبة عند $x = 1.22$ ستكون ذات دقة ثلاثة منازل عشرية .

(٣-٤) طريقة نيوتن الأمامية NEWTON FORWARD METHOD

تُستعمل هذه الطريقة في حالات تساوى الفروق بين قيم المتغير المستقل للبيانات ،

ولا بد أولاً من حساب جدول يُسمى جدول الفروق الأمامية Δ وفيها يكون :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

وبالتالي نحصل على الجدول الآتي للفروق الأمامية :

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	$\left \frac{\Delta^n}{\Delta^n y_0} \right $
x_0	y_0				
x_1	y_1	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$		
x_2	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$	
x_3	y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	
..	
..	
x_{n-1}	y_{n-1}	$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$	$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-2} = \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3}$	
x_n	y_n				

ونلاحظ أن جدول الفروق الأمامية سينتهي إلى $\Delta^n y_0$. وهذا الجدول هو ما يصلح لصيغة نيوتن الأمامية التي تأخذ التعبير الرياضي التالي :

$$f(x) = y_0 + \frac{\alpha}{1!} \Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$$

حيث :

$$a = \frac{x - x_0}{h} , \quad h = x_i - x_{i-1}$$

حالات خاصة :

(١) $f(x) = P_1(x)$: حدودية درجة أولى (الاكتفاء بفروق الدرجة الأولى) :

$$P_1(x) = y_0 + \frac{\alpha}{1!} \Delta y_0$$

(٢) $f(x) = P_2(x)$: حدودية درجة ثانية (الاكتفاء بفروق الدرجة الثانية) :

$$P_2(x) = y_0 + \frac{a}{1!} \Delta y_0 + \frac{a(a-1)}{2!} \Delta^2 y_0 = P_1(x) + \frac{a(a-1)}{2} \Delta^2 y_0$$

(٣) $f(x) = P_3(x)$: حدودية درجة ثلاثة (الاكتفاء بفروق الدرجة الثالثة) :

$$\begin{aligned} P_3(x) &= y_0 + \frac{\alpha}{1!} \Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \Delta^3 y_0 \\ &= P_2(x) + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} \Delta^3 y_0 \end{aligned}$$

ويجب ملاحظة التالي :

(i) لا تُستعمل طريقة نيوتن الأمامية إلا في حالة تساوى الفروق بين المتغير المستقل في الجدول ، أي عندما تكون $x_i - x_{i-1} = h$ حيث h ثابت .(ii) يمكننا إيجاد صيغ تقريبية للاستكمال ، فيمكننا حساب $P_1(x)$ أو $P_2(x)$ أو $P_3(x)$. وكلما أردنا تحسين القيم حسبنا الحدودية ذات الدرجة الأعلى . هذا لا يتوفر بالطبع في حدوديات لأجرائنا .

(iii) لحساب $P_k(x)$ يتم إضافة حد جديد لما تم حسابه من قبل (وهو $(x) P_{k-1}$) وبالتالي يقل مجهود الحساب عند التحسين وأخذ نقاط جديدة فى الاعتبار . لاحظ أن إضافة نقطة جديدة واحدة إلى البيانات فى طريقة لاجرانج تجعلنا نعيد الحسابات كلها لحساب حدوديات لاجرانج من جديد .

(iv) هذه الطريقة تكون دقيقة كلما كانت نقطة الاستكمال المطلوبة قريبة من x_0 (فى النصف الأول من الجدول) .

مثال (٤-٣) : أوجد قيمة y عند $x = 0$ إذا كان

x	-1	1	3	5
y	3	2	5	-7

الحل :

نلاحظ تساوى الفروق ($h = 2$) ونلاحظ أن القيمة المطلوبة للاستكمال هي $x = 0$ وهى فى النصف الأول من الجدول ، وبالتالي نستعمل طريقة نيوتن الأمامية ، ومن ثم لا بد من حساب الفروق الأمامية :

x	y			
$x_0 = -1$	$y_0 = 3$	$\downarrow \Delta y_0$	$\downarrow \Delta^2 y_0$	$\downarrow \Delta^3 y_0$
		-1	4	
1	2			
		3	-15	
3	5			
		-12		
5	-7			

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x + 1}{2}$$

: $P_1(x)$ (i)

$$P_1(x) = y_0 + \alpha(\Delta y_0) = 3 + \frac{x+1}{2}(-1)$$

: عند $x = 0$

$$y = P_1(0) = 2.5$$

: $P_2(x)$ (ii)

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(\Delta^2 y_0) = \left[3 + \frac{x+1}{2}(-1)\right] + \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}-1\right)}{2} \quad (4)$$

: عند $x = 0$

$$y = P_2(0) = P_1(0) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)}{2} \quad (4) = 2.0$$

: $P_3(x)$ (iii)

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}(\Delta^3 y_0) =$$

$$P_2(x) + \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}-1\right)\left(\frac{x+1}{2}-2\right)}{6} \quad (-19)$$

: عند $x = 0$

$$y = P_3(0) = P_2(0) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)}{6} \quad (-19) = 0.8125$$

وواضح من تتبع قيم y , x في الجدول أن النتيجة الأخيرة هي أفضل قيمة لهذا الاستكمال .

(٤-٣-١) الخطأ في طريقة نيوتن الأمامية

يمكن حساب الخطأ من الصيغة التالية :

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(c)$$

حيث :

$$\alpha = \frac{x-x_0}{h}, \quad h = x_1 - x_0, \quad c \in [x_0, x_n]$$

حالات خاصة :

(i) درجة أولى $P_1(x)$:

$$E_1(x) = \frac{a(a-1)}{2!} h^2 f''(c), \quad c \in [x_0, x_1]$$

(ii) درجة ثانية $P_2(x)$:

$$E_2(x) = \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} h^3 f'''(c), \quad c \in [x_0, x_2]$$

وهكذا . ولا بد من معرفة صيغة العلاقة الأساسية $f(x)$ لنستطيع حساب الخطأ .

مثال (٤-٤) : إذا كانت $f(x) = \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ (sine integral)، ومن جدول الدالة

علمنا أن

x	0.2	0.4
Si(x)	0.1996	0.3965

أوجد $f(0.22)$ ثم وجد أقصى خطأ في الحساب .

الحل :

باستعمال صيغة نيوتن الأمامية :

↓ x ₀	↓ y ₀	↓ Δy ₀
0.2	0.1996	0.1969
0.4	0.3965	

$$, h = 0.2, a = \frac{x - 0.2}{0.2} = \frac{10x - 2}{2} = 5x - 1$$

ومنها نحصل على :

$$y = P_1(x) = y_0 + \alpha (\Delta y_0) = 0.1996 + (5x - 1) (0.1969)$$

وبالتالى عند $x = .22$:

$$y = f(.22) = .1996 + (5(.22) - 1) (.1969) = .2193$$

ولحساب أقصى خطأ فى الحساب :

$$E_1(x) = \frac{a(a-1)}{2!} h^2 \cdot f''(c) , c \in [0.2, 0.4]$$

حيث

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \Rightarrow f''(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

وبالتالى :

$$E_1(x) = \frac{(5x-1)(5x-2)}{2} \cdot (0.2)^2 \cdot \left[\frac{c \cdot \cos c - \sin c}{c^2} \right] , c \in [0.2, 0.4]$$

$$\Rightarrow |E_1(x)| \leq \frac{|5x-1| |5x-2|}{2} \cdot (0.2)^2 \cdot \left[\frac{0.4 \cos(0.2) - \sin(0.2)}{(0.2)^2} \right]$$

$$\Rightarrow |E_1(x)| \leq 0.097 |5x-1| |5x-2|$$

وبالتالى :

وبالتالى :

$$|E_1(0.22)| \leq 0.097|5(0.22) - 1||5(0.22) - 2| \leq 8.73 \times 10^{-3} = 0.087310^{-1}$$

أى أن :

$$|E_1(0.22)| \leq 0.0873 \times 10^{-1} < 0.5 \times 10^{-1}$$

وبالتالى تتحقق منزلة عشرية واحدة لهذا الاستكمال .

(٤-٤) طريقة نيوتن الخلفية NEWTON BACKWARD METHOD

تصلح هذه الطريقة للاستكمال فى النصف الثانى من الجدول (بعد ترتيب البيانات تصاعديا بالنسبة للمتغير المستقل) ولها الصيغة التالية :

$$f(x) = y_n + \frac{\beta}{1!} \nabla y_n + \frac{\beta(\beta+1)}{2!} \nabla^2 y_n + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!} \nabla^3 y_n + \dots + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{n!} \nabla^n y_n$$

حيث :

$$(بيانات متساوية الفروق بالنسبة للمتغير المستقل) \quad h = x_i - x_{i-1} \quad , \quad \beta = \frac{x - x_n}{h}$$

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} \quad , \quad \nabla^2 y_i = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}$$

وجداول الفروق المُستخدم لهذه الطريقة يُسمى جدول الفروق الخلفى وهى فروق من الدرجة الأولى والثانية والثالثة .. وهكذا ، كما هو مبين :

x	y	∇	
x_0	y_0		∇^2
		$\nabla y_1 = y_1 - y_0$	
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2 = \nabla y_2 - \nabla y_1$
		$\nabla y_2 = y_2 - y_1$	
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3 = \nabla y_3 - \nabla y_2$
		$\nabla y_3 = y_3 - y_2$	
x_3	y_3		$\nabla^2 y_4 = \nabla y_4 - \nabla y_3$
		..	
..
..
x_{n-1}	y_{n-1}	$\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$	$\nabla^2 y_n = \nabla y_n - \nabla y_{n-1}$
x_n	y_n		

ونلاحظ أن قيم جدول الفروق الخلفية هي نفسها قيم جدول الفروق الأمامية ، ولذلك يُسمى الجدول بجدول الفروق Difference Table فقط . الفرق الجوهرى هو فى المسمى ، فى الأمامى نأخذ Δ (Delta) وفى الخلفى نسميه ∇ (Nabla) . كذلك فى جدول الفروق الأمامى نهتم بالقيم $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \dots, \Delta^n y_0$ (وهى التى تُستخدم فى صيغة نيوتن الخلفية) . والمزايا والملاحظات السابق ذكرها فى طريقة نيوتن الأمامية شبيهة بتلك الموجودة فى طريقة نيوتن الخلفية مع وجود فروق بسيطة .

مثال (٤-٥) : أوجد قيمة y عند $x = 7$ من الجدول التالى :

x	2	4	6	8
y	-1	2	3	0

الحل :

نلاحظ تساوى الفروق ($h = 2$) ونلاحظ أن القيمة المطلوبة للاستكمال هي $x = 7$ وهي في النصف الثاني من الجدول (في نهاية الجدول تقريبا) ، وبالتالي نستعمل طريقة نيوتن الخلفية :

x	y			
2	-1			
4	2	3		
6	3	1	-2	
$x_3 = 8$	$y_3 = 0$	$\nabla y_3 = -3$	$\nabla^2 y_3 = -4$	$\nabla^3 y_3 = -2$

$$\beta = \frac{x - x_3}{h} = \frac{x - 8}{2}$$
(i) $P_1(x)$ (درجة أولى) :

$$y = P_1(x) = y_3 + \beta(\nabla y_3) = 0 + \left(\frac{x}{2} - 4\right)(-3)$$

وعند $x = 7$:

$$y = P_1(7) = \left(\frac{7}{2} - 4\right)(-3) = 1.5$$

(ii) $P_2(x)$ (درجة ثانية) :

$$\begin{aligned} y = P_2(x) &= P_1(x) + \frac{\beta(\beta+1)}{2}(\nabla^2 y_3) = P_1(x) + \frac{\left(\frac{x}{2} - 4\right)\left(\frac{x}{2} - 3\right)}{2}(-4) \\ &= P_1(x) - 2\left(\frac{x}{2} - 4\right)\left(\frac{x}{2} - 3\right) \end{aligned}$$

وعند $x = 7$:

$$y = P_2(7) = P_1(7) - 2\left(\frac{7}{2} - 4\right)\left(\frac{7}{2} - 3\right) = 1.5 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2.0$$

(iii) $P_3(x)$ (درجة ثالثة) :

$$\begin{aligned} y = P_3(x) &= P_2(x) + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{6} (\nabla^3 y_3) \\ &= P_2(x) + \frac{1}{6} \left(\frac{x}{2} - 4\right) \left(\frac{x}{2} - 3\right) \left(\frac{x}{2} - 2\right) (-2) \end{aligned}$$

وعند $x = 7$:

$$y = P_3(7) = P_2(7) + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) (-2) = 2.0 + \frac{1}{8} = 2.125$$

(٤-٤-١) الخطأ في طريقة نيوتن الخلفية :

على غرار الخطأ في طريقة نيوتن الأمامية ، يكون الخطأ في طريقة نيوتن الخلفية كما يلي :

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(c)$$

حيث $c \in [x_0, x_n]$.

حالات خاصة :

$$E_1(x) = \frac{\beta(\beta+1)}{2!} \cdot h^2 \cdot f''(c) \quad (i) \text{ درجة أولى } P_1(x)$$

$$E_2(x) = \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!} \cdot h^3 \cdot f'''(c) \quad (ii) \text{ درجة ثانية } P_2(x)$$

تمرينات عامة على الباب الرابع

(١) استعمل طريقة لاجرانج لإيجاد قيمة y عند $x = 1.5$ وعند $x = 3.5$ ، ثم أوجد y عند $x = 2.5$ حاسباً تقديراً للخطأ في قيمة الاستكمال .

x	0.0	0.5	1.1	2.0	3.0	4.0
y	-2.0	0.0	1.3	7.5	4.0	-1.5

(٢) إذا علمت أن دالة جيب التمام Cosine Integral تعرف كالتالي :

$$Ci(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$$
 ، وكان معلوماً الجدول التالي :

x	2.0	2.2	2.4
$ci(x)$	-0.4230	-0.3751	-0.3173

أوجد : (i) مقداراً أقصى خطأ عددياً . (ii) $Ci(2.35)$ مقداراً أقصى خطأ عددياً

(٣) أوجد حدودية للاستكمال من الدرجة الرابعة للبيانات الآتية :

x	-1	5	6	8	10
y	3	6	4	-3	-14

ثم أوجد قيمة تقريبية لـ y عند $x = 0$.

(٤) أوجد حدودية لاجرائح للبيانات الآتية :

x	-1	3	6	7	14
y	-2	4	0	17	50

ثم أوجد قيمة y عند $x = 0$ وعند $x = -8$ مع تقدير الخطأ في الحساب .

(٥) أوجد حدودية الاستكمال للقراءات التالية :

θ	-1	1	3	5	7
r	3	6	4	-3	-14

وذلك كحدودية درجة ثانية ، ثم أوجد r عند $\theta = 0$ وعند $\theta = 8$.

* * * * *