الباب الخامس

الحل العددى للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

Numerical Study of the First Order - First Degree Differential Equations

فى هذا الباب سنقدم بعض الطرق العددية لإيجاد الحل العددى للمعادلة التفاضلية

$$y` = f(x, y) \quad ; \quad y = y_0 \quad \text{at} \quad x = x_0$$

ويقصد بالحل هنا هو حساب قيمة y_1 عند $x = x_1$ حيث $x_1 = x_0 + h$

وبدءاً من الحل y_1 عند x_1 والذى تم حسابه نكرر نفس الخطوات وذلك لحساب y_2 عند x_2 حيث $x_2 = x_1 + h$ وهكذا .

(٥-١) طريقة رونجا – كوتا Runge - kutta Method

تعتمد طريقة رونجا – كوتا فى الحالة العامة على حساب الميل عند نقطة x_0 وعند عدة نقاط أخرى قريبة من x_0 ثم أخذ متوسط هذه الميول وضرب ذلك المتوسط فى h ثم إضافة الناتج إلى y_0 لكى تحصل على y_1 . ويتلخص ذلك فى حساب :

$$K_i = h \, . \, f(x_0 + a_i h , y_0 + b_i k_{i-1}) \quad , \quad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots, M$$

حيث $a_1 = b_1 = 0$ .. وبالتالى :

$$Kav = \sum_{i=1}^{M} c_i k_i \quad , \quad y_1 = y_0 + ka\,v$$

حيث المعاملات c_i , b_i , a_i اختيارية .

(٥-١-١) طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الثانية

Second Order Runge - Kutta Method

فى هذه الحالة $M = 2$ بمعنى أنه يوجد لدينا k_2 , k_1

حيث :

$$k_1 = h \,.\, f(x_0 , y_0)$$

$$k_2 = h \,.\, f(x_0 + a_2 h , y_0 + b_2 k_1)$$

$$kav = c_1 k_1 + c_2 k_2 \quad ; \quad y_1 = h_0 + kav$$

ولإيجاد المعاملات a_2 , b_2 , c_1 , c_2 نقوم أولاً بفك الدالة $f(x_0 + a_2 h , y_0 + b_2 k_1)$ حول النقطة (x_0 , y_0) وذلك باستخدام مفكوك تيلور .

$$k_2 = h \,.\, f(x_0 + a_2 h , y_0 + b_2 k_1)$$

$$= h \,.\, \left[f(x_0, y_0) + a_2 h . \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_0, y_0)} + b_2 k_1 \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_0, y_0)} + \ldots\ldots\ldots \right]$$

وبالتالى

$$y_1 = y_0 + c_1 k_1 + c_2 k_2$$

$$\therefore y_1 = y_0 + c_1 h . f(x_0 , y_0) + c_2 h \left[f(x_0 , y_0) + a_2 h . \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_o , y_o)} + b_2 k_1 \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_o , y_o)} + .. \right]$$

$$= y_0 + (c_1 + c_2) h . f(x_0 , y_0) + h^2 \left[c_2 a_2 \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_o , y_o)} + c_2 b_2 \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_o , y_o)} \right] \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وبطريقة أخرى ، من المعادلة الأصلية

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{(x_0\,,\,y_0)} = f(x_0\,,\,y_0)$$

وكذلك

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

وبالتالى

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_0\,,\,y_0)} + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_0\,,\,y_0)}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0\,,\,y_0)}$$

وبفك الدالة y_1 حول النقطة $(x_0\,,\,y_0)$ باستخدام مفكوم تيلور .

$$y_1 = y_0 + h\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0\,,\,y_0)} + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(x_0\,,\,y_0)} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

وبالتعويض عن التفاضلات التامة فى المفكوك السابق

$$\therefore y_1 = y_0 + h.f(x_0\,,\,y_0) + h^2\left[\frac{1}{2}\ \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_0\,,\,y_0)} + \frac{1}{2}\ \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_0\,,\,y_0)}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0\,,\,y_0)}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وبمقارنة (1) مع (2) نحصل على المعادلات

$$c_1 + c_2 = 1 \quad ; \quad c_2\,a_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad c_2\,b_2 = \frac{1}{2}$$

وهى ثلاث معادلات غير خطية فى أربعة مجاهيل ولذلك لدينا عدد لا نهائى من الحلول وأحد هذه الحلول اليسيرة هى

$$c_1 = c_2 = 1 \quad , \quad c_2 = b_2 = 1$$

وبالتالى يمكن كتابة طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية كالاتى :

معلوم : $y` = f(x, y)$ حيث $y(x_0) = y_0$

ومطلوب إيجاد y_1 عند x_1

(i) احسب : $h = x_1 - x_0$

(ii) احسب : $k_1 = h \cdot f(x_0, y_0)$

(iii) احسب : $k_2 = h \cdot f(x_0 + h \; , \; y_0 + k_1)$

(iv) احسب المتوسط الحسابى للقيمتين k_2 , k_1

$$kav = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

(v) احسب y_1 من العلاقة

$$y_1 = y_0 + kav$$

والخطوات السابقة يمكن تنفيذها من خلال الأمثلة التالية :

مثال (٥-١) : استعمل طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية للحصول على y عند $x = 0.6$ وعند $x = 0.8$ وذلك إذا كان $y' = \sqrt{x + y}$ وكان $y(0.4) = 0.41$.

الحل :

من البيانات المُعطاة :

$$x_0 = 0.4 \quad , \quad x_1 = 0.6 \quad , \quad y_0 = 0.41 \quad , h = x_1 - x_0 = 0.6 - 0.4 = 0.2$$

وبالتالى :

$$K_1 = h.f(x_0 , y_0) = 0.2\sqrt{x_0 + y_0} = 0.2\sqrt{0.4 + 0.41} = 0.18$$

$$K_2 = h.f(x_0 + h , y_0 + K_1) = 0.2\sqrt{(0.4 + 0.2) + (0.41 + 0.18)} = 0.2182$$

$$\therefore y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\left(K_1 + K_2\right) = 0.41 + \frac{1}{2}(0.18 + 0.2182) = 0.6091$$

وبالتالى :

$$y\,(0.6) = 0.6091$$

وكذلك بأخذ البيانات :

$$x_0 = 0.6 \quad , \quad x_1 = 0.8 \quad , \quad y_0 = 0.6091 \quad , h = x_1 - x_0 = 0.8 - 0.6 = 0.2$$

وبالتالى :

$$K_1 = 0.2\sqrt{0.6 + 0.6091} = 0.2199$$

$$K_2 = 0.2\sqrt{(0.6 + 0.2) + (0.6091 + 0.2199)} = 0.2553$$

$$\therefore y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 0.6091 + \frac{1}{2}(0.2199 + 0.2553) = 0.8467$$

أى أن :

$$y\,(0.8) = 0.8467$$

مثالا (٥-٢) استخدم طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية لحساب $y\ (0.6)$ وذلك إذا كان $x\ y\ ` = y + x^2$ وكان $y\ (0.5) = 1$ (يراعى الاحتفاظ بستة أرقام عشرية) .

الحل :

يجب أولاً وضع المعادلة المعطاة على الصورة $y` = f\ (x\ ,\ y)$

$$y\ ` = \frac{y}{x} + x$$

ويكون :

$$x_o = 0.5 \quad , \quad y_0 = 1.0 \quad , \quad x_1 = 0.6 \quad , \quad f(x\ ,\ y) = \frac{y}{x} + x$$

$$\therefore\ h = 0.6 - 0.5 = 0.1$$

$$K_1 = h.f(x_0\ ,\ y_0) = h\left(\frac{y_0}{x_0} + x_0\right)$$

$$= (0.1)\left(\frac{1}{0.5} + 0.5\right) = 0.25$$

$$K_2 = h.f(x_0 + h\ \ ,\ y_0 + k_1) = h\left(\frac{y_0 + k_1}{x_0 + h} + (x_0 + h)\right)$$

$$= (0.1)\left(\frac{(1 + 0.25)}{(0.5 + 0.05)} + (0.5 + 0.1)\right) = 0.287273$$

$$\therefore \text{Kan} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}(0.25 + 0.287273)$$

$$= 0.268637$$

وبالتالى :

$$y_1 = y_0 + kav$$

$$= 1 + 0.268637$$

$$\therefore\ y_1 = 1.268637$$

(٥-١-٢) خوارزمى طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية على الحاسب :

يمكن استعمال أكثر من خوارزمى على الحاسب .. فإذا اخترنا الدقة Accuracy فإننا لن نتحكم فى زمن البرنامج ، وإذا اخترنا التحكم فى زمن البرنامج فلن نتحكم فى الدقة . كذلك نستطيع تقديم خوارزمى يجمع بين الإثنين .

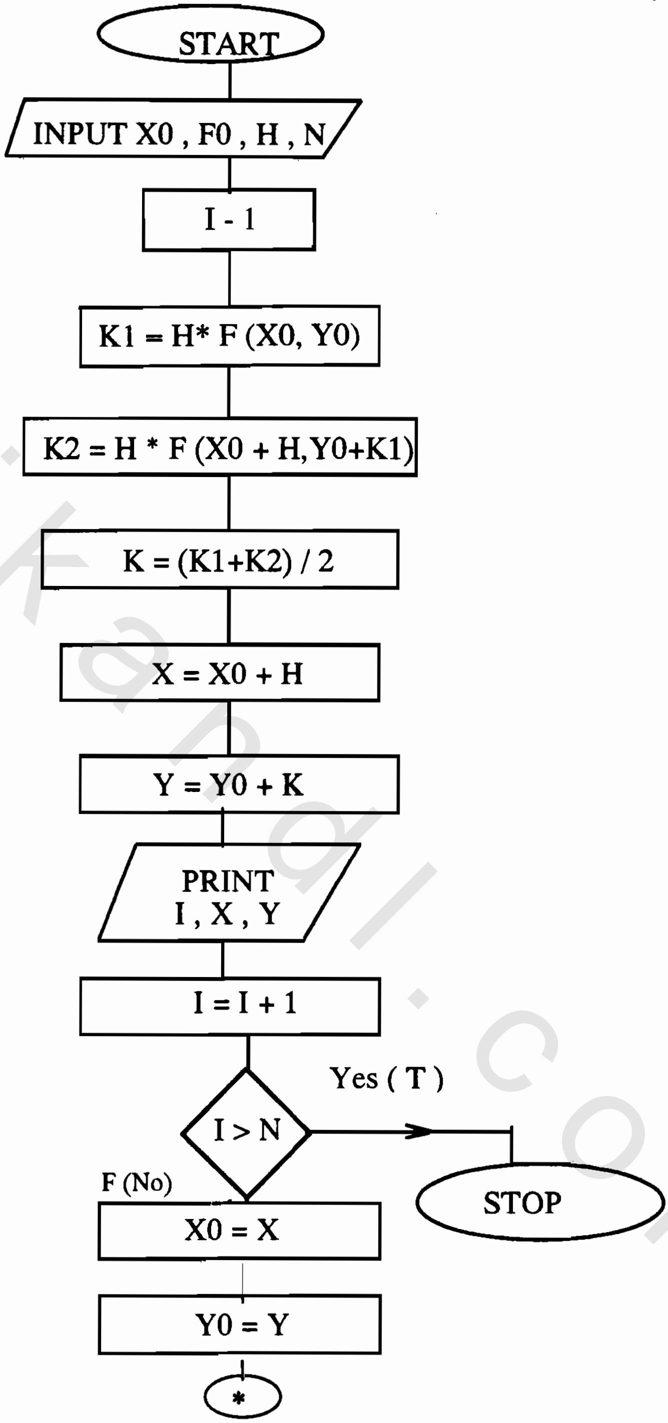
أولا : التحكم فى وقت البرنامج Time Measure :

(1) برنامج من النوع البسيط : هذا البرنامج يحسب y_1 عند x_1 ثم ينهى عمله .

PROGRAM (In Basic Code)

```
10   INPUT X0,Y0,X1
20   H=X1-X0
30   K1=H*................ ← (x0,y0)  صورة الدالة عند
40   K2=H* ............... ← (xo + h,y0+K1) صورة الدالة عند
50   Y1=Y0+0.5*(K1+K2)
60   PRINT Y1
70   STOP
```

<u>ملاحظة</u> : يمكن كتابة صورة الدالة مكتوبة بأوامر لغة BASIC أو استعمال التعليمة DEF FN فى أول البرنامج . يمكن الرجوع إلى أحد مراجع لغة BASIC لتنفيذ ذلك .



Flow Chart of second - order Runge - Kutte Method

(2) برنامج لحساب y_i عند x_i حيث $x_i = x_o + ih$ ، $i = 1,2,3,....,N$

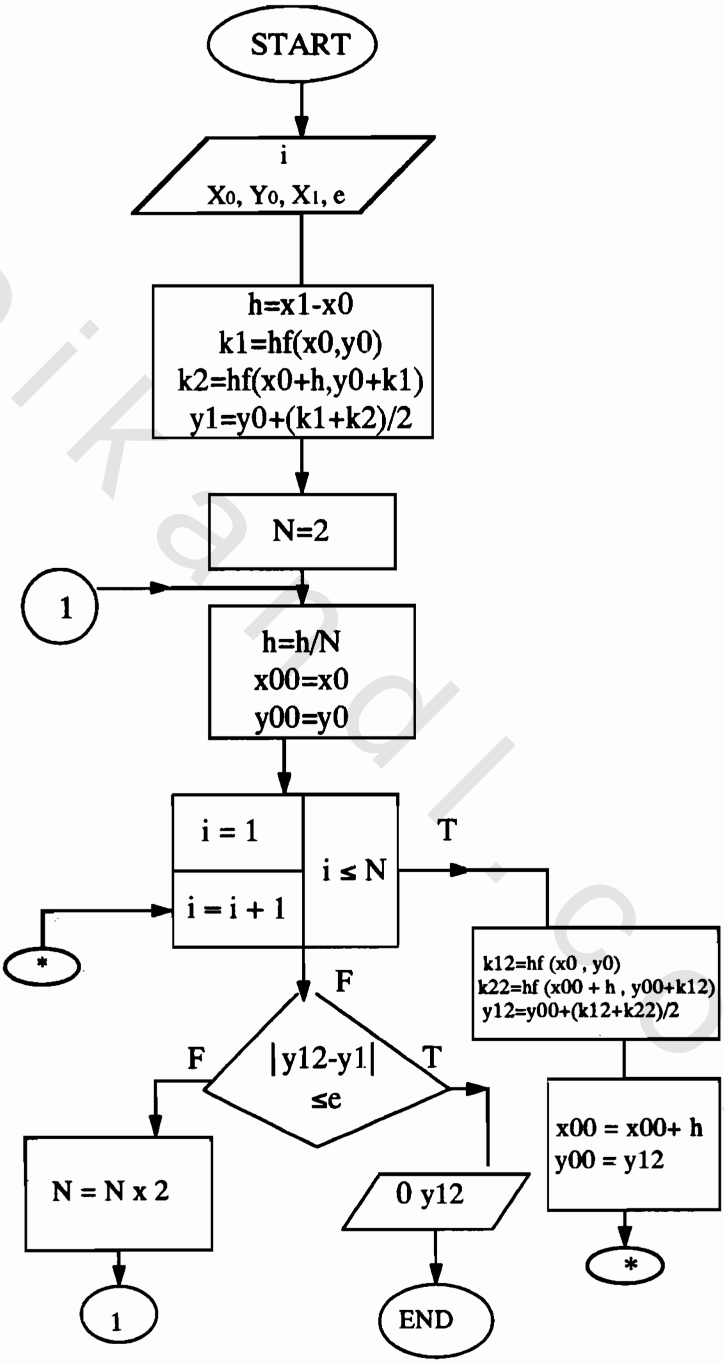
PROGRAM (In BASIC Code)

```
10    INPUT X0,Y0,H,N
20    FOR   I = 1   TO  N
30    K1 = H * F (X0,Y0) ←          تعطى فى المسألة
40    K2 = H * F (X0+H,Y0+K1)
50    K = (K1 + K2) / 2
60    Y = Y0 + K
70    X = X0 + H
80    PRINT    I , X , Y
90    X0 = X    : Y0 = Y
100   NEXT   I
110   END
```

ثانيا : تحقيق دقة معينة Accuracy Measure :

تقوم فكرة هذا الخوارزمى لحل المسألة البسيطة المعلوم فيها $(x_0 \ , \ y_0)$ والمطلوب الحل عند (x_1 , y_1) على أساس حساب $h = x_1 - x_0$ ثم نقوم بتنصيف المسافة بين $x_0 \ , \ x_1$، أى جعل $\frac{h}{2} \to h$ ثم حساب y_{12} النهائية بتطبيق رونجا – كوتا مرتين ثم قياس الدقة المطلوبة من الشرط الرياضى $|y_{12} - y_1| \le e$ حيث e خطأ مُعطى يحقق الدقة المطلوبة . فإذا تحقق الشرط ، إنتهى البرنامج وإذا لم يتحقق قمنا بالتنصيف مرة أخرى : $\frac{h}{4} \to h$ ثم نحسب y_{12} النهائية بتطبيق رونجا – كوتا أربع مرات ، وهكذا يستمر البرنامج . وبالطبع لا نعرف مُسبقا كمية الوقت المطلوبة للحساب ولكننا نخرج بالدقة المطلوبة . والخوارزمى التالى يحقق هذا الشرح .

Flow Chart


START
i
X0, Y0, X1, e
h=x1-x0
k1=hf(x0,y0)
k2=hf(x0+h,y0+k1)
y1=y0+(k1+k2)/2
N=2
1
h=h/N
x00=x0
y00=y0
i = 1
i = i + 1
i ≤ N
T
*
k12=hf (x0 , y0)
k22=hf (x00 + h , y00+k12)
y12=y00+(k12+k22)/2
F
|y12-y1| ≤e
F
T
N = N x 2
0 y12
x00 = x00+ h
y00 = y12
1
END
*

PROGRAM (In BASIC Code)

```
10    INPUT X0,Y0,X1,E
20    H=X1-X0
30    K1=H*F(X0,Y0) ←     تُعطى
40    K2=H*F(X0+H,Y0+K1) لـ
50    Y1=Y0+0.5*(K1+K2)
60    N=2
70    H=H/N
80    X00=X0
90    Y00=Y0
100   FOR I=1 TO N
110   K12=H*F(X00,Y00)
120   K22=H*F(X00+H,Y00+K12)
130   Y12=Y00+0.5*(K12+K22)
140   X00=X00+H
150   Y00=Y12
160   NEXT I
170   IF  ABS (Y12-Y1)<=E THEN 200 ELSE 180
180   N=N*2
190   GO TO 70
200   PRINT Y12
210   STOP
```

(٥-١-٣) طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة

Fourth - order Runge - Kutta Method

وتتميز هذه الطريقة بأنها أعلى دقة من الطريقة السابقة ولكنها تتطلب حسابات أكثر .

بوضع $M = 4$ فى الصيغة العامة نجد أن

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h.f(x_0, y_0) \\
k_2 &= h.f(x_0 + a_2 h, y_0 + b_2 k_1) \\
k_3 &= h.f(x_0 + a_3 h, y_0 + b_3 k_2) \\
k_4 &= h.f(x_0 + a_4 h, y_0 + b_4 k_3) \\
kav &= c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4
\end{aligned}
$$

ومن ثم

$$y_1 = y_0 + kav$$

ويمكن تحديد المعاملات فى الصيغ السابقة بأتباع نفس السلوب الذى استخدم فى إيجاد المعاملات الخاصة بطريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية لنحصل على :

$c_1 = 1/6$, $c_2 = 2/6$, $c_3 = 2/6$, $c_4 = 1/6$

$a_2 = a_3 = 1/2$, $b_2 = b_3 = 1/2$, $a_4 = b_4 = 1$

وبالتالى :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h.f(x_0, y_0) \\
k_2 &= h.f(x_0 + h/2 \;, y_0 + k_1/2) \\
k_3 &= h.f(x_0 + h/2 \;, y_0 + k_2/2) \\
k_4 &= h.f(x_0 + h \;, y_0 + k_3) \\
kav &= \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] \\
y_1 &= y_0 + kav
\end{aligned}
$$

مثال (٥-٣) : باستخدام طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة احسب y عند $x = 0.6$ وذلك إذا كان

$$y` = \sqrt{x + y} \quad , \quad y(0.4) = 0.41$$

الحل : من المسألة :

$x_0 = 0.4 \quad , \quad y_0 = 0.41 \quad , \quad x_1 = 0.6 \quad , \quad f(x, y) = \sqrt{x+y}$

$$\therefore h = 0.6 - 0.4 = 0.2$$

ويكون :

$$k_1 = h.f(x_0, y_0) = h \sqrt{x_0 + y_0}$$
$$= 0.2\sqrt{0.4+0.41} = 0.18$$
$$k_2 = h.f(x_0 + h/2 \ , \ y_0 + k_1/2) = h \sqrt{(x_0 + h/2) + (y_0 + k_1/2)}$$
$$= 0.2\sqrt{(0.4+0.1)+(0.41+0.09)} = 0.2$$
$$k_3 = h.f(x_0 + h/2 \ , \ y_0 + k_2/2) = h \sqrt{(x_0 + h/2) + (y_0 + k_2/2)}$$
$$= 0.2\sqrt{(0.4+0.1)+(0.41+0.1)} = 0.200998$$
$$k_4 = h.f(x_0 + h \ , \ y_0 + k_3) = h \sqrt{(x_0 + h) + (y_0 + k_3)}$$
$$= 0.2\sqrt{(0.4+0.2)+(0.41+0.200998)} = 0.220091$$
$$kav = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 0.200348$$

وبالتالى :

$$y_1 = y_0 + kav$$
$$= 0.41 + 0.200348$$
$$= 0.610348$$

مثال (٥-٤) : إذا كان $y` = 4\sqrt{x} + 5\sqrt{y}$ وكان $y(0.36) = 1.21$ أحسب y عند $x=0.4$ مستخدما

(١) طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية

(٢) طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة

(يراعى الاحتفاظ بأربعة أرقام عشرية) .

الحل : من المسألة :

$$x_0 = 0.36 \quad , \quad y_0 = 1.21 \quad , \quad x_1 = 0.4 \quad , \quad f(x,y) = 4\sqrt{x} + 5\sqrt{y}$$

$$\therefore h = 0.4 - 0.36 = 0.04$$

أولا : باستخدام طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الثانية

$$k_1 = h.f(x_0, y_0) = h\ (4\sqrt{x_0} + 5\sqrt{y_0})$$
$$= 0.04\left[4\sqrt{0.36} + 5\sqrt{1.21}\right] = 0.316$$
$$k_2 = h.f(x_0 + h\ ,\ y_0 + k_1) = h\left[4\sqrt{x_0 + h} + 5\sqrt{y_0 + k_1}\right]$$
$$= (0.04)\left[4\sqrt{0.36 + 0.04} + 5\sqrt{1.21 + 0.316}\right] = 0.3483$$
$$kav = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0.3321$$
$$\therefore y_1 = y_0 + kav = 1.5421$$

ثانيا : باستخدام طريقة رونجا - كوتا من الدرجة الرابعة

$$k_1 = h.f(x_0, y_0) = 0.316$$

$$k_2 = h.f(x_0 + h/2 \ , \ y_0 + k_1/2) = h \left[4\sqrt{x_0 + h/2} + 5\sqrt{y_0 + k_1/2}\right]$$

$$= 0.04\left[4\sqrt{0.36 + 0.02} + 5\sqrt{1.21 + 0.158}\right] = 0.3326$$

$$k_3 = h.f(x_0 + h/2 \ , \ y_0 + k_2/2) = h \left[4\sqrt{x_0 + h/2} + 5\sqrt{y_0 + k_2/2}\right]$$

$$= (0.04)\left[4\sqrt{0.36 + 0.02} + 5\sqrt{(1.21 + 0.1663)}\right] = 0.3333$$

$$k_4 = h.f(x_0 + h \ , \ y_0 + k_3) = h \left[4\sqrt{x_0 + h} + 5\sqrt{y_0 + k_3}\right]$$

$$= (0.04)\left[4\sqrt{(0.36 + 0.04)} + 5\sqrt{1.21 + 0.3333}\right] = 0.3497$$

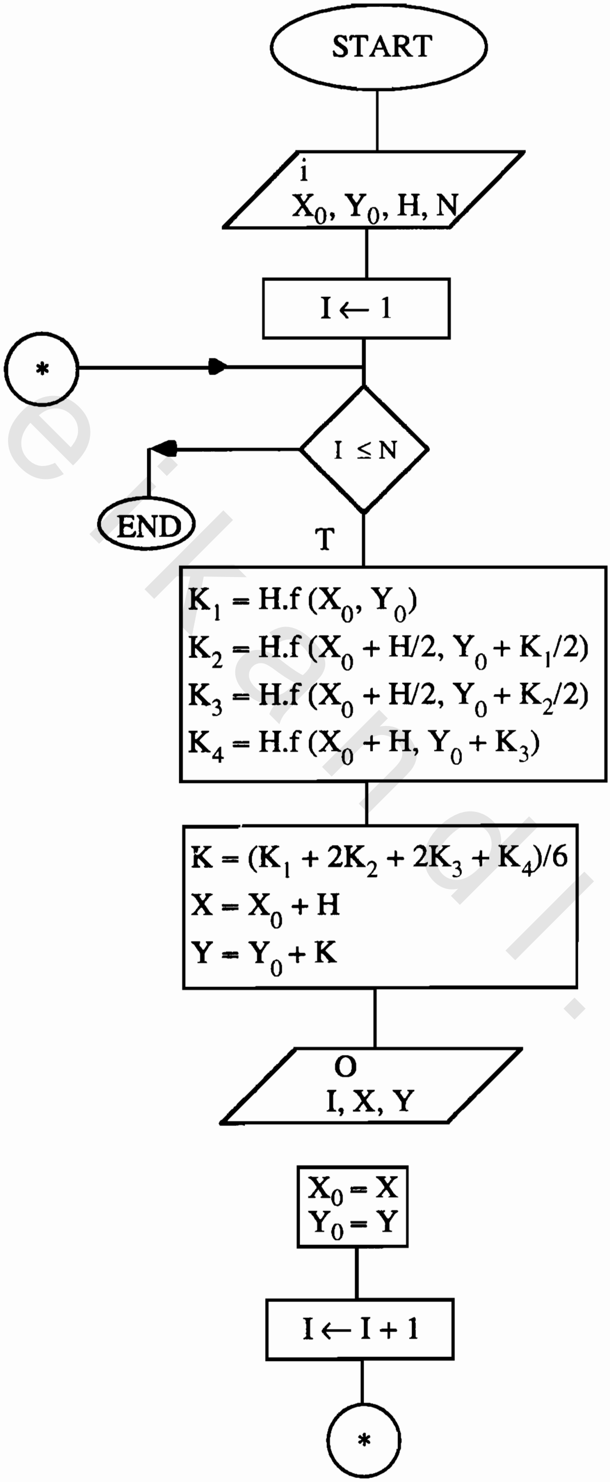
$$kav = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = 0.3329$$

$$y_1 = y_0 + kav = 1.5429$$

(٥-١-٣) خوارزمى طريقة رونجا - كوتا من الرتبة الرابعة على الحاسب.

برنامج لحساب y_i عند x_i حيث

$$x_i = x_0 + ih \quad , \quad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,N$$


START
i
X0, Y0, H, N
I ← 1
*
I ≤ N
END
T
K1 = H.f (X0, Y0)
K2 = H.f (X0 + H/2, Y0 + K1/2)
K3 = H.f (X0 + H/2, Y0 + K2/2)
K4 = H.f (X0 + H, Y0 + K3)
K = (K1 + 2K2 + 2K3 + K4)/6
X = X0 + H
Y = Y0 + K
O
I, X, Y
X0 = X
Y0 = Y
I ← I + 1
*

Program (In BASIC Code)

```
10   INPUT X0,Y0,H,N
20   FOR I = 1 TO N
30   K1 = H*F(X0,Y0) ←        تعطى فى المسألة
40   K2 = H * F(X0+H/2,Y0+K1/2)
50   K3 = H * F(X0+H/2,Y0+K2/2 )
60   K4 = H * F(X0+H,Y0+K3)
70   K = (K1+2*K2+2*K3+K4) / 6
80   X = X0 + H
90   Y = Y0 + K
100  PRINT I , X , Y
110  X0 = X
120  Y0 = Y
130  NEXT I
140  STOP
```

(٥-١-٤) خطأ الاقتطاع فى طريقة رونجا - كوتا

Local Truncation Error of Runge - Kutta Method

يتواجد خطأ الاقتطاع نتيجة الاكتفاء بعدد معين من الحدود فى مفكوك تيلور وإهمال باقى الحدود وذلك اثناء إثبات صيغتى رونجا - كوتا من الرتبة الثانية : يكون الخطأ فى حدود (h^2) ويكتب على الصورة " order of (h^2) " أو باختصار "$O\ (h^2)$" بينما فى طريقة رونجا كوتا من الرتبة الرابعة فإنه يكون فى حدود (h^4) أو "$O\ (h^4)$" . وهذا يعنى أنه لتقليل هذا النوع من الأخطاء نجعل h صغيرة بقدر الإمكان .

ونلاحظ أنه فى طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الثانية نحصل على خطأ " $O\ (h^2)$ " ويلزم فى كل خطوة عمليتين حسابيتين على الدالـة f . بينما فى طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الرابعة نحصل على خطأ أقل "$O\ (h^4)$" ولكن يلزم فى كل خطـوة أربعة عمليات حسابية على الدالة f .

ومن خلال المثال التالى سيتضح لنا مدى التحسن فى الدقة التى نحصل عليها نتيجة استخدام طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الرابعة مقارنة مع طريقة الرتبة الثانية .

مثال (٥–٥) : إذا كان $y` = -y + x + 1$ وكان $y\ (0) = 1$

فأوجد $y\ (0.1)$ وذلك مستخدما

(١) طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الثانية ،

(٢) طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الرابعة ،

وإذا كان الحل التحليلى للمعادلة التفاضلية السابقة هو $y_e = x + e^{-x}$

فأوجد الخطأ النسبى فى إجابتك السابقة .

الحل : من المسألة :

$$x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 1 \quad , \quad x_1 = 0.1 \ , \ f(x,y) = -y+x+1$$

$$h = 0.1 - 0 = 0.1$$

(i) باستخدام طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الثانية

$$k_1 = h.f\ (x_0\ , y_0) = h\ [-y_0 + x_0 + 1]$$
$$= (0.1)\ [-1 + 0 + 1] = 0$$
$$k_2 = h.f\ (x_0 + h\ , y_0 + k_1)$$
$$= h\ [-\ (1+0) + (0+0.1) + 1] = 0.01$$
$$kav = \frac{1}{2}\ (k_1+k_2) = 0.01$$
$$y_1 = y_0 + kav$$
$$\therefore\ y_1 = 1.01$$

(ii) باستخدام طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الرابعة

$k_1 = h.f(x_0, y_0) = 0$

$k_2 = h.f(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2)$

$= 0.1[-(1+0) + (0+0.05)+1] = 0.005$

$k_3 = h.f(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2)$

$= 0.1[-(1+0.0025) + (0+0.05)+1] = 0.00475$

$k4 = h.f(x_0 + h, y_0 + k_3)$

$= (0.1)[-(1+0.00475) + (0+0.01)+1] = 0.009525$

$kav = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 = 0.0048375$

وبالتالى :

$y_1 = y_0 + kav$

$\therefore y_1 = 1.0048375$

والآن بمعلومية الحل المضبوط (التحليلى) $y_e = x + e^{-x}$

فبوضع $x = 0.1$ نحصل على

$(y_1)_e = (0.1) + e^{-0.1} = 1.0048374$

- ويكون مقدار الخطأ الفعلى فى طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الثانية

$E = |1.0048374 - 1.01|$

$= 0.0051626$

وبالتالى فإن الخطأ النسبى يكون

$$E_r = \frac{0.0051626}{1.0048375} \cong 5.14\%$$

* بينما يكون مقدار الخطأ الفعلى فى طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الرابعة

$$E = |1.0048374 - 1.0048375| = 0.0000001$$

وبالتالى فإن الخطأ النسبى يكون

$$E_r = \frac{0.0000001}{1.0048375} \cong 0.00001\%$$

(٥–٢) طريقة مفكوك تيلور من الرتبة النونية

Method of n^{th} Order Taylor Expansion

نفرض أن المعادلة التفاضلية

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0$$

لها الحل $y(x)$ وأن هذا الحل له $(n+1)$ من المشتقات المتصلة بكتابة مفكوك الدالة $y(x)$ بدلالة كثيرة (حدود) تيلور من الدرجة n حول النقطة x_1 حيث $x_1 = x_0 + h$

$$y(x_1) = y(x_0) + \frac{h}{1!}y`(x_0) + \frac{h}{2!}y``(x_0) + \frac{h}{3!}y```(x_0) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_0)$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi),\ x_o \le \xi \le x_1$$

من المعادلة المعطاة

$$y`(x) = f(x,y(x))$$

وبالاشتقاق المتتالى لهذه المعادلة نحصل على

$$y``(x) = f'(x,y)$$
$$y```(x) = f''(x,y)$$

وعامة :

$$y^{(k)}(x) = f^{(k-1)}(x,y)$$

وبالتعويض بتلك المشتقات فى مفكوك تيلور السابق

$$\therefore y(x_1) = y(x_0) + \frac{h}{1!}f(x_0,y_0) + \frac{h^2}{2!}f``(x_0,y_0) + \frac{h^3}{3!}f```(x_0,y_0)$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0,y_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\Im, y(\Im)), x_0 \le \Im \le x_1$$

مثال (٥-٦) : باستخدام مفكوك تيلور حتى الرتبة الرابعة أوجد $y(0.1)$ وذلك إذا كان

$y` = -y + x + 1$		$y(0) = 1$

الحل :

من المسألة

$$x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 1 \quad , \quad x_1 = 0.1 \quad , \quad f(x,y) = -y + x + 1$$

$$\therefore h = 0.1$$

ومن المسألة

$$y` = -y + x + 1$$

$$\therefore y`(x_0,y_0) = -y_0 + x_0 + 1 = 0$$

بالاشتقاق مرة أخرى

$$Y`` = -Y` + 1$$

$$\therefore Y``(X_0, Y_0) = -Y`_0 + 1 = 1$$

بالاشتقاق مرة أخرى

$$Y``` = -Y`` + 0$$

$$\therefore Y```(X_0, Y_0) = -Y``(X_0, Y_0) = -1$$

وأخيرا

$$y^{(4)} = -y```$$

$$\therefore y^{(4)}(x_0,y_0) = -y```(x_0,y_0) = 1$$

بالتعويض فى المفكوك

$$\therefore y(x_1) = y_0 + \frac{h}{1!}y_0' + \frac{h^2}{2!}y'' + \frac{h^3}{3!}y''' + \frac{h^4}{4!}y_0^{(4)}$$

نحصل على

$$y(0.1) = 1 + \frac{0.1}{1!}(0) + \frac{(0.1)^2}{2!}(1) + \frac{(0.1)^3}{3!}(-1) + \frac{(0.1)^4}{4!}(1)$$

$$\therefore y(0.1) = 1.0048375$$

مثال (٥-٧) : باستخدام مفكوك تيلور حتى الرتبة الثانية أوجد $y(0.6)$ وذلك إذا كان

$$xy' = y + x^2 \qquad , \qquad y(0.5) = 1$$

الحل :

لتيسير الاشتقاق نترك المعادلة المعطاة كما هى $xy = y + x^2$ بدلاً من وضعها على الصورة $y' = \frac{y}{x} + x$.

من معلومات المسألة : $x_1 = 0.6 \quad , \quad x_0 = 0.5 \quad , \quad y_0 = 1$

$$\therefore h = 0.6 - 0.5 = 0.1$$

ومن المعادلة المعطاه

$$x_0 y_0 = y_0 + x_0^2$$

$$\therefore (0.5)y_0' = (1) + (0.5)^2$$

وبالتالى

$$y_0' = 2.5$$

وبالاشتقاق مرة أخرى للمعادلة الأصلية . $x\,y'' + y' = y' + 2x$

أى أن $x\,y'' = 2x$

$$y'' = 2$$

وبالتالى : $y_0'' = 2$

وبالتعويض فى مفكوك تيلور حتى الرتبة الثانية

$$y(x_1) \cong y_0 + \frac{h}{1!}y_0' + \frac{h^2}{2!}y_0''$$

$$\therefore y(0.6) = 0.1 + (0.1)\,(2.5) + \frac{(0.1)^2}{2}(2)$$

$$y\,(0.6) = 1.26$$

* * * * *

تمارين عامة على الباب الخامس

(١) إذا كان $y` = \frac{x^2}{y^2} + \sqrt{x}$ وكانت $y(1) = 1.21$ فأوجد y عند 1.4 , $x = 1.2$ مستخدما طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الثانية .

(٢) أعتبر المعادلة التفاضلية :

$$y` = (x + y) \quad , \quad y(0) = 0$$

(i) أحسب $y(0.1)$ وذلك باستخدام طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الرابعة .

(ii) إذا علمت أن الحل التحليلى للمعادلة المعطاه هو $y = e^x - x - 1$ فأوجد الخطأ النسبى فى الاجابة التى حصلت عليها وكيف يمكننا تقليل هذا الخطأ .

(iii) ارسم خوارزمى يعبر عن طريقة الحل فى الجزء (i)

(٣) أوجد $y(0.8)$ وذلك إذا كان

$$y` = \frac{y}{\sqrt{x + y}} \quad , \quad y(0.4) = 10.5$$

مستخدما (i) رونجا – كوتا من الرتبة الثانية .

(ii) رونجا – كوتا من الرتبة الرابعة .

(٤) إذا كان $y` = 4\sqrt{x} + 5\sqrt{y}$ وكانت $y(0.36) = 1.21$ فأوجد $y(0.4)$ وذلك باستخدام طريقة تيلور حتى الرتبة الثانية . وضح كيف يمكن زيادة دقة الحل ؟

(٥) إذا كان $y' = \sin x + e^{-x}$ وكانت $y(0) = 0$ فأوجد $y(0.2)$ وذلك مستخدما

(i) طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الرابعة .

(ii) طريقة تيلور حتى الرتبة الرابعة .

(iii) إذا علمت أن الحل التحليلى للمعادلة المعطاه هو $y = -\cos x - e^{-x} + 2$

وضح أى من الحلين فى (i) أو (ii) هو الأدق .

(٦) إذا كان $y' = 1 + x \sin(xy)$ وكانت $y(0) = 0$ فأوجد $y(0.5)$ مستخدما طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الثانية .

(٧) باستخدام طريقة رونجا – كوتا من الرتبة الرابعة أوجد $y(0.2)$ وذلك إذا كان

$$y' = 1 - y \quad , \quad y(0) = 0$$

أعد حل المسألة السابقة مستخدما طريقة تيلور حتى الرتبة الخامسة .

(٨) فى المسألة السابقة . أوجد الحل التحليلى للمعادلة التفاضلية $y' = 1 - y$ ثم قارن دقة الحل للطرق الآتية :

(i) طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية آخذاً $h = .2$

(ii) طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية آخذاً $h = .1$

(iii) طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة آخذا $h = .2$

(iv) طريقة مفكوك تيلور حتى الرتبة الثانية $(h = .2)$

* * * * *