

الفصل الثالث

علم الجبر عند اليونان

يجب أن لا يخفى على القارئ أن حضارة قدماء المصريين والبابليين استمرت أكثر من ثلاثين قرناً من الزمن . وقد تدهورت هاتان الحضارتان تقريباً في القرن الرابع قبل الميلاد ، ومن ثم ظهرت وتبلورت الحضارة اليونانية منطلقة من الشاطئ الغربي لآسيا الصغرى . كما كان لعلماء اليونان اتصال قوي بعلماء بابل ، بل كان هناك كثير من الجاليات الإغريقية متمركزة في بابل ، مما ساعد ازدهار الحضارة اليونانية . والجدير بالذكر أن احتلال الإسكندر المقدوني لمصر ساعد انطلاقة الحضارة اليونانية .

لقد تأثر علماء اليونان بعلوم قدماء المصريين أكثر من غيرهم ، لذا نجد أنهم ورثوا علم الهندسة عن قدماء المصريين . فقد كان دور علماء الإغريق في كل من الهندسة المستوية والمجسمة عظيماً جداً ، بل لا يقارن أبداً بما قدموه في علم الجبر . لذا نجد أن البابليين سبقوهم بمراحل في علم الجبر وإن برز بعض الشخصيات العلمية عند اليونان في تطبيق بعض مبادئ علم الجبر مثل ديوفانتس وهيرون الإسكندري وإقليدس .

كما أنه يلزمنا في هذا المقام إبراز بعض الأفكار الجبرية التي وردت في بعض مؤلفات كل من ديوفانتس وهيرون الإسكندري وإقليدس . فمثلاً المتطابقة الجبرية $(أ + ب)^2 = أ^2 + ٢ أب + ب^2$ وردت كثيراً في كتاب الأصول لإقليدس . كذلك بعض المسائل السیالة (غير المعينة) من الدرجة

الأولى ، والتي ذكرت في كتاب الحساب أريثماتيكا (Arithmetica) لديوفانتس (Diophantus) كلها تقدم ذكرها عند البابليين .

لقد جمع ديوفانتس جميع الأفكار الحسابية لعلماء عصره ولمن سبقه من علماء الحضارات القديمة في هذا المجال ، ووضعها في كتابه أريثماتيكا (Arithmetica) الذي بقي مدة طويلة المرجع الوحيد في الرياضيات البحتة . ومن المؤسف حقاً أن بعض علماء الغرب يتجنبوا عمداً ذكر دور علماء بابل في مجال علم الجبر لكي ينسبوا ابتكار علم الجبر لديوفانتس ، علماً أنه لم يعمل أكثر مما عمله إقليدس بالنسبة لجمعه الهندسة المستوية والمجسمة في كتابه المعروف باسم «أصول الهندسة» لإقليدس . ولا يفوتنا معرفة أن الفيثاغوريين قد حلوا بعض المسائل السائلة من الدرجة الثانية .

أما هيرون الإسكندري فقد انفرد في تطبيق بعض الأفكار الرياضية على التراكيب الميكانيكية ، وله الفضل حقاً في تقديم برهان متميز لمساحة المثلث بدلالة أضلاعه . وبهذه المناسبة يجب أن نعرف أن علماء الإغريق تأثروا في (طريقة الوضع الكاذب) لقدماء المصريين ، وبقي علماء الإغريق يستعملونها في حساباتهم .

ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» : أن هناك بعض الأفكار الموجودة في بردية رايند التي كتبها أحسن تعلمها علماء اليونان واستفادوا منها بوضع مسائل رياضية ، مثل المطلوب حساب عدد من التفاح بحيث إذا تسلم أربعة أشخاص على التوالي ثلث وثمان وربع وخمس ذلك العدد من التفاح ، بينما تسلم الشخص

الخامس عشر تفاحات ، لم يبق سوى تفاحة واحدة للشخص السادس . أي
 أن المعادلة هي : $\frac{1}{3}س + \frac{1}{8}س + \frac{1}{4}س + \frac{1}{5}س = 1 + 10 + س$. ومنها يكون
 عدد التفاح $س = 120$. وكذلك هناك مسائل من النوع المألوف في ملء أو
 تفريغ إناء بواسطة عدد من الأنابيب ، يملؤه الأول في يوم واحد ، ويملؤه
 الثاني في يومين ، ويملؤه الثالث في ثلاثة أيام . فكم يوماً يلزم لملء الإناء إذا
 فتحت الأنابيب جميعاً؟

الحل : نفرض أن معدل ملء الإناء في اليوم الواحد (سعة الإناء) = $س$
 لكل يوم .

$$\frac{س}{1} = \text{معدل ملء الإناء في اليوم الأول}$$

$$\frac{س}{2} = \text{معدل ملء الإناء في اليوم الثاني}$$

$$\frac{س}{3} = \text{معدل ملء الإناء في اليوم الثالث}$$

وعندما نفتح الثلاثة أنابيب $(س + \frac{1}{2}س + \frac{1}{3}س) \times \text{الزمن (اليوم)} = س \times 1$ يوم واحد

$$\frac{11}{6}س \times \text{الزمن} = س$$

$$\therefore \text{الزمن} = \left(\frac{6}{11} \text{ يوم}\right) = 24 \times \frac{6}{11} = 13 \text{ ساعة و } 5 \text{ دقائق و } 7 \text{ ثواني}$$

هيرون الإسكندري (Heron) :

هناك وجهات نظر مختلفة بين مؤرخي الرياضيات حول تاريخ ولادة وهوية
 هيرون الإسكندري . ولكن هناك شبه اتفاق بين المؤرخين أنه يوناني ، وتعلم

ولكن لا يخفى على القارئ أن هذه الطريقة قد سبق هيرون بها علماء بابل والذي سبق أن تحدثنا عنها^(١). وهذه الطريقة دقيقة، فجزر العدد (٥) من الجداول الرياضية = ٢,٢٣٦ .

والحقيقة أن هيرون لم يدعها لنفسه، بل استخدمها في حساباته، ولكن علماء الغرب يصرون على أنه من ابتكارات هيرون الإسكندري .

الجزء الثاني: ويشمل حساب الحجم مثل الأسطوانة، والهرم، والمخروط، ومتوازي السطوح، والجسم شبه الموشوري (Prisms)، والكرة، ومخروط ناقص، وهرم ناقص .

الجزء الثالث: فقد خصصه للمعادلات السائلة (غير المعينة). مثل: المطلوب إيجاد مستطيلين بحيث يكون محيط الثاني يساوي ثلاثة أمثال محيط الأول، ومساحة الأول تساوي مساحة الثاني: $س + ص = ٣ (ع + هـ)$ ، $س ص = ع هـ$. وغيرها .

ويذكر أورثر كيتلمان في كتابه «تاريخ الرياضيات» أن هيرون له اهتمامات خاصة في التراكيب الميكانيكية المختلفة البسيطة منها والمعقد . كما اشتهر بأنه من علماء اليونان الذين قدموا خدمة عظيمة للرياضيات التطبيقية . أما كارل بوير فيذكر في كتابه «تاريخ الرياضيات» أن هيرون أدخل تحسينات كثيرة على برهان أرخميدس الخاص بمساحة المثلث بدلالة أضلاعه =

$$(١) \sqrt{ب} \text{ ذكر البابليون أن أقرب جذر ب } ١, \text{ واعتبروا } ١ - \frac{ب}{١ ب}$$

$$\therefore \text{ الجذر الجديد ب } ٢ = \frac{ب + ١ ب}{٢}$$

$\sqrt{ح(ح-أ)(ح-ب)(ح-ج)}$ ، حيث إن $ح = \frac{1}{2}$ محيط المثلث ،
 و أ ، ب ، ج أضلاع المثلث .

لقد ظل إنتاج هيرون مجهولاً مدة طويلة من الزمن حتى عشر
 ر . سكون (R. Schone) على كتاب هيرون العظيم ميتريكا (Metrica) في
 سنة (١٣١٧هـ = ١٨٩٦م) ، ونشره للملأ ، فصارت الصورة عنه واضحة
 المعالم . والجدير ذكره هنا أن هيرون استفاد من البابليين في إيجاد الجذر
 التربيعي للأعداد غير المربعة ، وكذلك استخدم فكرة قدماء المصريين في
 إيجاد حجم الهرم الرباعي والهرم الناقص وكذلك المخروط الناقص .

كما طور هيرون طريقة علمية تمكنه من تكوين مثلث قائم الزاوية ، كأن
 يكون المطلوب إيجاد مثلث قائم الزاوية بأعداد صحيحة فيه المجموع العددي
 لمساحته ومحيطه عدد ثابت معلوم ، فمثلاً :

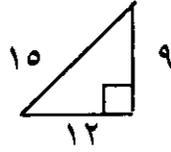
المثلث القائم الزاوية الذي مجموع محيطه ومساحته ٢٨٠ تكون أضلاعه
 ٢٩ ، ٢١ ، ٢٠

المثلث القائم الزاوية الذي مجموع محيطه ومساحته ٢٧٠ تكون أضلاعه
 ٤١ ، ٤٠ ، ٩

المثلث القائم الزاوية الذي مجموع محيطه ومساحته ١٠٠ تكون أضلاعه
 ١٧ ، ١٥ ، ٨

المثلث القائم الزاوية الذي مجموع محيطه ومساحته ٩٠ تكون أضلاعه ٩ ،
 ١٥ ، ١٢

وعلى هذا المنوال .



لنأخذ مثلثاً أضلاعه ٩ ، ١٢ ، ١٥ ،
المساحة = $\frac{1}{2} (9 \times 12) = ٥٤$

$$\text{المحيط} = 9 + 12 + 15 = 36$$

$$\text{مجموع المساحة والمحيط} : 36 + 54 = 90$$

خلاصة القول وعلى كل حال : هناك بعض المؤرخين يعتبرون هيرون مصرياً ، ولكن الأغلبية العظمى ينوهون بأنه يوناني . له باع في مجال علم الميكانيكا فقد وصف أكثر من مائة آلة بسيطة أو حيلة ميكانيكية . لذا نرى علماء العرب والمسلمين اهتموا بإنتاج هيرون ، فترجموا مصنفاته في علم الميكانيكا إلى اللغة العربية ، وعرف كتابه بكتاب هيرون في رفع الأشياء الثقيلة بين علماء العرب والمسلمين .

ديوفانتس (Diophantus) :

من الصعب جداً أن نحدد تاريخ ميلاد ديوفانتس ، ولكن التحريات توحى بأنه عاش في الفترة التي عاش بها هيرون الإسكندري أو قريب منها . ولكنه نما وترعرع في مدينة الإسكندرية . ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» أن ديوفانتس الإسكندري لمع في القرن الثاني للميلاد على أرجح الآراء بالرغم من أن تواريخ أخرى عن عصر بروزه تعطى من وقت لآخر ، وتتراوح هذه الآراء بين ١٥٠ قبل الميلاد و ٣٥٠ للميلاد . وكل ما يعرف عن حياته لا يتجاوز ما ذكر في إحدى القطع الشعرية الحسابية في الأدب الإغريقي ، حيث تقول الأرجوزة ما معناه : إن طفولته استغرقت $\frac{1}{6}$ حياته وأن لحيته نبتت بعد ذلك بمقدار $\frac{1}{12}$ من عمره ، وأنه

تزوج بعد ذلك بسبع عمره ، وبعد خمس سنوات ولد طفله الذي عاش نصف عمر أبيه . ومات الأب بعد موت ابنه بأربع سنوات . ومن هذه القصة

$$\begin{aligned} \Leftarrow s &= \frac{1}{6} + s + \frac{1}{12} + s + \frac{1}{7} + s + \frac{1}{2} + s + 4 \\ s &= \frac{14s + 7s + 12s + 42s + 420 + 42 + 336}{84} \end{aligned}$$

$$\therefore 75 = 756 + s \Leftarrow s = \frac{756}{9} = 84 \text{ وهذا عمر}$$

ديوفانتس ، ولكي نحصل على متى تزوج نقول : $\frac{1}{6} + s + \frac{1}{12} + s + \frac{1}{7} + s =$

$$\frac{1}{6} + (84) + \frac{1}{12} + (84) + \frac{1}{7} + (84) = 12 + 7 + 14 = 33 .$$

وكان ديوفانتس من كبار الشخصيات الرياضية في الإسكندرية ، فقد وضع كتاباً في علم الحساب سماه أرثيماتيقا (Arithmetica) في ثلاثة عشر جزءاً ، فقد معظمها ما عدا ستة أجزاء ، ترجمت إلى اللغة العربية ، فاستفاد منها علماء العرب والمسلمين . وقد استفاد ديوفانتس من نظريات الأعداد التي كانت تدور حول المعادلة الجبرية ذات المجهول الواحد من الدرجة الأولى والثانية والتي كانت معروفة لدى علماء بابل . ويقول خليل ياسين في كتابه «التراث العلمي العربي» : «وانفرد ديوفانتس بحساب الجبر من بين علماء الرياضيات في الإسكندرية ، وهو حساب يختلف جوهرياً عن التفكير الرياضي اليوناني ، وأغلب الظن أنه امتداد طبيعي للجبر البابلي ، لأن الطريقة الرياضية المتبعة فيه غريبة عن التفكير البديهي اليوناني الذي يعلق أهمية كبيرة على الاستدلال ، في حين يحتوي كتاب الجبر لديوفانتس على طريقة في الحل تعتمد على طرق جبرية حسابية أساسها استخدام المعلوم

للتعرف أو لاكتشاف المجهول ، وهي الطريقة الرياضية المتبعة عند البابليين
كما تدل على ذلك الألواح الطينية المكتشفة» .

ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما أنف الذكر أنه
ورد في كتاب ديوفانتس المعروف باسم أريثماتيكا (Arithmetica) مسائل
كثيرة تدل على براعة ديوفانتس منها :

(١) المطلوب إيجاد عددين تكون النسبة بين مجموعهما ومجموع

$$\leftarrow \text{مربعيهما معلومة ، أي : } \frac{س^2 + ص^2}{س + ص} = ق ، \text{ وقد اختار ديوفانتس قيمة } ق = ١٠$$

$$= \frac{س^2 + ص^2}{س + ص} = ١٠ \leftarrow س^2 + ص^2 = ١٠س + ١٠ص \leftarrow س^2 - ١٠س + ١٠ص - ١٠ص = ١٠ص - ١٠ص$$

$$\text{صفر} \leftarrow (س^2 - ١٠س + ٢٥) + (ص^2 - ١٠ص + ٢٥) = ٥٠ = (س - ٥)^2 + (ص - ٥)^2$$

$$(س - ٥)^2 + (ص - ٥)^2 = ٥٠ = (س - ٥)^2 - ٥٠ = (س - ٥)^2 - ٥٠ = (س - ٥)^2 - ٥٠$$

$$\pm \sqrt{(س - ٥)^2 - ٥٠} = ص - ٥ ، \pm \sqrt{(ص - ٥)^2 - ٥٠} = س - ٥$$

لذا (س ، ص) = (١٠ ، ٠) ، (٤ ، ١٢) ، (١٢ ، ٤) ، (٠ ، ١٠) ، (٦ ، ١٢) ، (١٢ ، ٦) ، (١٠ ، ١٠) .

(٢) المطلوب إيجاد ثلاثة أعداد بحيث يكون أحدهما وسطاً متناسباً بين

الاثنين الآخرين ، وبحيث يكون الفرق بين أي اثنين منها مربعاً كاملاً .

فإذا كانت س ، ص ، ع هي الأعداد الصحيحة الثلاثة

∴ س - ص = أ^٢ ، ص - ع = ب^٢ ، س - ع = ج^٢ . وهناك أمثلة كثيرة

جداً من هذا النوع . كما استعمل ديوفانتس الرمز « » للمجهول

(Syncope) وهذا يعني بتر الكلمة وأخذ الحرف الأول منها . واستعمل الرمز « ^ » ليدل على الناقص .

وقسم ديوفانتس المعادلات التربيعية إلى ثلاثة أنواع وهي :

(١) $م س^٢ + ف س = ك$ ، حيث إن كلاً من م ، ف ، ك أعداد صحيحة موجبة .

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2} + ف} - \frac{1}{4} ف}{م} = س \therefore$$

$$(٢) م س^٢ = ف س + ك$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2} + ف} + \frac{1}{4} ف}{م} = س \therefore$$

$$(٣) م س^٢ + ك = ف س$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2} + ف} + \frac{1}{4} ف}{م} = س \therefore$$

يتضح أن ديوفانتس لم يحصل إلا على جواب واحد موجب ، حتى ولو كان للمعادلة جوابان موجبان . كما أنه لم يشتغل على المعادلة من الدرجة الثالثة . لذا لا نستطيع أن نقول : إن ديوفانتس مبتكر علم الجبر ، كما فعل علماء الغرب المتحيزين للعلماء اليونان ، لأن ديوفانتس كان متأثراً تماماً بإنتاج علماء بابل في هذا الميدان .

ومعظم أفكاره الجبرية ورثها من أعمال علماء بابل . ولكن الذي جمع هذه المعارف وطورها وأضاف إليها الكثير من أفكاره هو محمد بن موسى الخوارزمي ، ويظهر ذلك في كتابه «الجبر والمقابلة» ، فهو بحق مؤسس علم الجبر دون منازع .

وأتحفنا رشدي راشد في تحقيقه لكتاب «صناعة الجبر» لديوفانتس ترجمه قسطا بن لوقا البعلبكي والذي يعتبر من المصادر المهمة التي استند عليها علماء العرب والمسلمين في مجال العلوم الرياضية . ويذكر رشدي راشد أن الترجمة العربية هي مخطوطة رقم (٢٩٥) رياضيات بمكتبة أستان قدس رضوي ، بمسجد الإمام علي رضا بمشهد بإيران ، وهي تحتوي على ثمانين ورقة ، وطول الصفحة ١٧,٥ سنتيمتر وعرضها ١٣ سنتيمتراً ، وتاريخ نسخها ٥٩٥هـ على يد محمد بن أبي بكر بن جاكير المنجم . وكل صفحة تحتوي على عشرين سطراً .

وأضاف رشدي راشد أن كتاب صناعة الجبر لديوفانتس الذي ترجمه قسطا بن لوقا البعلبكي يحتوي على المقالة الرابعة (المربعات والمكعبات) ، والمقالة الخامسة (المسائل العددية) ، والمقالة السادسة والمقالة السابعة (مسائل عامة) فقط . كما نوه المحقق أن قسطا بن لوقا أدخل على الترجمة ألفاظاً وتعابير لم تكن تخطر على بال ديوفانتس ، مثل كلمة الجبر في العنوان ، وكلمة الجبر والمقابلة في أغلب صفحات الترجمة . حيث إن ديوفانتس يبحث عن عدد معين وليس عن الحالة العامة . ويا حبذا لو أن عالمنا قسطا بن لوقا استخدم كتاب «ديوفانتس في المسائل العددية» بدلاً من «صناعة الجبر لديوفانتس» ، لأن علم الجبر يرتبط تماماً باسم عالم الإسلام محمد بن موسى الخوارزمي (١٦٤-٥٢٣هـ) .

ويعلل رشدي راشد أن كتاب ديوفانتس الذي ترجمه قسطا بن لوقا البعلبكي ليس كتاب جبر ، ولكنه كتاب يبحث في نظرية الأعداد ، وذلك يظهر من قوله : وما نقوله الآن يختلف تماماً عما يكرره كثير من المؤرخين مثل هيث ، حينما يلصقون بشكل عام وغامض اسم ديوفانتس بالجبر ، وما نقوله هو : إن أعمال ديوفانتس لم تكن جبرية ، بل هي عكس طريقة الجبريين من الناحية المعرفية ، بمعنى أن نقطة بداية ديوفانتس هي ما ينتهي إليه عادة الجبريون : إيجاد القيمة العددية ، فالجبري يبدأ بالرد على السؤال ، وهي الأعداد التي تحقق خاصية معينة ، وينتهي بإيجاد قيمة عددية محددة ، وهذا هو ما يبدأ به ديوفانتس .

نتفق مع المحقق رشدي راشد على تعليله الذي قدمه أعلاه ، ولكن نسي أن قسطا بن لوقا البعلبكي ساعد على هذا الالتباس ، لأنه أضاف كلمة جبر لعنوان الكتاب . وعادة المستشرقين محاولة تبرير أعمالهم المغرضة ، بمثل هذه الادعاءات الخاطئة . ولكن المحقق رشدي راشد أدى الرسالة على ما يرام ، وقدم شرحاً يدل على صحة كلام بعض علماء الغرب المنصفين أن الجبر علم عربي ، وإن كانت بعض الأفكار معروفة لدى قدماء المصريين والبابليين واليونانيين وغيرهم . ولكن الذي جمعها وعلق عليها ووضع لها كثيراً من الأمثلة وأضاف نظريات جديدة في هذا الميدان هم علماء العرب والمسلمين مثل الخوارزمي والكرخي وعمر الخيام وأبي كامل المصري والكاشي وغيرهم .

ويذكر المؤلف في كتابه «العلوم البحتة في الحضارة العربية والإسلامية» أنه اكتشف مؤخراً مخطوطة في علم الأعداد والتي تسمى صناعة الجبر لديوفانتس ، وتحتوي على بعض المعلومات عن المعادلات ذات المجهول

الواحد من الدرجة الأولى والثانية ذات المجهولين ، ففرح الأوروبيون وصاروا يقولون وبصوت عال : لقد خلصنا من ديننا العربي في علم الجبر ، فنحن مدينون لديوفانتس في المعرفة الجبرية . والجواب على ذلك : يجب أن نكون موضوعيين ، فمما لا شك فيه لدى اللبيب والمطلع على التراث العلمي أن معظم العلوم التي بين أيدينا لها جذور في الحضارات القديمة التي سبقت اليونانية والعربية . فديوفانتس استفاد من خبرة قدماء المصريين والبابليين . ولكن الخوارزمي هو الذي وضع علم الجبر في قالب علمي مستقل يستفيد منه الناس في حل مشاكلهم اليومية . لذا يجب أن يدعى الخوارزمي أبا الجبر ، فليس للأوروبيين طريقة أن يهربوا من دينهم لعلماء العرب والمسلمين في هذا المجال .

وخلاصة القول : لقد تأثر علماء اليونان في مجال علم الجبر بقدماة المصريين والبابليين ، ويظهر ذلك في كتاب «الأصول في الهندسة» لإقليدس والذي يحتوي على بعض الأفكار الجبرية البسيطة كالمطابقة $(أ + ب)^2 = أ^2 + 2أب + ب^2$ والتي بالفعل ورثوها عن البابليين . أما بالنسبة لقدماء المصريين فقد أخذ علماء اليونان عنهم «طريقة الوضع الكاذب» وبعض المعادلات الجبرية البسيطة الموجودة في بردية رايند التي كتبها أحمس . وصدق منصور جرداق الذي نوه عن دور علماء اليونان في علم الجبر في كتابه «مآثر العرب في الرياضيات والفلك» أن علماء اليونان مقصرون في مجال علم الجبر تقصيراً معيباً إذا ما قورن بما وصلوا إليه في علمي الهندسة والفلسفة . أما فرانسيس كاجوري فيصف إسهام علماء اليونان في علم الجبر في كتابه «تاريخ الرياضيات» أنه متدنٍ إذا قيس بما قدمه قدماء المصريين والبابليين في هذا الميدان .