

الجزء الرابع

الهندسة " المثلثات "

GEOMETRY / TRIGONOMETRY



## الدروس الثالث والعشرون :

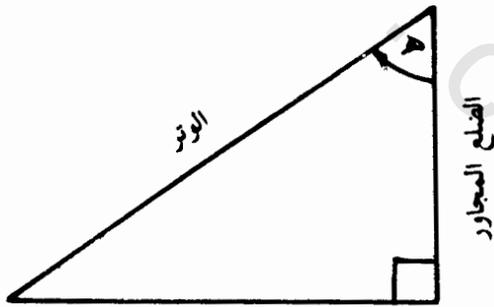
### النسب المثلثية

### Trigonometric ratios

#### [ ٢٢ - ١ ] مقدمة :

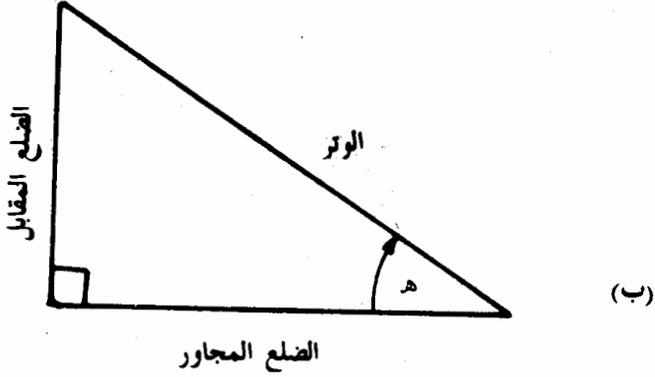
علمنا مما سبق بالجزء الثاني « الكتاب الثاني » أن هنالك علاقة تربط بين الأطوال الثلاثة للمثلث القائم الزاوية وتعرف هذه العلاقة بقاعدة أو نظرية فيثاغورث والتي تنص على أن المربع المنشأ على الوتر يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين .

وسوف نوجد علاقات أخرى بين أطوال الأضلاع والزوايا في المثلث القائم الزاوية فقط ، انظر الرسم شكل (٢٢ - ١) .



الضلع المقابل

(أ)



شكل [ ٢٢ - ١ ] أ ، ب

[ ١ ] الوتر : *hypotenuse*

هو أطول ضلع بالمثلث ودائماً يكون في مقابل الزاوية القائمة .

[ ٢ ] المجاور : *the adjacent side*

هو الضلع الذي يبدأ قياس الزاوية منه .

[ ٣ ] المقابل : *the opposite side*

هو الضلع المقابل للزاوية .

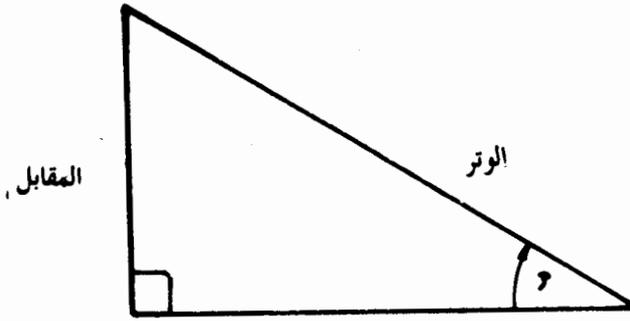
وسوف نعرف أن هنالك ثلاث علاقات عامة تربط بين الأضلاع والزوايا في المثلث القائم الزاوية وتعرف بالنسب المثلثية .

[ ٢٢ - ٢ ] ظل الزاوية « ظا هـ » :

*the tangent of an angle "tan θ"*

تُعرف النسبة فيما بين الضلع المقابل للزاوية والضلع المجاور لها بظل الزاوية ، انظر شكل (٢٢ - ٢) .

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$$



$$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \text{ظا } \theta$$

شكل [ ٢٢ - ٢ ]

ويمكننا باستخدام الآلة الحاسبة إيجاد ظل الزاوية كما في المثالين التاليين :

□ مثال (١) :

أوجد ظل الزاوية  $37^\circ$  مقرباً إجابتك لثلاث أرقام عشرية .

□ الحل :

نسجل رقم  $37^\circ$  ثم نضغط على مفتاح  $\tan$  فتظهر لنا القراءة .

$$\tan 37^\circ = 0.75355405$$

ثم نقرّبها فتكون الإجابة :

$$\text{ظا } 37^\circ = 0.754$$

□ مثال (٢) :

أوجد ظل الزاوية  $70.7^\circ$  مقرباً إجابتك لأقرب ثلاث أرقام عشرية .

□ الحل :

نسجل رقم  $70.7^\circ$  ثم نضغط على مفتاح  $\tan$

فنجعل على :

$$\tan 75.7^\circ = 3.923156294$$

ثم نقرنها فتكون الإجابة :

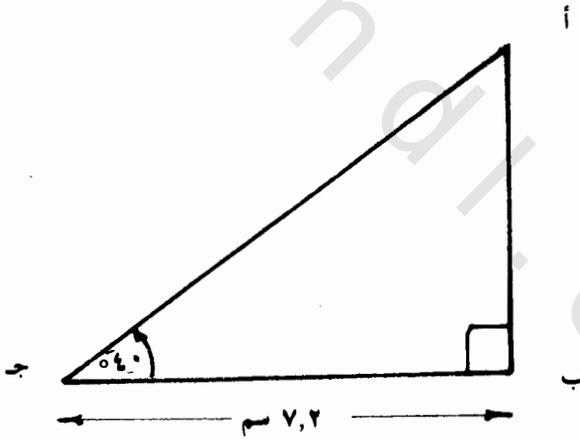
$$\text{ظا } 75.7^\circ = 3.923$$

### [ ٢٢ - ٣ ] تطبيقات على استخدام ظل الزاوية في حسابات المثلث :

يمكننا الآن حساب طول الضلع المقابل للزاوية ، إذا علمنا الزاوية وطول الضلع المجاور لها .

□ مثال :

في شكل (٢٢ - ٣) أوجد طول الضلع أ ب .



شكل [ ٢٢ - ٣ ]

□ الحل :

أ ب هو الضلع المقابل للزاوية جـ

، ب ج هو الضلع المجاور للزاوية جـ

$$\frac{\text{المقابل لزاوية ج}}{\text{المجاور لزاوية ج}} = \text{وحيث أن ظ ج} =$$

$$\therefore \text{ظ } 40^\circ = \frac{ا ب}{7,2}$$

$$\therefore ا ب = 7,2 \times \text{ظ } 40^\circ$$

وباستخدام الآلة الحاسبة :

نسجل رقم 40 ثم نضغط على مفتاح tan ثم نضرب الناتج في 7,2

$$\therefore ا ب = 6,042 \text{ سم لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .}$$

□ **ملاحظة :**

يمكن حل المسألة باعتبار أن زاوية  $ا = 50^\circ$  [  $90^\circ - 40^\circ$  ] وبذلك يكوب الضلع  $ا ب$  هو المجاور للزاوية  $50^\circ$  (المقابل للزاوية  $40^\circ$ ) ويكون الضلع  $ب ج = 7,2$  هو المقابل للزاوية  $50^\circ$  (المجاور للزاوية  $40^\circ$ )

$$\therefore \text{ظ } 50^\circ = \frac{7,2}{ا ب}$$

$$\therefore ا ب = \frac{7,2}{\text{ظ } 50^\circ} = 6,042 \text{ سم}$$

□ **مثال :**

أوجد لأقرب جزء من العشرة من الدرجة ، الزاوية ه التي ظلها  $= 0,75$  .

□ **الحل :**

عندما يراد التعبير رياضياً عن الزاوية التي ظلها كذا نقول ه = ظ<sup>-1</sup>

$0,75$  ، وتقرأ ظا ناقص واحد  $0,75$  ، أو ه هي الزاوية التي ظلها  $0,75$  ،

$$\theta = \tan^{-1} 0.75$$

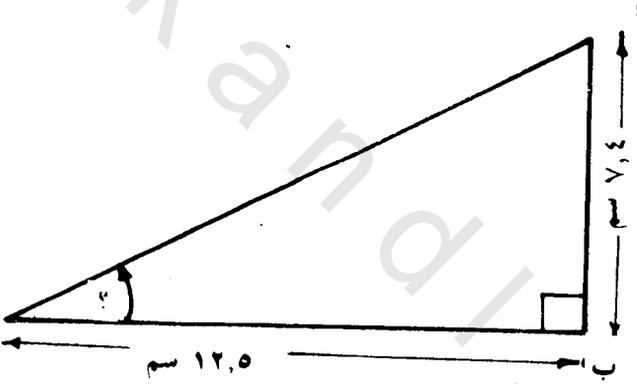
وبالحاسبة ، فإننا نُسجل ٠,٧٥ بالآلة ثم نضغط على مفتاح  $\tan^{-1}$  فيعطى القراءة  $٣٦,٨٦٩$  بالدرجات وهى مقدار الزاوية هـ المطلوبة وبالتقريب

$$\therefore \text{زاوية هـ} = ٣٦,٩$$

وعلى هذا فإنه بمعلومية ضلعين من المثلث القائم (المقابل والمجاور للزاوية) فإنه يمكن إيجاد ظل الزاوية ، وقيمة الزاوية بالدرجات .

□ مثال :

أوجد قيمة الزاوية جـ فى المثلث ا ب جـ بالشكل (٢٢ - ٤) .



شكل [ ٢٢ - ٤ ]

□ الحل :

ا ب هو الضلع المقابل ويساوى ٧,٤ سم

ب جـ هو الضلع المجاور ويساوى ١٢,٥ سم

$$\therefore \text{ظا جـ} = \frac{٧,٤}{١٢,٥} = ٠,٥٩٢$$

∴ جـ هي الزاوية التي ظلها = ٠,٥٩٢ = ظل<sup>-١</sup> ٠,٥٩٢ .

$$\tan^{-1} = \text{جـ}$$

نُدخل ٠,٥٩٢ بالآلة الحاسبة ثم نضغط على مفتاح inv ثم مفتاح  $\tan^{-1}$

∴ جـ = ٣٠,٦٢٥٥ = ٣٠,٦ (بالتقريب)

### [ ٢٢ - ٤ ] تدريبات :

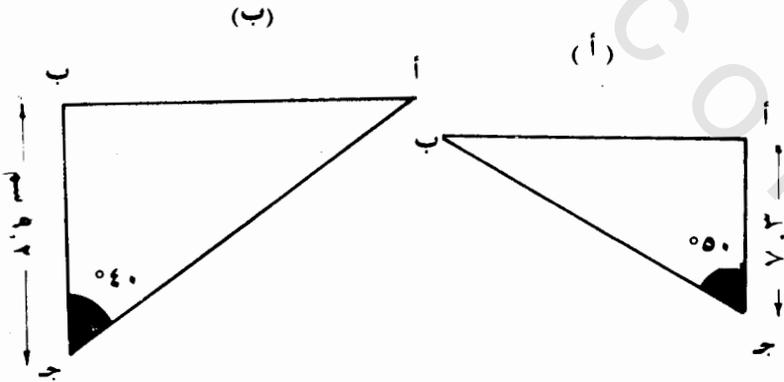
أولاً : أوجد ظل الزاوية الآتية مُقرباً إيجابتك لأقرب ثلاث علامات عشرية .

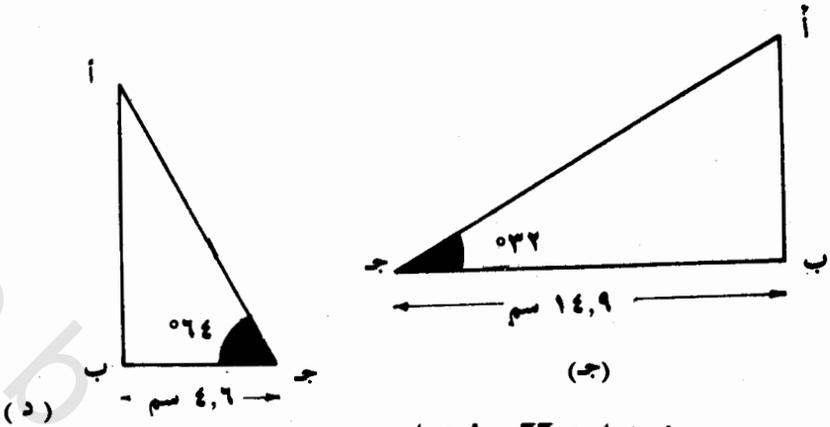
- |            |          |           |           |          |
|------------|----------|-----------|-----------|----------|
| ٥٦٠ (٥)    | ٥٥٥ (٤)  | ٥٣٠ (٣)   | ٥١٥ (٢)   | ٥٣٥ (١)  |
| ٥٨٩,٢ (١٠) | ٨٨,٣ (٩) | ٥٧٠,٢ (٨) | ٥١٨,٣ (٧) | ٧٢,٧ (٦) |

ثانياً : أوجد قيمة الزوايا « لأقرب عُشر درجة » والتي ظلها كما يلي :

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| [ ٢ ] ظل <sup>-١</sup> ٢,١٥٨ | [ ١ ] ظل <sup>-١</sup> ٠,٣٥  |
| [ ٤ ] ظل <sup>-١</sup> ٠,٤٧  | [ ٣ ] ظل <sup>-١</sup> ١,٥٤٦ |
| [ ٦ ] ظل <sup>-١</sup> ٠,٤٢٥ | [ ٥ ] ظل <sup>-١</sup> ٧,٤٣٦ |

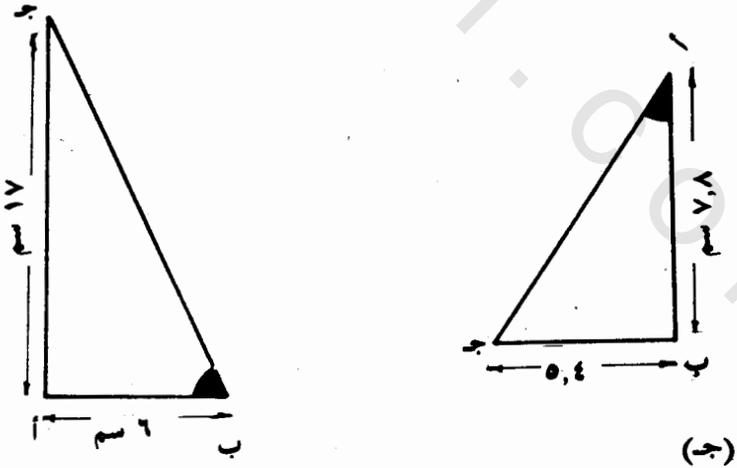
ثالثاً : أوجد طول الضلع ا ب في المثلثات التالية بشكل (٢٢ - ٥)





شكل [ ٢٢ - ٥ ] ( ا ، ب ، ج ، د )

رابعاً : أوجد الزاوية ا في المثلثات التالية بشكل ( ٢٢ - ٦ )



شكل [ ٢٢ - ٦ ] ( ا ، ب ، ج ، د )

خامساً : احسب المطلوب في المثلثات الآتية :

[ ١ ] في  $\Delta$  ا ب ج ،  $\hat{ب} = ٥٩.٠$  ، ا ب = ١٥ ، ب ج = ١٣ ، ٤ ، أوجد  $\hat{ا}$  .

[ ٢ ] في  $\Delta$  س ص ع ،  $\hat{ع} = ٥٩.٠$  ، س ص = ٣ ، ٥ ، ع ص = ٨ ، ٤ ، سم ، أوجد س .

[ ٣ ] في  $\Delta$  ل م ن ،  $\hat{ل} = ٥٩.٠$  ، زاوية ن = ٣٥ ، ٣ ، ل م = ١٠ سم ، أوجد م ، ل ن .

[ ٢٢ - ٥ ] جيب الزاوية ، « جا ه » ،

**The sin of an angle Sin  $\theta$ .**

تُعرف النسبة فيما بين الضلع المقابل للزاوية وطول الوتر بجيب الزاوية ، انظر شكل (٢٢ - ٧) .



شكل [ ٢٢ - ٧ ]

ويمكن باستخدام الآلة الحاسبة مثلما سبق في ظل الزاوية فإنه يمكننا إيجاد جيب الزاوية وإيجاد الزاوية المعلوم جيبها .

□ مثال (١) :

أوجد جيب الزاوية ٤٣ ، ٢ ° مقرباً لإجابتك لأقرب ثلاث علامات عشرية .

□ الحل :

بالآلة الحاسبة : جا  $43,2^\circ = 0,6845047106$

وبالتقريب =  $0,685$

□ مثال (٢) :

أوجد لأقرب عُشر درجة قيمة الزاوية التي جيبها

$$= 0,7327$$

.. حـ هـ =  $0,7327$

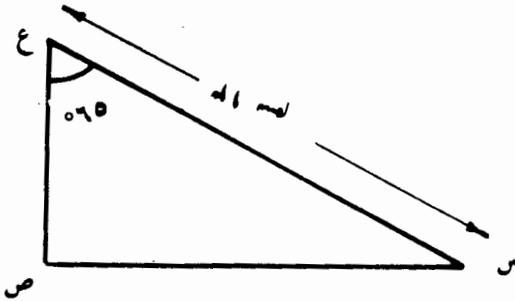
.. هـ = حـ<sup>-١</sup> =  $0,7327$

$$= 47,1^\circ$$

[ ٢٢ - ٦ ] تطبيقات على استخدام جيب الزاوية في حساب المثلث :

□ مثال (١) :

من شكل (٢٢ - ٨) ، أوجد طول الضلع س ص مقرباً إجابتك لأقرب ثلاث أرقام عشرية ،



شكل [ ٢٢ - ٨ ]

س ع هو وتر المثلث س ص ع  
 ، س ص هو المقابل للزاوية ع

$$\frac{\text{س ص}}{١٣} = \frac{\text{س ع}}{٦٥} = \text{حا ع} = \text{حا جا} = ٦٥$$

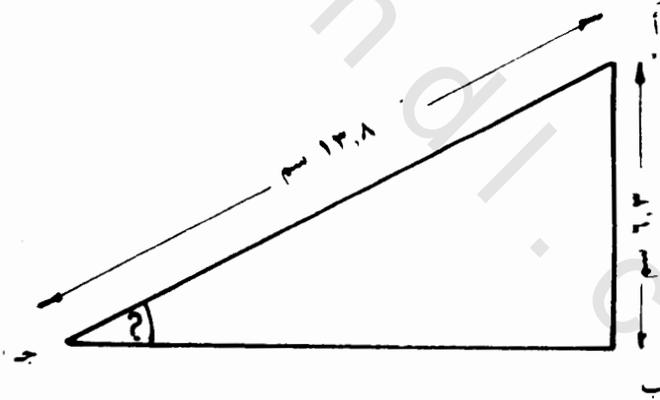
$$\therefore \text{س ص} = ١٣ \times \text{حا جا} = ٦٥$$

$$١١,٧٨ = ٠,٩٠٦٣٠ \times ١٣ =$$

□ مثال (٢) :

في شكل (٢٢ - ٩) ، المثلث ا ب ج فيه ا ب = ٦,٣ سم ، ا ج = ١٣,٨ سم .

المطلوب إيجاد زاوية ج مقربة لأقرب رقم عشري واحد .



شكل [ ٢٢ - ٩ ]

$$\text{حا ج} = \frac{٦,٣}{١٣,٨} = ٠,٤٥٦٥٢١٧$$

$$\therefore \hat{ج} = \text{حا}^{-١} = ٠,٤٥٦٥٢١٧٣٩ = ٥٢٧,٢$$

## [ ٢٢ - ٧ ] تدريبات :

أولاً : أوجد جيوب الزوايا التالية مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

[ ١ ]  $١٣^\circ$  [ ٢ ]  $٢٤,٧^\circ$  [ ٣ ]  $٣٥^\circ$  [ ٤ ]  $٦٥^\circ$

[ ٥ ]  $٤٢^\circ$  [ ٦ ]  $٥٨^\circ$  [ ٧ ]  $٢٧,٧^\circ$  [ ٨ ]  $٨٨,١^\circ$

[ ٩ ]  $٤٦,٣^\circ$  [ ١٠ ]  $٢٢,٨^\circ$  [ ١١ ]  $٧٧,٧^\circ$  [ ١٢ ]  $٢,٣^\circ$

ثانياً : أوجد الزوايا التالية لأقرب عُشر درجة ، المعلوم جيب كل منها :

[ ١ ] جا $^{-١}$   $٠,٩٤٦٢$  [ ٢ ] جا $^{-١}$   $٠,٣٥٨٣$

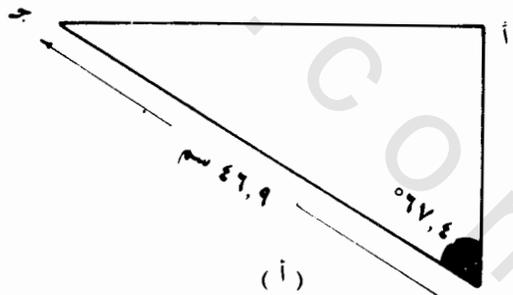
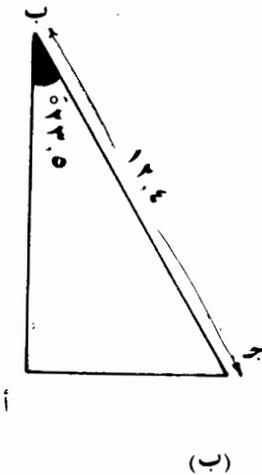
[ ٣ ] جا $^{-١}$   $٠,٦٧٨٢$  [ ٤ ] جا $^{-١}$   $٠,٥٠٥٥$

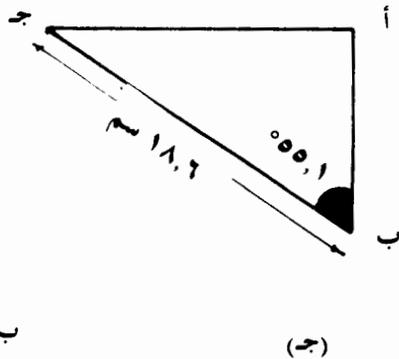
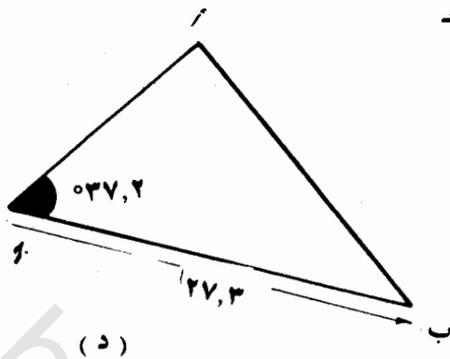
[ ٥ ] جا $^{-١}$   $٠,٧٧٢٨$  [ ٦ ] جا $^{-١}$   $٠,٤١٢$

[ ٧ ] جا $^{-١}$   $٠,٨٢٥٨$  [ ٨ ] جا $^{-١}$   $٠,٦١٨٤$

[ ٩ ] جا $^{-١}$   $٠,٢٣٢٥$

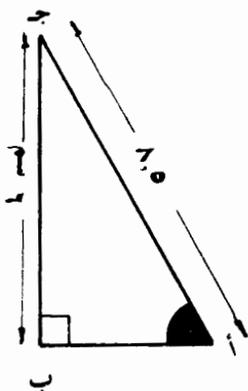
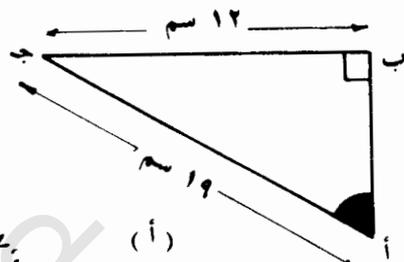
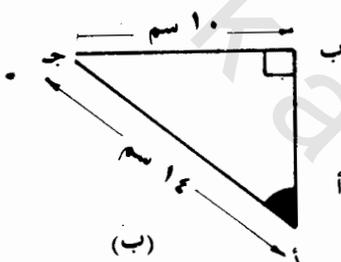
ثالثاً : أوجد طول الضلع ا ب في المثلثات التالية بشكل ( ٢٢ - ١٠ ) مقرباً إجابتك لأقرب ثلاث أرقام عشرية .





شكل [ ٢٢ - ١٠ ] ( أ ، ب ، ج ، د )

رابعاً : أوجد الزاوية ا في المثلثات التالية بشكل ( ٢٢ - ١١ ) .



شكل [ ٢٢ - ١١ ] ( أ ، ب ، ج ، د ، هـ )

خامساً : احسب المطلوب في المثلثات التالية :

[ ١ ] في المثلث ا ب ج زاوية ب =  $٥٩٠^\circ$  ، زاوية ج =  $٥٣٥^\circ$  ، ا ج =  $١٣,٨$  سم فأوجد طول ا ب .

[ ٢ ] في المثلث س ص ع زاوية ع =  $٥٩٠^\circ$  ، زاوية س =  $٥٢٨,٣^\circ$  ، س ع =  $٨,٧$  سم فأوجد طول س ص .

[ ٣ ] في المثلث ل م ن زاوية ل =  $٥٩٠^\circ$  ، ل ن =  $١٢$  سم ، ن م =  $١٧$  سم فأوجد زاوية ن .

[ ٢٢ - ٨ ] جيب تمام الزاوية ، ( جتا هـ ) .

**The casine of an angle "Cos  $\theta$ "**

تُعرف النسبة فيما بين الضلع المجاور للزاوية ، وطول الوتر ، بجيب تمام الزاوية ، انظر شكل (٢٢ - ١٢) .

$$\text{جتا هـ} = \frac{\text{الضلع المجاور للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$$



شكل [ ٢٢ - ١٢ ]

وبنفس الطريقة كما سبق في حساب ظل الزاوية وجيب الزاوية ، فإنه باستعمال الآلة الحاسبة يُمكن إيجاد جيب تمام الزاوية وجتا-١

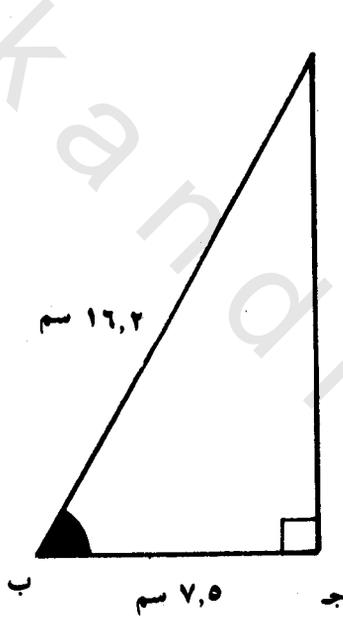
[ ٢٢ - ٩ ] تطبيقات على استخدام جيب تمام الزاوية  
 فى حساب المثلث :

□ مثال :

فى المثلث ا ب ج ، زاوية ج = ٥٩٠ .  
 ، ج ب = ٧,٥ سم ، ا ب = ١٦,٢ سم  
 فأوجد زاوية ب .

□ الحل :

نرسم المثلث ا ب ج طبقاً للمعلومات الواردة برأس المسألة .



شكل [ ٢٢ - ١٣ ]

، ج ب = ٧,٥ سم هو الضلع المجاور للزاوية ب ،  
 ، ا ب = ١٦,٢ سم هو الوتر .

$$\therefore \text{جتا ب} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ا ب}} = \frac{٧,٥}{١٦,٢} = ٠,٤٦٢٩٦٢٩٦٢$$

$$\therefore \text{ب} = \text{جتا}^{-1} 0,462962962 = 0,62,42103202^\circ$$

$$\therefore \text{ب} = 0,62,4^\circ \text{ لأقرب عشر درجة .}$$

### [ ٢٢ - ١٠ ] تدريبات :

أولاً : أوجد جيب تمام الزوايا التالية مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام عشرية ،

$$[ ١ ] 0,23 \quad [ ٢ ] 0,58 \quad [ ٣ ] 0,82 \quad [ ٤ ] 0,7$$

$$[ ٥ ] 0,16,8 \quad [ ٦ ] 0,37,2 \quad [ ٧ ] 0,45,3 \quad [ ٨ ] 0,66,5$$

ثانياً : أوجد قيمة الزوايا التالية لأقرب عشر درجة ، المعلوم جيب تمام كل منها :

$$[ ١ ] \text{جتا}^{-1} 0,9534 \quad [ ٢ ] \text{جتا}^{-1} 0,7575$$

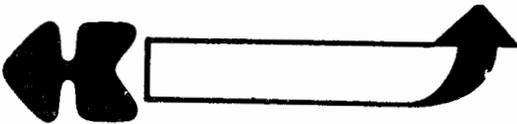
$$[ ٣ ] \text{جتا}^{-1} 0,1412 \quad [ ٤ ] \text{جتا}^{-1} 0,3874$$

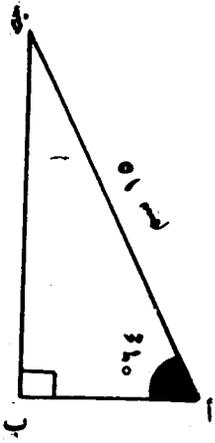
$$[ ٥ ] \text{جتا}^{-1} 0,8889 \quad [ ٦ ] \text{جتا}^{-1} 0,6413$$

$$[ ٧ ] \text{جتا}^{-1} 0,2653 \quad [ ٨ ] \text{جتا}^{-1} 0,3090$$

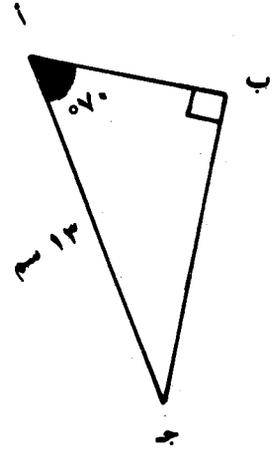
$$[ ٩ ] \text{جتا}^{-1} 0,4520$$

ثالثاً : أوجد طول الضلع  $a$  في المثلثات التالية بشكل (٢٢ - ١٤) مقرباً إجابتك لأقرب ثلاث أرقام عشرية .

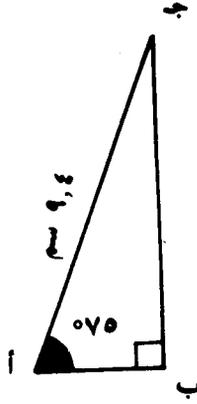




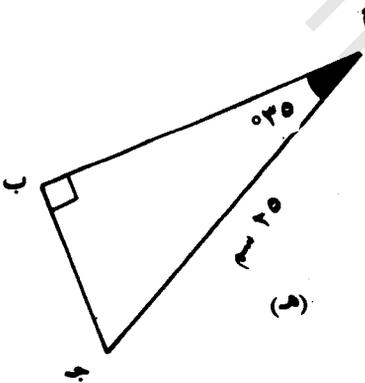
(ج)



(ا)



(ب)



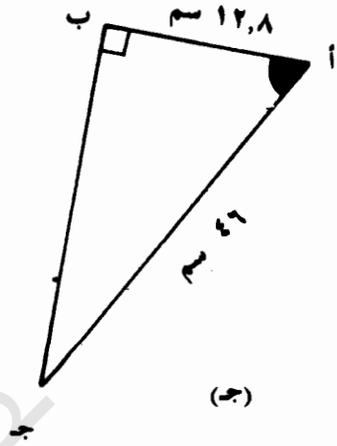
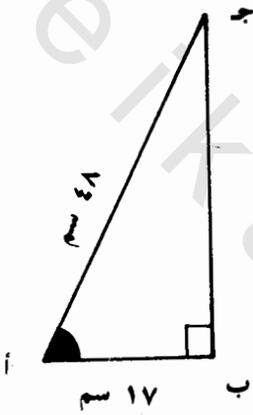
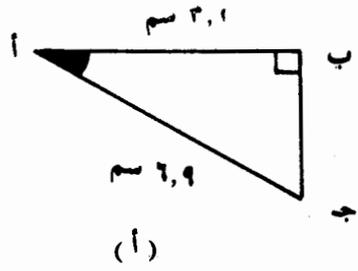
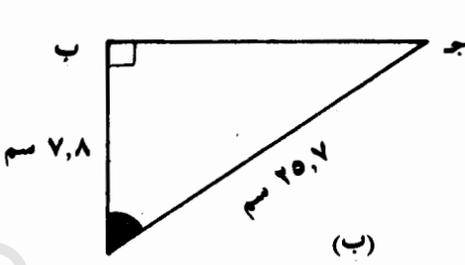
(د)



(د)

شكل [ ٢٢ - ١٤ ] ( ا ، ب ، ج ، د ، هـ )

رابعاً : أوجد الزاوية ا في المثلثات التالية بشكل ( ٢٢ - ١٥ ) .



شكل [ ٢٢ - ١٨ ] (أ ، ب ، ج ، د)

خامساً : احسب المطلوب في المثلثات التالية :

[ ١ ]  $\Delta$  ا ب ج فيه زاوية ب =  $90^\circ$  ،  $\hat{A} = 55^\circ$  ، الوتر = ١٥ سم  
أوجد طول ا ب .

[ ٢ ]  $\Delta$  س ص ع فيه زاوية ش =  $90^\circ$  ،  $\hat{ص} = 23.7^\circ$  ، ع  
ص = ١١,٣ سم فأوجد س ص .

[ ٣ ]  $\Delta$  ل م ن فيه زاوية ن =  $90^\circ$  ، ل م = ٦,٤ سم ، ل ن = ١٤  
سم فأوجد ل ن .

## الكورس الثالث والعشرون :

### تطبيقات على النسب المثلثية

#### Applications

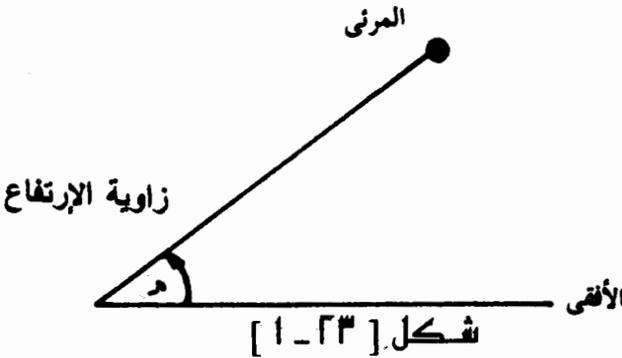
#### [ ٢٣ - ١ ] مقدمة :

يمكن استخدام المعلومات التي درستها في الدرس السابق في بعض التطبيقات العملية المفيدة مثل إيجاد الزاوية التي يصنعها سلم مستند على حائط رأسى وفي زوايا الارتفاع والإنخفاض والاتجاهات الأصلية وبعد سفينة عن أخرى وعن الشاطئ ؟ .

#### [ ٢٣ - ٢ ] زوايا الارتفاع والانخفاض :

#### [ ١ ] زاوية الارتفاع *Angle of elevation* :

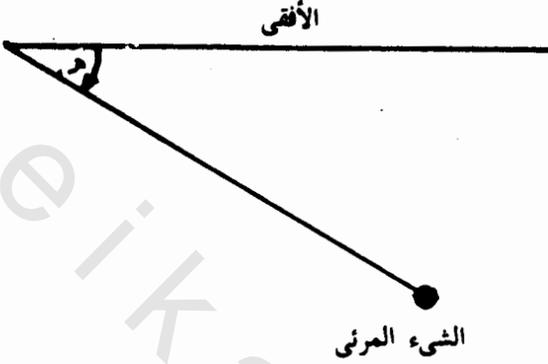
أنظر شكل (٢٣ - ١) ؛ وهو يوضح زاوية الإرتفاع .



وهى الزاوية بين الأفقى وأى جسم عندما يكون الجسم فى مستوى أعلى من مستوى المشاهد .

[ ٢ ] زاوية الانخفاض *Angle of depression* :

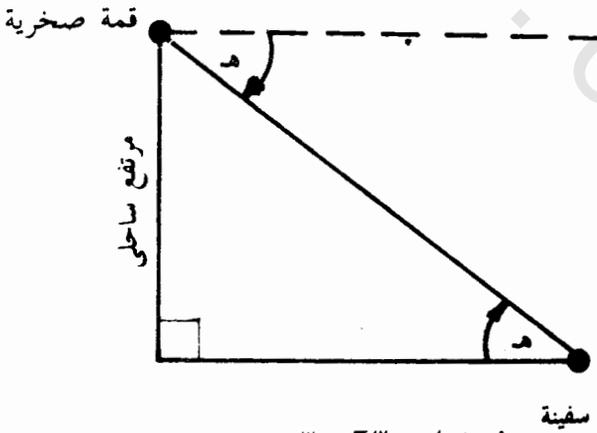
انظر شكل (٢٣ - ٢) ، وهو يوضح زاوية الإنخفاض .



شكل [ ٢٣ - ٢ ] زاوية الانخفاض

وهى الزاوية بين الأفقى وأى جسم عندما يكون الجسم فى مستوى أسفل من مستوى المشاهد .

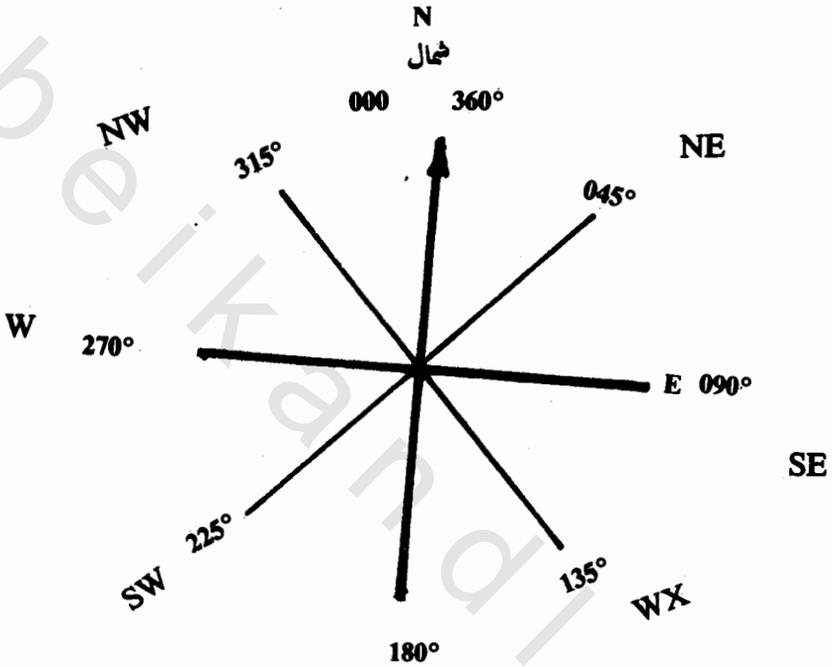
ويلاحظ من شكل (٢٣ - ٣) أن زاوية الانخفاض = زاوية الارتفاع .



شكل [ ٢٣ - ٣ ]

وهو يوضح أن زاوية ارتفاع قمة صخرية على أحد الشواطئ من سفينة بالبحر في مقابلها ( $> 90^\circ$ ) ، هي نفسها زاوية إنخفاض السفينة عند مشاهدتها من القمة الصخرية على الشاطئ ( $> 90^\circ$ ) .

[ ٢٣ - ٣ ] **الاتجاهات : Bearings :**



شكل [ ٢٣ - ٤ ]

كما يتضح من شكل (٢٣ - ٤) فإن الاتجاهات الأصلية كما تحددتها البوصلة هي الشمال N . وشمال الشرق NE والشرق E وجنوب الشرق SE والجنوب S ، وجنوب الغرب SW والغرب W وشمال الغرب NW ويفصل بين كل واحد منها والآخر  $45^\circ$  .

وتقاس الاتجاهات بالدرجات وتتراوح بين صفر ،  $360^\circ$  .

وعلى هذا النظام فإن الاتجاه  $07^\circ$  يُكتب  $007^\circ$  بينما الاتجاه  $77^\circ$  فيكتب  $077^\circ$  والاتجاه  $177^\circ$  فيكتب  $177^\circ$  وهكذا .

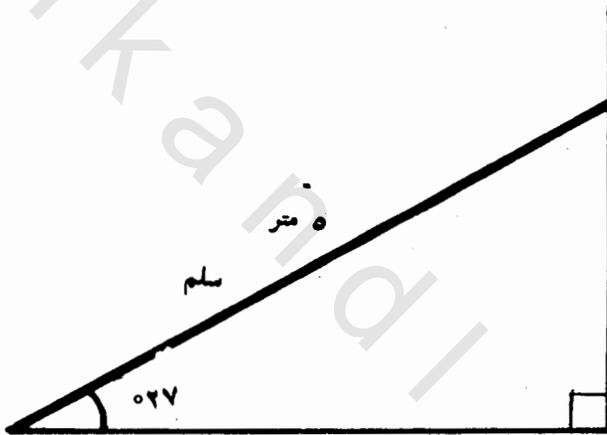
[ ٢٣ - ٤ ] مسائل تطبيقية على النسبة المثلثية :

□ مثال (١) :

سلم طوله ٥ متر يستند من إحدى جهتيه على الأرض ومن الجهة الأخرى على حائط رأسي ، فإذا كان السلم يصنع زاوية  $٥٢٧^\circ$  مع الأرض فأوجد إرتفاع النهاية الأخرى للسلم مع الحائط .

□ الحل :

انظر ، شكل (٢٣ - ٥) ، ولنفرض أن الإرتفاع هو ع متر .



$$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dots \text{ جا هـ} = \dots$$

$$\therefore \text{ جا } ٥٢٧ = \frac{\text{ع}}{٥} \therefore \text{ع} = ٥ \times \text{ جا } ٥٢٧$$

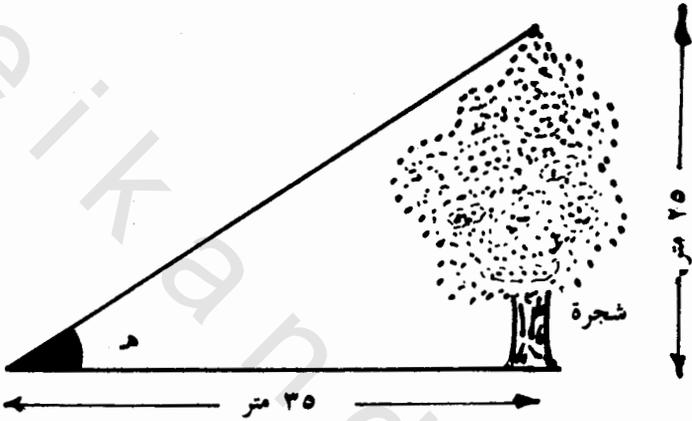
$$\therefore \text{ع} = ٢,٢٧ \text{ متر}$$

□ مثال (٢) :

أوجد زاوية إرتفاع قمة شجرة ، إرتفاعها ٢٥ متراً من نقطة على الأرض تبعد عنها ٣٥ متراً .

□ الحل :

انظر شكل (٢٣ - ٦) ، ونفرض أن زاوية الإرتفاع هي ه°



شكل [ ٦ - ٢٣ ]

$$\text{وحيث أن } \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \text{ه} \quad \therefore \frac{25}{35} = \text{ه} = 0,71428$$

$$\therefore \text{ه} = \text{ظا}^{-1} 0,71428$$

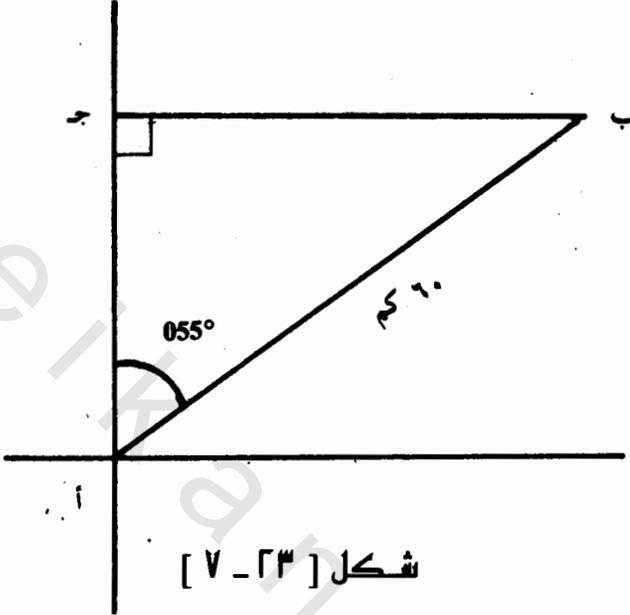
$$\therefore \text{ه} = 35,5^\circ$$

□ مثال (٣) :

تبحر سفينة من نقطة ا إلى نقطة ب في الإتجاه  $055^\circ$  ، لمسافة مقدارها ٦٠ كيلومتر فإذا كانت نقطة ج تقع تماماً غرب نقطة ب وشمالاً من نقطة ا فأوجد مقدار المسافة ا ج .

□ الحل :

أنظر شكل (٢٣ - ٧) ، ولنفرض أن المسافة أ ج = س كيلومتر ،



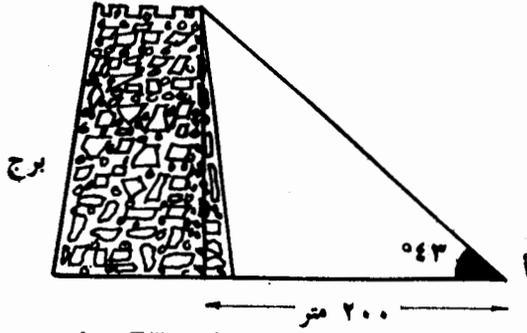
$$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \text{حيث أن جتا هـ} = \frac{\text{س}}{٦٠} = ٥٥٥$$

$$\therefore \text{س} = ٦٠ \cdot \text{جتا } ٥٥ = ٣٤,٤١٤ \text{ كيلومتراً}$$

∴ نقطة ج تبعد عن أ بمقدار ٣٤,٤١٤ كم وفي إتجاه الشمال منها .

**[ ٥ - ٢٣ ] تدريبات : ( أ ) على زوايا الإرتفاع والانخفاض :**

( ١ ) قيست زاوية إرتفاع قمة برج من نقطة ا على الأرض تبعد عن قاعدة البرج ٢٠٠ متر ، فكانت ٥٤٣ ، فأوجد ارتفاع البرج .



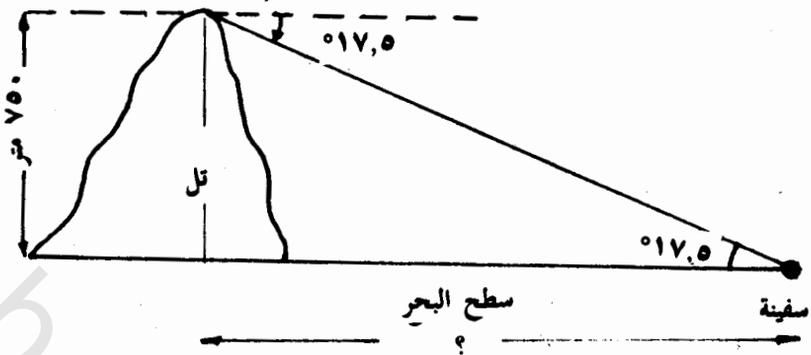
شكل [ ٨ - ٢٣ ]

( ٢ ) من نقطة تبعد ٦٠ متراً عن قاعدة شجرة ، قيست زاوية ارتفاع قمة الشجرة ، فوجدت ١٢° ، فأوجد ارتفاع قمة الشجرة .



شكل [ ٩ - ٢٣ ]

( ٣ ) رُصدت سفينة من قمة تل على الشاطئ يرتفع عن سطح البحر بمقدار ٧٥٠ متراً فكانت زاوية انخفاض السفينة هي ١٧,٥° فكم يبلغ بعد السفينة عن الشاطئ وعن قمة التل .



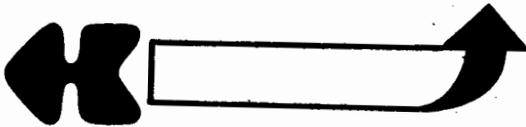
شكل [ ٢٣ - ١٠ ]

( ٤ ) من نقطة بأعلى صخرة على الشاطئ ترتفع بمقدار ٣٥٠ متراً رصدت سفينة بالبحر فإذا كانت السفينة تبعد عن قمة الصخرة بمقدار ١٢٠٠ متراً فما مقدار زاوية الانخفاض .

( ٥ ) طائرة تقلع على ارتفاع ٣٥٠٠ متراً رصدت موقعاً على الأرض فسجلت زاوية انخفاض مقدارها ١٣,٥° فما مقدار المسافة التي تطيرها الطائرة حتى تصبح فوق الموقع مباشرة .

( ٦ ) رصدت نقطة في أعلى بناية من نقطة على الأرض في مستوى قاعدة البناية فكانت زاوية ارتفاعها ٤٢° فإذا كانت نقطة الرصد تبعد عن قاعدة البناية بمقدار ٣٠ متر ، فأوجد ارتفاع البناية .

( ٧ ) ترتفع مدخنة مصنع بمقدار ٧٠ متراً ، احسب زاوية ارتفاع المدخنة إذا رصدت من نقطة تبعد ٢٠٠ متراً عن قاعدة المدخنة .



## (ب) تدريبات على الاتجاهات :

( ١ ) تُبحر سفينة من أحد الموانئ في اتجاه  $033^\circ$  لمسافة ١٧ كيلومتر ثم توقفت ، فاحسب .

( أ ) كم تبعد السفينة شرق الميناء .

( ب ) كم تبعد السفينة شمال الميناء .

( ٢ ) أقلعت طائرة من مطار القاهرة في اتجاه  $280^\circ$  لمسافة ٩٠ كيلومتر فاحسب عند هذه اللحظة :

( أ ) كم تبعد في اتجاه الشمال عن المطار .

( ب ) كم تبعد في اتجاه الغرب عن المطار .

( ٣ ) تحركت سيارة لمسافة ٣٠ كيلومتر في اتجاه الشمال ، ثم تحركت لمسافة ١٥ كيلومتر في اتجاه الشرق ، فكم تبعد السيارة عن نقطة تحركها .

(٤) أبحرت سفينة من أحد الموانئ إلى الجنوب لمسافة ١٥ كيلومتراً ثم تحركت غرباً لمسافة ٤٥ كيلومتر أخرى ، فكم تبعد السفينة عن الميناء .

( ٥ ) أبحرت سفيتان في وقت واحد من أحد الموانئ فتحركت الأولى و اتجاه الشمال لمسافة ٣٠ كيلومتر بينما تحركت الثانية . في اتجاه  $038^\circ$  لمسافة ١٣ كيلومتر ، فأوجد البعد بين السفيتين .

( ٦ ) أبحرت سفيتان في الساعة التاسعة صباحاً من أحد الموانئ الأولى في اتجاه  $056^\circ$  وبسرعة ٣٠ كم/ساعة والثانية في اتجاه  $090^\circ$  بسرعة ٢٢ كم/ساعة ، المطلوب حساب الآتي عند الساعة الثانية عشر تماماً :

( أ ) كم تبعد السفينة الأولى شمال السفينة الثانية .

( ب ) كم تبعد السفينة الثانية شرق السفينة الأولى .

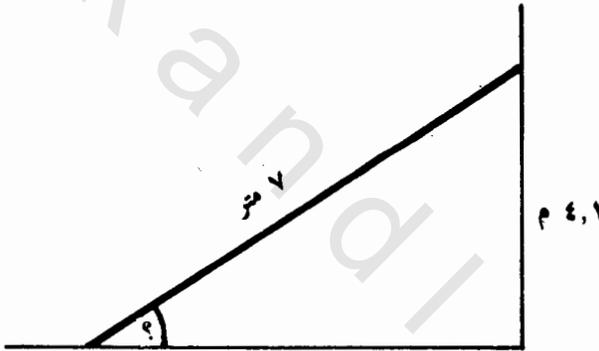


(ج) تدريبات مختلفة :

( ١ ) مستطيل ا ب ج د فيه ا ب = ١٢ سم ، ب ج = ٧ سم ، أوجد مقدار زاوية ا ب د .

( ٢ ) مستطيل س ص ع ل فيه س ع = ١٨,٣ سم ، س ل = ٧,٥ سم فأوجد زاوية ص س ع والزاوية الحادة بين القطرين .

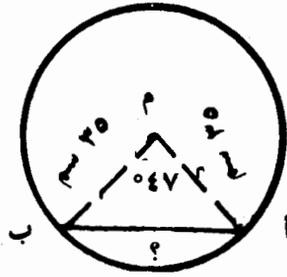
( ٣ ) في شكل ( ٢٣ - ١١ ) ، سلم يرتكز على حائط رأسى ، ترتفع قمة السلم بمقدار ٤,١ متراً على الحائط ، فإذا كان السلم طوله ٧ أمتار ، فأوجد الزاوية التي يضعها السلم مع الأرض ومع الحائط .



شكل [ ١١ - ٢٣ ]

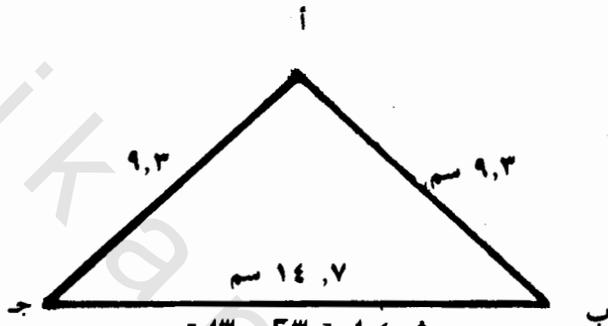
( ٤ ) أوجد ارتفاع المثلث ا ب ج الذي فيه ا ب = ا ج = ١٢ سم ، زاوية ا ج ب = ٥٥,٣°

( ٥ ) في شكل ( ٢٣ - ١٢ ) ، م دائرة نصف قطرها ٣٥ سم وزاوية الرأس م = ٤٧° ، أوجد طول الوتر ا ب .



شكل [ ١٣ - ٢٣ ]

( ٦ ) أوجد زوايا المثلث المتساوي الساقين أ ب ج والذي فيه أ ب = ج = ٩,٣ سم ، ب ج = ١٤,٧ سم .



شكل [ ١٣ - ٢٣ ]

( ٧ ) تقع مدينة أ في إتجاه  $049^\circ$  من مدينة ب وتبعد عنها في إتجاه الجنوب منها بمقدار ٣٠ كيلومتر ، فكم تبعد أ عن ب في إتجاه الشرق .

( ٨ ) معين طول قطريه ٣٠ ، ٤٠ سم ، أوجد زوايا المعين .

( ٩ ) يقف رجل أعلى قمة تل على الشاطئ ويرصد في نفس الوقت سفينتان أ ، ب تقعان على امتداد نظره وعلى خط مستقيم واحد معه .

فإذا كانت زوايا انخفاض السفينتان  $013^\circ$  ،  $030^\circ$  . فما مقدار المسافة بين السفينتين .

( ١٠ ) من نقطة على الأرض رصدت نقطتان على خط مستقيم رأسى واحد في أحد البنائيات العالية فإذا كانت نقطة الرصد تبعد ١٠٠ م عن قاعدة البناية وكانت زوايا ارتفاع النقطتان المرصودتان هي  $030^\circ$  ،  $040^\circ$  فأوجد المسافة الرأسية بين نقطتي الرصد .

## الهندسة الفراغية

المكعبات ومتوازيات المستطيلات والهرم  
والمخروط

**Three-dimensional trigonometry (3-D. trig.)  
cubes, cuboids, pyramids and cones**

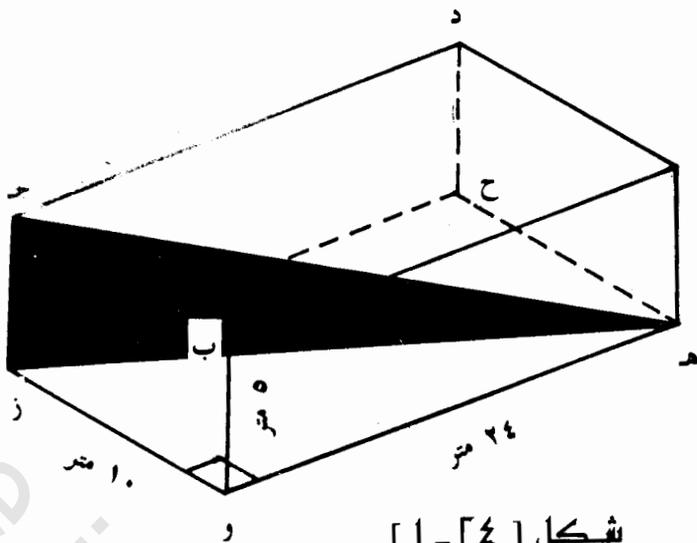
[ ٢٤ - ١ ] مسائل على المكعبات ومتوازيات  
المستطيلات :

إن ما سبق دراسته عن النسب المثلثية كان في مجال المستوى الواحد  
فقط أى مستوى الورقة . أو المجال ذو البعدين .

إلا أنه من الممكن تطبيق نفس قواعد النسب المثلثية في مسائل الهندسة  
الفراغية ذات الثلاثة أبعاد .

□ مثال :

مخزن على شكل متوازي مستطيلات ، أبعاده ٢٤ متر × ١٠ متر × ٥  
متر ، انظر شكل (٢٤ - ١) ،



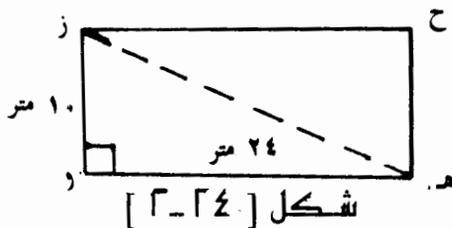
شكل [ ٢٤ - ١ ]

أوجد ما يلي :

- ( أ ) طول قطره الواصل من أحد أركان السقف إلى أحد أركان الأرض .  
 ( ب ) الزاوية التي يصنعها هذا القطر مع الأرض .

□ الحل :

( أ ) المطلوب هو إيجاد طول القطر جـ هـ .  
 ولذلك ، فعلينا باعتبار المثلث جـ زـ هـ القائم الزاوية في ز .  
 والذي لا نعلم منه سوى الارتفاع جـ ز = ٥ أمتار .  
 لذلك يجب أن نوجد أولاً طول القطر ز هـ في مستوى أرضية المخزن  
 هـ و ز ح وذلك بتطبيق قاعدة فيثاغورث على المثلث القائم الزاوية هـ و  
 ز ، انظر شكل ( ٢٤ - ٢ ) .



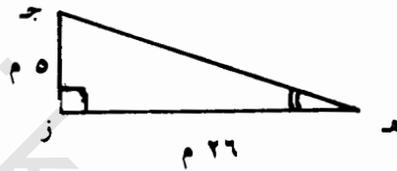
وباستخدام نظرية فيثاغورث لإيجاد طول هـ ز .

$$\therefore \overline{هـ ز} = \overline{هـ و} + \overline{و ز}$$

$$\therefore ٦٧٦ = ١٠٠ + ٥٧٦ = ٢١٠ + ٢٢٤ =$$

$$\therefore هـ ز = ٢٦ \text{ متر .}$$

وبالعودة إلى المثلث الأصلي جـ هـ ز هـ ، انظر شكل (٢٤ - ٣) .



شكل [ ٢٤ - ٣ ]

وبتطبيق نظرية فيثاغورث لإيجاد طول جـ هـ .

$$\therefore \overline{جـ هـ} = \overline{هـ ز} + \overline{ز جـ}$$

$$٧٠١ = ٢٥ + ٦٧٦ =$$

$$\therefore جـ هـ = ٢٦,٤٨ \text{ متر وهو طول القطر المطلوب .}$$

(ب) لإيجاد الزاوية التي يصنعها هذا القطر مع الأرض ، نلاحظ من شكل

(٢٤ - ٣) أنها عبارة عن الزاوية جـ هـ ز

وباستخدام النسبة المثلثية المناسبة يمكن إيجاد هذه الزاوية .

$$\therefore \text{جتـا} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٢٦}{٢٦,٤٧٦} = ٠,٩٨٢$$

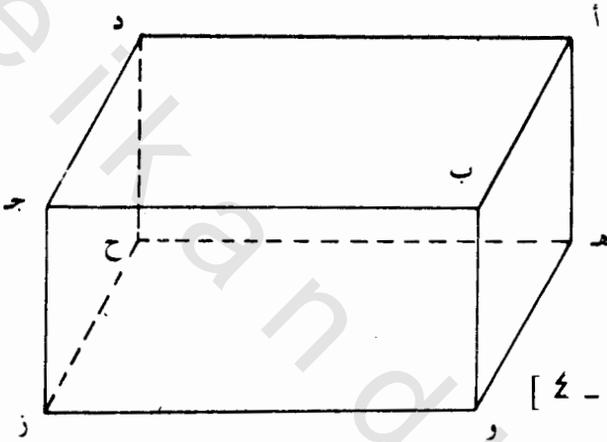
$$\therefore هـ = \text{جتـا}^{-١} ٠,٩٨٢ = ١٠,٩^\circ \text{ (لأقرب عُشر درجة)}$$

وهي الزاوية التي يصنعها القطر مع الأرضية .

## [ ٢٤ - ٢ ] تدريبات :

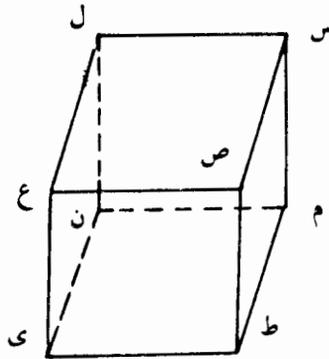
(١) في متوازي السطوح المبين في شكل (٢٤ - ٤) ، ا ب ج د ه  
و ز ح أطواله ١٢ سم ، ٩ سم ، ٥ سم ، أوجد ما يلي :

- |             |                   |
|-------------|-------------------|
| (أ) طول ح ا | (هـ) زاوية هـ و ا |
| (ب) طول ح و | (و) زاوية هـ د ح  |
| (ج) طول ا و | (ز) زاوية ا ز ح   |
| (د) طول ا ز | (ح) ب ح و         |



شكل [ ٢٤ - ٤ ]

(٢) في المكعب المبين في شكل (٢٤ - ٥) ، س ص ع ل م ط ي  
ن ، والذي طول ضلعه ١٥ سم احسب ما يلي :



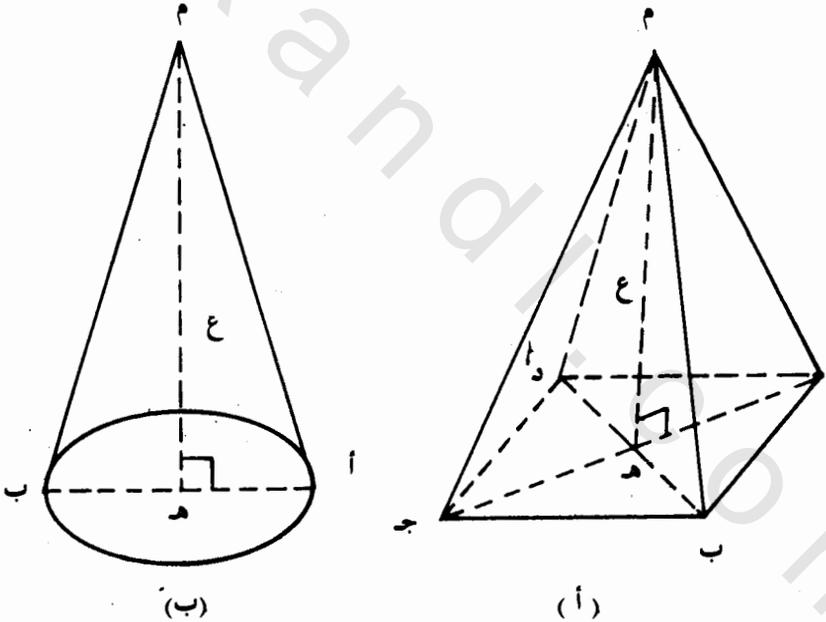
شكل [ ٢٤ - ٥ ]

- [ أ ] طول ط ن  
 [ ب ] طول ل ط  
 [ ج ] زاوية س ي م  
 [ د ] زاوية س ط م  
 [ هـ ] زاوية ع م ي  
 [ و ] زاوية م ع س

### [ ٢٤ - ٣ ] مسائل على الهرم والمخروط :

سوف نتعرض هنا للهرم الرباعي سواء كانت قاعدته مربعة أو مستطيلة وكذلك للمخروط الدائري القائم ، وسوف نحتاج لبعض القواعد السابق دراستها مثل نظرية فيثاغورث كما سبق في البندين ٢٤ - ١ ، ٢٤ - ٢ وفي الدرس الثالث والعشرون .

انظر شكل [ ٦ - ٢٤ ] ، وهو يوضح كيفية حساب بعض الأبعاد الرئيسية مثل طول حرف الهرم أو طول رأس المخروط وارتفاع كل منهما .



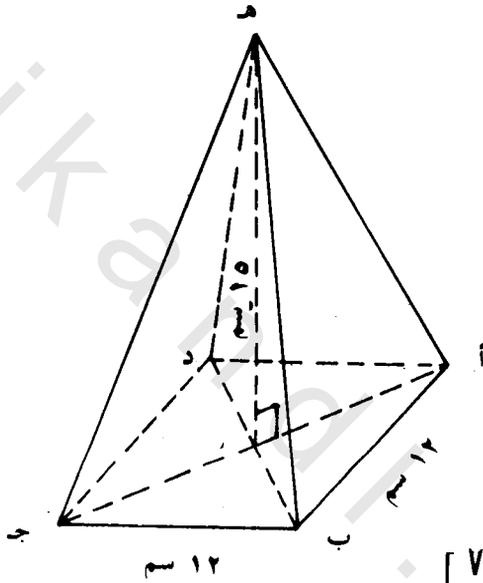
شكل [ ٦ - ٢٤ ] ، أ ، ب

[ ٢٤ - ٤ ] تدريبات :

[ ١ ] ا ب ج د ه ، هرم رباعي قائم قاعدته على شكل مربع ، طول ضلعه ١٢ سم وارتفاعه ١٥ سم انظر شكل (٢٤ - ٧) .

فأوجد :

- (أ) طول قطر القاعدة ا ج  
(ب) طول حرف الهرم ا ه  
(ج) زاوية ه ا ج .  
(د) زاوية ا ه ج

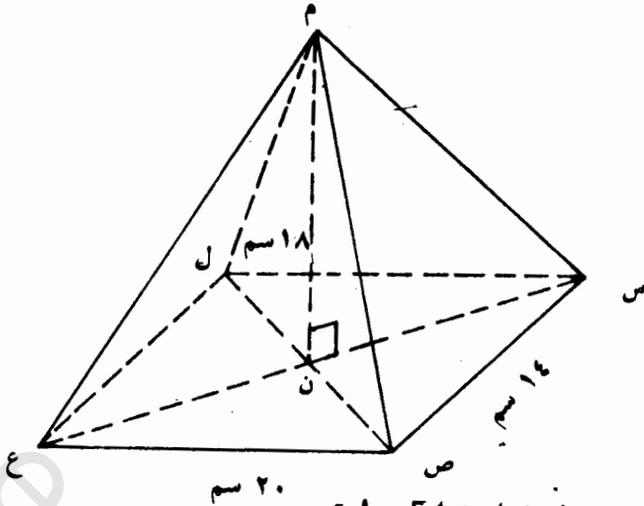


شكل [ ٧ - ٢٤ ]

(٢) س ص ع ل م هرم رباعي قائم قاعدته على شكل مستطيل بعدها ٢٠ سم ، ١٤ سم وارتفاعه م ن = ١٨ سم .

، انظر شكل (٢٤ - ٨) ، أوجد :

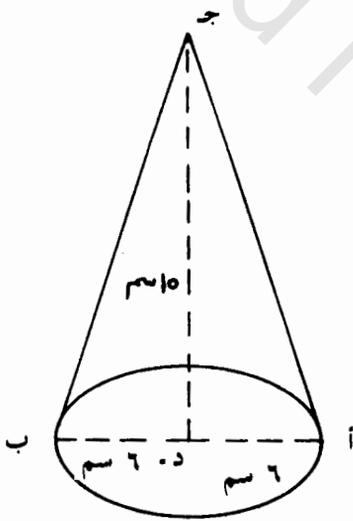
- (أ) طول س ع  
(ب) طول م س  
(ج) زاوية م ص ع  
(د) زاوية م س ن  
(هـ) زاوية ص م س  
(و) زاوية س م ل  
(ز) زاوية س م ع



شكل [ ٢٤ - ٨ ]  
 ٢٠ سم

(٣) في المخروط الموضح في شكل (٢٤ - ٩) ، أوجد :

- (أ) طول الراسم « الحرف » ج ا .
- (ب) زاوية ب ا ج .
- (ج) زاوية ا ج ب .
- (د) زاوية ا ج د .



شكل [ ٢٤ - ٩ ]

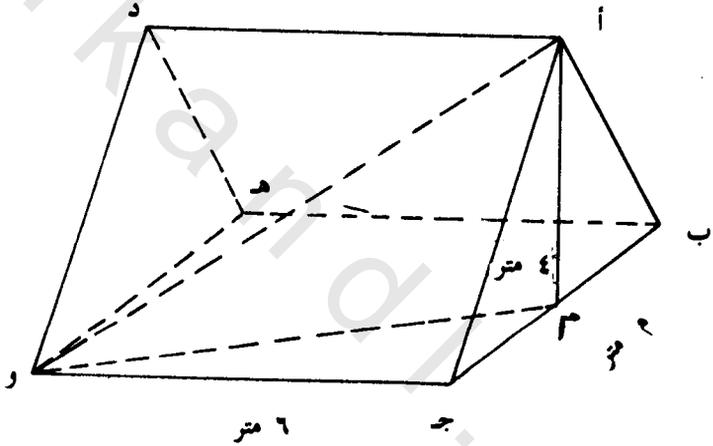
(٤) خيمة نهاياتها ا ب ج د ه و على شكل مثلثات حادة الزوايا ،  
انظر شكل (٢٤ - ١٠) ، فإذا كان ارتفاع الخيمة ا م .

= ٢ متر ، عرضها ب ج = ٣ م ، طولها ج و = ٦ م

(أ) طول ا ج (د) زاوية ا و م

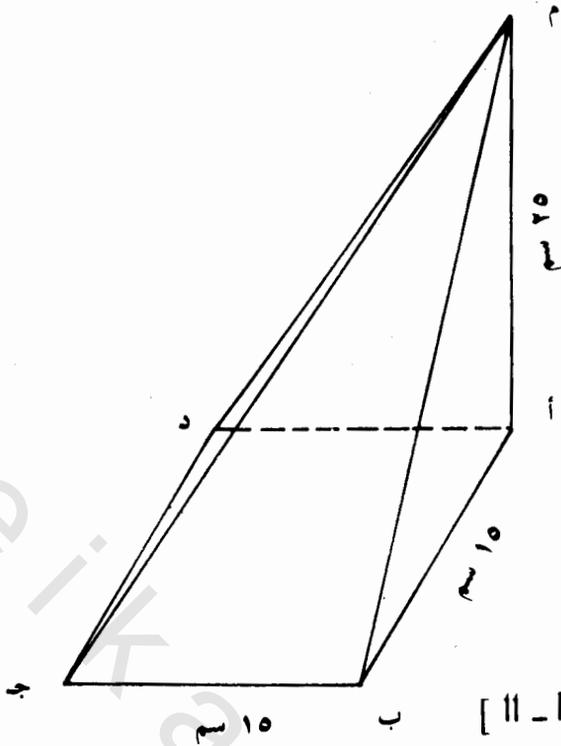
(ب) طول م و (هـ) زاوية ا و د

(ج) طول ا و (و) زاوية ا ب ج



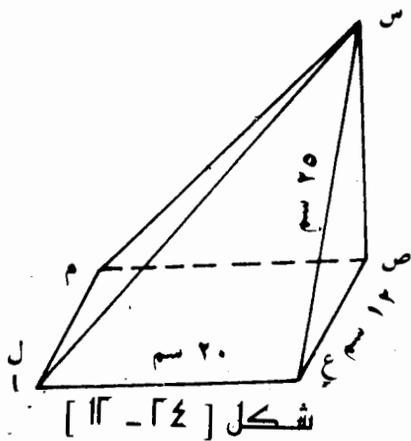
شكل [ ٢٤ - ١٠ ]

(٥) هرم رباعي ، م ا ب ج د ، قاعدته ا ب ج د مربعة الشكل وتقع  
رأسه م فوق نقطة ا وعلى خط رأسي واحد فإذا كان طول ضلع  
القاعدة = ١٥ سم وإرتفاعه م = ٢٥ سم فأوجد طول كل حرف من  
أحرفه الجانبية والزوايا التي يصنعها كل حرف مع القاعدة ا ب ج د ، انظر  
شكل (٢٤ - ١١) .

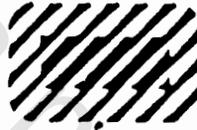


(٦) هرم رباعي س ص ع ل م قاعدته ص ع ل م على شكل مستطيل  
 عداه ١٢ سم ، ٢٠ سم فإذا كانت س تقع أعلى نقطة ص تماماً وعلى  
 خط رأسي واحد معها .

فإذا كان س ع = ٢٥ سم ، احسب طول الأحراف الجانبية س ص ،  
 س ل ، س م والزوايا التي يصنعها كل منها مع القاعدة .



(٧) رصدت قمة برج ارتفاعه ٥٠ متراً من نقطتين ا ، ب تقع ا شرق  
البرج بينما تقع ب جنوب البرج . فإذا كانت زاوية إرتفاعه من نقطة  
ا = ٥٢٧° بينما زاوية ارتفاعه من نقطة ب = ٥٣٩° ، فأوجد البعد بين  
النقطتين ا ، ب .



## الدرس الخامس والعشرون :

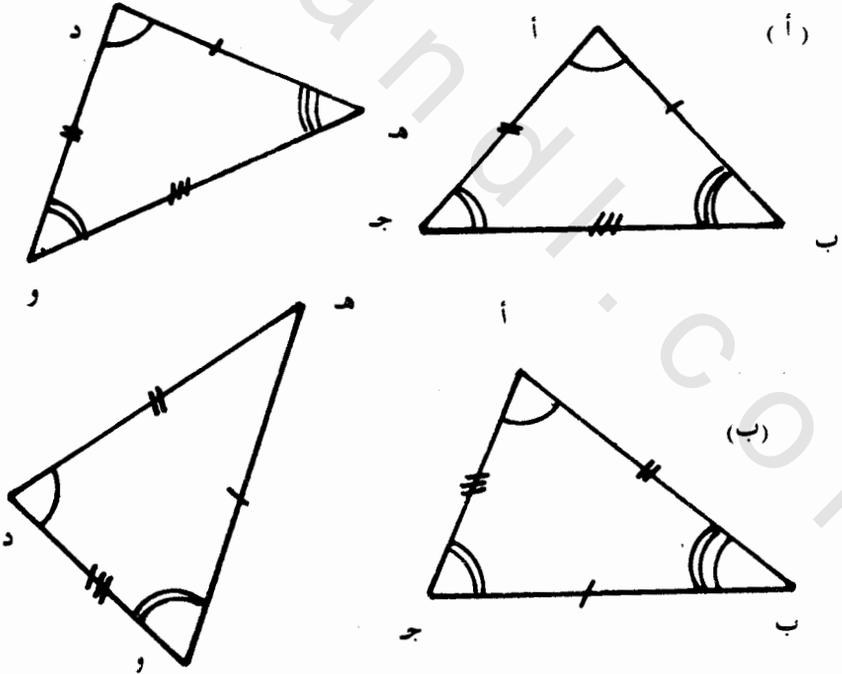
### تطابق المثلثات

### Congruent triangles

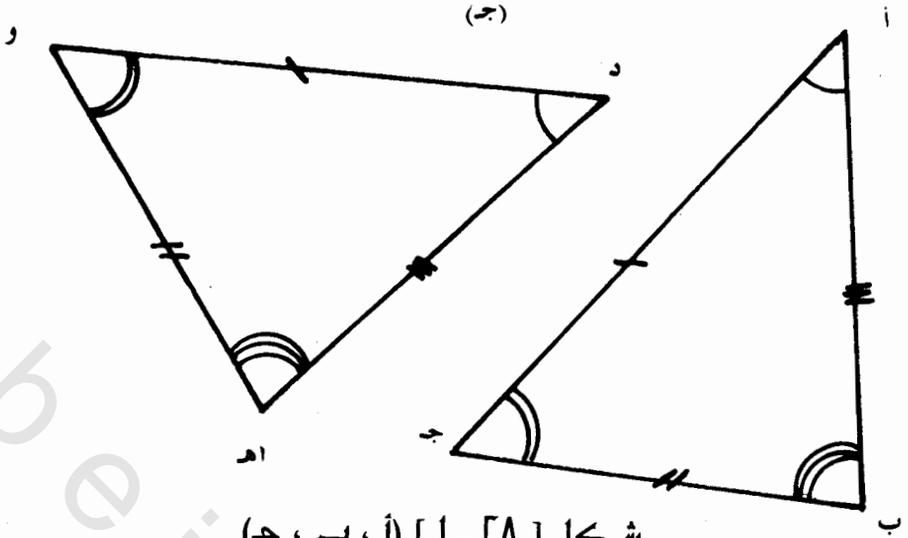
#### [ ٢٥ - ١ ] مقدمة :

من المعلوم أن المثلث هو مضلع له ثلاثة أضلاع وثلاثة زوايا أى ستة عناصر .

فإذا تطابق المثلثان ا ب ج ، د ه و مثلاً ، انظر الشكل ( ٢٥ - ١ ) .



شكل [ ٢٥ - ١ ]



شكل [ ٢٨ - ١ ] (أ ، ب ، ج)

فإنه يمكننا أن نستنتج أن :

$$\text{أولاً : } \hat{د} = \hat{ا} ، \hat{ب} = \hat{هـ} ، \hat{ج} = \hat{و}$$

$$\text{ثانياً : } ا ب = د هـ ، ب ج = ج هـ ، ج ا = و د$$

ولكن إذا أردنا إثبات أن المثلثين ا ب ج ، د هـ و متطابقان فهل من الضروري إثبات صحة المتساويات الست المذكورة في أولاً ، ثانياً (تساوي الست عناصر) ،

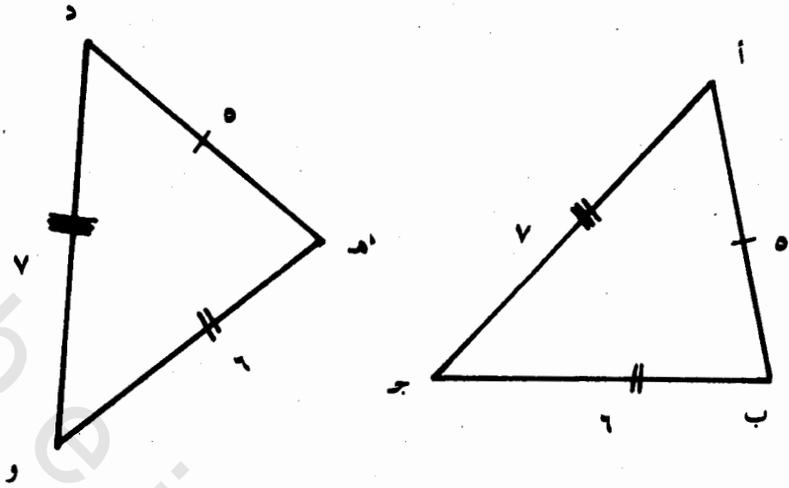
وللإجابة على هذا السؤال ، نرى أن هذا ضروري بالنسبة للمضلعات التي لها أكثر من ثلاثة أضلاع أما بالنسبة للمثلثات فإن الأمر يختلف حيث أنه يلاحظ أن تحقيق بعض المتساويات وليس كلها يؤدي بالضرورة . إلى تحقق صحة بقية المتساويات الست ،

### □ الحالة الأولى لتطابق المثلثات :

إذا قمنا برسم مثلثين ا ب ج ، د هـ و فيهما :

$$ا ب = ٥ سم ، ب ج = ٦ سم ، ج ا = ٧ سم ، د هـ = ٥ سم ،$$

$$هـ و = ٦ سم ، و د = ٧ سم .$$



شكل [ ٢٥ - ٢ ]

فإنه يمكننا وبسهولة التأكد من أنهما متطابقان إذا رسمنا أحدهما على ورق شفاف ووضعناه فوق الآخر .

ومن هنا نلاحظ أنه يكفي لتطابق مثلثان أن تتساوى أطوال الأضلاع المتناظرة في المثلثين ونتيجة لهذا التطابق فإن الزوايا المتناظرة في المثلثين تتساوى بالتبعية .

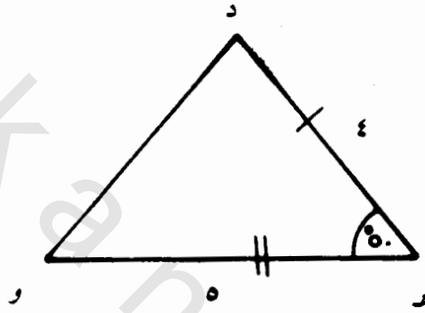
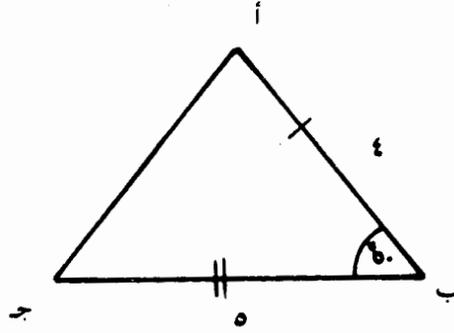
ونخلص من هذا بالنظرية الأولى لتطابق المثلثات :

[ يتطابق المثلثان كل على الآخر ، إذا ساوى طول كل ضلع من أحدهما نظيره في المثلث الآخر ] .

### □ الحالة الثانية لتطابق المثلثات :

إذا قمنا برسم مثلثين ا ب ج ، د هـ و فيهما :

ا ب = ٤ سم ، ب ج = ٨ سم ، زاوية ا ب ج = ٥٥° ، د هـ = ٤ سم ، هـ و = ٥ سم ، زاوية د هـ و = ٥٥°



شكل [ ٢٨ - ٣ ]

فإنه يمكننا وبسهولة التأكد من أنهما متطابقان ، إذا رسمنا أحدهما على ورق شفاف ووضعناه فوق الآخر .

ومن هنا نلاحظ أنه يكفي لتطابق مثلثين أن يتساوى في أحد المثلثين طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما بنظائرها في المثلث الآخر .

وينشأ عن هذا التطابق أن يتساوى طول الضلعين المتبقيين ، كما يتساوى قياس كل من الزاويتين الأخرتين مع نظائرها في المثلث الآخر .

ونخلص من هذا بالنظرية الثانية لتطابق المثلثات :

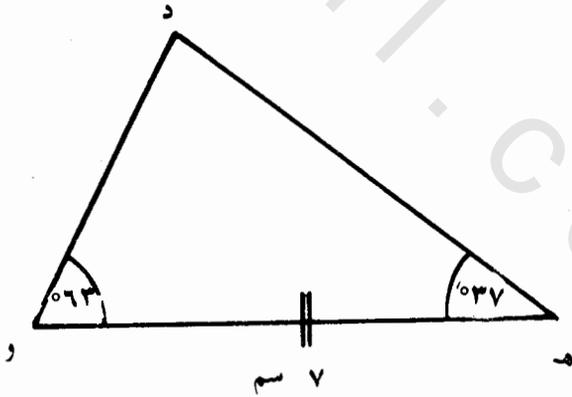
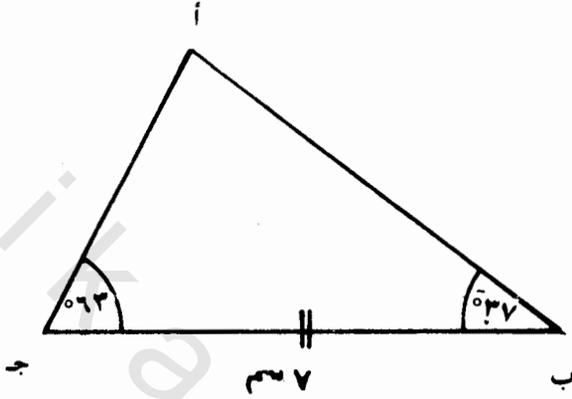
[ يتطابق المثلثان كل على الآخر ، إذا ساوى في أحدهما طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما ] .

□ الحالة الثالثة لتطابق المثلثات :

إذا قمنا برسم مثلثين ا ب ج ، د ه و فيهما :

$$\text{ب ج} = \text{ه و} = \gamma \text{ سم ، } \hat{\text{ب}} = \hat{\text{ه}} = 37^\circ \text{ ، } \hat{\text{ج}} = \hat{\text{و}} = 63^\circ$$

$$\text{ا ب} = \text{د ه} = \gamma \text{ سم ، } \hat{\text{ا}} = \hat{\text{د}} = 90^\circ$$



شكل [ ٢٨ - ٤ ]

فإنه يمكن وبسهولة التأكد من أنهما متطابقان ، إذا رسمنا أحدهما على ورق شفاف ووضعناه فوق الآخر .

ومن هنا نلاحظ أنه يكفي لتطابق مثلثين أن يتساوى في أحدهما طول ضلع ، وقياس زاويتين من زواياه مع نظائرها في المثلث الآخر .

وينشأ عن هذا التطابق أن يتساوى طول الضلعين الآخرين وقياس الزاوية الثالثة في أحدهما مع نظائرها في المثلث الآخر .

ونخلص من هذا بالنظرية الثالثة لتطابق المثلثات :

[ يتطابق المثلثان كل على الآخر ، إذا ساوى في أحدهما قياس زاويتين والضلع المحصور بينهما بنظائرها في الآخر ] .

### الحالة الرابعة لتطابق المثلثات :

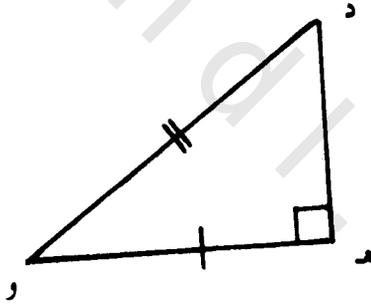
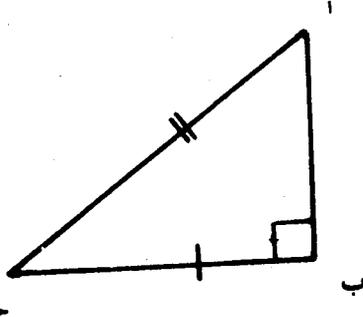
إذا قمنا برسم مثلثين قائمين  $abc$  ، قائم الزاوية في  $b$  وفيه  $a = 5$  سم ،  $b = 4$  سم

،  $d$  هـ و قائم الزاوية في  $h$  وفيه  $d = 5$  سم ،  $h = 4$  سم

فإنه يمكن بسهولة التأكد من أنهما متطابقان ، إذا رسمنا أحدهما على ورق شفاف ووضعناه فوق الآخر .

ومن هنا نلاحظ أن يكفي لتطابق مثلثين قائمين الزاوية ، أن يتساوى في أحدهما طولاً ضلع وتر نظيرهما في الآخر .





شكل [ ٢٥ - ٥ ]

ونخلص من هذا بالنظرية الرابعة لتطابق المثلثات :

[ يتطابق المثلثان القائمزا الزاوية تمام الإنطباق إذا ساوى في أحدهما ضلع

ووتر نظيرهما في المثلث الآخر ] .

## [ ٢٥ - ٢ ] ملخص لحالات تطابق المثلثات :

يتطابق المثلثان إذا توفرت فيهما أياً من هذه الحالات الأربعة الآتية :

### □ الحالة الأولى : ( بثلاثة أضلاع ) :

يتطابق المثلثان تمام الانطباق إذا ساوى طول كل ضلع من أحدهما طول نظيره فى المثلث الآخر .

### □ الحالة الثانية (بضلعين والزاوية المحصورة بينهما) :

يتطابق المثلثان تمام الانطباق إذا تساوى طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما مع نظائرها بالمثلث الآخر .

### □ الحالة الثالثة (بزاويتين وضلع) :

يتطابق المثلثان تمام الانطباق إذا تساوت فى أحدهما زاويتان والضلع المحصور بينهما مع نظائرها فى المثلث الآخر .

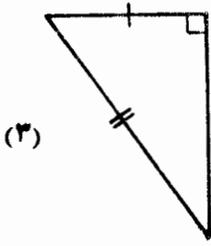
### □ الحالة الرابعة (بوتر وضلع للمثلث القائم) :

يتطابق المثلثان القائمات الزاوية تمام الانطباق إذا ساوى فى أحدهما وتر وطول ضلع ، نظيريهما فى المثلث الآخر .

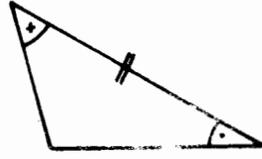
## [ ٢٥ - ٣ ] تدريبات : على تطابق المثلثات :

( ١ ) فى الشكل الموضح مجموعتان ، كل منها تحتوى على أربعة مثلثات وكل مثلث من المجموعة الأولى يتطابق مع نظير له فى المجموعة الثانية والمطلوب هو تحديد أزواج المثلثات المتطابقة فى المجموعتين واذكر سبب التطابق .

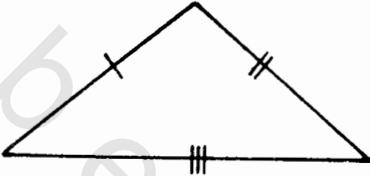




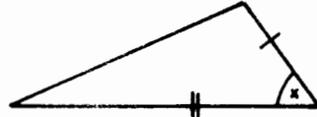
(٣)



(١)



(٤)

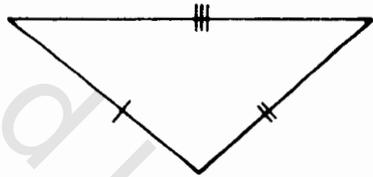


(٢)

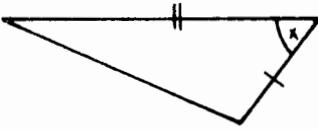
المجموعة الأولى



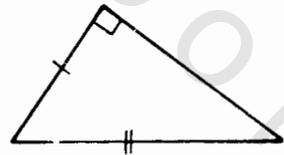
(٧)



(٥)



(٨)

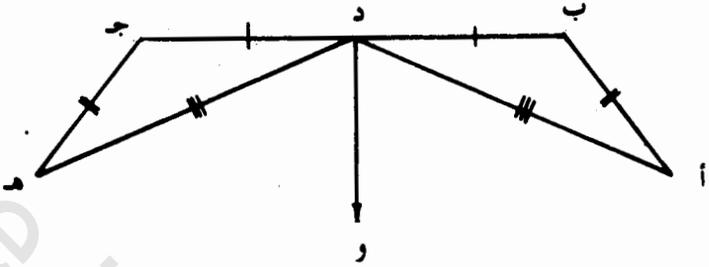


(٦)

المجموعة الثانية

شكل [ ٦ - ٢٨ ] (المجموعتان الأولى والثانية)

( ٢ ) فى شكل ( ٢٥ - ٧ ) ، المثلثان ، ا ب د ، ، هـ ج د فهما ا ب = هـ ج ، ب د = ج د ، ا د = هـ د المطلوب إثبات أن زاوية ا د و = زاوية هـ د و .

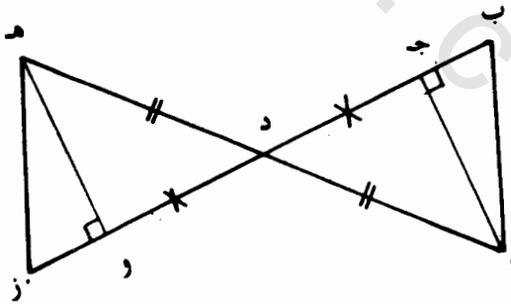


شكل [ ٧ - ٢٥ ]

( ٣ ) فى شكل ( ٢٥ - ٨ ) ، ا د = د هـ ، ب د = د ز والمطلوب إثبات أن :

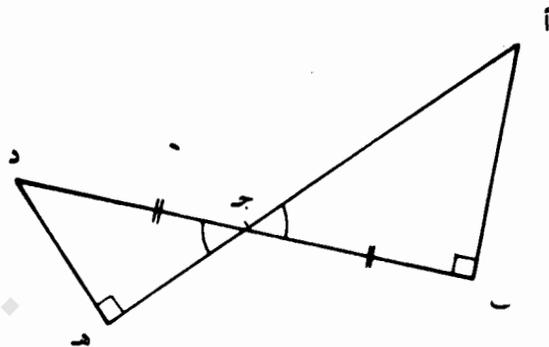
(أولاً) : المثلثين ا د ب ، هـ د ز متطابقان .

(ثانياً) : ا ج = هـ و



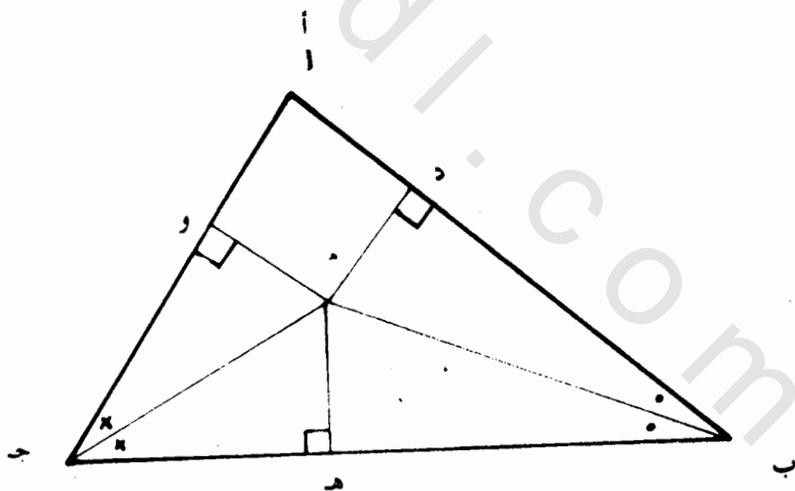
شكل [ ٨ - ٢٥ ]

( ٤ ) فى شكل ( ٢٥ - ١ )  $\hat{A} = \hat{D}$  ،  $\hat{B} = \hat{E}$  ،  $\hat{C} = \hat{F}$  ، مع ذكر السبب .  
 والمطلوب إثبات أن المثلثين غير منطابقين ،



شكل [ ٢٥ - ١ ]

( ٥ ) فى شكل ( ٢٥ - ١٠ ) ، م ب ينصف زاوية ب ، م ج ينصف زاوية ج ، م د عمودى على ا ب ، م ه عمودى على ب ج ، م و عمودى على ج ا والمطلوب إثبات أن :  $m = d = w$  و

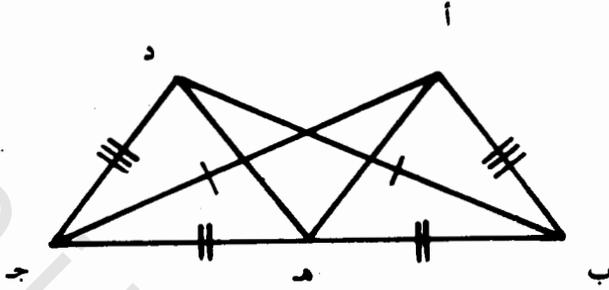


شكل [ ٢٥ - ١٠ ]

(٦) في شكل (٢٥ - ١١) ،  $ا ب = د ج$  ،  $هـ$  منتصف  $ب ج$  والمطلوب إثبات أن :

(أ)  $ا ب \hat{=} ج د = د ج \hat{=} ب$

(ب)  $ا هـ = د هـ$  .

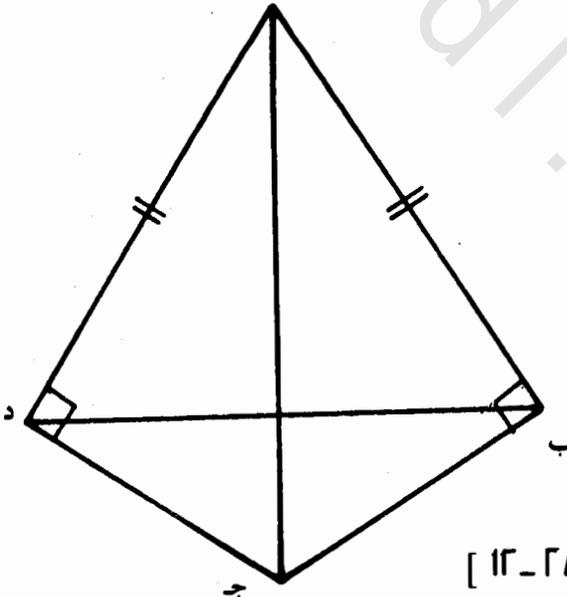


شكل [ ١١ - ٢٥ ]

(٧) في شكل (٢٥ - ١٢) ، اثبت الآتي :

(أ)  $هـ ا ب ج$  يكافئ  $هـ ا د ج$

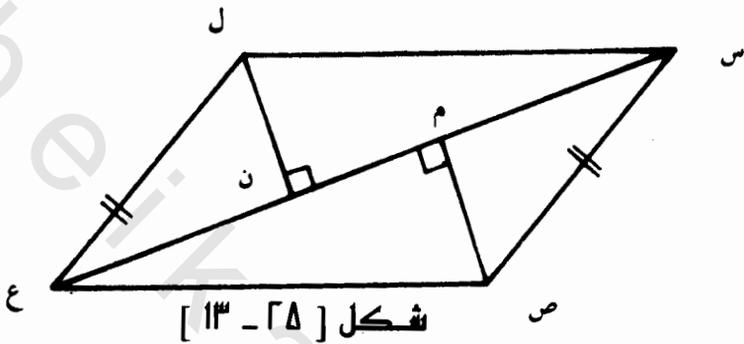
(ب)  $ا ج$  عمودي على  $ب د$  .



شكل [ ١٢ - ٢٥ ]

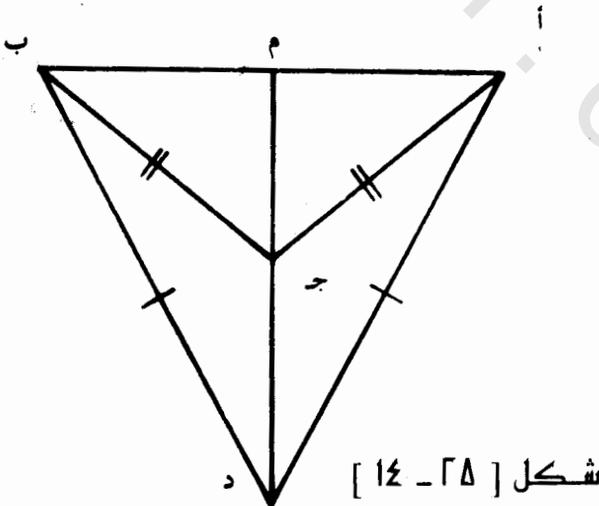
( ٨ ) في شكل ( ٢٥ - ١٣ ) ، س ص يوازي ل ع و يساويه ، ص م عمودي على س ع ، ل ن عمودي على س ع والمطلوب إثبات أن :

ص م = ل ن  
 س ل = ص ع  
 س ل يوازي ص ع



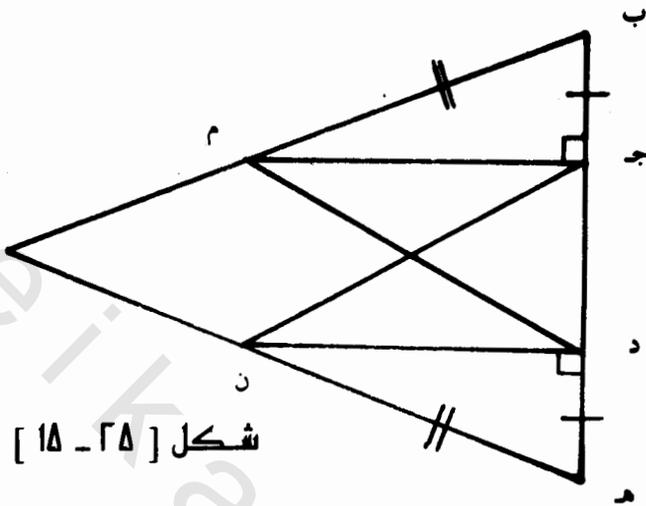
( ٩ ) في شكل ( ٢٥ - ١٤ ) ، أ ج = ب ج وكذلك د أ = د ب فاثبت

( أ ) زاوية أ د ج = زاوية ب د ج  
 ( ب ) دم عمودي على أ ب .



(١٠) في شكل (٢٥ - ١٥)،  $م ب = ن ه$ ،  $ج ب = د ه$ ،  $م ج \perp ب د$ ،  $ن د \perp ب ه$

والمطلوب إثبات أن  $ج ن = م د$



شكل [ ٢٥ - ١٥ ]

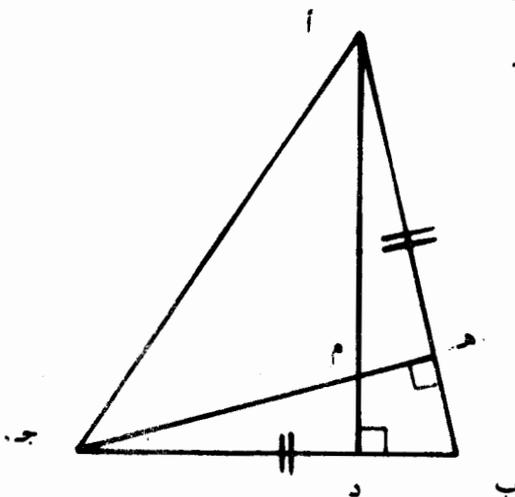
(١١) في شكل (٢٥ - ١٦)،  $أ ب = ج ب$ ،  $أ د \perp ب ج$

،  $ج ه \perp أ ب$  فاثبت أن :

(أ)  $أ د = ج ه$  .

(ب)  $م د = م ه$  .

(ج)  $أ م = ج م$  .



شكل [ ٢٥ - ١٦ ]

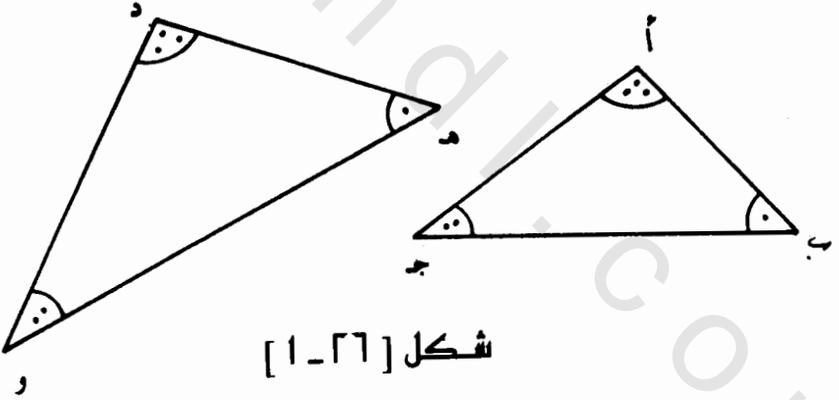
## الدرس السادس والمختصر :

### تشابه المثلثات

### Similar triangles

لكي يتشابه مثلثان فإنه يجب أن يتوفر الآتي :

- ( ١ ) أن تتساوى الزوايا المتناظرة فيهما .
  - ( ٢ ) أن تتساوى النسبة في الطول بين كل ضلعين متناظرين .
- ففي المثلثين أ ب ج ، د ه و شكل ( ٢٦ - ١ ) نجد أن :



شكل [٢٦-١]

$$\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E} \text{ ومن ثم فإن } \hat{C} = \hat{F}.$$

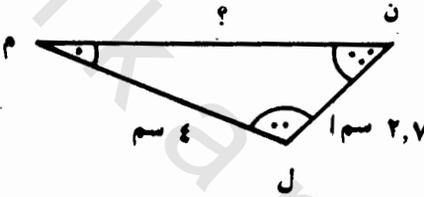
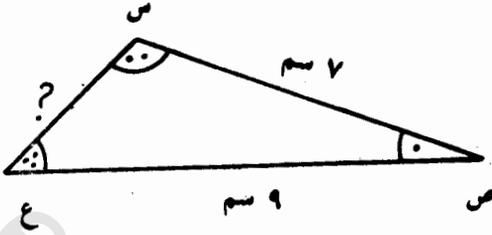
وذلك نجد أن :

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EH} = \frac{CA}{FD} = \text{مقدار ثابت}$$

□ مثال (١) :

في شكل (٢٦ - ٢) ، المثلثان س ص ع ، ل م ن متشابهان أوجد طول الأضلاع المؤشر أمامها بعلامة استفهام ؟

وهي الضلعان س ع ، م ن .



□ الحل : شكل [٢٦ - ٢]

حيث أن زاوية س = زاوية ل

، زاوية ص = زاوية م

ومن ثم زاوية ع = زاوية ن

$$\therefore \frac{س ص}{ل م} = \frac{ص ع}{م ن} = \frac{ع س}{ن ل}$$

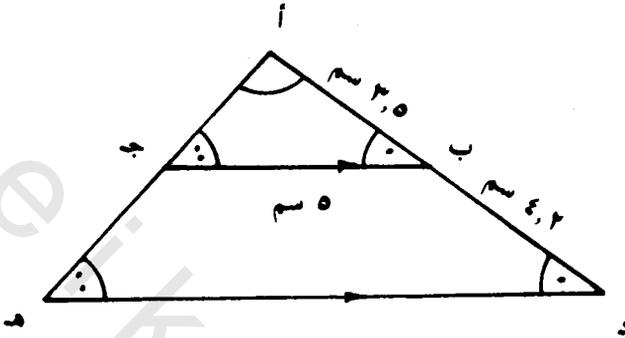
$$\therefore \frac{٧}{٤} = \frac{٩}{م ن} = \frac{ع س}{٢,٧}$$

$$\therefore م ن = \frac{٩ \times ٤}{٧} = \frac{٣٦}{٧} = ٥,١ \text{ سم تقريباً .}$$

$$ع س = \frac{٢,٧ \times ٧}{٤} = \frac{١٨,٩}{٤} = ٤,٧ \text{ سم تقريباً .}$$

□ مثال (٢) :

في شكل (٢٦ - ٣) ، أوجد طول الضلع د هـ .



شكل [٢٦-٣]

□ الحل :

∵  $\Delta أ ب ج$  ،  $\Delta أ د هـ$  متشابهان [ وزاوية الرأس أ مشتركة في كل منهما ، وزاوية  $\Delta أ ب ج$  تناظر زاوية  $\Delta أ د هـ$  وتساويها كما وأن زاوية  $\Delta أ ب ج$  = زاوية  $\Delta أ د هـ$  وتناظرها ] .

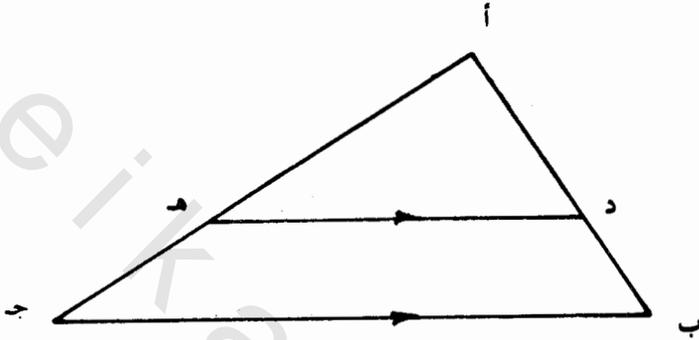
∴ تتناسب أطوال أضلاع المثلثين ومن ثم :

$$\frac{أ ب}{أ د} = \frac{ب ج}{د هـ} = \frac{ج هـ}{ب د} =$$

$$\therefore \frac{٣,٥}{د هـ} = \frac{٥}{٤,٢+٣,٥} = \therefore د هـ = \frac{٧,٧ \times ٥}{٣,٥} = ١١ \text{ سم}$$

[ ٢٦ - ١ ] تدريبات :

أولاً : في شكل (٢٦ - ٤) :



شكل [ ٢٦ - ٤ ]

١ -  $AB = 9$  سم ،  $AD = 6$  سم ،  $AC = 12$  سم  
فاوجد طول  $AH$  .

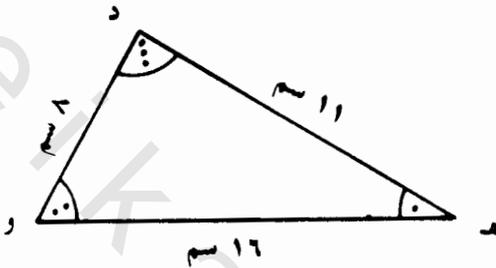
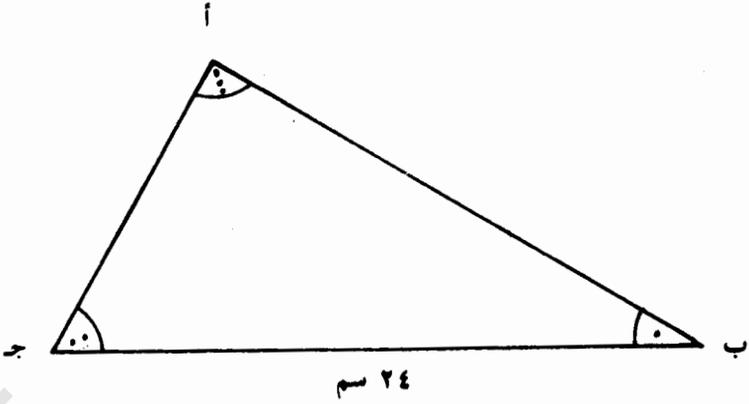
٢ -  $AB = 8$  سم ،  $AD = 6$  سم ،  $AH = 7$  سم  
فاوجد طول  $AC$  .

٣ -  $AD = 7$  سم ،  $DB = 3$  سم ،  $EC = 5$  سم  
فاوجد طول  $AH$  .

ثانياً : في شكل (٢٦ - ٥) ، المثلثان  $ABC$  ،  $DEH$  و متشابهان ،  
احسب :

١ - طول كل من  $AB$  ،  $AC$  .

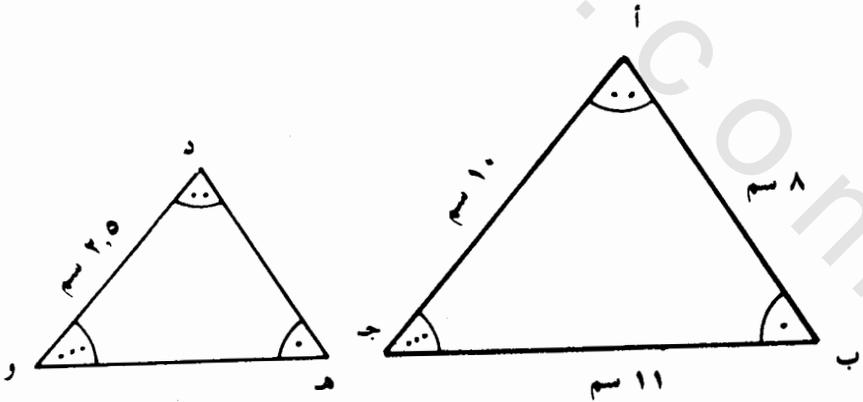
٢ - نسبة المساحة فيما بين المثلثين  $ABC$  ،  $DEH$  و



شكل [٢٦-٥]

ثالثاً: في شكل (٢٦-٦)، المثلثان ا ب ج، د ه و متشابهان احسب:

- ١- طول كل من د ه، ه و
- ٢- النسبة بين مساحة المثلثين ا ب ج، د ه و

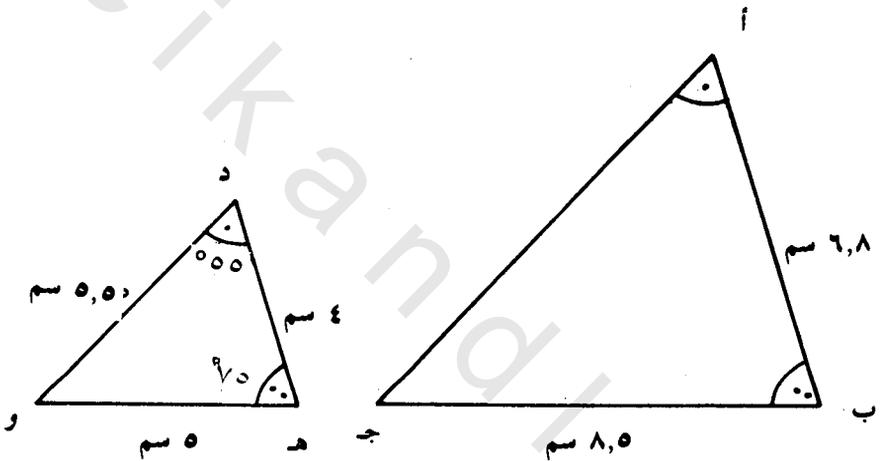


شكل [٢٦-٦]

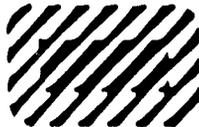
رابعاً : في شكل (٢٦ - ٧) ، المثلثان ا ب ج ، د ه و متشابهان

فاحسب :

- ١ - زاوية أ
- ٢ - زاوية ب
- ٣ - زاوية ج
- ٤ - النسبة بين مساحة المثلثين ا ب ج ، د ه و



شكل [ ٢٦ - ٧ ]



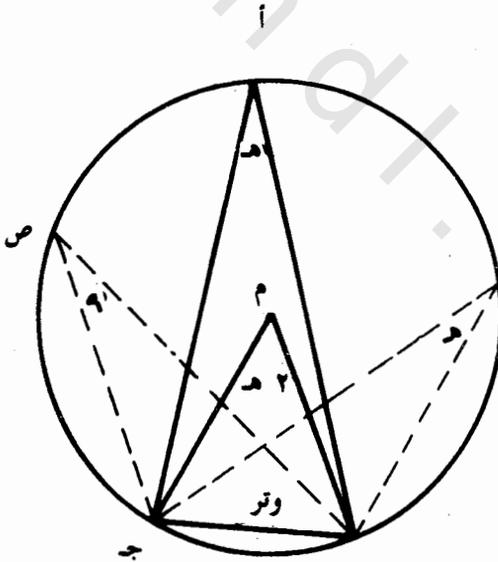
## الدرس السابع والعشرون :

### خواص الزوايا المرسومة بدائرة

#### Angle properties of a circle

توجد مجموعة من الخواص للزوايا المرسومة داخل دائرة وهي كما يلي :

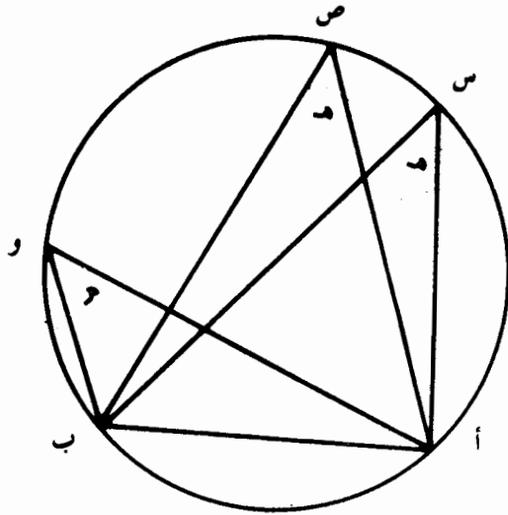
( ١ ) الزاوية المركزية (رأسها هو مركز الدائرة) تعادل ضعف الزاوية المحيطية (رأسها يقع على محيط الدائرة) ، التي تشترك معها في نفس القوس (أو الوتر) ، انظر شكل (٢٧ - ١) .



زاوية ب م ج - زاوية ب أ ج

شكل [ ٢٧ - ١ ]

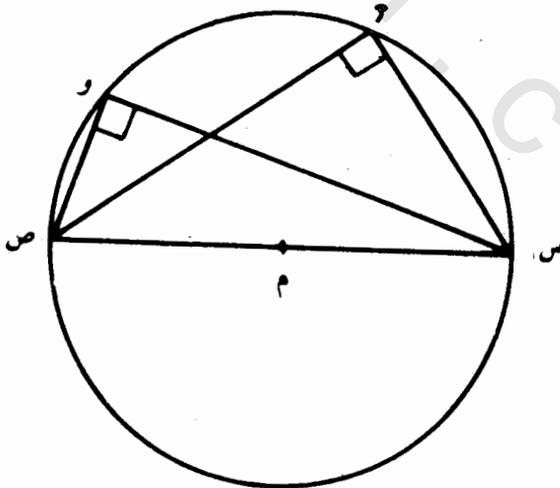
( ٢ ) تتساوى الزوايا المحيطية المنشأة على نفس القوس (أو الوتر) ، انظر شكل ( ٢٧ - ٢ ) .



زاوية أ س ب = زاوية أ ص ب = زاوية أ و ب = هـ

شكل [ ٢٧ - ٢ ]

( ٣ ) الزوايا المحيطية المرسومة على قطر الدائرة تكون قائمة أو الزوايا المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة ، انظر شكل ( ٢٧ - ٣ ) .

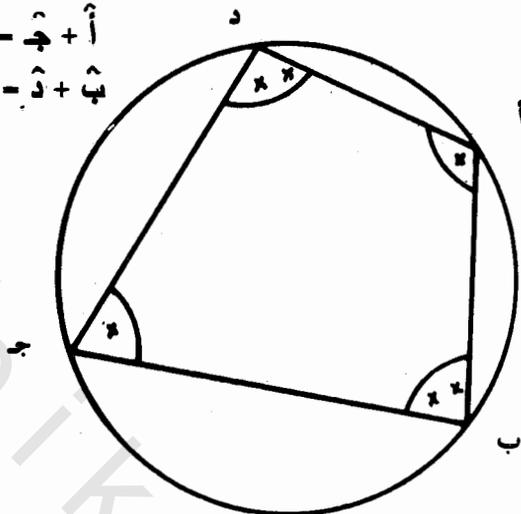


شكل [ ٢٧ - ٣ ]

( ٤ ) فى الشكل الرباعى الدائرى (الذى تقع رؤوسه الأربعة على محيط الدائرة) ، كل زاويتان متقابلتان متكاملتان ، انظر شكل ( ٢٧ - ٤ ) .

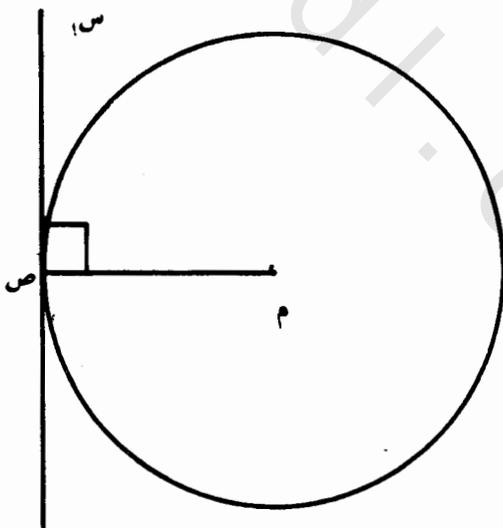
$$\hat{أ} + \hat{ج} = ١٨٠^\circ$$

$$\hat{ب} + \hat{د} = ١٨٠^\circ$$



شكل [ ٤ - ٢٧ ]

( ٥ ) يتعامد المماس للدائرة عند نقطة ما ، مع نصف القطر الواصل لهذه النقطة ، انظر شكل ( ٢٧ - ٥ ) .



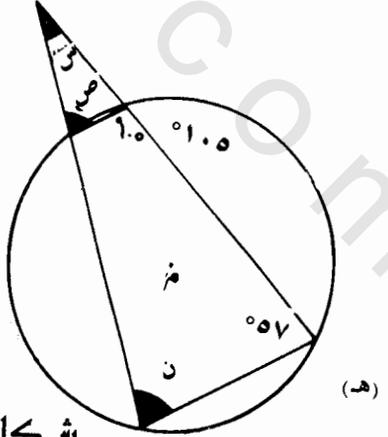
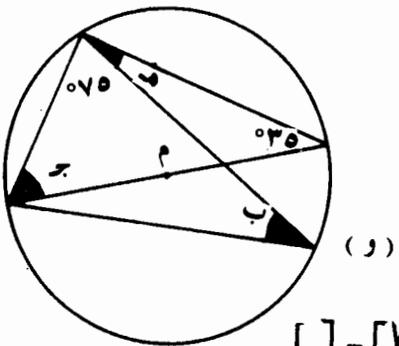
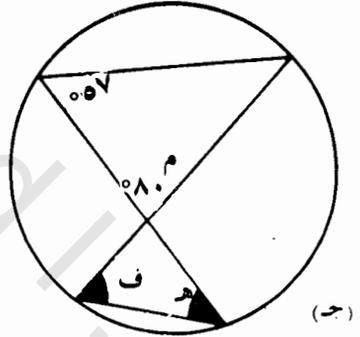
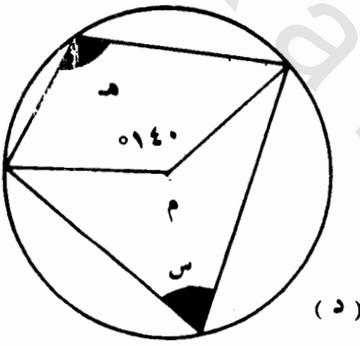
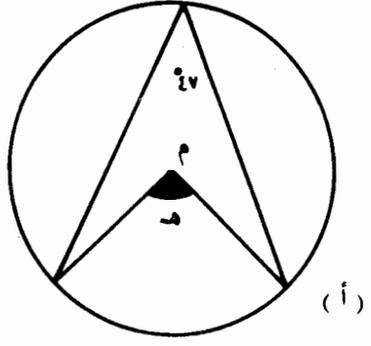
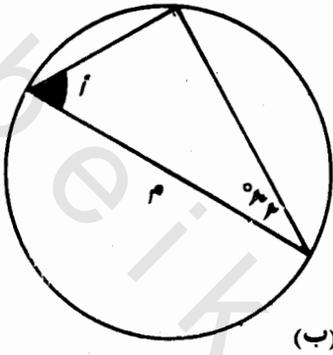
زاوية م ص س = ٩٠°

شكل [ ٥ - ٢٧ ]

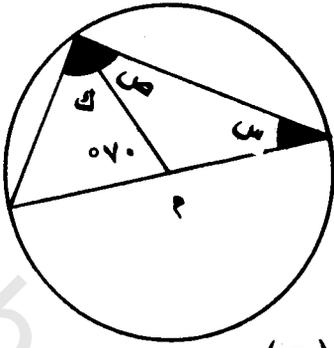
[ ٢٧ - ١ ] تدريبات :

(١) أوجد قيم الزوايا المرموز لها بالحروف الأبجدية في شكل (٢٧ - ٦) .

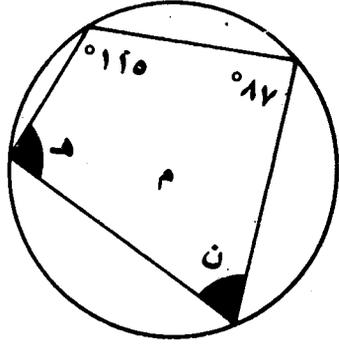
[ م تعني مركز الدائرة - الرسم ليس بمقياس ] .



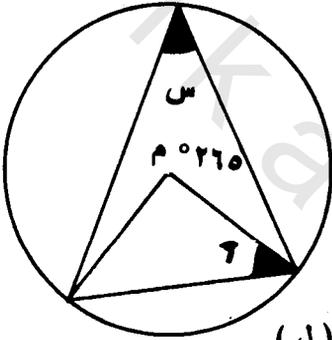
شكل [ ٢٧ - ٦ ]



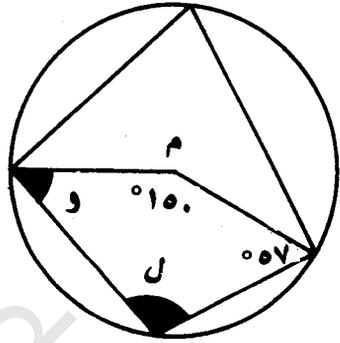
(ج)



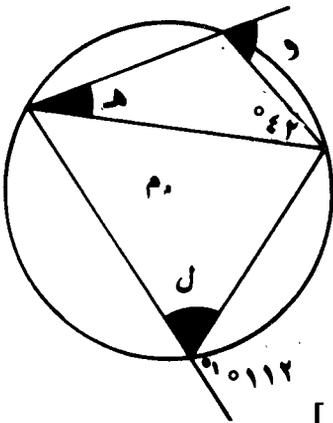
(ز)



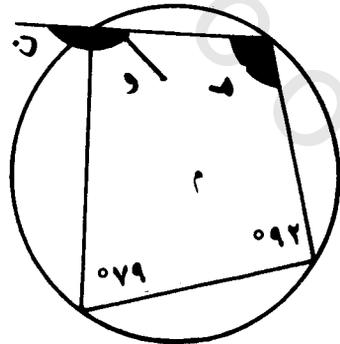
(ل)



(ط)



(ن)



(م)

شکل [ ۶-۲۷ ]

( ٢ ) دائرة بها الوتر ا ب يوازي قطرها ج د ، فإذا كانت زاوية ج أ ب = ٥١.٥ فأوجد :

( أ ) زاوية ج د ب

( ب ) زاوية د ج ب

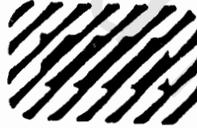
( ج ) زاوية ج ب أ

( ٣ ) أ ، ب ، ج ، د أربع نقط تقع على محيط دائرة واحدة فإذا كانت زاوية أ ب د = ٥٤.٨ وكان أ ب يوازي د ج فأوجد :

( أ ) زاوية أ ج د .

( ب ) زاوية ب د ج .

( ج ) زاوية ب أ ج .



## الطوائف الثامن والعشرون :

### ميل المستقيم والمنحنى

### Gradients of lines and curves

#### [ ٢٨ - ١ ] ميل المستقيم :

علمنا فيما سبق [ الكتاب الثانى أو الجزء الثانى ] ، إن ميل المستقيم يمكن إيجاده ، بعمل زاوية قائمة يكون الخط المستقيم (المطلوب حساب ميله) أو جزء منه بمثابة وتر وتكون قيمة الميل عبارة عن ناتج قسمة الارتفاع الرأسى على الأفقى وهو عبارة عن المماس للزاوية هـ التى يصنعها الخط المستقيم مع الأفقى . أى وباختصار :

$$\text{ميل الخط المستقيم} = \frac{\text{الطول المقابل}}{\text{الطول المجاور}} = \text{ظا هـ} .$$

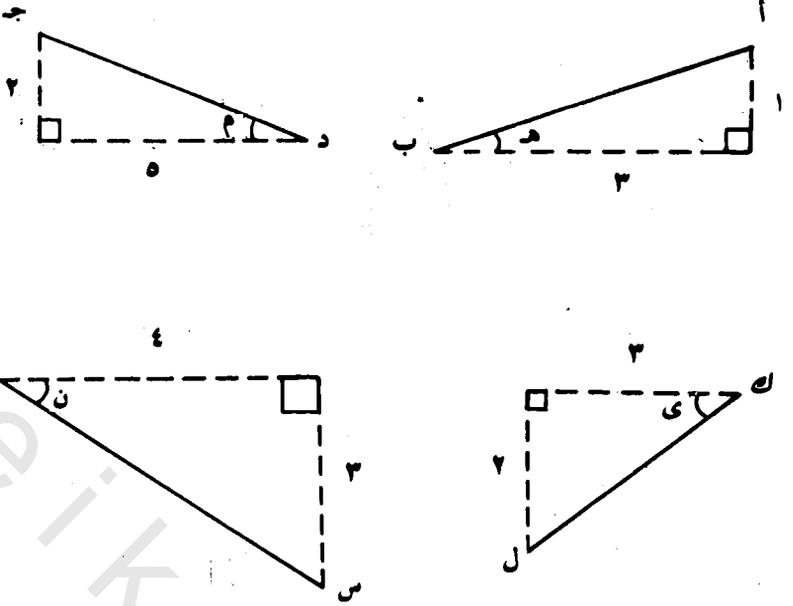
□ مثال (١) : فى الشكل (٢٨ - ١)

$$\text{ميل المستقيم أ ب} = \text{ظا هـ} = \frac{١}{٣}$$

$$\text{ميل المستقيم ج د} = \text{ظا م} = \frac{٢}{٥}$$

$$\text{ميل المستقيم س ص} = \text{ظا ن} = \frac{٣}{٤}$$

$$\text{ميل المستقيم ك ل} = \text{ظا ى} = \frac{٢}{٣}$$



شكل [ ٢٨ - ١ ]

□ مثال (٢) :

ارسم المستقيم الواصل بين النقطتين (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٥) ومن ثم أو- ميل هذا المستقيم .

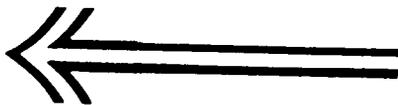
□ الحل :

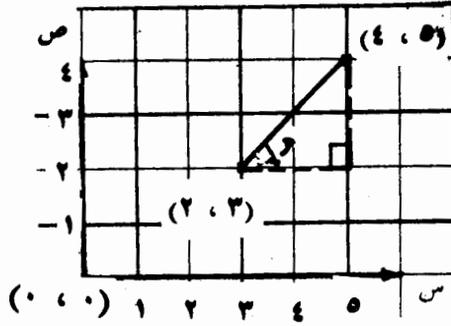
انظر شكل (٢٨ - ٢) :

$$\text{وميل هذا الخط} = \text{ظا ه} = \frac{2}{3} = 1$$

∴ الميل = ١

$$\text{ظا-١} = 1 = 0.45$$





شكل [ ٢٨ - ٢ ]

□ مثال (٣) :

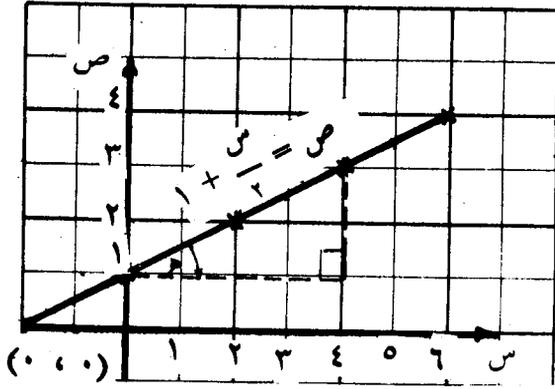
ارسم المستقيم الذى معادلته :

$$\text{ص} = \frac{\text{س}}{2} + 1 \text{ القيم س : } 6 < \text{س} < \text{صفر}$$

انظر جدول (٢٨ - ١) وشكل (٢٨ - ٣) .

٦	٥	٤	٣	٢	١	صفر	س
٣	$\frac{٥}{٢}$	٢	$\frac{٣}{٢}$	١	$\frac{١}{٢}$	صفر	$\frac{\text{ص}}{٢}$
١	١	١	١	١	١	١	١+
٤	$٣ \frac{١}{٢}$	٣	$٢ \frac{١}{٢}$	٢	$١ \frac{١}{٢}$	١	ص

جدول (٢٨ - ١)



شكل [ ٢٨ - ٣ ]

ومن الشكل : ظاهراً  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

وحيث أن المعادلة العامة للمستقيم هي  $ص = م س + ج$

حيث  $م =$  الميل ،  $ج =$  طول الجزء المقطوع من محور الصادات

$$، \therefore ص = \frac{1}{2} س + ١$$

نجد أن الميل  $= \frac{1}{2}$  ،  $ج = ١$  (من الرسم) .

ويمكننا بسهولة إيجاد ميل خط مستقيم يصل فيما بين نقطتين وذلك

بدون الرسم وذلك من العلاقة .

الميل =  $\frac{\text{الفرق بين الإحداثى الصادى (لأى نقطتين على الخط المستقيم)}}{\text{الفرق بين الإحداثى السينى لنفس النقطتين}}$

□ مثال (٤) :

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل فيما بين النقطتين :

١ (٤ ، ٣) ، ب (٢- ، ٤)

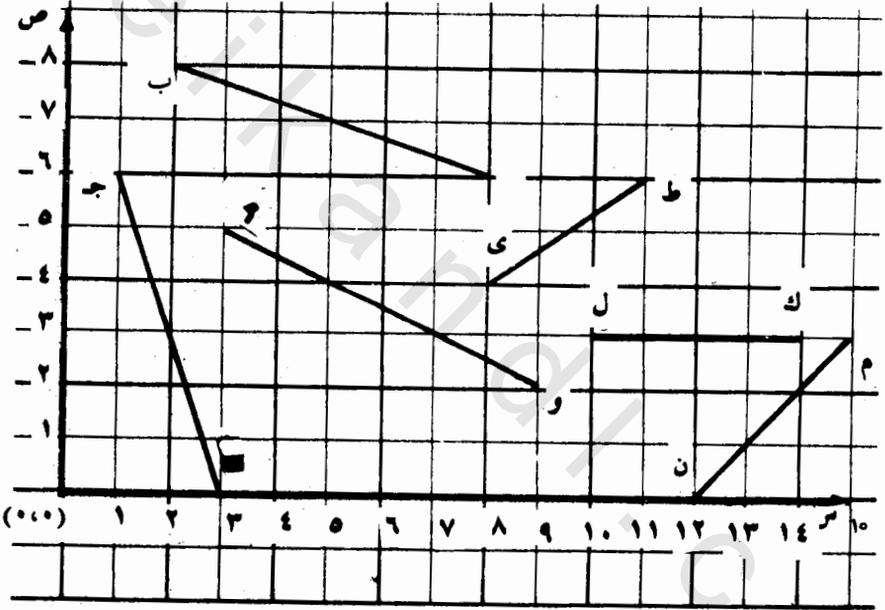
□ الحل :

$$\frac{1-}{6} = \frac{4-3}{(2-)-4} = \text{الميل}$$

∴ الميل =  $-\frac{1}{6}$  (بدون رسم) .

[ ٢٨ - ٢ ] تفریبات :

أولاً : احسب ميل مجموعة المستقيمات ، المبينة في شكل (٢٨ - ٤) .



شكل [ ٢٨ - ٤ ]

ثانياً : مثل النقط التالية بيانياً ثم أوجد ميل الخط الواصل بين كل اثنين

منها :

- |                         |                             |
|-------------------------|-----------------------------|
| (١) (٢ ، ٤) ، (٧ ، ٥)   | (٤) (٤ ، ٤) ، (٦ ، صفر)     |
| (٢) (١ ، ٣) ، (٤ ، ٧)   | (٥) (١ ، ٦) ، (٢ - ، ٦)     |
| (٣) (٢ - ، ٦) ، (٨ ، ٧) | (٦) (٥ ، ٢ -) ، (٤ - ، صفر) |

ثالثاً : ارسم المستقيمت التالفة لقيم س :  $4 \leq س \leq 7$  صفر وفي كل حالة أوجد ظاه بإقامة مثلث قائم الزاوية .

$$(1) \text{ ص } 3 = 1 + س$$

$$(3) \text{ ص } 2 = 3 + س$$

$$(2) \text{ ص } 3 = 3 - س$$

$$(4) \text{ ص } 2 = 4 + س$$

رابعاً : احسب ميل المستقيم الواصل بين كل نقطتين فيما يلي بدون تمثيل النقط ، [ حسابياً وليس بيانياً ] .

$$(1) (1, 4), (-2, 3)$$

$$(5) (1, 4), (3, 3)$$

$$(2) (0, 4), (3, 0)$$

$$(6) (2, 5), (3, 0)$$

$$(3) (7, 3), (0, 0)$$

$$(7) (7, 3), (5, 2)$$

$$(4) (2, 0), (5, 1)$$

$$(8) (3, 0), (4, 4)$$

### [ ٢٨ - ٣ ] ميل منحنى عند نقطة ما :

حيث أن ميل المنحنى يتغير من نقطة إلى أخرى فإنه يلزم لتحديد ميل المنحنى أن نذكر عند أى نقطة على المنحنى يراد إيجاد الميل ويتم هذا بعمل مماس للمنحنى عند النقطة المذكورة ، ومن ثم نوجد ميل هذا المماس (خط مستقيم) .

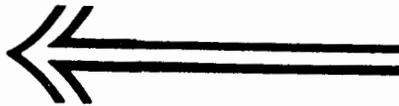
□ مثال :

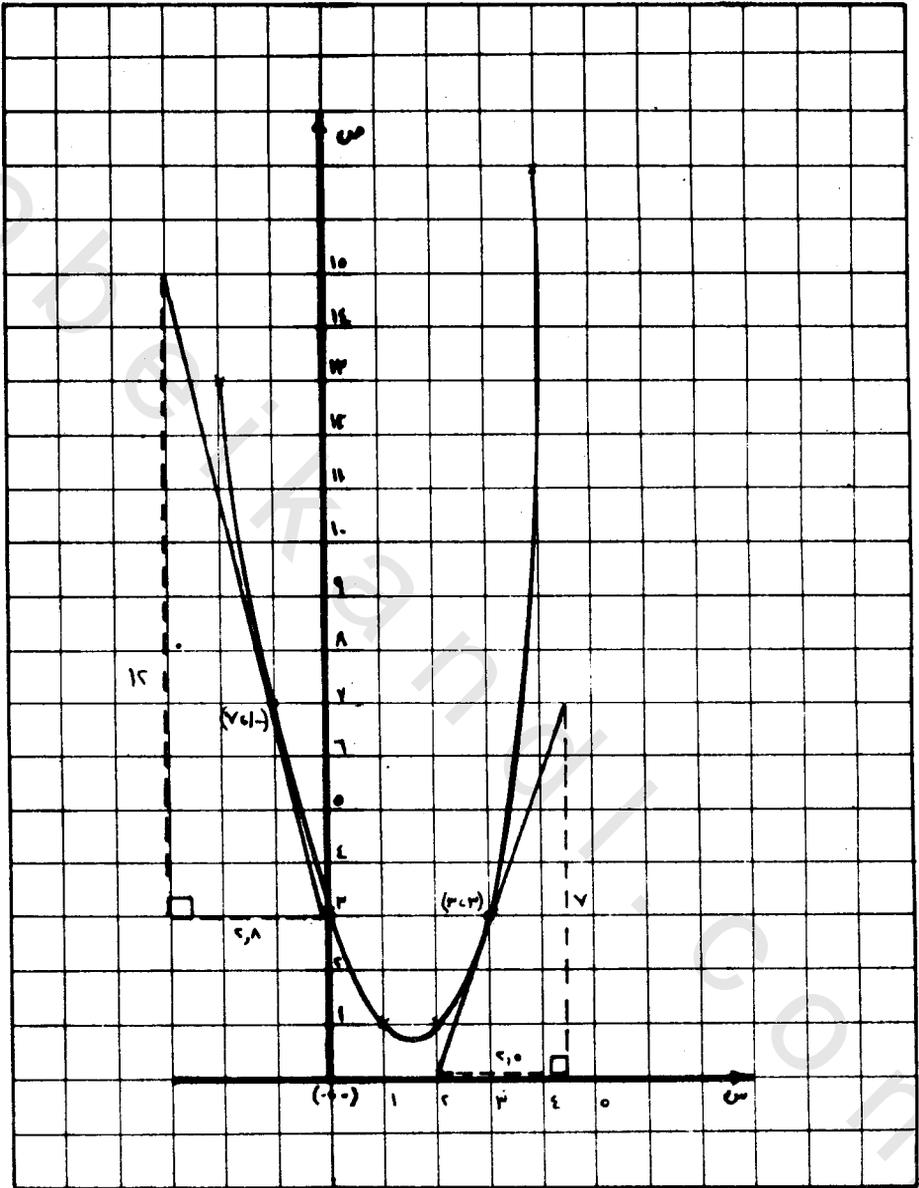
أوجد ميل المماس للمنحنى (ميل المنحنى باختصار) :

$$\text{ص} = 3 - 2س \quad 4 \leq س \leq 7$$

وذلك عند النقطة أ (3, 3) ، ب (-1, 7)

، انظر شكل (٢٨ - ٥) ،





شکل [ ۲۸ - ۵ ]

ومن الرسم نجد أن ميل المماس عند النقطة أ (٣ ، ٣) :

$$٢,٨ = \frac{٧}{٢,٥} =$$

وميل المماس عند النقطة ب (-١ ، ٧) :

$$٤,٣ \text{ تقريباً} = \frac{١٢}{٢,٨} =$$

□ **ملاحظة :**

يلاحظ أن هذه القيم تقريبية وتتوقف دقة الجواب على الدقة في رسم المنحنى وفي رسم المماس .

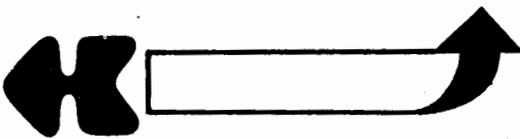
ومن المعلوم مسبقاً أنه مهما بلغت درجة الدقة في الرسم فإنه يبقى مقدار من الخطأ يقل بزيادة دقة الرسم .

**[ ٢٨ - ٤ ] تدريبات :**

(١) ارسم بمقياس رسم مناسب النقط الموضحة في جدول (٢٨ - ٢) وصل فيما بينهما بمنحنى .

٦	٥	٤	٣	٢	١	صفر	س
٩	٦,٢٥	٤	٢,٢٥	١	٠,٢٥	٠	ص

جدول (٢٨ - ٢)



ومن ثم :

( أ ) ارسم المماسات للمنحنى فى النقط التى إحداثيتها السينى  $s = 2$  ،  
 $s = 4$

(ب) أوجد ميل المماس بالتقريب عند كل من هذه النقط .

(٢) ارسم منحنى الدالة :  $v = \frac{2}{s}$  لقيم  $s$  :  $10 \leq s \leq 0$  صفر

ثم أوجد ميل المماس بالتقريب عند النقط التى إحداثيتها السينى  $s = 2$  ،

$s = 4$

