# الباب السادس

## توفيق المنحنيات

## CURVE FITTING

### (٦-١) مقدمة INTRODUCTION :

فى كثير من المسائل العلمية يكون الموجود من علاقة بين متغير مستقل $x$ ومتغير تابع $y$ هو مجرد جدول ناشئ من تجربة معملية أو قياسات خارجية ... إلخ ، بحيث يكون المعلوم هو الأقواس $(x_i , y_i)$ حيث $i = 0,1,2,......,m$ والمطلوب هو توفيق هذه النقاط للحصول على المنحنى الأمثل Optimal Curve من نوع معين : مثلا : أمثل خط مستقيم " يوفق هذه النقاط أو " أمثل حدودية درجة ثانية " .. وهكذا . هذا معناه أن هذا المنحنى لا يجب أن يمر بهذه النقاط (وهو ما يميز هذه المسألة عن الاستكمال) ولكن يمر بين النقاط بحيث يكون مقياس للخطأ عن عدم مروره بها يكون أقل ما يمكن . ويمكننا استعمال قواعد Bases عِدّة لهذا المنحنى ولتكن عامة ممثلة بالمتوالية $\{\varnothing_i(x)\}_{i=0}^{n}$ ويجب أن تكون قواعد هذا النظام متعامدة وكافية لوصف جميع نقط الفراغ بدلالتها .. أى أن المنحنى الذى نريد الحصول عليه – وهو المنحنى الأمثل وليكن $F(x)$ – يمكن فكّه بقواعد هذا النظام كالتالى :

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varnothing_i(x) \qquad (1)$$

فيكون المطلوب هو كيفية حساب $\{ a_i \}$ التى تجعل مقياساً للخطأ أقل ما يمكن .

## (٦-٢) مقياس خطأ أدنى المربعات :

## LEAST SQUARES ERROR MEASUR

ويُعرف مقياس الخطأ هذا كالتالى :

$$\delta_2^2 = \sum_{\forall i} \left| F(x_i) - f(x_i) \right|^2 \qquad (2)$$

والتجميع هنا على كل النقاط الموجودة بالجدول . لاحظ أننا بهذا المقياس للخطأ نجمع مربعات الأخطاء عند كل نقطة بين المنحنى التوفيقى $F(x)$ ونقاط الجدول (المتغير التابع) $f(x_i)$ . ولاحظ أيضا أن المجهول فى هذه الصيغة لحساب $\delta_2^2$ هو معاملات $F(x)$ من الصيغة السابقة (فى (1) ) ، إذ أنه إذا كانت $f(x)$ معطاه على هيئة نقاط جدولية ، فإن $f(x_i) = y_i$ وبالتالى تأخذ العلاقة (2) الصورة التالية :

$$\delta_2^2 = \sum_i \left[ a_o \varnothing_o(x_i) + a_2 \varnothing_1(x_i) + \ldots\ldots + a_n \varnothing_n(x_i) - y_i \right]^2 \qquad (3)$$

ولإيجاد المعاملات $\{a_i\}$ فإننا نحسبها بحيث يكون $\delta_2^2$ أقل ما يمكن وهو ما يؤدى إلى أن يكون $\delta_2$ أيضا أقل ما يمكن . وذلك يحدث بحل المعادلات الاتية :

$$\frac{\partial \delta_2^2}{\partial a_j} = 0 \quad , \quad j = 0,1,2,\ldots\ldots,n \qquad (4)$$

وهى $(n + 1)$ من المعادلات الخطية فى $(n + 1)$ من المجاهيل . ويمكن إيجاد هذه المعاملات من المعادلات التالية بعد إستعمال المعادلات (4) :

$$\frac{\partial \delta_2^2}{\partial a_o} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i 2\left[ a_o \varnothing_o(x_i) + \ldots\ldots + a_o \varnothing_n(x_i) - y_i \right] \varnothing_o(x_i) = 0$$

وبإعادة الصياغة تصبح كالتالى :

$$\left[\sum_i\left(\varnothing_o^{\,2}(x_i)\right)\right]a_0+\left[\sum_i\left(\varnothing_1(x_i)\right)\left(\varnothing_o(x_i)\right)\right]a_1+\dots\dots+\left[\sum_i\left(\varnothing_n(x_i)\right)\left(\varnothing_o(x_i)\right)\right]a_n$$

$$=\sum_i y_i\varnothing_o(x_i)\qquad\dots\dots(A_1)$$

كذلك :

$$\frac{\partial\delta_2^2}{\partial a_1}=0\qquad\Rightarrow$$

$$\left[\sum_i\left(\varnothing_o(x_i)\right)\left(\varnothing_1(x_i)\right)\right]a_o+\left[\sum_i\left(\varnothing_1^{\,2}(x_i)\right)\right]a_1+\dots\dots+\left[\sum_i\left(\varnothing_n(x_i)\right)\left(\varnothing_1(x_i)\right)\right]a_n$$

$$=\sum_i y_i\varnothing_1(x_i)\qquad\dots\dots(A_2)$$

وهكذا حتى نحصل على المعادلة الأخيرة :

$$\frac{\partial\delta_2^2}{\partial a_n}=0\qquad\Rightarrow$$

$$\left[\sum_i\left(\varnothing_o(x_i)\right)\left(\varnothing_n(x_i)\right)\right]a_o+\left[\sum_i\left(\varnothing_1(x_i)\right)\left(\varnothing_n(x_i)\right)\right]a_1+\dots\dots+\left[\sum_i\left(\varnothing_n(x_i)\right)\right]\;a_n$$

$$=\sum_i y_i\varnothing_n(x_i)\dots\dots(A_{n+1})$$

وهى (n+1) من المعادلات فى (n+1) من المجاهيل يمكن كتابتها فى صورة مصفوفية كالتالى

$$\begin{bmatrix} \sum\varnothing_o^2 & \sum\varnothing_1\varnothing_o & \sum\varnothing_2\varnothing_o & \dots & \dots & \sum\varnothing_n\varnothing_o \\ \sum\varnothing_o\varnothing_1 & \sum\varnothing_1^2 & \sum\varnothing_2\varnothing_1 & \dots & \dots & \sum\varnothing_n\varnothing_1 \\ \sum\varnothing_o\varnothing_2 & \sum\varnothing_1\varnothing_2 & \sum\varnothing_2^2 & \dots & \dots & \sum\varnothing_n\varnothing_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\varnothing_o\varnothing_n & \sum\varnothing_1\varnothing_n & \sum\varnothing_2\varnothing_n & \dots & \dots & \sum\varnothing_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ .. \\ .. \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y\varnothing_o \\ \sum y\varnothing_1 \\ \sum y\varnothing_2 \\ .. \\ .. \\ \sum y\varnothing_n \end{bmatrix}$$

وتُكتب هذه المعادلات رمزياً كالآتى :

$$N\underline{A} = \underline{Y}$$

وتُسمى N بالمصفوفة القياسية Normal Matrix ، كما تُسمى المعادلات بالمعادلات القياسية Normal Equations . وللحصول على المتجه $\underline{A}$ الذى بـه المعـاملات المجهولـة نتبـع أى طريقة من طرق حل المعادلات السابق ذكرها فى الباب الثانى .

### (٦-٢-١) استخدام القواعد $\{x^i\}_{i=0}^n$ :

تكون الحدودية F(x) فى الصورة :

$$F(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + .......+........a_nx^n$$

وتأخذ المعادلات الصورة المصفوفية التالية:

$$\begin{bmatrix} (m+1) & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \dots & \dots & \Sigma x_i^n \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \dots & \dots & \Sigma x_i^{n+1} \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \dots & \dots & \Sigma x_i^{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma x_i^n & \Sigma x_i^{n+1} & \Sigma x_i^{n+2} & \dots & \dots & \Sigma x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \\ \dots \\ \dots \\ \Sigma x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

حيث $(m + 1)$ هى عدد النقاط والتجميع على عدد النقاط. ويمكن إعداد جدول خاص يمكن حساب التجميعات منه بسهولة.

ويمكن كتابة حالة خاصة سريعة الحساب كالآتى:

دع $F(x) = a_0 + a_1 x$ هو أحسن خط مستقيم توفيقى للبيانات المعطاه، وبالتالى تكون المعادلات الطبيعية هى:

$$\begin{bmatrix} (m+1) & \Sigma x \\ \Sigma x & \Sigma x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma xy \end{bmatrix}$$

وبالتالى يكون:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\{(m+1)\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2\}} \cdot \begin{bmatrix} \Sigma x^2 & -\Sigma x \\ -\Sigma x & (m+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma xy \end{bmatrix}$$

أى أن :

$$a_o = \frac{1}{\left\{(m+1)\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right\}}\cdot\left[\left(\sum x^2\right)\left(\sum y\right) - \left(\sum x\right)\left(\sum xy\right)\right]$$

$$a_1 = \frac{1}{\left\{(m+1)\sum x^2 - \left(\sum x^2\right)\right\}}\cdot\left[\left(-\sum x^2\right)\left(\sum y\right) + (m+1)\left(\sum xy\right)\right]$$

وشرط وجود الحل هو أن :

$$(m+1)\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2 \neq 0$$

ويمكن إعداد جدول كالتالى :

| $x$ | $y$ | $x^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | $x_o^2$ | $x_0 y_0$ |
| $x_1$ | $y_1$ | $x_1^2$ | $x_1 y_1$ |
| ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... |
| $x_m$ | $y_m$ | $x_m^2$ | $x_m y_m$ |
| $\sum x_i$ | $\sum y_i$ | $\sum x_i^2$ | $\sum x_i y_i$ |

مثال (٦-١) : أوجد أمثل خط مستقيم على مقياس أدنى المربعات $\delta_2^2$ للبيانات التالية :

| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| y | 6.5 | 9.6 | 13.8 | 18.3 |

الحل :

بتكوين الجدول التالى :

| $x$ | $y$ | $x^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 6.5 | 1 | 6.5 |
| 2 | 9.6 | 4 | 19.2 |
| 3 | 13.8 | 9 | 41.4 |
| 4 | 18.3 | 16 | 73.2 |
| 10 | 48.2 | 30 | 140.3 |

وبالتالى تكون المعادلات الطبيعية :

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48.2 \\ 140.3 \end{bmatrix}$$

ويكون الحل النهائى :

$$a_0 = 2.15 \quad , \quad a_1 = 3.96$$

وتكون معادلة أمثل خط مستقيم على مقياس $\delta_2^2$ هى :

$$\boxed{y = 2.15 + 3.96x}$$

## (٦-٢-٢) إستخدام القواعد $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ : قواعد حدوديات لاجندر

**Legendre Polynomials**

وهذه الحدوديات مُعرفة فى الفترة (1,1-) وهى حدوديات متعامدة من (1-) إلى (1+) . أى أن :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_m(x).P_n(x)dx = 0 \qquad m \neq n}$$

وبعض الصور الخاصة لهذه الحدوديات الأولى على الصورة التالية :

$$\boxed{\begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \end{array}}$$

ونلاحظ أن القواعد السابقة $\{x_i^n\}$ تتفق مع القواعد الجديدة { $P_i(x)$ } حتى الدرجة الأولى ، فالخط المستقيم الأمثل على مقياس $\delta_2^2$ سيكون منطبقا بين القاعدتين . ولكن يبدأ الإختلاف بدء من الدرجة الثانية فما فوق .

مثال (٦-٢) : أوجد أمثل حدودية درجة ثانية على قواعد لاجندر وبمقياس $\delta_2^2$ توفق البيانات التالية :

| x | 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| y | 7.2 | 22.8 | 33.6 | 47.4 |

الحل :

بإعداد الجدول التالى :

| $x$ | $y$ | $P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$ | $xy$ | $P_2y$ | $P_1^2=x^2$ | $P_2^2$ | $xP_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7.2 | 1 | 7.2 | 7.2 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 22.8 | 13 | 68.4 | 296.4 | 9 | 169 | 39 |
| 4 | 33.6 | 23.5 | 134.4 | 789.6 | 16 | 552.25 | 94 |
| 5 | 47.4 | 37 | 237.0 | 1753.8 | 25 | 1369 | 185 |
| 13 | 111 | 74.5 | 447 | 2847 | 51 | 2091.25 | 319 |

وتكون المعادلات القياسية :

$$\begin{bmatrix} \sum P_0^2 & \sum P_1P_0 & \sum P_2P_0 \\ \sum P_0P_1 & \sum P_1^2 & \sum P_2P_1 \\ \sum P_0P_2 & \sum P_1P_2 & \sum P_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum P_0y \\ \sum P_1y \\ \sum P_2y \end{bmatrix}$$

وباستعمال الصورة الرياضية المعروفة لـ $P_0,P_1,P_2$ تصبح المعادلات كالتالى :

$$\begin{bmatrix} 4 & \sum x & \sum P_2 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum xP_2 \\ \sum P_2 & \sum xP_2 & \sum P_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum P_2y \end{bmatrix}$$

ومن الجدول (الذى أعد لحساب التجميعات المطلوبة) نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 4 & 13 & 74.5 \\ 13 & 51 & 319 \\ 74.5 & 319 & 2091.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 111 \\ 447 \\ 2847 \end{bmatrix}$$

وبحل هذه المعادلات (بطريقة جاوس - جوردان مثلا) نحصل على :

$a_0 = 3.386$ , $a_1 = 3.068$ , $a_2 = 0.773$

وبالتالى :

$$y = (3.386) + (3.068)\,x + (0.773)\left(\frac{1}{2}\right)\left(3x^2 - 1\right)$$

والذى يمكن تيسيره إلى : $\boxed{y = 2.9995 + 3.086x + 1.1595x^2}$

* * * * *

# تمرينات عامة على الباب السادس

(١) باستعمال القواعد $\{x^i\}_{i=0}^{n}$ ومقياس $\delta_2^2$ أوجد الخط الأمثل الذى يوفق البيانات التالية :

| x | 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| y | 7.2 | 22.8 | 33.6 | 47.4 |

(٢) باستعمال قواعد لاجندر $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ أكتب المعادلات القياسية لمقياس $\delta_2^2$ والتى توفق البيانات التالية لمنحنى درجة ثانية :

| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| y | 6.5 | 9.6 | 12.8 | 18.3 |

(٣) أوجد المستقيم ومنحنى الدرجة الثانية والثالثة الأمثل الذى يمثل البيانات

| x | 1 | 3 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| y | 1.5 | 5.0 | 6.5 | 12.5 |

على مقياس $\delta_2^2$ بطريقتين مختلفتين .

(٤) باستعمال قواعد لاجندر $\{P_i\}_{i=0}^{3}$ أكتب المعادلات القياسية لتوفيق المنحنى $F(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i P_i(x)$ لنقاط معطاة $i = 0, 1, \ldots\ldots, m$ , $(x_i, y_i)$ بأقل خطأ $\delta_2^2$ . ثم وفق الخط المستقيم للبيانات :

| x | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| y | 3 | 4.5 | 2.5 |

على نفس المقياس والقواعد .

* * * * *