الفصل السادس
رواد علم الجبر عند العرب والمسلمين

قام علماء العرب والمسلمين في علم الجبر بمجهودات جبارة ، وأضافوا إضافات جوهرية على المعلومات التي ورثوها من قدماء المصريين والبابليين والهنود والفرس واليونان وغيرهم من هذا الميدان .

فهم الذين ترجموا إنتاج السابقين لهم في علم الجبر إلى لغتهم العربية وهضموها ومن ثم بدؤوا يصححون الأخطاء التي وقع فيها الأوائل . كما أن لهم نظريات أصيلة في حقل علم الجبر . فالمقومات النفسية والأخلاقية ساعدتهم على ذلك ، لأن الإسلام لم يقم على المعجزات ، وإنما على الحكمة والعقل .

وكان لتشجيع الخلفاء للعلماء مثل هارون الرشيد والمأمون في دار السلام (بغداد) ، وحماية الأمويين لهم في الأندلس من أهم عوامل انتعاش الحركة الفكرية وازدهارها . فقد أنجبت بيت الحكمة الذي أسسه هارون الرشيد وطوَّره إلى أكاديمية المأمون مشاهيـــر علماء العرب والمسلمين في علم الجبر .

ظهر في صدر الإسلام - وذلك في عصر الدولة العباسية - جمهرة من العلماء البارزين في علم الجبر . ومن هؤلاء : محمد بن موسى الخوارزمي ، وعمر الخيام ، وأبو كامل المصري ، وأبو بكر الكرخي ، والسموأل المغربي ، وأبو الحسن القلصادي وغيرهم .

اعتمد علماء العرب والمسلمين في علم الجبر على الملاحظة والبراهين الرياضية الواضحة ، فشككوا في الكثير من نظريات قدماء اليونان الخاطئة وعدلوها ، وبذلك افتتحوا الطريقة العلمية الحديثة في التفكير والبحث لمعرفة النظريات الجبرية .

فلو بحثنا عن سبب تميز علماء العرب والمسلمين في العلوم عامة وعلم الجبر خاصة ، لوجدنا أن السبب هو الإسلام ، دين الارتقاء والتقدم ، فالإسلام الذي حث علماء العرب والمسلمين على البحث والاستقصاء ، فأصبحوا رواداً في معظم فروع المعرفة ، كما عملوا أعمالاً جليلة في مجال علم الجبر لم يسبقهم إليها أحد . ومن ثمة صاروا أساتذة علم الجبر في كل مكان بلا منازع .

الخوارزمي :

عاش محمد بن موسى الخوارزمي - كما سبق أن أشرنا - في بغداد فيما بين سنة ١٦٤ وسنة ٢٣٥هـ (٧٨٠-٨٥٠م) وتوفى هناك ، وقد برز أبو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي في زمن خلافة المأمون ، ولمع في علم الرياضيات والفلك حتى عينه المأمون رئيساً لبيت الحكمة . ويقول عبد الرزاق نوفل في كتابه «المسلمون والعلم الحديث» : «في القرن الثامن الميلادي احتضن المأمون محمد بن موسى الخوارزمي عندما ظهر نبوغه الفذ في الرياضة والفلك ، وولاه أمانة بيت الحكمة ووضع تحت أمره المال والرجال والعدة والعتاد والإقامة والارتحال إلى أي بلد شاء . طالما كان هدفه الدرس والبحث . . فيما يشتاق إليه من رياضة وحساب وفلك» . طور الخوارزمي علم الجبر كعلم مستقل عن الحساب ، ولذا ينسب إليه هذا العلم

في جميع أنحاء المعمورة . والجدير بالذكر أن الجزيرة العربية كانت مركز النشاط العلمي بين القرن الثاني والسابع الهجري (الثامن إلى الثالث عشر الميلادي) ، وهذا يعود لوعي الخليفة المأمون وبلاطه في بغداد لاهتمامهم الكبير بالنشاطات العلمية في العالم .

طور الخوارزمي في بيت الحكمة الفكر الرياضي بإيجاد نظام لحل كل من معادلات الدرجة الأولى والثانية ذات المجهول الواحد بطرق جبرية وهندسية . لذا يعتبر الجبر والمقابلة للخوارزمي هو أول محاولة منظمة لتطوير علم الجبر على أسس علمية منطقية . ولذا ميز جورج سارتون النصف الأول من القرن التاسع بعصر الخوارزمي في كتابه «مقدمة في تاريخ العلوم» : «لأن الخوارزمي كان أعظم رياضي في ذلك العصر» ، ويستطرد سارتون : «وإذا أخذنا جميع الحالات بعين الاعتبار فإن الخوارزمي أحد أعظم الرياضيين في كل العصور» . وأكد أي . وايدمان أن أعمال الخوارزمي تتميز بالأصالة والأهمية العظمى وفيها تظهر عبقريته . وقال الدكتور ديفيد يوجين سمث ولويس شارلز كاربينسكي في كتابهما «الأعداد الهندية والعربية» : «بأن الخوارزمي هو الأستاذ الكبير في عصر بغداد الذهبي إذ إنه أحد الكتاب المسلمين الأوائل الذين جمعوا الرياضيات الكلاسيكية من الشرق والغرب ، محتفظين بها حتى استفادت منها أوروبا المتيقظة آنذاك . إن لهذا الرجل معرفة كبيرة ، ويدين له العالم بمعرفتنا الحالية لعلمي الجبر والحساب» وهكذا يعترف علماء الغرب بفضل العلامة محمد بن موسى الخوارزمي .

ولعل من المفيد أن نذكر الفقرة التي جاءت في مطلع كتاب الخوارزمي عن (الجبر والمقابلة) ، والتي تبين شخصيته وهي : «لم يزل العلماء في

الأزمنة الخالية والأمم الماضية يكتبون الكتب مما يصنفون من صنوف العلم ووجوه الحكمة ، نظراً لمن بعدهم واحتساباً للأجر بقدر الطاقة ، ورجاء أن يلحقهم من أجر ذلك وذخره وذكره ، ويبقى لهم من لسان الصدق ما يصغر في جنبه كثيراً مما كانوا يتطلبونه من المؤونة ، ويحملونه على أنفسهم من المشقة في كشف أسرار العلم وغامضه ، وأما رجل سبق إلى ما لم يكن مستخرجاً قبله فورثه من بعده ، وأما رجل شرح مما أبقى الأولون مما كان مستغلقاً فأوضح طريقه وسهل مسلكه وقرب مأخذه ، وأما رجل وجد في بعض الكتب خللاً فلم شعثه ، وأقام أوده وأحسن الظن بصاحبه غير راد عليه ولا مفتخر بذلك من فعل نفسه» .

وقد حدثت تغييرات عديدة في اسمه عند الغربيين بعد وفاته حيث ترجم اسم «الخوارزمي» إلى اللاتينية كـ(Alchwarizmi) و(Algoritmi Al-Karismi) و(Algorismi) و(Algorism) وفي عام ١٨٥٧م عثر على كتاب بعنوان (Algorithmi de numero Indorum) في مكتبة جامعة كمبردج البريطانية ، فأجمع علماء الرياضيات في العالم بأن هذا كتاب الخوارزمي في علم الحساب وقد ترجم إلى اللغة اللاتينية في القرن الثاني عشر الميلادي . وقد علق المؤلف محمد خان في كتابه «نظرة لمآثر المسلمين في العلوم والثقافة» : «إن الخوارزمي يقف في الصف الأول من صفوف الرياضيين في جميع العصور . وكانت مؤلفاته هي المصدر الرئيسي للمعرفة الرياضية لعدة قرون في الشرق والغرب» .

وقد عرف عمل الخوارزمي عند أوروبا عندما ارتبط اسمه باسم حساب اللوغاريتمات (Algorism) . علماً أنه ليس له دور على الإطلاق في هذا

المجال . والحق أن عمله في علم الجبر لم يعط اسماً لهذا الفرع المهم من فروع الرياضيات لأوروبا فحسب ، وإنما أضاف إليه الحلول التحليلية والهندسية للمعادلات ذات الدرجة الأولى والثانية . ويقول الدكتور علي مصطفى مشرفة - نقلاً عن عبد الرزاق نوفل في كتابه «المسلمون والعلم الحديث» - : «ليس الخوارزمي واضعاً لعلم الجبر فحسب ، بل إنه يتضح أن انتشار هذا العلم في الشرق والغرب إنما يرجع الفضل فيه بعد إرادة الله إلى كتاب الخوارزمي ، الذي صار المرجع الأول للمؤلفين والمترجمين من عرب وأعاجم ، ولذلك يحق لنا أن نقول : إن الخوارزمي هو واضع علم الجبر ومعلمه للناس أجمعين» . والحق أن الباحث يعجز أن يعطى عملاق العلوم الرياضية محمد بن موسى الخوارزمي حقه .

إن الرياضيات التي ورثها المسلمون عن اليونان تجعل حساب التقسيم الشرعي للممتلكات بين الأبناء معقداً للغاية ، إن لم يكن مستحيلاً ، وهذا قاد الخوارزمي للبحث عن طرق أدق وأشمل وأكثر قابلية للتكيف فاستعمل علم الجبر ، وقد وجد الخوارزمي متسعاً من الوقت لكتابة علم الجبر الذي جعله مشهوراً حينما كان منهمكاً في الأعمال الفلكية في بغداد . ويختص كتابه «الجبر والمقابلة» في إيجاد حلول لمسائل عملية واجهها المسلمون في حياتهم اليومية . وقد ذكرنا في كتابنا «إسهام علماء المسلمين في علم الرياضيات» : «إن الجبر يقصد بها إضافة حدود موجبة تساوي في كميتها الحدود السالبة إلى طرفي المعادلة . أما المقابلة فتعني جمع الحدود المتشابهة . ولإيضاح معنى الجبر والمقابلة يجب أن نتأمل المثال التالي :

س^{٢} + ٥س + ٤ = ٤ - ٢س + ٥س^{٣}

الجبر (أي النقل) تصبح المعادلة س٢ + ٥س + ٢س + ٤ - ٤ = ٥س^{٣} .

المقابلة (الحذف والاختزال) تصبح المعادلة : س٢ + ٧س = ٥س٣ .

كان الأوروبيون يستعملون مصطلحاً آخر للجبر مثل «كوسيكا» (Cossica) أو بمصطلح «قاعدة الشيء» (Rules of the Cosa) وفي بعض مؤلفات إنجليزية قديمة استخدموا المصطلح (Cossic Art) وقد أدخل هذا المصطلح العالم الرياضي المشهور «اكسلاندر» (Xylander) في القرن الخامس عشر الميلادي وهذا المصطلح يعني شيئاً في اللغة الإيطالية . ويقول الدكتور ديفيد يوجين سمث في كتابه «تاريخ الرياضيات» المجلد الثاني : «إن الجبر عرف في اللغة الإنجليزية في القرن السادس عشر الميلادي بالجبر والمقابلة ، ولكن هذا الاسم اختصر في النهاية بكلمة (الجبر) . ولقد كان الأصل المكتوب باللغة العربية كتاب الخوارزمي «الجبر والمقابلة» مفقوداً ، ولكن روبرت شاستر الإنجليزي ترجم النص الأصلي من اللغة العربية إلى اللغة اللاتينية في القرن الثاني عشر الميلادي ، وعرفت بالاسم اللاتيني (Lulus algebrae et almuque cqrabalae) عند أوروبا ثم اختصر العنوان أخيراً إلى كلمة (Algebra) . وهو الاسم المعترف به في جميع لغات العالم في المعمورة» .

وظل كتاب الخوارزمي في الجبر معروفاً في أوروبا باللغة اللاتينية إلى أن سخر الله تبارك وتعالى الباحثين الغربيين إلى العثور على أحد نصوص الكتاب باللغة العربية في مخطوطة محفوظة في اكسفورد (مكتبة بودلين) ، وصدرت في نشرة عربية بالحروف المطبعية عام ١٨٣١م . واعترف المؤلف

المعروف رام لاندو في كتابه «مآثر العرب في الحضارة» : «بأن الخوارزمي ابتكر علم الجبر ونقل العدد من صفته البدائية الحسابية لكمية محدودة إلى عنصر ذي علاقة وحدود لا نهاية لها من الاحتمالات . ويمكننا القول بأن الخطوة من الحساب إلى الجبر هي في جوهرها الخطوة من الكينونة إلى الملائمة ، أو من العالم الإغريقي الساكن إلى العالم الإسلامي المتحرك الأبدي الرباني» . وأضاف توفيق الطويل في كتابه «العرب والعلم في عصر الإسلام الذهبي ودراسات أخرى» : «أن الخوارزمي أول من أطلق على علم المعادلات اسم علم الجبر ، ولا يزال الفرنجة يحتفظون حتى اليوم باسمه العربي (Algebra) . وقد كان أول من كتب فيه على نهج علمي» . ويقول محمد عبد الرحمن مرحبا في كتابه «الموجز في تاريخ العلوم عند العرب» : «وقد كان لكتاب «الجبر والمقابلة» أثر كبير في تقدم علم الجبر عند العرب والأوروبيين ، بحيث إنه ليحق لنا أن نقول : إن الخوارزمي وضع علم الجبر - كما وضع علم الحساب - للعالم أجمع» .

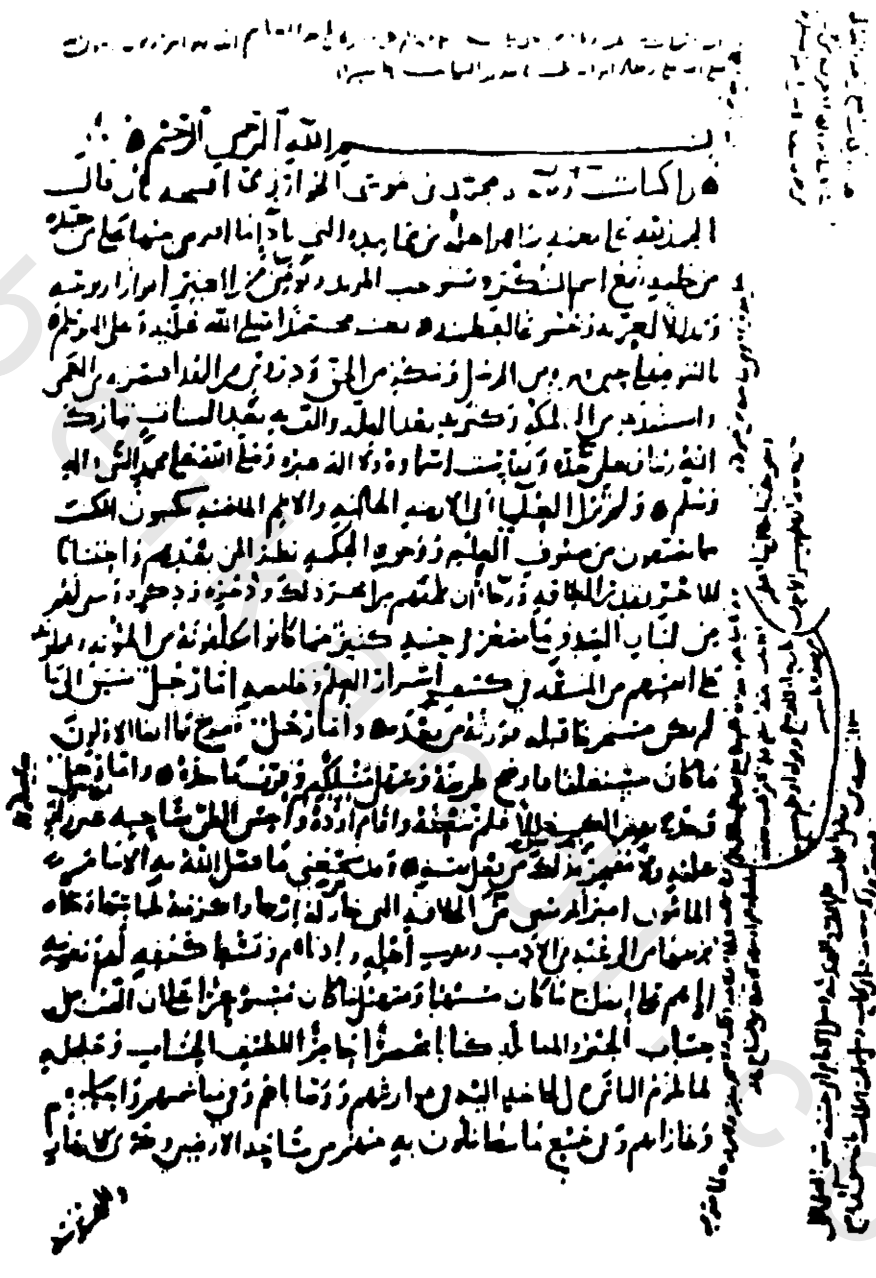
والذي دفع عالِمَنا المسلم الخوارزمي إلى تأليف كتاب «الجبر والمقابلة» هو سد الاحتياجات العملية للناس التي تتعلق بالميراث وتقسيم الممتلكات والتجارة . ولقد درس علم الفرائض ، وهو علم الحصص الشرعية للورثة الطبيعيين . كما ذكر المؤلف قاندز في كتابه «مصدر جبر الخوارزمي» : «أن جبر الخوارزمي يعتبر القاعدة وحجر الأساس لكل العلوم . ومن ناحية أخرى فإن الخوارزمي أحق من ديوفانتس بأن يلقب بأبي الجبر ، لأن الخوارزمي هو أول من درس الجبر في صورة بدائية وطورها ، أما ديوفانتس فكان مهتماً بصورة رئيسية بنظرية الأعداد ، وقد بين الخوارزمي في مقدمة كتاب «الجبر والمقابلة» : «أن الخليفة المأمون هو الذي طلب منه أن يؤلف كتاب الجبر

والمقابلة كي يسهل الانتفاع به في كل ما يحتاج إليه الناس» . وهنا نورد نص مقدمة كتاب «الجبر والمقابلة» : «وقد شجعنا ما فضل الله به الإمام «المأمون» أمير المؤمنين مع الخلافة ، التي حاز له إرثها ، وأكرمه بلباسها ، وحلاه بزينتها ، من الرغبة في الأدب وتقريب أهله وإدنائهم ، وبسط كنفه لهم ، ومعونته إياهم على إيضاح ما كان مشتبهاً وتسهيل ما كان مستوعراً ، على أني ألّفت من كتاب «الجبر والمقابلة» كتاباً مختصراً ، حاصراً للطيف الحساب وجليله ، لما يلزم الناس من الحاجة إليه في موارثهم ووصاياهم ، وفي مقاسماتهم وتجاراتهم ، وفي جميع ما يتعاملون به بينهم من مساحة الأراضي وكري الأنهار والهندسة ، وغير ذلك من وجوهه وفنونه ، مقدماً لحسن النية فيه ، راجياً لأن ينزله أهل الأدب بفضل ما استودعوا من نعم الله تبارك وتعالى وجليل آلائه وجميل بلائه عندهم منزلته ، وبالله توفيقي في هذا وفي غيره ، عليه توكلت وهو رب العرش العظيم» .

ويمتدح أبو كامل شجاع بن أسلم الحاسب المصري كتاب «الجبر والمقابلة لمحمد بن موسى الخوارزمي إلى درجة أنه فضله على إنتاجه بهذا المضمار . فيقول في كتابه «الجبر والمقابلة» : «إن كتاب محمد بن موسى الخوارزمي المعروف بكتاب «الجبر والمقابلة» أصحها أصلاً ، وأصدقها قياساً ، تحقيقه مما يجب علينا من تقدمه والإقرار له بالمعروف وبالفضل ، إذ كان السابق إلى كتاب «الجبر والمقابلة» والمبتدئ له ، والمخترع لما فيه من الأصول التي فتح الله لنا بها ما كان منغلقاً . وقرب بها ما كان متباعداً ، وسهل بها ما كان معسراً ، ورأيت فيها مسائل ترك شرحها وإيضاحها ، ففرغت

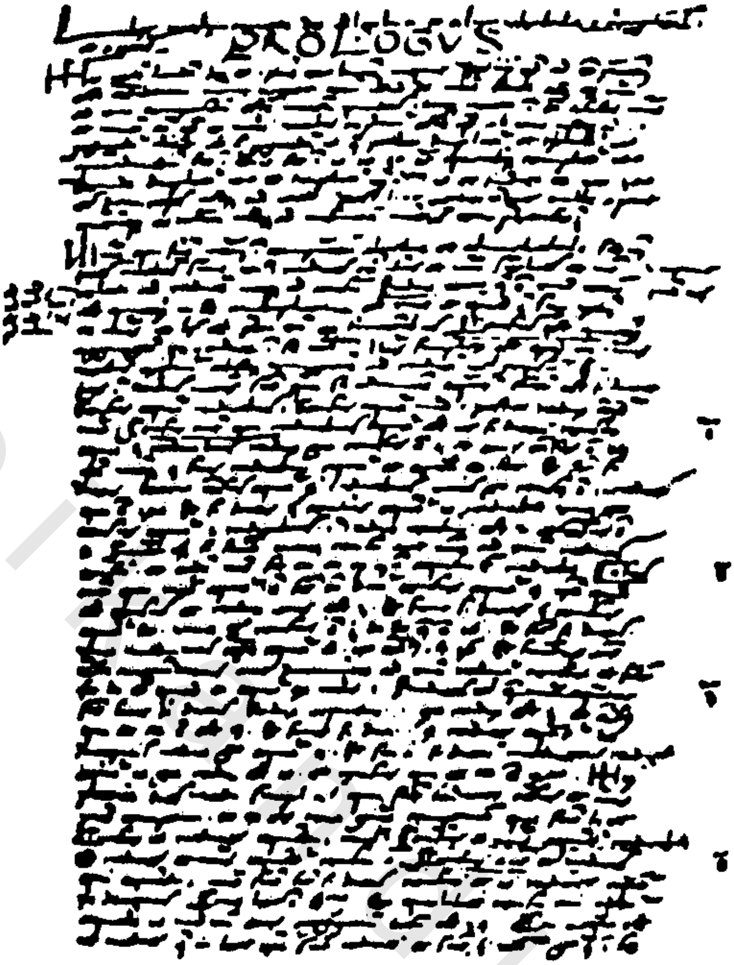
منها مسائل كبيرة يخرج أكثرها إلى غير الضروب الستة التي ذكرها الخوارزمي في كتابه ، فدعاني إلى كشف ذلك وتبيينه فألفت كتاب «الجبر والمقابلة» ، ورسمت فيه بعض ما ذكره محمد بن موسى الخوارزمي في كتابه ، فبينت شرحه وأوضحت ما ترك الخوارزمي إيضاحه وشرحه» .

إن بعض المهتمين في تاريخ العلوم يرددون على آذاننا من حين لآخر أن الخوارزمي استفاد من كتاب ديوفانتوس في صناعة الجبر ، الذي كان في اللغة اليونانية ، والذي عرف عن الخوارزمي أنه لا يجيد هذه اللغة . ويقول ياسين خليل في كتابه «التراث العلمي العربي» : «من الخطأ الاعتقاد أن جبر الخوارزمي متأثر بالجبر الذي وضعه ديوفانتوس وذلك لعدم وجود الدليل ، إذ لم يذكر الخوارزمي في كتابه اسم ديوفانتوس ، وكان من عادة العلماء العرب في هذه الفترة أن يذكروا بأمانة ما أخذوه من العلوم الأجنبية مع ذكر فضل العلماء الآخرين عليهم . كما أن المقارنة البسيطة بين أسلوب أو طريقة الخوارزمي مع طريقة ديوفانتوس تبين بوضوح البعد الشاسع بينهما . وإضافة إلى ما تقدم فإن كتاب ديوفانتوس في صناعة الجبر لم يكن مترجماً إلى العربية في أيام الخوارزمي ، وإن أول ترجمة له قد تمت على يد قسطا بن لوقا المتوفى سنة ٩١٢م ، وهذه سنة تشير إلى طول المدة الفاصلة بين وفاة الخوارزمي ووفاة لوقا» .



بسم الله الرحمن الرحيم

الصفحة الأولى من مخطوطة كتاب «الجبر والمقابلة» لمحمد بن موسى الخوارزمي في مكتبة بودلين - اكسفورد بريطانيا .


PROLOGVS

صفحة من الترجمة اللاتينيـــة لكتاب محمـــد بن موسى الخوارزمي الذي نال الشهرة العظيمة عام ٨٢٥م ، وذلك في بيت الحكمة في بغداد حيث ألف هناك كتابه القيم «الجبر والمقابلة» وفيه حل الكثير من المعادلات ذات الدرجة الأولى والثانية من ذات المجهول الواحد ولقد ترجم من اللغة العربية إلى اللاتينية بواسطة العالم الرياضي الأوروبي جيرارد قرمونة (Gerard of Cremona) وذلك في القرن الثاني عشر الميلادي وعرف اسمه باللاتيني : (Lulus Algebrae et Elmucqrqbalae) .

الجذور عند الخوارزمي :

إن مصطلح (جذر) في الجبر يعود أصله إلى اللغة العربية . وقد احتوت الترجمات اللاتينية على كلمة (Radix) وهي تعني أساساً كمصطلح عام ، على حين أن ما ورث عن الحضارة الرومانية هو كلمة (Latus) ، فكلمة (Radix) تعود إلى جذر في اللغة العربية بينما تعود (Latus) إلى ضلع مربع هندسي . وقد قسم الخوارزمي الكميات الجبرية إلى ثلاثة أنواع : جذر ، ويقصد بذلك «س» ، ومال ، ويعني به «$س^٢$» ، ومفرد ، وهو العدد أو الكمية الخالية من «س» . ولقد وضح جلياً الدكتور أرك بل في كتابه «الرياضات وتطوراتها» : «أن الخوارزمي اعتبر الجذر للمجهول (س في الجبر الحديث) . ومال لمربع المجهول (أي $س^٢$) ، والعدد المفرد وهو الخالي من المجهول ، والكعب لمضروب المال × الجذر (أي $س^٣$) ، ويتفرع من ذلك «مال المال» (أي $س^٤$) ، ومال الكعب (أي $س^٥$) وكعب الكعب (أي $س^٦$) . ولقد استخدم الخوارزمي كلمة جذر لتعني الجذر ذا الدرجة الأولى من المعادلة ذات الدرجة الثانية» .

كما كان الخوارزمي على دراية متينة بالقواعد الجبرية لإجراء عملية الضرب والقسمة على الجذور ، فمثلاً $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أ \times ب}$ أي كما قال الخوارزمي في كتابه «الجبر والمقابلة» : «اضرب جذر كذا في جذر كذا : ضربت أحد العددين في الآخر وأخذت جذر المبلغ» أما قسمة الجذور فهي $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$ أو كما ذكرها الخوارزمي في «الجبر والمقابلة» : إن أردت أن تقسم جذر تسعة على جذر أربعة فإنك تقسم تسعة على أربعة فيكون اثنين وربما فجذرها هو ما يصيب الواحد وهو واحد ونصف أي :

$$\frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{٤}} = \sqrt{\frac{٩}{٤}} = \frac{٣}{٢} = ١\frac{١}{٢} .$$

المعادلات ذات الدرجة الأولى والثانية :

استخدم الخوارزمي اصطلاحات فنية خاصة : فسمى المجهول جذراً ، ومربعه قوة فهذه الاصطلاحات اعتبرت أن المعادلة الخطية العامة (جذور تساوي أعداد) وفي الرموز الحديثة تظهر كما يلي : أس = ب وهكذا فمثلاً جذر يساوي ثلاثة (أي س = ٣) ، وأربعة جذور تساوي عشرين (أي ٤س = ٢٠) ، ونصف جذر يساوي عشرة (أي $\frac{١}{٢}$ س = ١٠)، ومعكوس الجذر يساوي سبعة (أي $\frac{١}{س}$ = ٧) . كما ركز الخوارزمي في كتابه «الجبر والمقابلة» على المعادلة العامة ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد فقسمها إلى ست حالات ، حتى يسهل فهمها وهي :

١ – أموال تعادل جذوراً (أ س^{٢} = ب س في الجبر الحديث) .

٢ – أموال تعادل عدداً (أ س^{٢} = ب) .

٣ – جذور تعادل عدداً (أ س = ب) .

٤ – أموال وجذور تعادل عدداً (أ س^{٢} + ب س = جـ) .

٥ – أموال وعدد تعادل جذوراً (أ س^{٢} + جـ = ب س) .

٦ – جذور وعدد تعادل أموالاً (ب س + جـ = أ س^{٢}) .

وفي جميع الحالات اعتبر الخوارزمي أ ، ب ، جـ أعداداً صحيحة موجبة ، وبالذات اعتبر أ = ١ واهتم بالجذور الموجبة الحقيقية بالرغم من معرفته بوجود جذور سالبة .

ويجدر بنا هنا أن نذكر ما قام به الخوارزمي من حلول للحالات الستة تحليلياً وهندسياً في كتابه «الجبر والمقابلة» .

أولاً : الطريقة التحليلية ، فلو أخذنا :

الحالة الأولى : وهي «الأموال التي تعدل الجذور» فمثلاً مال يعادل أربعة أجذار (أي $س^{٢} = ٤س$) إذن جذر المال أربعة (أي س = ٤) . أما إذا احتوت المعادلة على كسري فهو يحولها إلى أعداد صحيحة كما في قوله : «ثلث المال يعادل أربعة أجذار أي ($\frac{١}{٣} س^{٢} = ٤ س$) ،فالمال كله يعادل اثنى عشر جذراً ، أي ($س^{٢} = ١٢س$) إذن جذره اثنا عشر أي (س = ١٢)» .

الحالة الثانية : وهي «أموال تعدل عدداً» فمثلاً مال يعدل خمسة وعشرين أي ($س^{٢} = ٢٥$) إذن جذر المال خمسة ، أي (س = ٥) .

الحالة الثالثة : وهي «جذور تعدل عدداً» كما ذكر الخوارزمي في كتابه «الجبر والمقابلة» : «جذر يعدل ثلاثة من العدد أي (س = ٣) ، فالجذر ثلاثة والمال الذي يكون منه تسعة ، أي : ($س^{٢} = ٩$) . ونصف جذر يعدل عشرة ، فالجذر يعدل عشرين ، والمال الذي يكون منه أربعمائة

($\frac{١}{٢}$ س = ١٠ يعطى س = ٢٠ ، $س^{٢} = (٢٠)^{٢} = ٤٠٠$) .

الحالة الرابعة : «أموال وجذور تعدل عدداً» والمثال الذي ذكره الخوارزمي هو : «مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهماً ، ومعناه : أي مال إذا زدت عليه مثل عشرة أجذاره بلغ ذلك كله تسعة وثلاثين ($س^{٢} + ١٠س = ٣٩$) . فبابه أن تنصف الأجذار وهي في هذه المسألة خمسة فتضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين ، فتزيدها على التسعة والثلاثين فتكون أربعة وستين ، فتأخذ

جذرها وهو ثمانية فتنقص منه نصف الأجذار هو خمسة فيبقى ثلاثة ، وهو جذر المال الذي تريد والمال تسعة» .

وممكن وضع حل الخوارزمي بلغة الجبر الحديث فتقول :

- أن تنصف الأجذار $\frac{١٠}{٢} = ٥$.
- فتضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين ٥ ٥ = ٢٥ .
- فتزيدها على التسعة والثلاثين فتكون أربعة وستين ٢٥ + ٣٩ = ٦٤ .
- فتأخذ جذرها وهو ثمانية $\sqrt{٦٤} = ٨$.
- فتنقص منه نصف الأجذار وهو خمسة فيبقى ثلاثة ٨ - ٥ = ٣ .
- وهو جذر المال الذي تريد س = ٣ .
- والمال تسعة س^{٢} = ٩ . ويتضح من حل الخوارزمي لهذه المسألة أنه استخدم القانون العام لحل المعادلة التي على صيغة أ س^{٢} + ب س = جـ

وهو $\text{س} = \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢} + \text{جـ}} - \frac{\text{ب}}{٢}$ ، حيث إن أ = ١ .

إذا كان س^{٢} + ١٠س = ٣٩ ، ب = ١٠ ، جـ = ٣٩ .

$$\text{إذا س} = \sqrt{\left(\frac{١٠}{٢}\right)^{٢} + ٣٩} - \frac{١٠}{٢} = \sqrt{٢٥ + ٣٩} - ٥$$

$$= \sqrt{٦٤} - ٥ = ٨ - ٥ = ٣$$

الحالة الخامسة : «أموال وعدد تعدل جذوراً» والمثال على ذلك ما ذكره الخوارزمي في كتابه «الجبر والمقابلة» : «كل مال وواحد وعشرون من العدد يعدل عشرة أجذاره (س^{٢} + ٢١ = ١٠س) ، ومعناه : أي مال إذا زدت عليه

واحداً وعشرين درهماً كان ما اجتمع مثل عشرة أجذاره ذلك المال . فبابه أن تنصف الأجذار فتكون خمسة ، فاضربها في مثلها تكون خمسة وعشرين ، فانقص منها الواحد والعشرين التي ذكر أنها مع المال فيبقى أربعة ، فخذ جذرها وهو اثنان فانقصه من نصف الأجذار وهو خمسة فيبقى ثلاثة ، وهو جذر المال الذي تريده والمال تسعة . وإن شئت فزد الجذر على نصف الأجذار فتكون سبعة وهو جذر المال الذي تريده والمال تسعة وأربعون» .

وللتوضيح نضع حل الخوارزمي في لغة العصر الحديث كالآتي :

- أن تنصف الأجذار فتكون خمسة $\frac{١٠}{٢} = ٥$.

- فاضربها في مثلها ينتج خمسة وعشرون $٥ \times ٥ = ٢٥$.

- فانقص منها الواحد والعشرين التي ذكر أنها من المال فيبقى أربعة $٢٥ - ٢١ = ٤$.

- فخذ جذرها وهو اثنان $\sqrt{٤} = ٢$.

- فانقصه من نصف الأجذار وهو خمسة $٥ - ٢ = ٣$.

- وهو جذر المال الذي تريده $س = ٣$.

- والمال تسعة $س^٢ = ٩$.

- وإن شئت فزد الجذر على نصف الأجذار فتكون سبعة $٥ + ٢ = ٧$.

- وهو جذر المال الذي تريده $س = ٧$.

- والمال تسعة وأربعين $س^٢ = ٤٩$.

ويتبين جلياً من حل الخوارزمي للمعادلة س^{٢} + ٢١ = ١٠س أولاً : أنه استعمل القانون العام لحل المعادلة التي على صيغة أ س^{٢} + جـ = ب س وهو س = $\frac{\text{ب}}{٢} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢} - \text{جـ}}$ ، حيث إن أ = ١ ، ثانياً : أنه كان مدركاً أن للجذر (س) قيمتين إحداهما ثلاثة ، والثانية سبعة .

إذا كان س^{٢} + ٢١ = ١٠س

ب = ١٠

جـ = ٢١

$$\text{إذن س} = \frac{١٠}{٢} \pm \sqrt{\left(\frac{١٠}{٢}\right)^{٢} - ٢١}$$

$$= ٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٢١} = ٥ \pm \sqrt{٤}$$

$$= ٥ \pm ٢$$

$$= ٣$$

$$\text{أو س} = ٧$$

الحالة السادسة : «جذور وعدد تعدل أموالاً» فنحو قولك : ثلاثة أجذار وأربعة من العدد تعدل مالاً . فبابه أن تنصف الأجذار فتكون واحداً ونصفاً فاضربها في مثلها فتكون اثنين وربعاً ، فزدها على الأربعة فتكون ستة وربعاً ، فخذ جذرها وهو اثنان ونصف فزده على نصف الأجذار وهو واحد ونصف فتكون أربعة وهو جذر المال ، والمال ستة عشر ، وكل ما كان أكثر من مال أو أقل فاردده إلى مال واحد .

يمكننا وضع حل الخوارزمي في لغة الرياضيات الحديثة كالآتي :

– أن تنصف الأجذار فتكون واحداً ونصفاً $\frac{٣}{٢} = ١\frac{١}{٢}$

– فاضربها في مثلها فتكون اثنين وربعاً

$$\frac{٣}{٢} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{٤} = ٢\frac{١}{٤} \quad \text{وبصورة أخرى} \quad \left(\frac{٣}{٢} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{٤} = ٢\frac{١}{٤} \right)$$

– فزدها على الأربعة فتكون ستة وربعاً $٢\frac{١}{٤} + ٤ = ٦\frac{١}{٤}$

– فخذ جذرها وهو اثنان ونصف $\sqrt{٦\frac{١}{٤}} = ٢\frac{١}{٢}$

– فزد على نصف الأجذار وهو واحد ونصف فتكون أربعة $٢\frac{١}{٢} + ١\frac{١}{٢} = ٤$

– وهو جذر المال $س = ٤$

– والمال ستة عشر $س^٢ = ١٦$. ويظهر من حل الخوارزمي أنه استعمل الدستور العام لحل المعادلة $أ\, س^٢ = ب\, س + جـ$ وهو :

$$س = \sqrt{\left(\frac{ب}{٢}\right)^٢ + جـ} + \frac{ب}{٢}$$

إذا كان : $٣س + ٤ = س^٢$

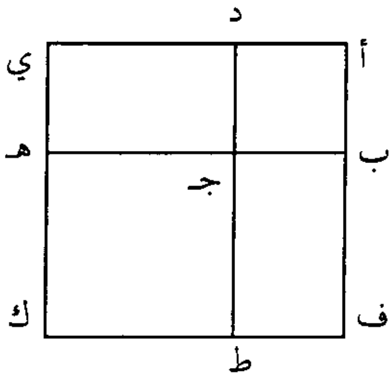
$ب = ٣$ ، $جـ = ٤$

$$\text{إذن } س = \sqrt{\left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ + ٤} + \frac{٣}{٢} = \sqrt{\frac{٩}{٤} + ٤} + \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٢} + \frac{٣}{٢} = ٤$$

ثانياً : الطريقة الهندسية :

جميع الحالات الثلاث الأولى واضحة ولا تحتاج إلى شرح فلنبدأ في :

الحالة الرابعة : مربعات وجذور تساوي أعداداً مثل : س^{٢} + ١٠س = ٣٩



البرهان : رسم المربع أ ب جـ د طول ضلعه س ولتكن مساحة المربع أ ب جـ د = س^{٢}

مد أ ب على استقامته إلى ف ، ومن أ د إلى ي

بحيث أن د ي = ب ف = $\frac{١}{٢}$ (١٠) = ٥ ،

مد د جـ على استقامته إلى ط ، ومد ب جـ على استقامته إلى هـ .

ولذلك مساحة كل من المستطيل ب ف ط جـ ،

والمستطيل د جـ هـ ي تساوي ٥س .

ملحوظة : إن مساحة المربع جـ ط ك هـ = ٢٥ .

ويمكن القول : إن مساحة المربع أ ف ك ي = س^{٢} + (٥س + ٥س) + ٢٥ .

المعادلة المراد حلها هي س^{٢} + ١٠س = ٣٩ ، فأضاف ٢٥ إلى طرفي المعادلة .

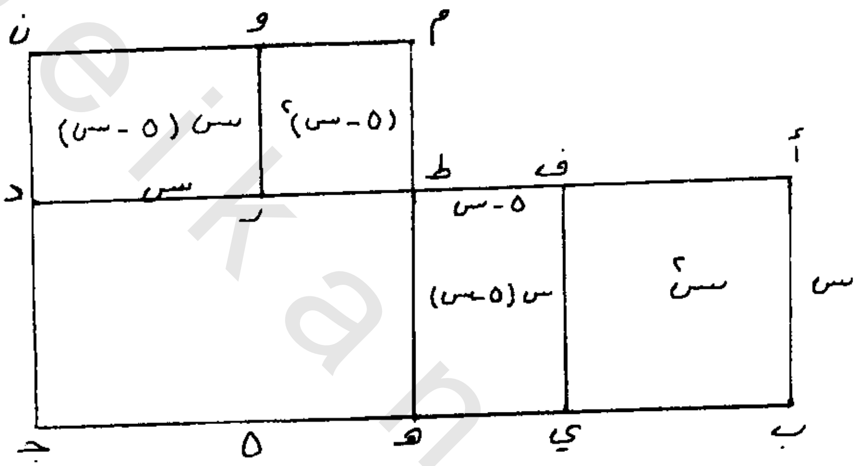
لذلك س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٣٩ + ٢٥ ، ملحوظة : إن س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٦٤ .

إذن (س + ٥)^{٢} = ٦٤ وهي المساحة المطلوبة .

س + ٥ = ٨ ، اعتبر الخوارزمي الموجب لهذا س + ٥ = ٨ ، ملحوظة : إن س = ٣

س = أ ب = ٣ ، أ ف = أ ب + ب ف = ٣ + ٥ = ٨ .

الحالة الخامسة : مربعات وأعداد تساوي جذوراً : س^{٢} + ٢١ = ١٠س ، حيث إن س أقل من $\frac{ب}{٢}$ ، ب هي معامل س .



البرهان :

رسم المستطيل أ ب جـ د طول ضلعه أ ب = س ، وطول ضلعه ب جـ = ١٠ ، مساحة المستطيل أ ب جـ د = ١٠س .

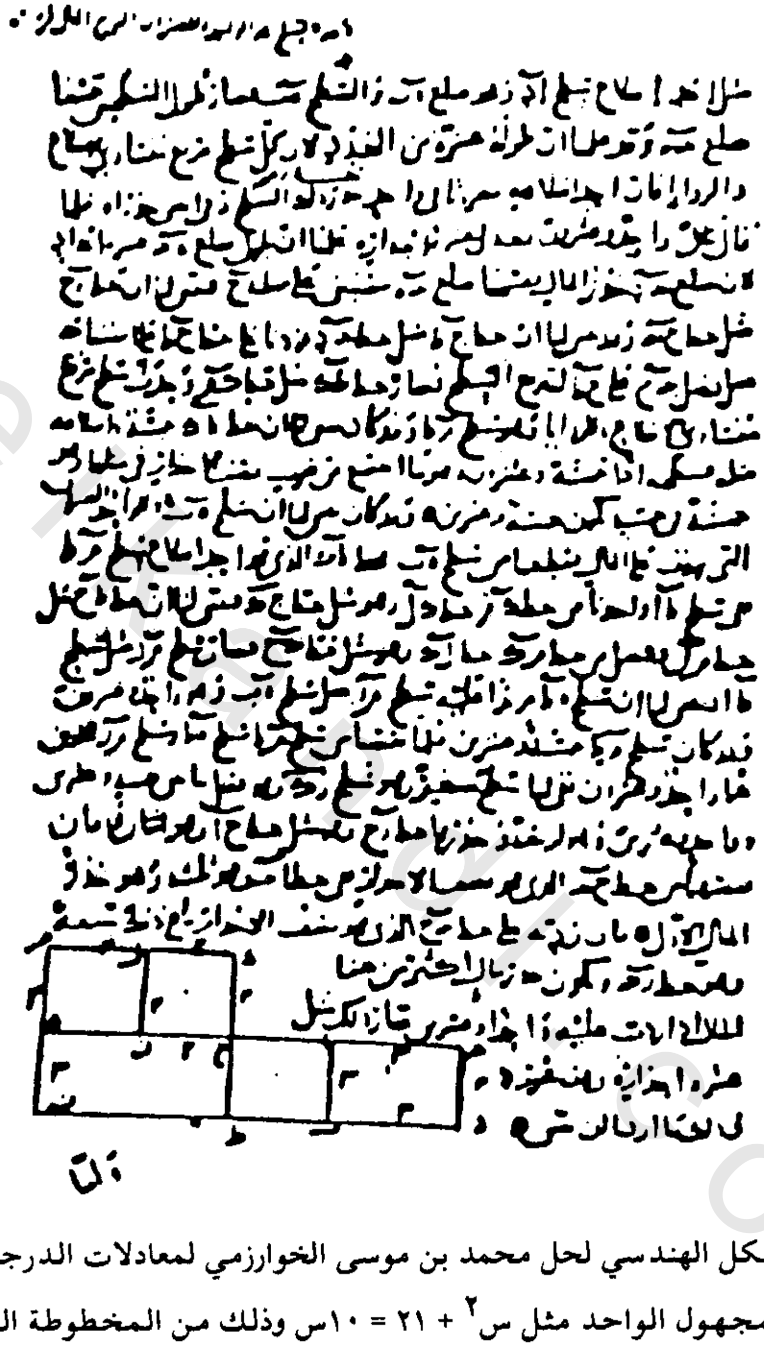
وضع النقطة ي على الضلع ب جـ بحيث إن ب ي = أ ب ، ثم أكمل المربع أ ب ي ف . يلاحظ أن مساحة المربع أ ب ي ف = س^{٢} .

مساحة المستطيل ف ي جـ د = ٢١ . [لأن ١٠س – س^{٢} = ٢١]

افرض أن نقطة هـ منتصف ب جـ بحيث هـ جـ = ٥

مد الضلع جـ د على استقامته إلى نقطة ن بحيث أن جـ ن = جـ هـ = ٥

ثم أكمل المربع هـ جـ ن م الذي مساحته تساوي ٢٥ .



الشكل الهندسي لحل محمد بن موسى الخوارزمي لمعادلات الدرجة الثانية ذات المجهول الواحد مثل س^{٢} + ٢١ = ١٠س وذلك من المخطوطة التي عثر عليها عام ١٨٣١ ميلادية في اكسفورد (مكتبة بودلين) بانجلترا .

لتكن ط منتصف أ د ، وضَعْ النقطة ر حيث ط ر = ط ف = ٥ – س .

أكمل المربع ط م و ر الذي مساحته تساوي (٥ – س)^{٢}

ط ر + ر د = ٥ ، ولكن (٥ – س) + ر د = ٥ ، ويلاحظ أن ر د = س .

مساحة المستطيل ر و ن د = س (٥ – س) ، مساحة المستطيل ف ي هـ ط = س(٥ – س) .

لذلك مساحة المستطيل ر و ن د = مساحة المستطيل ف ي هـ ط .

مساحة المستطيل ط هـ جـ د + مساحة المستطيل ر و ن د = ٢١ .

مساحة المربع م هـ جـ ن = ٢١ + (٥ – س)^{٢} = ٢٥ .

(٥ – س)^{٢} = ٤ ، ملحوظ أن ٥ – س = ± ٢ = ٢ ⟸ س = ٥ – ٢ = ٣

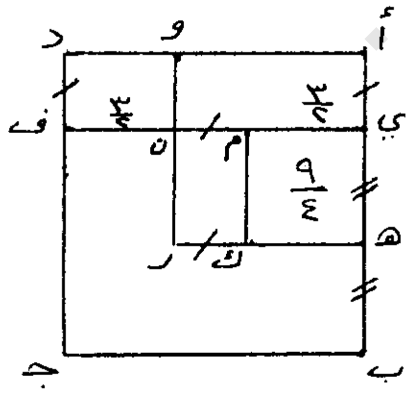
اعتبر الخوارزمي الموجب لذلك س = أ ب = ٣ .

إذا كانت س = ٥ ⟸ ٥ = ± ٢ وهذا مستحيل .

أما إذا كانت س > ٥ ⟸ الطول سيكون في السالب وهذا أيضاً مستحيل .

الحالة السادسة : س^{٢} = ٣س + ٤

وس > $\frac{٣}{٢}$



البرهان :

ارسم المربع أ ب جـ د الذي ضلعه = س .

اختار نقطة ي على الضلع أ ب بحيث ب ي = ٣ .

أكمل المستطيل ي ب جـ ف حيث إن مساحته تساوي ٣س .

مساحة المستطيل أ ي ف د = ٤ .

افرض أن نقطة هـ هي منتصف المستقيم ي ب ، بحيث ي هـ = هـ ب = $\frac{٣}{٢}$

أنشِئْ المربع ي هـ ك م التي مساحته = $\frac{٩}{٤}$.

مد هـ ك على استقامته إلى نقطة ر بحيث ك ر = أ ي = د ف .

ارسم ر و عمودياً على أ د ، ويقطع ي ف في ن ، لذلك فإن مساحتي المستطيلين م ك ر ن ، د و ن ف متساويان .

وتنتج هذه المساواة لأن د و = هـ ب = هـ ي = ك م = $\frac{٣}{٢}$.

مساحة المربع أ هـ ر و = مساحة المستطيل أ ي ن و + مساحة المستطيل م ك ر ن + مساحة المربع ي هـ ك م .

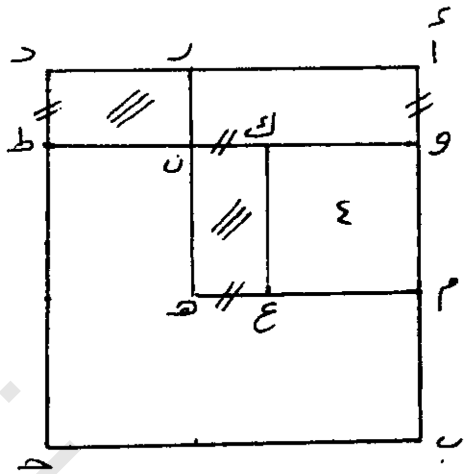
= مساحة المستطيل أ ي ن و + مساحة المستطيل و ن ف د + مساحة المربع ي هـ ك م .

= ٤ + $\frac{٩}{٤}$ = $\frac{٢٥}{٤}$ ، يلاحظ أن ، أ هـ = ± $\frac{٥}{٢}$

الضلع أ هـ = $\frac{٥}{٢}$ بحيث إن الخوارزمي اعتبر الموجب فقط .

الضلع أ ب = $\frac{٥}{٢}$ + $\frac{٣}{٢}$ = ٤ ، ملحوظ أن س = ٤ .

مثال : $س^2 = 4س + 5$



مساحة المربع أ ب جـ د = $س^2$

- خذ نقطة و على أ ب بحيث و ب = ٤

أكمل الشكل الرباعي أ و ط د الذي مساحته = س٢ − ٤س = ٥

لأن مساحة الشكل الرباعي و ب جـ ط = ٤س

خذ م نقطة على منتصف و ب ⟸ و م = ٢

ارسم المربع و م ع ك الذي مساحته = ٤

مد م ع في اتجاه ع إلى هـ بحيث يكون هـ ع = أ و = د ط

أكمل المربع أ م هـ ر

الآن واضح أن مساحة المستطيل ك ع هـ ن = مساحة المستطيل ر ن ط د

∴ مساحة المربع أ م هـ ر = ٤ + مساحة الشكل الرباعي أ و ط د = ٤ + ٥ = ٩

∴ أ م = ٣ ⟸ أ ب = ٣ + ٢ = ٥ = س

طريقة التقريب لجذر المعادلة :

إن إحدى الطرق التقريبية لإيجاد جذر المعادلة أس + ب = صفر التي اهتم بها الخوارزمي هي طريقة حساب الخطأين . ولشرح الطريقة بالتفصيل :

- افرض أن هـ$_1$ ، هـ$_2$ قيمتان تخمينيتان للمجهول س .
- افرض أن و$_1$ ، و$_2$ قيم الخطأ .
- لذلك إذا كانت القيمتان التخمينيتان صحيحتين نجد أن :

أ هـ$_1$ + ب = ٠ ، أ هـ$_2$ + ب = ٠

- أما إذا كانت القيمتان التخمينيتان خاطئتين نجد أن :

أ هـ$_1$ + ب = و$_1$ (١)

أ هـ$_2$ + ب = و$_2$ (٢)

- بطرح (٢) من (١) أ (هـ$_1$ − هـ$_2$) = و$_1$ − و$_2$ (٣)
- اضرب المعادلة (١) في هـ$_2$ نجد أن :

أ هـ$_1$ هـ$_2$ + ب هـ$_2$ = و$_1$ هـ$_2$ (٤)

- اضرب المعادلة (٢) في هـ$_1$ نجد أن أ هـ$_1$ هـ$_2$ + ب هـ$_1$ = و$_2$ هـ$_1$ (٥)
- بطرح (٥) من (٤) ب (هـ$_2$ − هـ$_1$) = و$_1$ هـ$_2$ − و$_2$ هـ$_1$ (٦)
- بقسمة (٦) على (٣) نجد أن

$$\frac{\text{ب}\,(\text{هـ}_2 - \text{هـ}_1)}{\text{أ}\,(\text{هـ}_1 - \text{هـ}_2)} = \frac{\text{و}_1\,\text{هـ}_2 - \text{و}_2\,\text{هـ}_1}{\text{و}_1 - \text{و}_2}$$

إن $$\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{و}_1\,\text{هـ}_2 - \text{و}_2\,\text{هـ}_1}{\text{و}_1 - \text{و}_2} \qquad (٧)$$

- ولكن أ س + ب = ٠ ملحوظ أن $\text{س} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

- إذن $\text{س} = \frac{\text{و}_{١}\,\text{هـ}_{٢} - \text{و}_{٢}\,\text{هـ}_{١}}{\text{و}_{١} - \text{و}_{٢}}$ أو $\text{س} = \frac{\text{و}_{٢}\,\text{هـ}_{١} - \text{و}_{١}\,\text{هـ}_{٢}}{\text{و}_{٢} - \text{و}_{١}}$

$$= \frac{\text{المفروض الأول} \times \text{الخطأ الثاني} - \text{المفروض الثاني} \times \text{الخطأ الأول}}{\text{الخطأ الثاني} - \text{الخطأ الأول}}$$

من الممكن استعمال طريقة المحددة التي تمتاز بسرعة إيجاد الحل عن طريقة الخوارزمي السابقة :

$$\left.\begin{array}{l} \text{أ س} + \text{ب} + . = ٠ \\ \text{أ هـ}_{١} + \text{ب} - \text{و}_{١} = ٠ \\ \text{أ هـ}_{٢} + \text{ب} - \text{و}_{٢} = ٠ \end{array}\right) \Longleftarrow \begin{bmatrix} \text{س} & ١ & ٠ \\ \text{هـ}_{١} & ١ & -\text{و}_{١} \\ \text{هـ}_{٢} & ١ & -\text{و}_{٢} \end{bmatrix} = ٠$$

فبحل هذه المعادلة نجد أن $\text{س} = \frac{\text{و}_{١}\,\text{هـ}_{٢} - \text{و}_{٢}\,\text{هـ}_{١}}{\text{و}_{١} - \text{و}_{٢}}$

ويجدر بنا هنا أن نذكر أن أول من طور المحددة التي أوحى بها الخوارزمي هو العالم الياباني سيكي كاو (Seki Kowa) الذي عاش فيما بين (١٦٤٢-١٧٠٨م) وكان قد اشتهر بأستاذيته في علم الرياضيات وأقام إمبراطور اليابان حفلاً كبيراً عام ١٩٠٧م لإحياء ذكراه ، وزاد عليه العالم الألماني قوتفريد ويلهم ليبنز (Gottfried Wilhelm Leibniz) الذي عاش بين (١٦٤٦-١٧١٦م) والذي برع في التفاضل والتكامل ، وعلم المنطق ، ونظرية ذات الحدين وغيرها ، وطور عام ١٦٩٣م نظريات المحددة (Determinant) ، والكثير من علماء الرياضيات في الغرب ، يسمونه خطأ مبتكر المحددة ، رغم

أن الخوارزمي هو الذي أوحى بها ، والعالم الياباني سيكي كاو الذي طورها إلى ما هي عليه الآن . وذلك عام ١٦٨٣م ، ولا شك أن العالم الكبير الألماني ليبنز استخدمها جيداً ، وعمل على نشرها بين علماء الرياضيات في الغرب لأهميتها ، وعرفها بأنها عبارة عن جملة كميات مرتبة في صفوف وأعمدة بحيث يكون عدد الصفوف مساوياً عدد الأعمدة ، وتحصر هذه الصفوف والأعمدة بين خطين رأسيين . أما العالم الفرنسي أوقستين لويس كوشي (Augustin-Louis Cauchy) الذي عاش بين (١٧٨٩-١٨٥٧م) فقد عمم المحددة وطبقها على الحياة العلمية ، وتظهر شهرته في نظريات التحليل المركب ونظريات الاحتمال ، والمتسلسلة المتقاربة والمتسلسلة المتباعدة والرياضيات التطبيقية بوجه عام .

مثال : ٢س − ٥ = ٠ ، افرض أن القيم التخمينية $\text{ه}_{١} = ٥$ ، $\text{ه}_{٢} = ١$

الحل : ٢ × ٥ − ٥ = $\text{و}_{١}$ أي أن $\text{و}_{١} = ٥$.

٢ × ١ − ٥ = $\text{و}_{٢}$ أي أن $\text{و}_{٢} = -٣$.

$$\text{لكن س} = \frac{\text{و}_{١}\,\text{ه}_{٢} - \text{و}_{٢}\,\text{ه}_{١}}{\text{و}_{١} - \text{و}_{٢}} = \frac{(٥)\,(١) - (-٣)\,(٥)}{٥ - (-٣)} = \frac{٢٠}{٨} = ٢{,}٥$$

الطريقة البيانية لإيجاد جذر المعادلة :

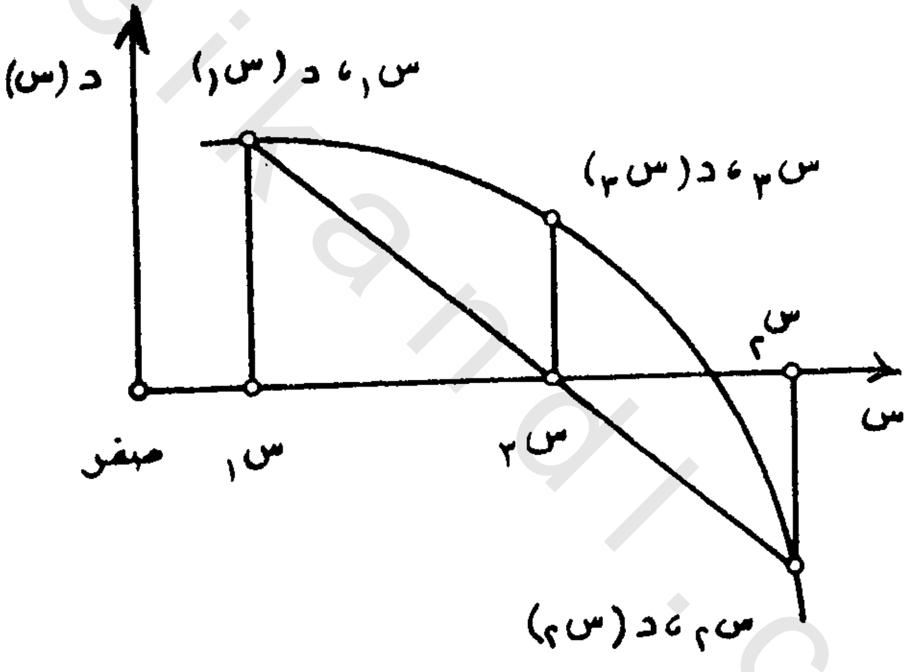
كان الخوارزمي يستعمل بنجاح الطريقة البيانية لإيجاد الجذر الحقيقي بصورة تقريبية ، كما استعملها وطورها من جاء بعده من علماء المسلمين في الرياضيات . وقد أكد هورد ايفز في كتابه «تاريخ الرياضيات» : «أن الخوارزمي قد اشتهر بابتكاره واستعماله لطريقة الخطأ بين موضعين ، والتي تعرف باللغة

اللاتينية عبر التاريخ باسم (Regular Durum Falsorum) كما هي مشهورة في كتب التحليل العددي باسم (Regular Falsi) أو باسم (False Position) .

وتتلخص الطريقة البيانية بالآتي :

– اعتبر $س_١$ ، $س_٢$ عددين حقيقيين قريبين من الجذر ويقعان على طرفيه في المعادلة د (س) = ٠

نقطة تقاطع الوتر الواصل بين النقطتين [$س_٢$ ، د ($س_٢$)] و[$س_١$ ، د ($س_١$)] مع محور السينات تعطي الجذر الحقيقي التقريبي .



لنفرض أن الجذر الحقيقي التقريبي = $س_٣$ ، لهذا نجد أن

$$س_٣ = \frac{س_٢ \times د(س_١) - س_١ \times د(س_٢)}{د(س_١) - د(س_٢)}$$

ويعتبر $س_٣$ الجواب التقريبي الأول لجذرها .

ويمكن الآن تطبيق هذه الطريقة باستخدام الزوج ($س_١$ ، $س_٣$) أو ($س_٣$ ، $س_٢$) . وهذه هي الطريقة العددية للخطأ الموضعي التي تستخدم في التحليل العددي اليوم .

مثال (١) :

احسب بموجب طريقة الخطأين لمرتبتين عشريتين قيمة الجذر الواقع بين ٢ ، ٤ للمعادلة ذات القيمتين ٦ ، -١٠ .

الحل :

- افرض أن الجذر الحقيقي التقريبي = $س_٣$.

- $س_١$ = ٢ ، $س_٢$ = ٤ ، د ($س_١$) = ٦ ، د ($س_٢$) = -١٠

- حيث إن $$س_٣ = \frac{س_٢ \times د(س_١) - س_١ \times د(س_٢)}{د(س_١) - د(س_٢)}$$

$$= \frac{٤ (٦) - ٢ (-١٠)}{٦ - (-١٠)} = ٢,٧٥$$

مثال (٢) :

احسب بطريقة الخطأين للخوارزمي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية جذر المعادلة س٣ - ٣٦ س + ٧٢ = صفر . حيث جذرها محصور بين ٢ ، ٣ .

الحل :

$س_١$ = ٢ ، $س_٢$ =٣ .

د ($س_١$) = $٢^٣$ - ٣٦ (٢) + ٧٢ = ٨ - ٧٢ + ٧٢ = ٨

د ($س_٢$) = $٣^٣$ - ٣٦ (٣) + ٧٢ = ٢٧-١٠٨ + ٧٢ = -٩

وبما أن $س_{٣} = \frac{س_{٢} \times د(س_{١}) - س_{١} \times د(س_{٢})}{د(س_{١}) - د(س_{٢})}$

$$= \frac{٣(٨) - ٢(-٩)}{٨ - (-٩)} = \frac{٢٤ + ١٨}{٨ + ٩} = \frac{٤٢}{١٧} = ٢,٤٧٠٦ .$$

مؤلفاته :

اهتم الخوارزمي في بداية الأمر بالاكتشافات في علم الرياضيات والفلك ، ثم بدأ بعدها بالتأليف فصنف كتباً كثيرة ، ويجدر بنا أن نورد عدداً منها على سبيل المثال لا الحصر :

١ – كتاب في الحساب طور فيه معارفه بصورة مبسطة جداً ، واستخدم فيه الأرقام الهندية ، فساعد بذلك على تعريف الناس بها . وقد ترجم ادلارد أوف باث هذا الكتاب إلى اللغة اللاتينية ، وبقي حقبة من الزمن مرجع العلماء ، والجدير بالذكر أن فن الحساب بقي حتى الآن يدعى في البلاد الأوروبية الغوريثمي (Algorithmy) وهو اسم الخوارزمي المحرف عند نقله إلى اللغات الأوروبية المختلفة .

٢ – كتاب في الجغرافيا شرح فيه آراء بطليموس .

٣ – كتاب جمع فيه بين الحساب والهندسة والموسيقى والفلك . ويقول البروفيسور جورج سارتون في كتابه «المدخل إلى تاريخ العلوم» : «إن هذا الكتاب يشمل على خلاصة دراساته لا على ابتكاراته العظيمة» .

٤ – كتاب جداول للنجوم وحركتها من مجلدين .

٥ – كتاب شرح فيه طريقة معرفة الوقت بواسطة الشمس .

٦ – كتاب العمل بالأسطرلاب .

٧ – كتاب صنع الأسطرلاب .

٨ - كتاب وضع فيه طريقة الجمع والطرح .

٩ - كتاب الجبر والمقابلة ، وكان مصدراً أساسياً اعتمد عليه العلماء في مشارق الأرض ومغاربها . في المجالات الرياضية . معظم من ألف بعده في علم الجبر كان مستنداً عليه ، وقد نقله من اللغة العربية إلى اللاتينية روبرت أوف شستر (Robert of Chester) فاستنار به علماء أوروبا واعتمدوا عليه في تعليمهم .

١٠- كتاب صورة الأرض وجغرافيتها .

١١- كتاب التاريخ .

١٢- كتاب صورة الأرض في المدن ، والجبال والجزر ، والأنهار .

١٣- كتاب المعرفة - يبحث في علم النجوم .

١٤- نقل وعلق على المجسطي لبطليموس إلى اللغة العربية .

١٥- كتاب الوصايا .

١٦- كتاب زيج الخوارزمي الأول .

١٧- كتاب زيج الخوارزمي الثاني ، وهو جداول فلكية سماه (السند هند) جمع فيه بين مذهب الهند والفرس .

١٨- رسالة عن النسبة التقريبية وقيمتها الرياضية .

١٩- رسالة وضح فيها معنى الوحدة المستعملة في المساحات والحجوم .

٢٠- رسالة ذكر فيها برهاناً آخر لنظرية فيثاغورث مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين .

٢١- رسالة مفصلة وضح فيها قوانين لجمع المقادير الجبرية وطرحها وضربها وقسمتها .

٢٢- رسالة شرح فيها طريقة إجراء العمليات الحسابية الأربع على الكميات الصم .

٢٣- كتاب الرخامة (الرخامة قطعة من الرخام مخططة تساعد على معرفة الوقت عن طريق الشمس) .

٢٤- كتاب رسم الربع المعمور .

٢٥- كتاب الجمع والتفريق .

٢٦- كتاب هيئة الأرض .

٢٧- كتاب المعاملات ويتضمن المعاملات التي يقوم بها الناس من بيع وشراء .

كان الخوارزمي يعرف أن هناك حالات يستحيل فيها إيجاد قيمة للمجهول (الكميات التخيلية) وسماها الحالة المستحيلة ، وبقيت معروفة بهذا بين علماء الرياضيات حتى بدأ العالم السويسري المعروف ليونارد أويلر (Leonard Euler) الذي عاش بين ١٧٠٧-١٧٨٣م . وعرف أويلر الكميات التخيلية بأنها الكمية التي إذا ضربت بنفسها كان الناتج مقداراً سالباً . وأعطى كثيراً من الأمثلة على هذا . ثم ركز العالم الألماني المعروف كارل قاوس - الذي عاش بين (١٧٧٧-١٨٥٥م) - على دراسة الكميات التخيلية وخواصها ، وبرهن في عام ١٧٩٩م على أن كل معادلة جبرية لها جذر على هيئة أ + ب ت واعتبر العالم الفرنسي جان روبرت أرجان (Jean Robert Argand) - الذي عاش فيما بين (١٧٦٨-١٨٢٢م) - أن $\sqrt{-١}$ = ت واستعملها في جميع أمثلته ، وذلك عام ١٨٠٦م . وابتكر العالم الألماني كومر (E. E. Kummer) - الذي عاش بين ١٨١٠-١٨٩٣م - الكثير من نظريات الأعداد المركبة . ولا يخفى على القارئ المختص بأن نظريات التحليل المركب لا تزال تؤدي دوراً هاماً جداً في تقدم العلوم الرياضية في المعمورة وقابلة للتطور .

ولم يكتشف الخوارزمي أسس علم الجبر ونظرية الخطأين فحسب (وهما أداة أساسية في التحليل العلمي الرياضي) وإنما وضع كذلك أسس البحث التجريبي الحديث باستخدام النماذج الرياضية .

ولقد أدت أعمال الخوارزمي في علم الرياضيات في الماضي والحاضر دوراً مهماً في تقدم الرياضيات ، لأنها إحدى المصادر الرئيسية التي انتقل خلالها الجبر والأعداد العربية إلى أوروبا ، ويجدر بنا أن نفخر نحن المسلمين بأن علم الجبر من أعظم ما اخترعه العقل البشري من علوم ، لما فيه من دقة وأحكام قياسية عامة ، ولا يكفي العرب والمسلمين فخراً بأن أبا جعفر محمد ابن موسى الخوارزمي هو الذي وضع قواعده الأساسية وأصوله الابتدائية كما نعرفها اليوم . بل يجب أن يتبعوا منهجه في الجد والكد والبحث والعمل على اكتشاف القوانين الكونية التي خلقها الله عز وجل حتى يقوى إيمانهم على علم وبصيرة .

المعادلات التكعيبية والرباعية :

لقد تمكن علماء العرب والمسلمين من حل المعادلات التكعيبية بواسطة قطوع المخروط . وقد اعترف بذلك علماء المغرب والمشرق وعلى رأسهم كل من فرانسيس كاجوري وديفيد يوجين سمث وجورج سارتون وغيرهم . كما لا يخفى على القارئ أن ديوفانتس حل المعادلة س^{٣} + س = ٤ س^{٢} + ٤ بالطريقة التحليلية هكذا س (س^{٢} + ١) = ٤ (س^{٢} + ١) $\Longleftarrow$ س = ٤ . ويذكر أيضاً ديفيد يوجين سمث في كتابه «تاريخ الرياضيات» المجلد الثاني : أن أرخميدس اشتهر بمسألته التي تتعلق بنسبة حجمي جزئي الكرة ، وذلك بقطع الكرة بمستو إلى جزأين حجمهما

يتناسب بنسبة معلومة ، ولكن أرخميدس فشل بأن يحصل من ذلك على معادلة من الدرجة الثالثة . ولكن العالم المسلم محمد عيسى أبو عبد الله الماهاني[١] والذي استطاع أن يحصل على شهرة مرموقة في مجال المعادلات التكعيبية بين معاصريه علماء القرن الثالث الهجري (التاسع الميلادي) استخدم مسألة أرخميدس واستنتج معادلة تكعيبية س^{٣} + أ ب = جـ س^{٢} ، ولذلك عرفت هذه المعادلة بمعادلة الماهاني .

حل ثابت بن قرة الحراني عدداً كبيراً من المعادلات التكعيبية بطرق هندسية استفاد منها علماء الغرب وعلى رأسهم كاردان (Cardan) . أما الحسن بن الهيثم عالم البصريات فقد حل المعادلة التكعيبية بواسطة تقاطع المنحنيين س^{٢} = أ ص (قطع مكافئ) و ص (س − جـ) = أ ب (قطع زائد) . ويعقب على ذلك ديفيد يوجين سمث في كتابه المذكور أعلاه أن ابن الهيثم استخدم هذه الطريقة التي لم يسبقه عليها أحد . وقد استفاد بنظريات الهندسة المستوية في حله . أما أبو الوفاء البوزجاني فقد حل بطريقة هندسية المعادلة من الدرجة الرابعة س^{٤} + أ س^{٣} = ب .

ثم يأتي بعد هؤلاء العلامة عمر الخيام الشاعر والفيلسوف المعروف ويحل المعادلات التكعيبية بواسطة قطوع المخروط . ويذكر هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» أن عمر الخيام

---

(١) الماهاني ترعرع في بغداد ولا نعرف متى ولد ولكنه توفي سنة (٢٦٠هـ = ٨٧٤م) . يعتبر من كبار علماء الفلك ويذكر ديفيد يوجين سمث في كتابه «تاريخ الرياضيات» الجزء الأول أن الماهاني له شروح على الكتاب الخامس والعاشر لإقليدس ، كما علق على إنتاج أرخميدس في الكرة والأسطوانة ، والجدير بالذكر أن أبا عبد الله الماهاني لم يستعمل في إنتاجه الرياضي والفلكي رموزاً ، بل استخدم طريقة الجمل المعروف عند علماء العرب والمسلمين آنذاك .

أبدع في حل المعادلات التكعيبية والرباعية بالتقاطع ، كما أنه مهد لابتكار الهندسة التحليلية وذلك بحله المعادلة $س^{٣} + ب^{٢} س = ب^{٢} جـ$ قائلاً (عمر الخيام) : «إن جذر هذه المعادلة هو الإحداثي الأفقي لنقطة تقاطع الخطين البيانيين للمعادلتين $س^{٢} = ب ص$ ، $ص^{٢} = س (جـ - س)$» . لذا لا تفسير لكلام عمر الخيام إلا أنه كان يعرف تمام المعرفة الإحداثيين لنقطة . ومن ذلك نستنتج أن عمر الخيام له السبق في اكتشاف الهندسة التحليلية وليس كما يدعيه علماء الغرب بطريقتهم الهمجية أن ديكارت هو مكتشف الهندسة التحليلية .

عمر الخيام :

هو أبو الفتح عمـــر بن إبراهيم الخيـــام النيسابوري ، عاش فيما بين (٤٣٦-٥١٧هـ = ١٠٤٤-١١٢٣م) . كان في صغره يشتغل في حرفة وبيع الخيام ، ولذا لقب بـ«الخيام» ومنذ نعومة أظفاره أكثر من التنقل في طلب العلم حتى استقر في بغداد عام (٤٦٦هـ = ١٠٧٤م) . وقد أبدع الخيام في كثير من فنون المعرفة ، مثل الرياضيات والفلك واللغة والفقه والتاريخ والأدب . ذكر المؤلفان إدوارد كاسنار وجيمز نيومان في كتابهما «التخيلات الرياضية» : أن عمر الخيام بالرغم من شهرته في قصائده المسماة بالرباعيات ، التي لا تخلو منها أية مكتبة من مكتبات العالم أجمع - إلا أنه فوق هذا كان رياضياً بارعاً ، وفلكياً أصيلاً . وأضاف المؤلف الغربي و . روس بول في كتابه «مختصر تاريخ الرياضيات» قائلاً : «إن عمر الخيام يعتبر من علماء الرياضيات في القرن العشرين نابغة في الرياضيات ، ولا سيما في الجبر» . ويقول عمر رضا كحالة في كتابه «العلوم البحتة في العصور الوسطى» : «كان عمر الخيام من أنبغ الذين اشتغلوا بالرياضيات ولا سيما الجبر» .

والجدير بالذكر أن شعره اشتهر برباعياته التي ترجمت إلى لغات مختلفة نظماً ونثراً ، والكثيرون يعرفون - ممن يلمون بشعره - إبداعه الملحوظ في العلوم المختلفة ، مما دعا علماء الشرق والغرب على السواء إلى تلقيبه بـ«علامة الزمان» ويقول المؤلف المشهور سيد حسين نصر في كتابه «العلوم والحضارة في الإسلام» : «إن عمر الخيام يعتبر فلتة زمانه ، حيث إنه كان شاعراً ورياضياً بارعاً في آن واحد ، وهاتان الخصلتان يندر وجودهما في شخص واحد . ومما لا شك فيه أن إنتاج عمر الخيام في علم الجبر يدل على عبقريته ، حيث إنه اشتغل بالمعادلات ذات الدرجة الثانية مقتدياً بأستاذه محمد بن موسى الخوارزمي ، كما اشتغل بالبحث في المعادلات ذات الدرجة الثالثة والرابعة فتفنن في ذلك» . وأضاف البارون كار دي في مقالته التي عنوانها ا«الفلك والرياضيات» في كتاب «تراث الإسلام» الذي ألفه جمهرة من المستشرقين بإشراف توماس أرنولد : «إن عبقرية عمر الخيام الهندسية توازي عبقريته الأدبية ، وتكشف عن قوة حقيقة منطقية ونفاذ بصيرة . وكتابه في الجبر يعتبر من الدرجة الأولى ، ويمثل تقدماً عظيماً جداً على ما نجده من هذا العلم عند الإغريق . وقد خصص القسم الأكبر من كتابه لمعالجة المعادلات التكعيبية» . ومدح جمال الدين أبو الحسن القفطي عمر الخيام في كتابه «تاريخ الحكماء» : «إن عمر الخيام إمام خراسان ، وعلامة الزمان ، يعلم علم اليونان ، ويحث على طلب الواحد الديان بتطهير الحركات البدنية ، لتنزيه النفس الإنسانية ، وقد وقف متأخرو الصوفية على شيء من ظواهر شعره فنهلوها إلى طريقتهم ، وتحاضروا بها في مجالساتهم وخلواتهم» .

وعلى ذكر عمر الخيام ، فقد نالت رباعياته التي اشتهر بها الإعجاب من علماء الغرب من حيث هي فلسفة وعمل أدبي ، لأنها تحمل في أثنائها

أفكاراً محددة عن الحياة ، تدعو في جملتها إلى اللذة واللهو واغتنام فرص الحياة الفانية . ونظراً لما تعبر عنه هذه الرباعيات عن أفكار مضللة فإن بعض المؤرخين ينكرون نسبتها لعمر الخيام ، ويرون أنها لغيره ، ونسبت خطأً إليه ، أو أنها دست عليه لشهرته المرموقة في الرياضيات والفلك . فالمتتبع لسيرة حياة عمر الخيام يرى شخصاً آخر غير «خيام الرباعيات» اللاهي العاكف على اللذات الذي لا يجد إلى الهداية طريقاً ، بل يجد في تراجمه صورة الخيام العالم الشيخ الجليل الذي أثرى العلم ووهبه كثيراً ، يقول جار الله الزمخشري صاحب «الكشاف» في كتابه «الزاخر للصغار عن التعرض للكبار» : «حكيم الدنيا وفيلسوفها الشيخ الإمام الخيام» . كما تظهر أخلاقه وصفاته الحميدة في كتابه في الشريعة «الكون والتكليف» الذي بقي مرجعاً هاماً لطلبة العلم في المعمورة . ويرى شريف الدين البيهقي في «تاريخ حكماء الإسلام» عن محمد البغدادي : «أن عمر الخيام قال قبل موته وهو ساجد : «اللهم إنك تعلم إني عرفتك على مبلغ إمكاني ، فاغفر لي ، فإن معرفتي إياك وسيلتي إليك» .

يضاف إلى كل ما تقدم أن الذين ذكروا عمر الخيام كشاعر لم يذكروا له هذه الرباعيات ، وأقدمهم تلميذه العروضي السمرقندي في كتابه «جهار مقالة» الذي أثنى على أستاذه ومدحه ولم يذكر له أي شيء من الرباعيات . وهناك آخرون قالوا : إن عمر الخيام كان شاعراً في اللغتين الفارسية والعربية ، أيضاً لم يذكروا أن له أية علاقة بالرباعيات . كما أثبتت الدراسة الحديثة أن الرباعيات ليست لعمر الخيام بل لشعراء آخرين . وقد استطاع المستشرق زوكوفسكي إرجاع اثنين وثمانين رباعية إلى أصحابها ، فلم يبق منها إلا عدد قليل لم تعرف له هوية حتى الآن .

لقد اهتم عمر الخيام اهتماماً خاصاً بالمقدار الجبري وهو يبحث في علم الجبر ، وكان إقليدس قد حل فقط المقدار الجبري ذا الحدين مرفوعاً إلى قوة أسها اثنان . فابتكر عمر الخيام نظرية ذات الحدين المرفوعة إلى أي عدد صحيح موجب . ينص ديفيد يوجين سمث في كتابه «تاريخ الرياضيات» على : «أن علماء الرياضيات في القرون الوسطى ، وعلماء ما قبل القرون الوسطى حلوا نظرية ذات الحدين وهي التي بواسطتها يمكن رفع مقدار جبري ذي حدين إلى قوة معلومة ، وفك إقليدس المقدار الجبري ذي الحدين مرفوعاً إلى قوة أسها اثنان . ولكن عمر الخيام فك المقدار الجبري ذا الحدين مرفوعاً إلى أس ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، . . . ، ن» . حيث إن «ن» أي عدد صحيح موجب ، ولذا يعتبر مبتكر نظرية ذات الحدين[١] . كما حل الكثير من المعادلات ذات الدرجة الثانية والتي على صيغة أ $\text{س}^{٢}$ + ب س = جـ واستخدم القانون التالي :

$\text{س} = \sqrt{\frac{١}{٤}\,\text{ب}^{٢} + \text{جـ}} - \frac{١}{٢}\,\text{ب}$ الذي عرفه عن أستاذه محمد بن موسى الخوارزمي . يقول الأستاذ دريك سترويك في كتابه «مصادر تاريخية في علم الرياضيات» : «إن عمر الخيام ذكر في كتابه «الجبر والمقابلة» قانوناً لحل المعادلات ذات الدرجة الثانية والتي على صيغة أ $\text{س}^{٢}$ + ب س = جـ ، حيث إن أ = ١ ، لذا $\text{س} = \sqrt{\frac{١}{٤}\,\text{ب}^{٢} + \text{جـ}} - \frac{١}{٢}\,\text{ب}$.

---

(١) $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن} - ١}\,\text{ص} + \frac{\text{ن}\,(\text{ن} - ١)}{٢}\,\text{س}^{\text{ن} - ٢}\,\text{ص}^{٢} + \frac{\text{ن}\,(\text{ن} - ١)\,(\text{ن} - ٢)}{٢ \times ٣}\,\text{س}^{\text{ن} - ٣}\,\text{ص}^{٣} + \frac{\text{ن}\,(\text{ن} - ١)\,(\text{ن} - ٢)\,(\text{ن} - ٣)}{٢ \times ٣ \times ٤}\,\text{س}^{\text{ن} - ٤}\,\text{ص}^{٤} + \cdots + \text{ص}^{\text{ن}}$.

مثال :

أوجد قيمة س إذا كانت $س^{٢} + ١٠س = ٣٩$

بما أن $س = \sqrt{\frac{١}{٤} ب^{٢} + جـ} - \frac{١}{٢} ب$ ، لذا ب = ١٠ ، جـ = ٣٩ ، أ = ١

إذن $س = \sqrt{\frac{١}{٤} (١٠٠) + ٣٩} - \frac{١}{٢} (١٠) = \sqrt{٢٥ + ٣٩} - ٥ = \sqrt{٦٤} - ٥ = ٣$

عكف عمر الخيام على البحث في علم الجبر ، فدرس المعادلات الجبرية من الدرجة الأولى والثانية والثالثة وذلك في (عام ٤٧١هـ = ١٠٧٤م) ، معتمداً بذلك على إسهامات أستاذه محمد بن موسى الخوارزمي في هذا المجال ، وعالج المعادلات التكعيبية معالجة منهجية منتظمة نادرة في نوعها عبر العصور : واستخرج الجذور لأية درجة . ويعتبر جورج سارتون في كتابه «المدخل إلى تاريخ العلوم» : «عمر الخيام من عظماء علماء الرياضيات في القرون الوسطى ، ولكن لم يشتهر في الشرق والغرب إلا بشعره . وفي الحقيقة حل عمر الخيام بكل جدارة ودقة ٢٥ نوعاً من المعادلات ذات الدرجة الثالثة» .

ركز عمر الخيام في كتابه «رسالة في البراهين على مسائل الجبر والمقابلة» على المعادلة العامة ذات الدرجة الثالثة والمجهول الواحد التي قسمها إلى ٢٥ نوعاً هي :

١ - كعب وجذر يعادل عدداً : $س^{٣} + ب\,س = جـ$.

٢ - كعب وعدد يعادل جذراً : $س^{٣} + جـ = ب\,س$.

٣ - عدد وجذر يعادل كعباً : $جـ + ب\,س = س^{٣}$.

٤ - كعب ومال يعادل عدداً : س^{٣} + أ س^{٢} = جـ .

٥ - كعب وعدد يعادل مالاً : س^{٣} + جـ = أ س^{٢} .

٦ - عدد ومال يعادل كعباً : جـ + أ س^{٢} = س^{٣} .

٧ - كعب ومال وجذر يعادل عدداً : س^{٣} + أ س^{٢} + ب س = جـ .

٨ - كعب ومال وعدد يعادل جذراً : س^{٣} + أ س^{٢} + جـ = ب س .

٩ - كعب وجذر وعدد يعادل مالاً : س^{٣} + ب س + جـ = أ س^{٢} .

١٠- كعب يعادل جذراً ومالاً وعدداً : س^{٣} = ب س + أ س^{٢} + جـ .

١١- كعب ومال يعادل جذراً وعدداً : س^{٣} + أ س^{٢} = ب س + جـ .

١٢- كعب وجذر يعادل مالاً وعدداً : س^{٣} + ب س = أ س^{٢} + جـ .

١٣- كعب وعدد يعادل جذراً ومالاً : س^{٣} + جـ = ب س + أ س^{٢} .

وهناك ست معادلات يمكن اختزالها إلى معادلات من الدرجة الأولى . وكذلك ست معادلات أخرى يمكن وضعها على صورة معادلات من الدرجة الثانية ، لذا اكتمل عدد الأنواع الخمسة والعشرين المطلوبة .

ونوه أريك بل في كتابه «تطور تاريخ الرياضيات» : «أن عمر الخيام حل المعادلات الجبرية ذات الدرجة الثالثة بطريقة هندسية أبدع فيها ، فوصل إلى درجة من النضج الرياضي لم يسبقه إليها أحد» . وذكر عز الدين فراج في كتابه «فضل علماء المسلمين على الحضارة الأوروبية» : «أن عمر الخيام له السبق والشهرة بمعالجته حل المعادلات التكعيبية عن طريق علم الهندسة ، فحصل على أحد جذورها على اعتبار أنه الإحداثي الأفقي لنقطة تقاطع دائرة بقطع مخروطي . وقد نشر العالم الفرنسي ووبك عام ١٨٥١م كتاب «الخيام في الجبر» موضحاً هذه الحقيقة ، التي تعتبر بحق أساس الهندسة التحليلية .

اهتم عمر الخيام بتصنيف المعادلات ذات الدرجة الثالثة حسب درجاتها ، وحسب عدد حدودها ، فأبدع في ذلك إبداعاً كبيراً ، ويعترف العالم المشهور جورج سارتون في كتابه «تطور علوم القرون الوسطى خلال النهضة الأوروبية» : «بأن عمر الخيام هو أول من حاول تصنيف المعادلات بحسب درجاتها ، وبحسب الحدود التي فيها ، محصورة في ١٣ نوعاً . ثم أتى بعده سيمون ستيفن الذي عاش فيما بين (١٥٤٨-١٦٢٠م) وهو هولندي الأصل ، وقد اشتهر بعلم الميكانيكا فتبع تقويم عمر الخيام نفسه مع إدخال بعض التعديلات الطفيفة» . ومن المؤسف حقاً أن علماء الغرب يدعون خطأ أن سيمون ستيفن هو صاحب فكرة التصنيف . وينسون صاحب الابتكار الأول عمر الخيام العالم المسلم المشهور كعاداتهم المشينة . ولا شك أن عمر الخيام كان طويل الباع في حل المعادلات من الدرجة الثالثة باستعمال القطوع المخروطية وهذا أرقى ما توصل إليه علماء العرب والمسلمين في القرون الوسطى بل أرقى ما توصل إليه العالم في حل المعادلات من الدرجة الثالثة من الوقت الحاضر . وبذلك يكون علماء العرب والمسلمين في الرياضيات قد سبقوا ديكارت وبيكر وفرما[1] .

ولم يكتف عمر الخيام بتطوير علم الجبر ، باعتباره علماً مستقلاً ، باعتباره علماً مستقلاً ، بل اهتم بإدخال ذلك العلم على علم حساب المثلثات ، لذا نجد أن عمر الخيام حل الكثير من المسائل المستعصية في علم حساب المثلثات مستعملاً معادلات جبرية ، من ذات الدرجة الثالثة والرابعة . ولم يقف عند هذا الحد بل تشعب اهتمامه حتى حوى علم الفلك . وفي

(١) بيير دي فرما (Pierre de Fermat) عالم فرنسي عاش فيما بين ١٦٠١-١٦٦٥م ، اشتهر بنظرية الأعداد والجبر والأعداد غير النسبية (غير القياسية) ونظرية الاحتمال .

عام (٤٧١هـ = ١٠٧٩م) استنتج عمر الخيام طول السنة الشمسية بما قدره ٣٦٥ يوماً، و٥ ساعات، و٤٩ دقيقة، و٥ ثواني، مستعملاً في حساباته أرصاده المتناهية الدقة، ولذا لم يتجاوز خطؤه يوماً واحداً في كل (٥٠٠٠) خمسة آلاف سنة، في حين أن الخطأ في التقويم الجريجوري المتبع الآن في العالم أجمع مقداره يوم واحد في كل (٣٣٣٠) ثلاثين وثلاثمائة وثلاثة آلاف. وهذا يدل على أن تقويم عمر الخيام أدق من التقويم الجريجوري الذي تصر دول الغرب على استعماله، والعالم أجمع يسلم لهم بذلك ومن بينهم العرب المسلمين المعاصرين، كما درس الخيام بكل إتقان قاعدة توازن السوائل فنقحها، وحل الكثير من المسائل التي استعصت على من سبقه من علماء المسلمين. يقول المؤلف جورج سارتون في كتابه «المدخل إلى تاريخ العلوم»: «إن علماء المسلمين اهتموا اهتماماً شديداً بقاعدة توازن السوائل ومنهم سند بن علي (في النصف الأول من القرن التاسع الميلادي)، والرازي (في النصف الثاني من القرن التاسع الميلادي)، والبيروني وابن سينا (في النصف الأول من القرن الحادي عشر الميلادي). ثم جاء عمر الخيام فشرح وعلق على الكثير من آراء أساتذته فأبدع في ذلك».

يعتبر عمر الخيام أن علم الهندسة من المواضيع الأساسية لدراسة أي حقل من حقول الرياضيات، لذا ركز على دراسة هندسة إقليدس المشروحة والمعلق عليها من قبل علماء الرياضيات المسلمين. كما أولى عناية خاصة في تفهم ما قدمه الحسن بن الهيثم في برهانه للموضوعة الخامسة من موضوعات إقليدس، ثم أتى ببرهان جديد من ذلك المنطلق. وذكر المؤلف أورثر جتليمن في كتابه «تاريخ الرياضيات»: «أن عمر الخيام حاول جهده أن

يبرهن الموضوعة الخامسة من موضوعات إقليدس التي استعصت على من سبقه من علماء المسلمين . ولم تبرهن برهاناً صحيحاً إلى يومنا هذا» .

واهتم عمر الخيام اهتماماً بالغاً بإيجاد قيمة $\sqrt[٣]{٢}$ ، فقد درس الطريقتين الآتيتين دراسة مفصلة تدل على طول باعه في هذا المجال :

الطريقة الأولى :

أخذ قطعاً مكافئاً وقطعاً زائداً كالآتي :

ص = س^{٢} ، قطع مكافئ

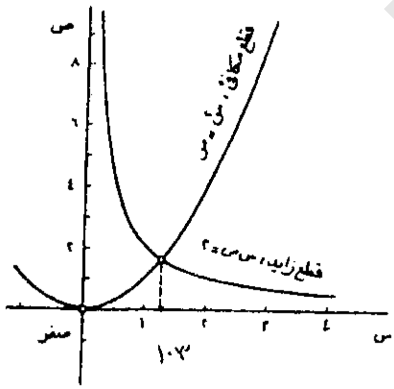
س ص = ٢ . قطع زائد .

١ - الطريقة التحليلية :

بما أن ص = $\frac{٢}{\text{س}}$ ،

إذن $\frac{٢}{\text{س}}$ = س^{٢} $\Longleftarrow$ س^{٣} = ٢

لذا س = $\sqrt[٣]{٢}$ = ١,٢٦



٢ - الطريقة الهندسية :

(أ) يعتبر رسم ص = س^{٢} سهلاً لأنها قطع مكافئ

(ب) س ص = ٢ $\Longleftarrow$ ص = $\frac{\text{٢}}{\text{س}}$

وهذا قطع زائد .

لذا يلزم أن يأخذ بعين الاعتبار خط الاقتراب[١] (Asymptote)

إذا كانت س = ٠ $\Longleftarrow$ محور الصادات هو خط الاقتراب (أ ي س = ٠)

ص $\Longleftarrow$ ∞ . ولكن عندما ص = ٠ $\Longleftarrow$ محور السينات هو خط الاقتراب .

(أي س = $\frac{\text{٢}}{\text{ص}}$ ، ص = ٠ $\Longleftarrow$ س $\Longleftarrow$ ∞)

(إذن نقطة تقاطع القطع المكافئ والقطع الزائد تحدد قيمة $\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}$ والذي يساوي ١,٢٦ كما في الشكل .

طريقة أخرى حديثة :

(أ) واضحة .

(ب) ص = $\frac{\text{٢}}{\text{س}}$.

(١) خط الاقتراب العمودي :

محور الصادات لأن س = ٠

---

(١) خط الاقتراب : إذا سارت نقطة بحيث تقرب من خط ما ، ولكنها لا تصل إليه ، سمي هذا الخط بخط الاقتراب أو محور اقتراب .

(٢) خط الاقتراب الموازي[١] :

$$\text{ص} = \underset{\text{س} \longrightarrow \infty}{\text{نها}} \frac{٢}{\text{س}} = \text{صفر}$$

$\Longleftarrow$ محور السينات

الطريقة الثانية :

افترض أنه يوجد قطعان مكافئان ، فاتبع الطريقة الآتية :

$\text{ص} = \text{س}^{٢}$ ، (١)

$\text{ص}^{٢} = ٢\ \text{س}$. (٢)

(١) الطريقة التحليلية :

بتربيع طرفي المعادلة في (١) نجد أن $\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٤}$ (٣)

إذن من (٢) ، (٣) $٢\text{س} = \text{س}^{٤} \Longleftarrow$

$\text{س}^{٤} - ٢\text{س} = ٠$

لذا $\text{س}\ (\text{س}^{٣} - ٢) = ٠$ ومن ذلك نستنتج أن :

$\text{س} = ٠$ أو $\text{س}^{٣} = ٢$.

إذن $\text{س} = \sqrt[٣]{٢} = ١{,}٢٦$

(٢) الطريقة الهندسية :

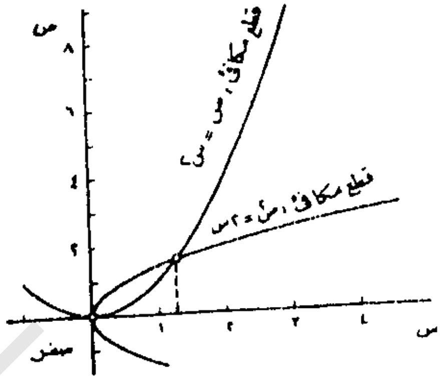
(أ) رسم القطع المكافئ[٢] $\text{ص} = \text{س}^{٢}$ كما في الشكل .

---

(١) نها (س) = ل أي إذا كانت س في جوار أ ، كانت (س) في جوار ل ، بحيث س $\neq$ أ (وتسمى نهاية الاقتران الدالة = Limit of a Function) س $\longrightarrow$ أ .

(٢) القطع المكافئ (Parabola) : هو المحل الهندسي للنقطة التي تبعد عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة (Focus) يساوي بعدها عن مستقيم ثابت يسمى الدليل (Directrix) .
والمعادلة المعيارية للقطع المكافئ $\text{ص}^{٢} = ٤\ \text{أ}\ \text{س}$.

(ب) ثم رسم القطع المكافئ الثاني ص^{٢} = ٢س كما في الشكل ، واعتبر نقطة التقاطع هي التي تحدد قيمة $\sqrt[٣]{٢}$ كما في الشكل .



لقد أبدع عمر الخيام في علم الجبر والمقابلة فتوصل إلى حل بعض معادلات الدرجة الثالثة باستعمال القطوع المخروطية ، فحصل على جذر المعادلة بإيجاد الإحداث السيني لنقطة تقاطع قطع مخروطي مع دائرة أو قطعين مخروطين . والجدير بالذكر أن عمر الخيام أهمل الجذور السالبة ولم يهتم بإيجاد كل الجذور للمعادلة من الدرجة الثالثة أو الرابعة . ونذكر بعض المعادلات ذات الدرجة الثالثة التي اهتم بها عمر الخيام وهي :

* س^{٣} + ب^{٢} س = ب^{٢} جـ ، بهذه الحالة اعتبر الجذر نقطة تقاطع المعادلتين .

س^{٢} = ب ص (قطع مكافئ) ، ص^{٢} = س (جـ − س) دائرة .

* س^{٣} $\pm$ أ س^{٢} + ب^{٢} س = ب^{٢} جـ تعطي الجذر نقطة تقاطع المعادلتين .

ص^{٢} = (س + أ) (جـ − س) دائرة .

س (ب $\pm$ ص) = ب جـ قطع زائد (خط هذلولي) .

* $س^3 + أ\, س^2 = جـ^3$ الجذر نقطة تقاطع المعادلتين .

$س\, ص = جـ^2$ قطع زائد .

$ص^2 = جـ\,(أ + س)$ قطع مكافئ .

$$ص = \frac{جـ^2}{س} \Longleftarrow ص^2 = \frac{جـ^4}{س^2}$$

$$\therefore \frac{جـ^4}{س^2} = جـ\,(أ + س)$$

$$جـ^4 = جـ\,(أ + س)\, س^2$$

$$جـ^3 = أ\, س^2 + س^3 .$$

$$\therefore س^3 + أس^2 = جـ^3$$

الحالة الأولى :

(أ) الطريقة التحليلية :

(ب) بما أن $س^2 = ب\, ص$ (١) ، $ص^2 = س\,(جـ - س)$ (٢)

من (١) $ص = \frac{س^2}{ب}$ بتربيع الطرفين $ص^2 = \frac{س^4}{ب^2}$ (٣)

إذن من (٢) و (٣) ينتج أن $س\,(جـ - س) = \frac{س^4}{ب^2} \Longleftarrow س^3 = ب^2(جـ - س)$.

$$س^3 = ب^2\, جـ - ب^2\, س \Longleftarrow س^3 + ب^2\, س = ب^2\, جـ .$$

(٢) الطريقة الهندسية :

لإيجاد $س^{٣} + ب^{٢} س = ب^{٢} جـ$.

العمل :

* رسم نصف الدائرة وليكن طول قطرها م ك = جـ .

* نقطة تقاطع الدائرة $ص^{٢} = س (جـ - س)$ والقطع المكافئ $س^{٢} = ب ص$ هي «أ» .

* $ص^{٢} = جـ س - س^{٢} \Longleftarrow ص^{٢} + س^{٢} - جـ س = ٠$

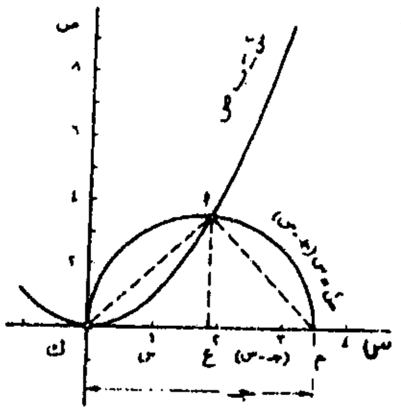
يجب أن نكمل المربع .

إذن $ص^{٢} + س^{٢} - جـ س + \left(\frac{جـ}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{جـ}{٢}\right)^{٢}$ ،

$$ص^{٢} + \left(س - \frac{جـ}{٢}\right)^{٢} = \frac{جـ^{٢}}{٤}$$

لذا نصف القطر $= \frac{جـ}{٢}$ ، والقطر = جـ = م ك

قيمة الجذر = طول ك ع = س $= \frac{جـ}{٢}$ ، م ع = جـ - س



البرهان :

* $س^2 = ب ص = ب (أع)$ حيث إن ص = أ ع .

إذن $\frac{س}{أع} = \frac{ب}{س}$

* المثلث أ ك م يشابه المثلث ع ك أ

إذن $\frac{أك}{ع ك} = \frac{أم}{أع} \Leftarrow \frac{أك}{أم} = \frac{ع ك}{أع}$

لذا نجد أن $\frac{أك}{أم} = \frac{س}{أع}$

وكذلك المثلث أ م ك يشابه المثلث ع م أ

إذن $\frac{أم}{ع م} = \frac{أك}{أع} \Leftarrow \frac{أك}{أم} = \frac{أع}{ع م}$

لذا يمكن القول : إن $\frac{أك}{أم} = \frac{أع}{جـ - س}$ (٣)

من (٢) ، (٣) نستنتج أن :

$\frac{س}{أع} = \frac{أع}{جـ - س}$ (٤)

من (١) ، (٤) نجد أن $\frac{ب}{س} = \frac{أع}{جـ - س}$ (٥)

من (١) $أع = \frac{س^2}{ب}$ (٦)

من (٥) ، (٦) $\frac{ب}{س} = \frac{س^2}{ب (جـ - س)}$

إذن $س^٣ = ب^٢ (جـ - س)$

$= ب^٢ جـ - ب^٢ س$

لذلك $س^٣ + ب^٢ س = ب^٢ جـ$.

وجد عمر الخيام مما تقدم أن قيمة س هي الإحداث السيني لنقطة تقاطع القطع المكافئ $س^٢ = ب ص$ مع الدائرة $ص^٢ = س (جـ - س)$. وهذا بدون شك يبرهن أن عمر الخيام كان مدركاً تماماً للإحداثيات السينية والصادية للهندسة التحليلية ، وبذلك يكون قد سبق ديكارت[1] في هذا الموضوع علماً أنه ورث فكرة الهندسة التحليلية من عملاق الرياضيات ثابت ابن قرة ، لكنه طورها وأتقن تطويرها إتقاناً كبيراً .

الحالة الثانية :

$س^٣ \pm أ س^٢ + ب^٢ س = ب^٢ جـ$

بهذه الحالة اعتبر عمر الخيام الجذر نقطة تقاطع المعادلتين :

$ص^٢ = (س + أ) (جـ - س)$ وهي دائرة

$س (ب \pm ص) = ب جـ$ قطع زائد (خط هذلولي) .

العمل : $س^٣ + أ س^٢ + ب^٢ س = ب^٢ جـ$ مع كل من

$ص^٢ = (س + أ) (جـ - س)$ ، $س(ب + ص) = ب جـ$

الدائرة $ص^٢ = (س + أ) (جـ - س) = س جـ - س^٢ + أ جـ - أ س$

$ص^٢ + س^٢ + أ س - جـ س = أ جـ$

$ص^٢ + س^٢ - (جـ - أ) س = أ جـ$

(١) ريني ديكارت (Rene des Cartes) عالم فرنسي عاش فيما بين ١٥٩٦-١٦٥٠م ، له شهرة عظيمة في علم الفلسفة والهندسة التحليلية ، كما أن له مبتكرات في القوانين المثلثية .

$$\text{ص}^2 + \text{س}^2 - (\text{جـ} - \text{أ})\,\text{س} + \left(\frac{\text{جـ} - \text{أ}}{2}\right)^2 = \text{أ جـ} + \left(\frac{\text{جـ} - \text{أ}}{2}\right)^2$$

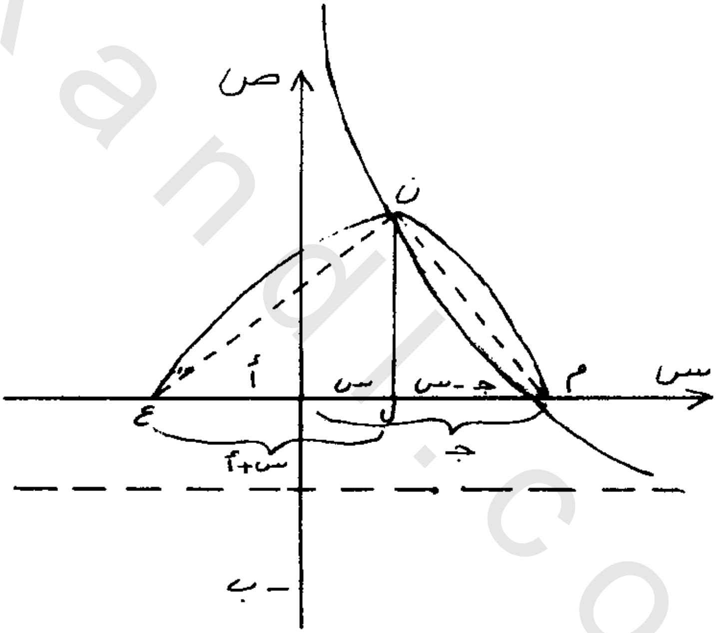
$$\text{ص}^2 + \left[\text{س} - \left(\frac{\text{جـ} - \text{أ}}{2}\right)\right]^2 = \text{أ جـ} + \frac{\text{جـ}^2 - 2\,\text{أ جـ} + \text{أ}^2}{4}$$

$$= \frac{4\,\text{أ جـ} + \text{جـ}^2 - 2\,\text{أ جـ} + \text{أ}^2}{4} = \left(\frac{\text{جـ} + \text{أ}}{2}\right)^2$$

دائرة مركزها $\left(\frac{\text{جـ} - \text{أ}}{2} \text{ ، } 0\right)$ ونصف قطرها $= \frac{\text{جـ} + \text{أ}}{2}$ $\therefore$ القطر = جـ + أ

أما القطع الزائد س(ب + ص) = ب جـ $\Leftarrow$ ب + ص $= \frac{\text{ب جـ}}{\text{س}}$

$\therefore$ ص $= \frac{\text{ب جـ}}{\text{س}} - \text{ب}$ $\qquad\qquad$ $\therefore$ ص = − ب



ص = ل ن

م ل = جـ − س

ل ع = س + أ

Δ م ن ع يشابه Δ م ل ن

$$\frac{\text{م ن}}{\text{م ل}} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ل ن}} = \frac{\text{م ع}}{\text{م ن}} \Leftarrow \frac{\text{م ن}}{\text{م ل}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{ص}}$$

$$\frac{\text{م ن}}{\text{جـ} - \text{س}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{ص}} \Leftarrow \frac{\text{م ن}}{\text{ن ع}} = \frac{\text{جـ} - \text{س}}{\text{ص}} \qquad (1)$$

$$\Delta\ \text{ع ن م يشابه}\ \Delta\ \text{ع ل ن} \Leftarrow \frac{\text{ع ن}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ن م}}{\text{ن ل}} = \frac{\text{ع م}}{\text{ع ن}} \Leftarrow \frac{\text{ع ن}}{\text{س} + \text{أ}}$$

$$= \frac{\text{ن م}}{\text{ص}} \Leftarrow \frac{\text{ن م}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{ص}}{\text{س} + \text{أ}} \qquad (2)$$

من (1) ، (2) $\frac{\text{جـ} - \text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{س} + \text{أ}} \Leftarrow \text{ص}^{2} = (\text{جـ} - \text{س})(\text{س} + \text{أ})$

ولكن $\text{ص} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{س}} - \text{ب}$

$$\therefore \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{س}} - \text{ب}\right)^{2} = (\text{جـ} - \text{س})(\text{س} + \text{أ}) \Leftarrow$$

$$\cancel{(\text{جـ} - \text{س})}(\text{س} + \text{أ}) = \frac{\text{ب}^{2}\,(\text{جـ} - \text{س})^{\cancel{2}}}{\text{س}^{2}}$$

$$\therefore \text{س} + \text{أ} = \frac{\text{ب}^{2}\,\text{جـ} - \text{ب}^{2}\,\text{س}}{\text{س}^{2}} \Leftarrow \text{س}^{3} + \text{أ}\,\text{س}^{2} + \text{ب}^{2}\,\text{س} = \text{ب}^{2}\,\text{جـ}$$

وهو المطلوب .

الحالة الثالثة :

$\text{س}^{3} + \text{أ}\,\text{س}^{2} = \text{جـ}^{3}$ الجذر هـ نقطة تقاطع المعادلتين :

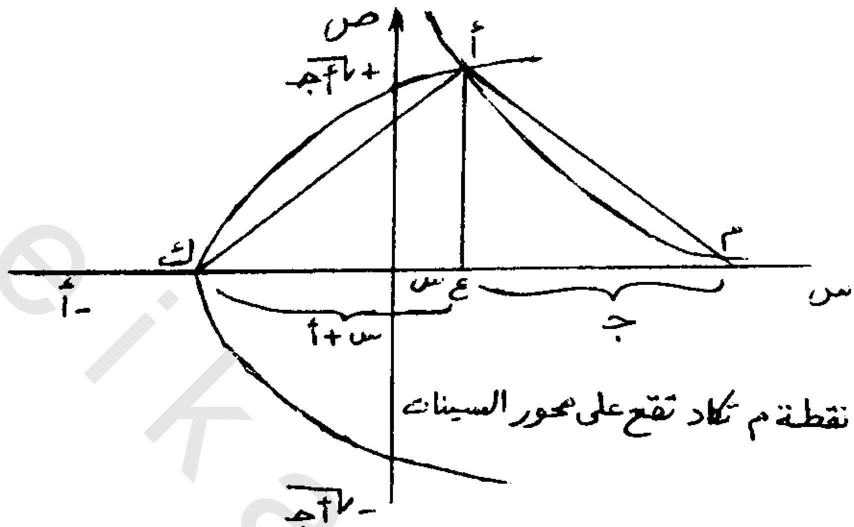
$\text{س ص} = \text{جـ}^{2}$ (قطع زائد) ، $\text{ص}^{2} = \text{جـ}\,(\text{أ} + \text{س})$ قطع مكافئ .

$\text{ص} = \frac{\text{جـ}^{2}}{\text{س}}$ (قطع زائد)

$\text{ص}^{2} = \text{أ جـ} + \text{جـ س}$

إذا كانت ص = ٠ ⟸ س = $\frac{\text{- أ جـ}}{\text{جـ}}$ = - أ

إذا كانت س = ٠ ⟸ ص = ± $\sqrt{\text{أ جـ}}$



ص = أع ولكن س ص = جـ^{٢}

أع = $\frac{\text{جـ}^{٢}}{\text{س}}$ (١)

∆ أ ك م يشابه ∆ ع ك أ (ضلع وزاوية مشتركان) .

∴ $\frac{\text{أك}}{\text{ع ك}}$ = $\frac{\text{أم}}{\text{أع}}$ ⟸ $\frac{\text{أك}}{\text{أم}}$ = $\frac{\text{ع ك}}{\text{أع}}$ = $\frac{\text{س + أ}}{\text{أع}}$ (٢)

∆ أ م ك يشابه ∆ ع م أ

∴ $\frac{\text{أم}}{\text{ع م}}$ = $\frac{\text{أك}}{\text{أع}}$ ⟸ $\frac{\text{أك}}{\text{أم}}$ = $\frac{\text{أع}}{\text{ع م}}$ = $\frac{\text{أع}}{\text{جـ}}$ (٣)

من (٢) ، (٣) $\frac{\text{س + أ}}{\text{أع}}$ = $\frac{\text{أع}}{\text{جـ}}$ ⟸ (أع)^{٢} = جـ (س + أ) (٤)

من (١) ، (٤) $\left(\frac{\text{ج}}{\text{س}}\right)^{٢} = \text{ج}(\text{س} + \text{أ})$ ⟸ $\frac{\text{ج}^{٤}}{\text{س}^{٢}} = \text{ج}(\text{أ} + \text{س})$

$\frac{\text{ج}^{٣}}{\text{س}^{٢}} = (\text{أ} + \text{س})$ ⟸ $\text{س}^{٢}(\text{أ} + \text{س}) = \text{ج}^{٣}$

∴ $\text{س}^{٣} + \text{أ}\,\text{س}^{٢} = \text{ج}^{٣}$ وهو المطلوب .

والمعروف لدى معظم علماء الرياضيات المعاصرين أن عمر الخيام له إنتاج مرموق في دراسة المعادلات الجبرية ذات الدرجة الثالثة ، ولكنه لم يغفل عن المعادلات من الدرجة الرابعة . ولقد أكد المؤلف و . و . روس في كتابه «مختصر لتاريخ الرياضيات» : «أن عمر الخيام قد حل المعادلات التي هي من الدرجة الرابعة بطرق مختلفة ، هندسية وتحليلية فعلى سبيل المثال $(١٠٠ - \text{س}^{٢})\,(١٠ + \text{س})^{٢} = ٨١٠٠$.

لذا $(١٠٠ - \text{س}^{٢})\,(١٠ + \text{س})^{٢} = ٨١٠٠$ تعطينا

$\text{س}^{٤} + ٢٠\text{س}^{٣} - ٢٠٠٠\text{س} = ١٩٠٠$

وهذه معادلة من الدرجة الرابعة . وصل عمر الخيام إلى هذا بأخذه $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٠٠$.

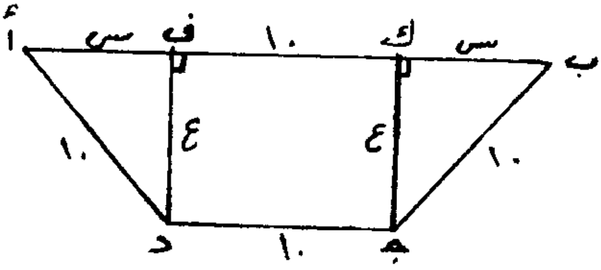
(دائرة) ، $(١٠ + \text{س})\,\text{ص} = ٩٠$ (قطع زائد) .

∴ $\text{ص} = \frac{٩٠}{١٠ + \text{س}}$ ، $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢} + \frac{٨١٠٠}{(١٠ + \text{س})^{٢}} = ١٠٠$

أي أن $\text{س}^{٢}\,(١٠ + \text{س})^{٢} + ٨١٠٠ = ١٠^{٢}\,(١٠ + \text{س})^{٢}$

إذن $(١٠^{٢} - \text{س}^{٢})\,(١٠ + \text{س})^{٢} = ٨١٠٠$

أما الطريقة الهندسية التي استخدمها عمر الخيام لحل هذه المسألة فهي :



العمل :

* ارسم شبه المنحرف أ ب جـ د المتساوي الساقين بحيث أن القاعـدة د جـ = ١٠ ، القاعدة أ ب أكبر من القاعدة د جـ .

* أنزل العمودين جـ ك ، د ف على أ ب ، ووضع كل من ك جـ = د ف = ع ، واستنتج أن الشكل ك جـ د ف مستطيل .

* ك ف = جـ د = ١٠ خاصة من خواص المستطيل .

* افرض أن ب ك = ف أ = س .

البرهان :

* أ ب جـ د شبه منحرف ، من ذلك أ ب // جـ د .

* أ د = ب جـ = جـ د = ١٠ ، والجدير بالذكر أن مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د = ٩٠ .

* المثلث جـ ك ب قائم الزاوية .

لذا $(١٠)^{٢} = ع^{٢} + س^{٢} \Longleftarrow ع = \sqrt{١٠٠ - س^{٢}}$

ولكن مجموع قاعدتي شبه المنحرف :

أ ب + جـ د = ١٠ + س + ١٠ + س = ٢٠ + ٢س .

إذن مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د =

$$\frac{1}{2}(20+2س)\sqrt{100-س^2}=90 \Longleftarrow (10+س)\sqrt{100-س^2}=90$$

بتربيع طرفي المعادلة $(10+س)^2(100-س^2)=8100$.

أو $س^2+ع^2=100$ دائرة (1)

$(10+س)ع=90$

$ع=\frac{90}{10+س} \Longleftarrow ع^2=\frac{8100}{(10+س)^2}$ (2)

من (1) و (2) $س^2+\frac{8100}{(10+س)^2}=100 \Longleftarrow \frac{8100}{(10+2)^2}=100-س^2$

$\therefore (100-س^2)(10+س)^2=8100$

مؤلفاته :

عكف عمر الخيام على التأليف في جميع فروع المعرفة الشائعة في عصره ، حاذياً حذو أساتذته علماء المسلمين ،لذا يجدر بنا أن نذكر بعض مصنفاته المشهورة :

١ - رسالة وضع فيها تقويماً سماه (التقويم الجلالي) .

٢ - رسالة في البراهين على مسائل الجبر والمقابلة ، عالج في هذه الرسالة حلولاً جبرية لمعادلات الدرجة الأولى والثانية والثالثة ، ومعادلات أخرى يمكن اختزالها إلى هذه .

٣ - رسالة تبرز محاولاته المنهجية المنتظمة لحل المسائل التكعيبية .

٤ - رسالة في شرح ما أشكل من مصادرة كتاب إقليدس .

٥ - رسالة تبحث في النسب .

٦ - رسالة تحتوي على بحث عن فرضية المتوازيات الإقليدسية .

٧ - كتاب مشكلات الحساب .
٨ - رسالة كتب فيها الاحتيال لمعرفة مقدار الذهب والفضة في جسم مركب .
٩ - رسالة سماها ميزان الحكمة .
١٠- الرباعيات شعر . المعروفة باسمه .
١١- مقدمة في المساحة .
١٢- رسالة عن المصادرة الخامسة من مصادرات إقليدس .
١٣- رسالة في مشكلات الحساب .
١٤- كتاب فيه جداول فلكية (زيج ملكشاه) .
١٥- رسالة الكون والتكليف .
١٦- رسالة في جواب ثلاث مسائل ضرورية التعداد في علم الجبر والبقاع .
١٧- رسالة في الكليات والوجود .
١٨- رسالة في الوجود .
١٩- رسالة الميزان الجبري .
٢٠- رسالة في حساب الهند .
٢١- كتاب المقنع في الحساب الهندي .
٢٢- كتاب الموسيقى الكبير .
٢٣- كتاب الشفاء .
٢٤- رسالة في المعادلات ذات الدرجة الثالثة والرابعة .
٢٥- خمس رسائل في الفلسفة .
٢٦- رسالة الكون والتكليف .

ويمكن عد الخيام من مؤسسي مدرسة علم الجبر ، فقد درس المعادلات الجبرية من الدرجة الأولى والثانية والثالثة والرابعة بمنهج مدهش لمن تتبعه . كان فائقاً في الدقة والعمق والأصالة والتمحيص . فعمر الخيام هو أول من

فكر في أن المعادلات الجبرية ذات الدرجة الثالثة لها جذران . كما حصل على الجذور التربيعية والتكعيبية بطرق رياضية بحتة ، وهذا يظهر جلياً من كتاب «جامع الحساب بالتخت والتراب» لنصير الدين الطوسي الذي استخدم فيه أفكار عمر الخيام . حقق عمر الخيام علم الجبر تحقيقاً علمياً ، وأضاف إليه ابتكارات مهمة احتوت على المعادلات الجبرية ، ولا سيما معادلات الدرجة الثالثة التي نجح في إيجاد جذورها هندسياً ، وذلك بتقاطع قطاعين مخروطيين ، ولكن لم يبحث عن الحلول العددية إلا في حالة الجذور الموجبة .

وبحث عمر الخيام في النظرية التي أسندت ظلماً وجحوداً لـ «فرما» العالم الغربي الإيطالي الذي أتى بعده بقرون ، والقائلة بأن مجموع عددين مكعبين لا يمكن أن يكون مكعباً . ولقد اشتهر عمر الخيام شهرة عظيمة بين علماء الغرب بسبب ترجمة كتابه في الجبر بواسطة العالم الألماني ووبيك ، وقد نشر في باريس عام (١٢٦٧هـ = ١٨١٥م) .

والأجدر بنا أن نعرف نحن ابتكارات علمائنا حتى لا نكرر كالببغاوات ادعاءات الغرب ، ولذا يجب أن نسمي نظرية فرما بنظرية الخيام وقانون (سنيل) بقانون «ابن الهيثم» وقانون «نيوتن» بقانون «البيروني» وهلم جرا .

أبو كامل المصري :

عاش أبو كامل شجاع بن أسلم المصري فيما بين سنتي (٢٣٦ - ٣١٨هـ = ٨٥٠ - ٩٣٠م) وهو من أهالي مصر . نبغ أبو كامل في حقل الرياضيات ، فحاز على شهرة عظيمة في علم الجبر ، حتى إنه صار يلقب بأستاذ الجبر وفي بعض الأحيان يعرف باسم الحاسب المصري . ويذكر ابن النديم في كتابه «الفهرست» أن أبا كامل من علماء القرن الثالث الهجري (التاسع الميلادي) ومن أهالي مصر ، كان فاضلاً وحاسباً وعالماً . كان أبو كامل من العلماء الذين

يفخرون بتعلمهم العلوم على علماء العرب والمسلمين ، فكان فخوراً بأنه تتلمذ على كتب علامة الإسلام في الجبر محمد بن موسى الخوارزمي . ويقول عبد الرحمن بن خلدون في كتابه «مقدمة التاريخ» : «إن أبا كامل استفاد من حلول الخوارزمي لكثير من المسائل الجبرية ، بل كانت تلك الحلول حجر الأساس» . وأضاف ستروِيك في كتابه «مصادر الرياضيات» قائلاً : «لقد استقى أبو كامل علومه الجبرية من كتاب محمد بن موسى الخوارزمي في الجبر والمقابلة» . أما كارل بوير فيذكر في كتابه «تاريخ الرياضيات» : أن أبا كامل نهج منهج الخوارزمي في حل المعادلات الجبرية ذات الدرجة الثانية ، وأدخل تحسينات على طريقة الحل مع الإيضاح لبعض النقاط الغامضة . يقول جورج سارتون في كتابه «المدخل إلى تاريخ العلوم» : «بأن أبا كامل أوجد الجذرين الحقيقيين للمعادلة الجبرية ذات الدرجة الثانية ، في حين اهتم الخوارزمي بالجذر الحقيقي الموجب» . كما أنه طور طريقة ضرب وقسمة الكميات الجبرية ، إضافة إلى ما قدمه من عمل جليل نحو جمع وطرح الأعداد الصم مثل :

$$\sqrt{\text{أ}} \pm \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{(\text{أ} + \text{ب}) \pm ٢\sqrt{\text{أ ب}}} \ .$$

مثال : $\sqrt{٩} + \sqrt{٤} = \sqrt{١٣ + ٢\sqrt{٩ \times ٤}}$

$$= \sqrt{١٣ + ٢\ (٦)} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

$$\sqrt{٩} - \sqrt{٤} = \sqrt{١٣ - ٢\sqrt{٩ \times ٤}} = \sqrt{١٣ - ١٢} = \sqrt{١} = ١$$

أو $\sqrt{٢٥} - \sqrt{٤} = \sqrt{٢٩ - ٢\sqrt{١٠٠}} = \sqrt{٢٩ - ٢٠} = \sqrt{٩} = ٣$

وقد وردت نظرية هامة في كتاب «كمال الجبر وتمامه والزيادة في أصوله» لأبي كامل شجاع المصري : «إذا قسم عدد بقسمين وقسم على كل

واحد منهما ، فإنه سيخـــرج بالقسمة عددان مسطحهما مساو لمجموعهما» .

مثل : $\left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س}}\right)\left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}}\right) = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س}} + \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}}$

ولإثباتها أخذ $\left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س}}\right)\left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}}\right) = \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س ص} + \text{ص}^{٢}}{\text{س ص}} =$

$$\frac{\text{س}^{٢} + \text{س ص}}{\text{س ص}} + \frac{\text{ص}^{٢} + \text{س ص}}{\text{س ص}} = \frac{\text{س (س + ص)}}{\text{س ص}} + \frac{\text{ص (ص + س)}}{\text{س ص}} =$$

$\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{س}}$ وهو المطلوب .

ولقد حذا كل من الكرخي وعمر الخيام وليوناردو دي بيزا حذو أبي كامل شجاع المصري في علم الجبر . لأن كتبه رحمه الله كاملة واضحة المعالم مثل كتاب «كمال الجبر وتمامه والزيادة في أصوله» وكتاب «الوصايا بالجبر والمقابلة» وكتاب «طرائف الحساب» ، وكتاب «المخمس والمعشر» وكتاب «الجبر والمقابلة» .

تتلمذ معظم علماء الغرب قبل عصر النهضة الأوروبية للدراسة ونهل العلم من كتب علماء العرب والمسلمين . ومن هؤلاء العالم المشهور فابوناسي[1] الذي نال سمعة مرموقة في حقلي الجبر والحساب . يقول هورد إيفز في كتابه «مقدمة في تاريخ الرياضيات» : «استند فابوناسي في مؤلفاته في علمي الحساب والجبر على مؤلفات الخوارزمي وأبي كامل» . وأضاف

(١) ليوناردو فابوناسي (Leonardo Fibonacci) الذي عاش فيما بين (١١٧٥-١٢٥٠م) والذي كان من أكبر العلماء الذين ساعدوا الغرب في عصر النهضة الأوروبية ، وذلك بترجمة معظم إنتاج علماء المسلمين في العلوم التجريبية .

فلورين كاجوري في كتابه «تاريخ الرياضيات» قائلاً : «كانت مؤلفات أبي كامل خلال القرن الثالث عشر للميلاد من المراجع الفريدة لعلماء الرياضيات في جميع أنحاء المعمورة» . وأما ابن القفطي فقد امتدح أبا كامل في كتابه «أخبار العلماء بأخبار الحكماء» قائلاً : «كان أبو كامل فاضل وقته ، وعالم زمانه ، وحاسب أوانه ، وله تلاميذ تخرجوا بعلمه» . ويذكر الزركلي في موسوعته (الأعلام) : أن مؤلفات أبي كامل عبارة عن تكملة لما قام به عالم الإسلام محمد بن موسى الخوارزمي . كان أثر أبي كامل على من أتى بعده واضحاً وجلياً ، حتى إن كثيرين منهم مثل الكرخي وعمر الخيام وليوناردو البيزي اعتمدوا على إنتاج أبي كامل في الجبر . لذا يجب أن يعد أبو كامل من عباقرة القرون الوسطى في الجبر .

نبغ أبو كامل شجاع بن أسلم المصري في علم الرياضيات ، فكتب كتابه الذي أسماه «كمال الجبر وتمامه والزيادة في أصوله» لأن أبا كامل يرى أن مؤلفه هذا يعتبر تكملة لما وصل إليه محمد بن موسى الخوارزمي في كتابه «الجبر والمقابلة» . وتجدر الإشارة إلى أن أبا كامل اعترف بتقدم الخوارزمي عليه في علم الجبر . ويظهر مما ذكر في مقدمة كتابه «الجبر والمقابلة» : «أن كتاب محمد بن موسى الخوارزمي المعروف بكتاب «الجبر والمقابلة» أصحها أصلاً ، وأصدقها قياساً ، وكان يجب علينا الإقرار له بالمعرفة وبالفضل ، إذ كان السابق إلى كتاب «الجبر والمقابلة» والمبتدئ له والمخترع لما فيه من الأصول التي فتح الله لنا بها ما كان مغلقاً ، وقرب ما كان متباعداً وسهل بها ما كان معسراً . ورأيت فيها مسائل ترك شرحها وإيضاحها ، ففرعت منها مسائل كثيرة يخرج أكثرها إلى غير الضروب الستة التي ذكرها الخوارزمي في كتابه ، فدعاني إلى كشف ذلك وتبيينه ، فألفت كتاباً في الجبر والمقابلة .

ورسمت فيه بعض ما ذكره محمد بن موسى الخوارزمي في كتابه ، وبينت شرحه ، وأوضحت ما ترك الخوارزمي إيضاحه وشرحه» .

ولا شك في أن أبا كامل قد استند في تأليفه على كتاب «الجبر والمقابلة» لمحمد بن موسى الخوارزمي ، ولكنه أكمل ما نقص ، وشرح الغامض فيه ، وأضاف إلى علم الجبر إضافات كثيرة تجعله من رواد هذا الحقل . فقد حل الكثير من المعادلات الجبرية بطريقتين تحليلية وهندسية متبعاً طريقة أستاذه محمد بن موسى الخوارزمي . كما حل أبو كامل الكثير من المسائل الرياضية بطرق مبتكرة لم يسبقه إليها أحد .

اهتم أبو كامل بدراسة الأشكال الهندسية ، وذلك بمحاولته الناجحة لإيجاد مساحاتها وحجومها . يقول ديفيد يوجين سمث في كتابه «تاريخ الرياضيات» : «إن أبا كامل شجاع بن أسلم المصري الذي عاش فيما بين (٨٥٠-٩٣٠م) اشتهر في رسائله وبحوثه التي تتعلق بالمضلعين الخماسي والعشري» . أما مارتن ليفي فيذكر في «الموسوعة العلمية لمشاهير العلماء» : رسائل أبي كامل في المضلعين الخماسي والعشاري احتوت على حلول للمعادلة من الدرجة الرابعة . لذا يجب أن يعتبر أبو كامل من أول من شرح المعادلة التي درجتها أعلى من الثانية بوضوح تام ، كما كان عنده خلفية جيدة لجمع القوى الجبرية . لذا جاز القول بأن أبا كامل مال إلى الناحية النظرية في علم الجبر والمقابلة أكثر من أستاذه الخوارزمي . وفيما يلي بعض المعادلات الجبرية التي وردت في كتاب «الجبر والمقابلة» لأبي كامل :

* $\frac{\sqrt{١٠\ س}}{٢ + \sqrt{٣}} = س - ١٠$

* $س + \sqrt{س} + \sqrt{٢س} + \sqrt{٥س^{٣}} = ١٠$.

* $\frac{١٠}{س} + \frac{١٠}{س - ١٠} = ٦\frac{١}{٤}$.

* $س + ص + ع = ١٠$ ، $س < ص < ع$.

* $س^{٢} + ص^{٢} = ع^{٢}$.

* $س ع = ص^{٢}$.

كما حل أبو كامل المصري المعادلات الجبرية ذات الدرجة الرابعة والخامسة والسادسة والسابعة ، ويظهر ذلك في كتابه «الجبر والمقابلة» . وتفنن في حل المسائل ذات المجاهيل الكثيرة التي حصرها في كتابه «طرائف الحساب» . لذا يعتبر أبو كامل أول عالم مسلم يستعمل المعادلات الجبرية التي درجتها أعلى من الدرجة الثالثة ، وكذلك المعادلات الأسية المعقدة . ويذكر مارتن ليفي في «الموسوعة العلمية لمشاهير العلماء» أن أبا كامل شجاع المصري استفاد من إنتاج كل من إقليدس وهيرون في علم الهندسة ، لذا نجد أن علم الهندسة كان أكبر معين له في استعراضه بعض الأفكار الجبرية التي وردت في مصنفاته .

ولقد عالج أبو كامل كثيراً من المسائل المستعصية في حقل الرياضيات وأعطى عناية خاصة لعلم الفرائض التي كانت من المواضيع المهمة في ذلك الوقت ، ويذكر لنا حاجي خليفة في كتابه «كشف الظنون» : أن أبا كامل ركز على المسائل التي تتعلق بعلم الفرائض .

قضى أبو كامل حياته في خدمة العلم مثله مثل غيره من علماء العرب والمسلمين . فمن الموضوعات التي أولاها اهتمامه موضوع في النقد البناء ،

فكتب كتاباً في ذلك سماه كتاب «الوصايا بالجبر والمقابلة» . ذكر حاجي خليفة في كتابه آنف الذكر مقدمة هذا الكتاب كما يلي : «ألفت كتاباً معروفاً بكمال الجبر وتمامه والزيادة في أصوله ، وأقمت الحجة في كتابي الثاني بالتقدمة والسبق في الجبر والمقابلة لمحمد بن موسى الخوارزمي والرد على المحترق المعروف بأبي بردة مما ينسب إلى عبد الحميد الذي ذكر أنه جده ، ولما بينت تقصيره وقلة معرفته فيما نسب إلى جده رأيت أن أؤلف كتاباً في الوصايا بالجبر والمقابلة» .

لقد عثرنا في صيف (١٤٠٠هـ ، الموافق ١٩٨٠م) في مكتبة ليدن بهولندا على مخطوط كتاب «طرائف الحساب»[(١)] والذي سنرفق صفحتين منه لكي يتسنى للقارئ أن يرى أن المخطوطة مكتوبة بخط جيد مقروء ، وقد ورد في هذا الكتاب مجموعة من المسائل الجبرية التي تحتوي على ثلاثة ، أو أربعة أو خمسة مجاهيل ، وحل أبو كامل هذه الأمثلة بإيجاد قيمة أحد المجاهيل بدلالة المجاهيل الأخرى ، والإجابة بالأعداد الصحيحة ، حيث إنه يستعمل في مسائل الكتاب الحيوانات والسيوف والرجال والنساء والأطفال (أي في الحاجات التي تستلزم أن يكون الجواب بالعدد الصحيح) . كما أنه أوضح إجابته بحيث إذا كانت الأجوبة كثيرة يذكرها وفي بعض الحالات تصل القيم الصحيحة للمجاهيل عدداً كبيراً جداً .

قبل أن نقدم بعض الأمثلة لنتعرف على طريقة حل أبي كامل ، يجدر بنا أن نذكر أن أبا كامل استعمل الكلمات بدلاً من الأرقام العربية في مسائله الجبرية .

---

(١) وتوجد في (Leiden, Ms. Arabic 1003, ff. 50r - 58r) ، كذلك يوجد ترجمة لكتاب طرائف الحساب لأبي كامل المصري في ميونخ في ألمانيا (Munich Cod. Ms. Heb. 225) وفي باريس في فرنسا (BN. MS. Lat. 7377 A) .

مثال (١) :

دفع إليك مائة درهم فقيل لك : ابتع بها مائة طير ، بطاً ودجاجاً وعصافير ، فإذا كانت البطة بخمسة دراهم ، والعصافير كل عشرين بدرهم ، والدجاج كل واحد بدرهم ، فكم طيراً تشتري من كل نوع؟

الحل :

افرض أن س = البط ، ص = العصافير ، ز = الدجاج .

إذن اشتري من البط عدداً قيمته ٥ س درهم ،

واشتري من العصافير عدداً قيمته $\frac{\text{ص}}{٢٠}$ درهم ،

واشتري من الدجاج عدداً قيمته (ز) درهم .

إذن يمكن التعبير عن صيغة السؤال بمعادلتين خطيتين هما :

س + ص + ز = ١٠٠ ⟸ ز = ١٠٠ − س − ص (١)

٥س + $\frac{\text{ص}}{٢٠}$ + ز = ١٠٠ ⟸ ز = ١٠٠ − ٥س − $\frac{\text{ص}}{٢٠}$ (٢)

من (١) ، (٢) ١٠٠ − س − ص = ١٠٠ − ٥س − $\frac{\text{ص}}{٢٠}$

إذن ٥س + $\frac{\text{ص}}{٢٠}$ = س + ص

٥س − س = ص − $\frac{\text{ص}}{٢٠}$ ⟸

٤ س = $\frac{\text{٢٠ص − ص}}{٢٠}$ = $\frac{١٩}{٢٠}$ ص ⟸ ٨٠ س = ١٩ص إذن ص = $\frac{٨٠}{١٩}$ س

أو ١٩ص = ٧٦ س + ٤ س ⟸ ص = ٤ س + $\frac{٤}{١٩}$ س

نظر أبو كامل إلى مقام س فاستنتج أن قيمة س = ١٩ ، حيث إنه يلزم أن تكون كل من س ، ص ، ز أعداداً صحيحة .

لهذا نجد أن ص = ٨٠ ، ز = ١

الجواب لهذه المسائل يجب أن نشتري من البط = ١٩ ، ومن العصافير = ٨٠ ، ومن الدجاج = ١ .

مثال (٢) :

دفع إليك مائة درهم فقيل لك : ابتع مائة طائر من أربعة أصناف بط وحمام وقنابر ودجاج ، كل بطة بدرهمين والحمام اثنان بدرهم والقنابر ثلاثة بدرهم والدجاج كل واحد بدرهم .

الحل :

افرض أن البط = س ، الحمام = ص ، القنابر = ز ، الدجاج = م .

اشتري من البط عدداً قيمته ٢س درهم ،

اشتري من الحمام عدداً قيمته $\frac{\text{ص}}{٢}$ درهم ،

واشتري من القنابر عدداً قيمته $\frac{\text{ز}}{٣}$ درهم ،

واشتري من الدجاج عدداً قيمته م درهم .

إذن من الممكن جداً التعبير عن السؤال بمعادلتين خطيتين وهما :

$$\text{س} + \text{ص} + \text{ز} + \text{م} = ١٠٠ \Longleftarrow \text{م} = ١٠٠ - \text{س} - \text{ص} - \text{ز} \qquad (١)$$

$$٢\text{س} + \frac{\text{ص}}{٢} + \frac{\text{ز}}{٣} + \text{م} = ١٠٠ \Longleftarrow \text{م} = ١٠٠ - ٢\text{س} - \frac{\text{ص}}{٢} - \frac{\text{ز}}{٣} \qquad (٢)$$

لذا نجد أن $١٠٠ - \text{س} - \text{ص} - \text{ز} = ١٠٠ - ٢\text{س} - \frac{\text{ص}}{٢} - \frac{\text{ز}}{٣}$

$$\text{إذن } ٢\,\text{س} - \text{س} = \left(\text{ص} - \frac{\text{ص}}{٢}\right) + \left(\text{ز} - \frac{\text{ز}}{٣}\right) \Longleftarrow$$

$$\text{س} = \frac{\text{ص}}{٢} + \frac{٢\,\text{ز}}{٣}$$

والجدير بالذكر أن أبا كامل يذكر أن عدد الأجوبة لهذه المسألة ٣٠٤ جواباً .

مثال (٣) :

دفع إليك مائة درهم فقيل لك : ابتع بها مائة طائر من حمام وبط ، ودجاج فإذا كانت البطة بدرهمين والحمام كل ثلاثة بدرهم ، والدجاج كل اثنين بدرهم فكم تشتري من كل نوع .

الحل :

افرض أن عدد الحمام = س ، عدد الدجاج = ص ، عدد البط = ع

اشتري من الحمام عدداً قيمته $\frac{\text{س}}{٣}$ درهم ،

اشتري من الدجاج عدداً قيمته $\frac{\text{ص}}{٢}$ درهم .

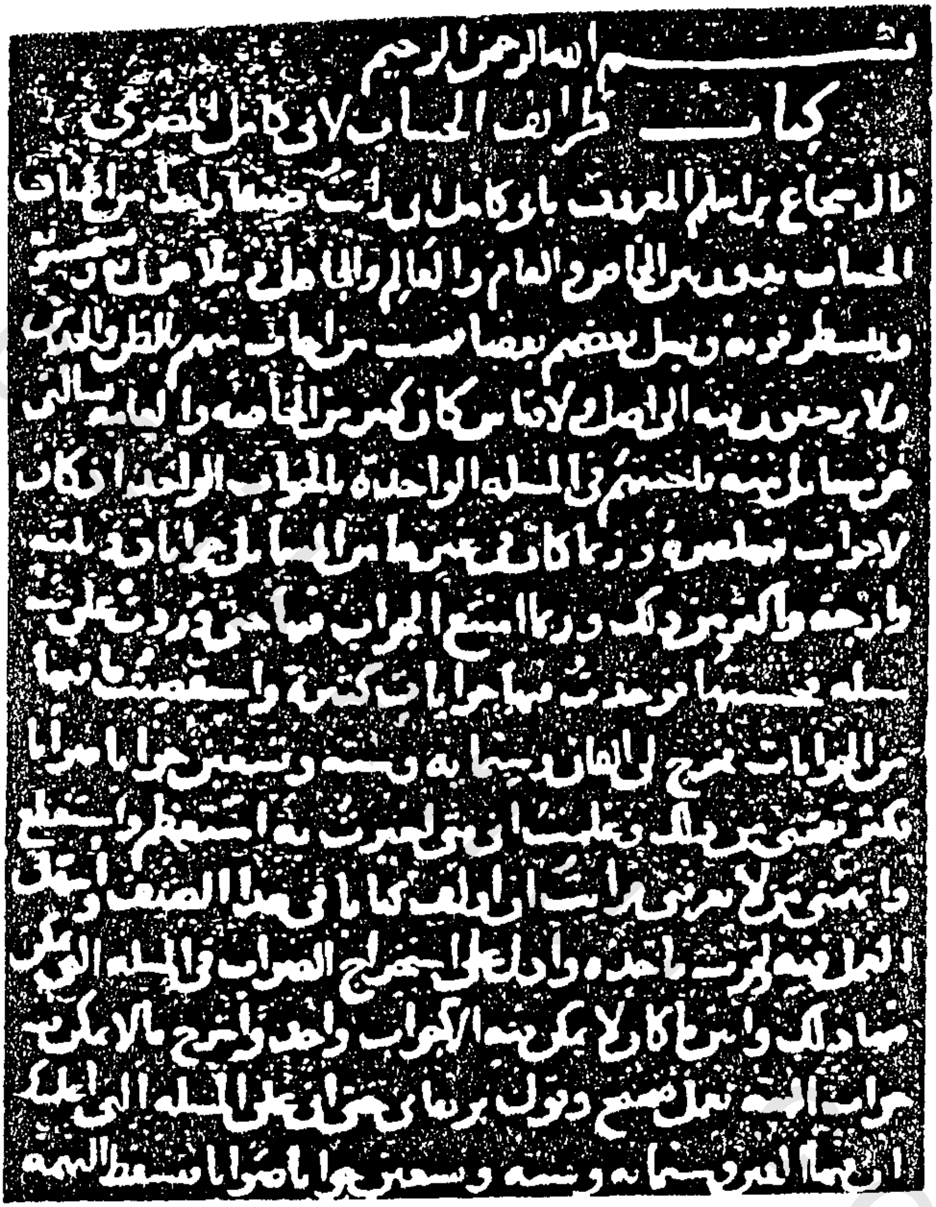
واشتري من البط بالباقي $١٠٠ - \frac{\text{س}}{٣} - \frac{\text{ص}}{٢}$

$$\text{ع} + \text{س} + \text{ص} = ١٠٠ \Longleftarrow \text{ع} = ١٠٠ - \text{س} - \text{ص}$$

وحيث إن قيمة البطة الواحدة ٢ درهم $\Longleftarrow$ قيمة البط = $٢(١٠٠ - \text{س} - \text{ص})$

$$\text{إذن } ٢\text{ع} = ٢\,(١٠٠ - \text{س} - \text{ص}) \qquad (١)$$

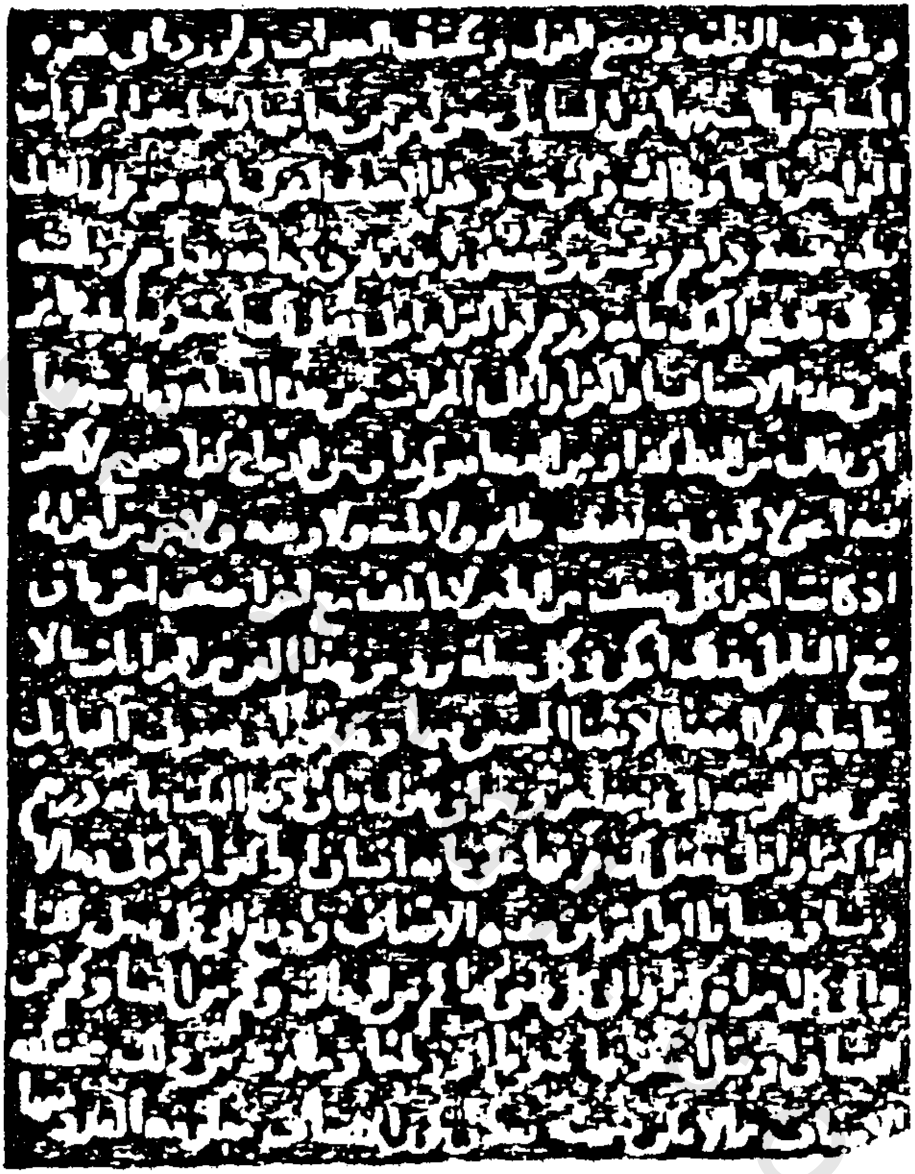
$$٢\text{ع} + \frac{\text{س}}{٣} + \frac{\text{ص}}{٢} = ١٠٠ \Longleftarrow ٢\text{ع} = ١٠٠ - \frac{\text{س}}{٣} - \frac{\text{ص}}{٢} \qquad (٢)$$


بسم الله الرحمن الرحيم

كتاب طرائف الحساب لابي كامل المصري

نموذج رقم (١)

من مخطوطة كتاب طرائف الحساب لأبي كامل بن شجاع المصري . هذه المخطوطة توجد في مكتبة ليدن بألمانيا



نموذج رقم (٢)

من مخطوطة كتاب طرائف الحساب لأبي كامل بن شجاع المصري .

من (١) ، (٢) إذن ١٠٠ - $\frac{\text{س}}{\text{٣}}$ - $\frac{\text{ص}}{\text{٢}}$ = ٢ (١٠٠ - س - ص)

لذا نجد أن ١٠٠ - $\frac{\text{س}}{\text{٣}}$ - $\frac{\text{ص}}{\text{٢}}$ = ٢٠٠ - ٢ س - ٢ ص ⟸

٦٠٠ - ٢س - ٣ص = ١٢٠٠ - ١٢س - ١٢ص ⟸

س = ٦٠ - $\frac{\text{٩}}{\text{١٠}}$ ص

عندما نظر أبو كامل إلى مقام معامل ص وجد أنه ١٠ لذا يلزم أن تكون قيمة ص = ١٠ أو من مضاعفاتها كي تكون قيم ص ، س ، ع أعداداً صحيحة .

ص = ١٠ ، س = ٥١ ⟸ ع = ٣٩

لذا فإن عدد الحمام = ٥١ ، عدد الدجاج = ١٠ ، عدد البط = ٣٩ .

فلو أردنا أن نستعمل قيمة ص = ١٠ نجد الإجابة كالآتي :

ص = عدد الدجاج	س = عدد الحمام	ع = عدد البط
١٠	٥١	٣٩
٢٠	٤٢	٣٨
٣٠	٣٣	٣٧
٤٠	٢٤	٣٦
٥٠	١٥	٣٥
٦٠	٦	٣٤

وقف أبو كامل عند قيمة ص = ٦٠ حيث إنه يعرف تماماً أن ص لا تساوي ٧٠ . لو فرضنا أن ص = ٧٠ يقود إلى س = ٠ وهذا يتعارض مع معطيات المسألة .

مثال (٤) :

دفع إليك مائة درهم فقيل لك : ابتع بها مائة طير من خمسة أصناف بط وحمام وفواخت وقنابر ودجاج ، كل بطة بدرهمين ، والحمام كل اثنين بدرهم ، والفواخت كل ثلاثة بدرهم ، والقنابر كل أربعة بدرهم ، والدجاج كل واحدة بدرهم .

الحل :

افرض أن عدد البط = س ، وعدد الحمام = ص ، عدد الفواخت = ز ، وعدد القنابر = ع ، وعدد الدجاج = م .

اشتري من البط عدداً قيمته ٢س درهم ،

اشتري من الحمام عدداً قيمته $\frac{\text{ص}}{٢}$ درهم ،

اشتري من الفواخت عدداً قيمته $\frac{\text{ز}}{٣}$ درهم ،

اشتري من القنابر عدداً قيمته $\frac{\text{ع}}{٤}$ درهم ،

اشتري من الدجاج عدداً قيمته م درهم .

يمكن التعبير عن صيغة السؤال بمعادلتين خطيتين وهما :

س + ص + ز + ع + م = ١٠٠ ⟸ م = ١٠٠ − س − ص − ز − ع (١)

٢ س + $\frac{\text{ص}}{٢}$ + $\frac{\text{ز}}{٣}$ + $\frac{\text{ع}}{٤}$ + م = ١٠٠ ⟸ م = ١٠٠ − ٢ س − $\frac{\text{ص}}{٢}$ − $\frac{\text{ز}}{٣}$ − $\frac{\text{ع}}{٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

١٠٠ − س − ص − ز − ع = ١٠٠ − ٢ س − $\frac{\text{ص}}{٢}$ − $\frac{\text{ز}}{٣}$ − $\frac{\text{ع}}{٤}$

$$2\,\text{س} - \text{س} = \left(\text{ص} - \frac{\text{ص}}{2}\right) + \left(\text{ز} - \frac{\text{ز}}{3}\right) + \left(\text{ع} - \frac{\text{ع}}{4}\right)$$

$$\text{س} = \frac{\text{ص}}{2} + \frac{2}{3}\,\text{ز} + \frac{3}{4}\,\text{ع}$$

ويذكر أبو كامل أن الأجوبة الممكنة لهذه المسألة التي تحتوي على خمسة مجاهيل = ٢٦٩٦ جواباً .

مؤلفاته :

عكف أبو كامل على التأليف وقد وردت أسماء مؤلفاته في كثير من كتب مؤرخي العلوم نذكر منها ما يلي :

١ - كتاب الوصايا .

٢ - كتاب الشامل - وهذا أحسن مؤلفات أبي كامل .

٣ - كتاب كمال الجبر وتمامه والزيادة في أصوله .

٤ - كتاب الجبر والمقابلة .

٥ - كتاب الوصايا بالجذور ، مخطوطة موجودة في الموصل (MS. Mosul 294) .

٦ - كتاب طرائف الحساب .

٧ - كتاب الجمع والتفريق .

٨ - كتاب الخطأين .

٩ - كتاب الكفاية .

١٠- كتاب المساحة والهندسة والطير .

١١- كتاب مفتاح الفلاح .

١٢- رسالة في المخمس والمعشر ، مخطوطة توجد في باريس (BN. MS. Lat. 7377 A) .

١٣ - كتاب التفاؤل .

١٤- كتاب العاصير .

وفي الختام يجب أن لا ننسى أن أبا كامل شجاع بن أسلم المصري يعد من علماء الجبر البارزين خلال العصور الوسطى . وقد استقى من معلوماته في الجبر كثير من علماء الشرق والغرب على السواء . كان يحب أن يقول الحق ويعترف لمن له السبق في حقله ، حتى إنه في كثير من مؤلفاته أبرز فضل الأستاذ الكبير محمد بن موسى الخوارزمي في علم الجبر والمقابلة . ومما لا يحتمل الشك أبداً أن أبا كامل هو أول من أرسى قواعد حل المعادلات الجبرية التي درجتها أعلى من الدرجة الثانية ، كما أنه فاق سلفه من العلماء العرب والمسلمين في اهتمامه بالرياضيات البحتة التي لم تنل قسطها الكافي عندهم مثل ما نالته الرياضيات التطبيقية .

عندما حل محمد بن موسى الخوارزمي المعادلة الجبرية ذات الدرجة الثانية اهتم بالجذر الحقيقي الموجب وتجاهل الجذر السالب ، لكن أبا كامل أوجد جذري المعادلة الجبرية ذات الدرجة الثانية . كما أنه حل الكثير من التمارين التي تحتوي على أكثر من مجهولين وإلى خمسة مجاهيل . وأولى أبو كامل عناية خاصة بالأشكال الهندسية وذلك بإيجاد مساحاتها وحجومها . كما أنه لم يهمل دراسة مسائل علم الفرائض التي كانت من الموضوعات الهامة آنذاك .

كان أبو كامل من علماء العرب والمسلمين الذين اعتنوا بالنقد البناء فكتب كتاباً خاصاً بهذا أسماه كتاب «الوصايا» حاول فيه أن يشرح المسائل الرياضية التي استعصت على علماء وقته . ومن المؤسف حقاً أن يكون أبو كامل ممن أهملوا تماماً بين علماء العرب والمسلمين ، عندما ترجع إلى كتب تاريخ العلوم لا تجد عن أبي كامل سوى سطور قليلة في كتب تعد على

أصابع اليد الواحدة . ولذا بذلنا قصارى جهدنا لتقديم نبذة تاريخية عن حياته العلمية . أرجو أن يكون أبو كامل مثالاً يحتذي به شباب أمتنا في إخلاصه العلمي وتفانيه في تقديم المعلومات الجديدة عن الجبر والمقابلة مع احترامه وامتنانه واعترافه بجهود من سبقه من علماء كبار أمثال محمد بن موسى الخوارزمي .

أبو بكر الكرخـي :

هو أبو بكر محمد بن الحاسب الكرخي ، ويدعى في بعض الأحيان خطأ بالكرجي ، ولكن هناك الآن إجماعاً على أن لقبه (الكرخي) ، ولد في كرخ ، ضاحية من ضواحي مدينة بغداد ، ولا يعرف تاريخ ولادته ، قضى معظم حياته في بغداد ، وأعطى إنتاجه العلمي في تلك المدينة الزاهرة في أواخر القرن الرابع الهجري وبداية الخامس (وأواخر القرن العاشر وبداية القرن الحادي عشر الميلادي) ، وتوفي هناك عام (٤٢١هـ = ١٠٢٠م) ويقول عز الدين فراج في كتابه «فضل علماء المسلمين على الحضارة الأوروبية» : «الكرخي من أشهر علماء بغداد في علوم الرياضيات ، وسمي بالكرخي نسبة إلى كرخ في بغداد . وقد ألف كتاباً في الحساب لم يستعمل فيه الأرقام ، بل الأعداد تكتب كاملة بالحروف» . ويذكر صلاح الدين عثمان هاشم في رسالة الماجستير التي قدمها للجامعة الأردنية ، والتي بعنوان «الفخري في الجبر والمقابلة» للكرخي ابتدأت مسألة الخلاف على اسم الكرخي . في عام ١٩٣٣م عارض المؤرخ ليفي ديلافيدا هذا الاسم ، ودعاه بالكرجي نسبة إلى كرج بلدة إيرانية ، فقد وجد ليفي ديلافيدا اسم الكرجي مذكوراً في كل من مخطوطات كتاب «البديع في الحساب» وكتاب «الكافي في الحساب» ، وكتاب «أعلام حساب الجبر والمقابلة» . ويستعرض كذلك عادل أنبوبا في

مقدمة تحقيقه لكتاب «البديع في الحساب» ، وتحت عنوان أصل الكرجي جميع ما ذكر عن الاسم في مختلف مخطوطات كتب الكرخي وكذلك في مخطوطات كتب الرياضيات العربية التي تذكر اسم الكرخي كالباهر في الجبر للسموأل . وهو في استعراضه هذا يقف مدافعاً عن اسم الكرخي من زوايا مختلفة تبدو مقنعة حيناً وغير مقنعة حيناً آخر .

وحقيقة الموقف أن جميع ما تقدم من دراسات حول اسم الكرخي كان يستند بشكل أساسي على زيادة تكرار ظهور أحد اللقبين على الآخر في المخطوطات المتوفرة لكتبه . وبما أن الاكتشاف لمخطوطات جديدة تتم بين الحين والآخر ، فإن نسبة التكرار بين الاسمين في عملية تغير مستمرة . فالدراسة التي نشرها رشدي راشد عن الكرخي في «موسوعة علماء العلوم» مثلاً تذكر أن ثلاث مخطوطات لكتاب «الفخري» تذكر اسم الكرخي بينما واحدة فقط تذكر اسم الكرجي ، وبعد أن نشر فؤاد سزكين المخطوطات العربية الخاصة بكتاب «الفخري في الجبر والمقابلة» للكرخي ، وهي مخطوطة باريس رقم ٢٤٥٩ باسم الكرخي ، ومخطوطة أسعد أفندي باستانبول رقم (٣١٥٧) باسم الكرخي ، ومخطوطة دار الكتب بالقاهرة رياضيات رقم ٢٣ باسم الكرخي ، ومخطوطة كوبرولو باستانبول رقم ٩٥٠ باسم الكرخي ، ومخطوطة لالي باستانبول رقم ٢/٢٧١٤ باسم الكرخي ، ومخطوطة الأوقاف ببغداد رقم ٥٤٤٠ باسم الكرخي ، ويضاف إلى ذلك أن المخطوطة المتوافرة سابقاً من كتاب «الباهر في الجبر» للسموأل وهي مخطوطة أيا صوفيا رقم ٢١١٨ كانت تذكر اسم الكرجي ، بينما المخطوطة التي اكتشفها صلاح أحمد ورشدي راشد لنفس الكتاب «الباهر في الجبر» للسموأل في مكتبة أسعد أفندي في استانبول تحت رقم ٣١٥٧ تذكر اسم الكرخي . ومن يعرف اللغة

العربية وخواص الخط العربي وتنقيط الحروف وشكلها وزخرفتها يدرك أنه تصحيف وقع للكلمة ، وأن من السهل أثناء النسخ أن تظهر نقطة الخاء تحتها فتصبح جيماً . لذا فإنه يبدو جلياً أن اللقب الصحيح للرجل هو (الكرخي) وليس الكرجي .

وقد قضى جزءاً كبيراً من حياته في المناطق الجبلية حيث اشتغل بأعمال الهندسة وهذا يظهر في كتابه المسمى «حول حفر الآبار» ويذكر الدكتور أوستن أور المشهور في نظريات الأعداد في كتابه «تاريخ الأعداد» : «أن الكرخي الذي عاش وتوفي في بغداد يعتبر الخليفة الوحيد لديوفانتوس في علم الحساب» . وأضاف ديفيد يوجين سمث في كتابه «تاريخ الرياضيات» المجلد الثاني : «أن الكرخي من أعظم الرياضيين الذين كان لهم أثر وإسهام حقيقي في تقدم العلوم كلها» . وأضاف عمر رضا كحالة في كتابه «العلوم البحتة في العصور الإسلامية» : «أن الكرخي من أعظم نوابغ الرياضيين الذين ظهروا في بداية القرن الخامس للهجرة ، والذين كان لهم أثر حقيقي في تقدم العلوم الرياضية» .

اهتم الكرخي اهتماماً كبيراً بعلمي الحساب والجبر ، فكان إنتاجه عظيماً في هذين الحقلين ، وبقيت أوروبا تستخدم إنتاجه العلمي مدة طويلة من الزمن . يقول جورج سارتون في كتابه «تاريخ العلوم والإنسانية» : «إن أوروبا مدينة للكرخي الذي قدم للرياضيات أهم وأكمل نظرية في علم الجبر عرفتها ، وكما بقيت حتى القرن التاسع عشر الميلادي تستعمل مؤلفاته في علمي الحساب والجبر» . ولقد ترجم هو سهيلم «الكافي في الحساب» للكرخي من اللغة العربية إلى اللغة الألمانية عام ١٨٧٨م فكان لهذا الكتاب أثره على العلماء آنذاك ، وبقي مرجعاً مهماً في جميع أنحاء العالم إلى عهد قريب .

ويقول الكرخي في «مقدمة الكافي في الحساب» : «إني وجدت علم الحساب موضوعاً لإخراج المجهولات من المعلومات في جميع أنواعه ، وألفيت أوضح الأبواب إليه ، وأول الأسباب عليه صناعة الجبر والمقابلة ، لقوتها واطرادها في جمع المسائل الحسابية على اختلافها ، ورأيت الكتب المصنفة فيها غير ضامنة لما يحتاج إليه من معرفة أصولها ، ولا وافية بما يستعان به على علم فروعها ، وأن مصنفيها أهملوا شرح مقدماتها ، التي هي السبيل إلى الغاية ، والموصلة إلى النهاية . ثم لم أجد في كتبهم لها ذكراً ولا بياناً ، فلما ظفرت بهذه الفضيلة واحتجت إلى جبر تلك النقيصة ، لم أجد بداً من تأليف كتاب يحيط بها ويشتمل عليها ، ألخص فيه شرح أصولها ، معفى من كدر الحشو ودرن اللغو» .

وقد اعتمدنا على كتاب موجز تاريخ الرياضيات لكل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في تلخيص بعض أعمال الكرخي في الجبر والتي وردت في كتاب «الكافي» :

١ - قواعد ضرب الإشارات وضرب المجاهيل مثل مال في مال أو مال في شيء ، وضرب الجذور ، فهو يقول مثلاً في باب الضرب : «إذا قيل : اضرب جذر كذا في جذر كذا ضربت أحد العددين في الآخر وأخذت جذر المبلغ . فإن قيل : اضرب جذر كذا في كذا ربعت المقدار الثاني ، ثم ضربت ما ارتفع منه في الأول وأخذت جذر المبلغ . وكل عدد مجذور (أي مربع كامل) إذا ضرب في عدد غير مجذور فالمرتفع منه غير مجذور . وكل عدد غير مجذور إذا ضرب في عدد غير مجذور فالمرتفع منه عدد غير مجذور . اللهم إلا أن يكونا متشابهين ، فإنهما متى كانا

متشابهين فإن المرتفع من ضرب أحدهما في الآخر يكون مجذوراً . ومن شروط المتشابهين أن يكون نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة مجذور إلى مجذور . ومتى قسمت أحدهما على الآخر فإن الخارج من القسمة يكون مجذوراً . ومتى ضربت أحدهما في الآخر يكون المرتفع مجذوراً . وإنما سميا متشابهين لمشابهتهما للأعداد المجذورة : وهما مثل ثمانية وثمانية عشر» .

٢ - جميع المقادير الجبرية مع بعضها وبحالات مختلفة سواء كانت الإشارة للحدود موجبة أو سالبة فيقول الكرخي في باب الجمع : «إذا أردت أن تجمع مقداراً إلى مقدار ضممت كل جنس إلى جنسه (يقصد القوى المتساوية إلى بعضها) فإن لم يكن أحدهما من جنس الآخر تركتهما منفردين وجمعت بينهما بواو العطف . فإن كان في أحد المقدارين استثناء (يقصد سالباً) تركته على حاله إن لم يكن في المقدار الآخر شيء من جنسه ، فإن كان المقدار الآخر من جنسه شيء مقدار أكثر من المستثنى جبرت الاستثناء من جملته بمثله وتركت الباقي زائداً (أي ٥س - ٢س = ٣س) وإن كان المستثنى أكثر منه ألقيته من المستثنى وتركت الباقي مستثنى ، (أي مثل ٥س - ٨س = - ٣س) فإن كان مثل الاستثناء جبرته وألقيت لفظيهما جميعاً (مثل - ٥س + ٥س حيث يختفي س)» .

وقد اتبع الكرخي الطريقة التحليلية لعلم الجبر والمقابلة مقتدياً بسلفيه الخوارزمي وأبي كامل وبعلماء المسلمين الأفاضل حتى أبدع وبرز بهذا الحقل . وقد علق الأستاذ هورد ايفز في كتابه «مقدمة في تاريخ الرياضيات» :

«أن كتاب «الفخري في الحساب» أحسن كتاب في علم الجبر في العصور الوسطى ، مستنداً على كتاب محمد بن موسى الخوارزمي «الجبر والمقابلة» ، لقد امتاز كتاب «الفخري في الحساب» بطابعه الأصيل في علم الجبر لما فيه من الابتكارات الجديدة ، والمسائل التي لا يزال لها دور في الرياضيات الحديثة» . وأضاف موريس كلاين في كتابه «تطور الرياضيات من الغابر إلى العصر الحاضر» قائلاً : «إن الكرخي البغدادي العالم المشهور الذي عاش في أوائل القرن الحادي عشر الميلادي يعتبر مفكراً من الدرجة الأولى ، وهذا يظهر من كتابه «الفخري في الحساب» . فطور هذا الحقل إلى درجة يمكن التعرف على عقليته الجبارة خلالها» . .

وقال الأستاذ هورد ايفز في كتابه «مقدمة في تاريخ الرياضيات» : «إن الكرخي يعد من بين العلماء الرياضيين المبتكرين لما في «الفخري في الحساب» من نظريات جبرية جديدة ، تدل على عمق وأصالة في التفكير» . والجدير بالذكر أن تسمية كتاب «الفخري في الحساب» يرجع إلى اسم صديقه الوزير أبي غالب محمد بن خلف الملقب بفخر الملك ، والذي كان وزيراً للسلطان بهاء الدولة ابن عضد الدولة البويهي . وأكد ديفيد يوجين سمث في كتابه «تاريخ الرياضيات» المجلد الأول : «أن كتاب الفخري في الحساب له الأثر الكبير في علم الجبر ، ويمكن اعتباره مقياساً صحيحاً لما وصل إليه العرب والمسلمون من التقدم في هذا الفرع» .

لقد اكتشف صلاح أحمد ورشدي راشد مخطوطة اسمها «الباهر في الجبر» ، للسموأل المغربي ، في مكتبة أيا صوفيا في استانبول تحت رقم ٢١١٨ ، وتوضح هذه المخطوطة أن مثلث معاملات ذات الحدين يجب أن

ينسب لصاحبه الكرخي وليس كما يسميه الغرب مثلث باسكال[١] . ويذكر صلاح الدين عثمان هاشم في رسالته «الفخري في الجبر والمقابلة» : «أن مؤرخي الرياضيات يعتبرون إلى وقت قريب جداً أن مثلث معاملات ذات الحدين المدعو باسم (مثلث باسكال) من تصميم عمر الخيام ، حيث إنه كان قد ذكر أنه عرف طريقة لاستخراج جذور المقادير الجبرية لغاية الجذر الخامس . وبعد ذلك عثر على كتاب صيني اسمه «المرآة الثمينة للعناصر الأربعة» وهو كتاب في الرياضيات ألفه العالم الصيني تشوشي كي سنة ١٣٠٣م ، وشرح فيه طريقة إيجاد معاملات ذات الحدين باستخدام مثلث الكرخي لمعاملات ذات الحدين . وقد اعترف تشوشي كي أن هذه الطريقة معروفة قبله بسنوات كثيرة . ولما حقق أحمد سعيدان كتاب «جوامع الحساب في التخت والتراب» لنصير الدين الطوسي اتضح أن الطوسي ذكر مثلث الكرخي لمعاملات ذات الحدين في كتابه هذا ، واستعمله بطريقة تدل أن هذا المثلث كان شائع الاستعمال لدى علماء العرب والمسلمين . والجدير بالذكر أن الطوسي كان يدير مرصد أولغ بك ، ويستخدم فيه عدداً كبيراً من الصينيين ، فلا يبعد أن يكون مثلث الكرخي لمعاملات ذات الحدين قد انتقلت معرفته من الطوسي إلى تشوشي كي ، عن طريق هؤلاء العلماء الصينيين .

---

(١) بليز باسكال (Blaise Pascal) عالم فرنسي عاش فيما بين ١٦٢٣-١٦٦٢م ، اشتهر في الهندسة الإسقاطية ، والقطوع المخروطة وأول من اخترع آلة حاسبة كما ساعد الرياضي الفرنسي بيير فرمان (١٦٠١-١٦٦٥م) على تطبيق نظريات الاحتمال . يعتبره علماء الرياضيات أحد عباقرة القرن السابع عشر الميلادي .

صحيفة من مخطوط كتاب «الباهر في الجبر» للسموأل المغربي الموجودة في مكتبة أيا صوفيا تحت رقم ٢١١٨ مصورة بمعهد الوثائق والمخطوطات في الجامعة العربية بالقاهرة، وهي مخطوطة تقع في ١١٦ ورقة، والخط جيد والحروف غير منقوطة.

ويذكر السموأل المغربي في كتابه «الباهر في الجبر» أن الكرخي يشرح مثلثه لمعاملات نظرية ذات الحدين بقوله : «قال الكرخي إذا أردت ذلك وضعت على التخت واحداً تحته ، ثم نقلت الواحد إلى سطر آخر وضخمت الواحد إلى الواحد الذي تحته يكون اثنين وضعته تحته ، ثم وضعت الواحد الآخر تحته فيصير واحداً واثنين وواحداً فهذا يدلك أن كل عدد مؤلف من عددين إذا ضربت كل واحد منهما في نفسه مرة واحدة تكون الطرفين واحداً وواحداً وضربت أحد العددين في الآخر مرتين يكون الوسط (٢) بلغ مربعه ذلك العدد ، ثم نقلنا الواحد من السطر الثاني إلى سطر آخر ، وضممنا الواحد إلى الاثنين يصير ثلاثة ، كتبناه تحت الواحد ، وضممنا الاثنين إلى الواحد الذي تحتها فيصير ثلاثة كتبناها تحت الثلاثة فيخرج من ذلك سطر ثالث تكون آحاده واحداً وثلاثة وثلاثة وواحداً . فهذا يعلمك أن مكعب كل عدد مؤلف من عددين هو أن مكعب كل واحد منهما ويضرب كل واحد منهما في مربع الآخر ثلاث مرات . ونقلنا الواحد الذي في السطر الثالث إلى سطر آخر ، ثم ضممنا الواحد إلى الثلاثة التي تحته تكون أربعة كتبتها تحت الواحد ، ثم ضممت الثلاثة إلى الثلاثة التي تحتها يكون (٦) كتبتها تحت الأربعة ثم ضممت الثلاثة الثانية إلى الواحد يكون أربعة كتبتها تحت الستة ثم نقلت الواحد إلى تحت الأربعة فيتألف من ذلك سطر آخر يكون أعداده واحداً وأربعة و(٦) وأربعة وواحد» . وهكذا يستمر الكرخي إلى القوى (١٢) ويظهر ذلك من الشكل (مثلث الكرخي لمعاملات نظرية ذات الحدين) .

شيء	مال	كعب	مال مال	مال كعب	كعب كعب	مال مال كعب	مال كعب كعب	كعب كعب كعب	مال مال كعب كعب	مال كعب كعب كعب	كعب كعب كعب كعب
١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
	١	٣	٦	١٠	١٥	٢١	٢٨	٣٦	٤٥	٥٥	٦٦
		١	٤	١٠	٢٠	٣٥	٥٦	٨٤	١٢٠	١٦٥	٢٢٠
			١	٥	١٥	٣٥	٧٠	١٢٦	٢١٠	٣٣٠	٤٩٥
				١	٦	٢١	٥٦	١٢٦	٢٥٢	٤٦٢	٧٩٢
					١	٧	٢٨	٨٤	٢١٠	٤٦٢	٩٢٤
						١	٨	٣٦	١٢٠	٣٣٠	٧٩٢
							١	٩	٤٥	١٦٥	٤٩٥
								١	١٠	٥٥	٢٢٠
									١	١١	٦٦
										١	١٢
											١

مثلث الكرخي لمعاملات نظرية ذات الحدين

١	١	١	١	١	١
١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٣	٦	١٠	١٥	٢١
١	٤	١٠	٢٠	٣٥	٥٦
١	٥	١٥	٣٥	٧٠	١٢٦
١	٦	٢١	٥٦	١٢٦	٢٥٢

مثلث معاملات نظرية ذات الحدين

(عرف عند علماء الغرب باسم مثلث باسكال)

ويجدر بنا أن نذكر بعض الأفكار الرياضية التي ابتكرها أو استخدمها الكرخي في مؤلفاته الرياضية دون تخصيص وهي :

* العدد الذي لو أضيف إليه مربعه لكان الناتج مربعاً ، ولو طرح من مربعه لكان الناتج مربعاً .

أي س^{٢} + س = مربع = □

س^{٢} − س = مربع = □١

الحل :

افرض أن لديك معادلتين هما :

ع^{٢} + ص = مربع = □ (١)

ع^{٢} − ص = مربع = □١ (٢)

* ضع ص = ٢ م ع + م^{٢} (٣)

من (٢) و(٣) نجد أن $ع^٢ - ٢\ م ع - م^٢$ = مربع ، وليكن $(ع - ن)^٢$ = مربع (٤)

* خذ م = ١ ، ن = ٢ (٥)

* من (٤) و(٥) نحصل على $ع^٢ - ٢ع - ١ = (ع - ٢)^٢ = ع^٢ - ٤ع + ٤$.

إذن ٢ ع = ٥ $\Leftarrow$ ع = $\frac{٥}{٢}$ (٦)

من (٣) و (٦) نجد أن ص = ٢ (١) $(\frac{٥}{٢})$ + $١^٢$ = ٦ (٧)

* اضرب كل معادلة من (١) و(٢) في $جـ^٢$

$جـ^٢ ع^٢ + جـ^٢ ص$ = مربع = $جـ^٢ \square$ (٨)

$جـ^٢ ع^٢ \pm جـ^٢ ص$ = مربع $جـ^٢ \square ١$ (٩)

* اعتبر أن جـ ع = $جـ^٢$ ص $\Leftarrow$ جـ = $\frac{ع}{ص}$

ولكن $\frac{ع}{ص} = \frac{\frac{٥}{٢}}{٦} = \frac{٥}{١٢}$ من (٦) و (٧) .

إذن جـ = $\frac{٥}{١٢}$ (١٠)

* لو وضعنا س = جـ ع = $جـ^٢$ ع = $جـ^٢$ ص في كل من معادلة (٨) و(٩)

لوجدنا أن $س^٢$ + س = $\square$

$س^٢$ - س = $\square$ ١

من (٦) و (١٠) نلاحظ أن س = $\frac{٥}{١٢}$ $(\frac{٥}{٢})$ = $\frac{٢٥}{٢٤}$

* نعوض قيمة $س = \frac{٢٥}{٢٤}$ في كل من $س^{٢} + س$ = مربع ، $س^{٢} - س$ = مربع نجد أن :

$$\left(\frac{٢٥}{٢٤}\right)^{٢} + \frac{٢٥}{٢٤} = \frac{٢٥}{٢٤}\left(\frac{٢٥}{٢٤} + ١\right) = \frac{٢٥}{٢٤}\left(\frac{٤٩}{٢٤}\right) = \left(\frac{٥ \times ٧}{٢٤}\right)^{٢} = \left(\frac{٣٥}{٢٤}\right)^{٢} .$$

$$\left(\frac{٢٥}{٢٤}\right)^{٢} - \frac{٢٥}{٢٤} = \frac{٢٥}{٢٤}\left(\frac{٢٥}{٢٤} - ١\right) = \frac{٢٥}{٢٤}\left(\frac{٢٥ - ٢٤}{٢٤}\right) = \frac{٢٥}{٢٤}\left(\frac{١}{٢٤}\right) = \left(\frac{٥}{٢٤}\right)^{٢} .$$

كما أعطى المسألة : قسم تسعة إلى مربعين الجواب ($\frac{٦}{٢٥}$ ٣ ، $\frac{١٩}{٢٥}$ ٥) ،

قسم قسم عشرة إلى مربعين غير (١ ، ٩) وحصل على الجواب ($\frac{٦}{٢٥}$ ٣ ، $\frac{١٩}{٢٥}$ ٦) .

* النظريات التي تتعلق بإيجاد مجموع مربعات ومكعبات الأعداد التي عددها ن

$$(١)\quad ١ + ٢ + ٣ + ٤ + \cdots + ن = \frac{ن\,(١ + ن)}{٢}$$

$$(٢)\quad ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \cdots + ن^{٢} = \frac{ن\,(١ + ن)\,(١ + ٢ن)}{٦}$$

$$\text{أي}\quad ١^{٢} + ٢^{٢} + \cdots + ن^{٢} = (١ + ٢ + \cdots + ن)\,\frac{(١ + ٢ن)}{٣}$$

$$(٣)\quad ١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \cdots + ن^{٣} = \frac{ن^{٢}\,(١ + ن)^{٢}}{٤}$$

$$\text{أي}\quad ١^{٣} + ٢^{٣} + \cdots + ن^{٣} = (١ + ٢ + \cdots + ن)^{٢}$$

علماً أن أرخميدس طور قاعدة مجموع الأعداد الطبيعية ولكن الكرخي وضعها في الصيغة الرياضية التي نراها اليوم في مقررات المدارس والجامعات . كما أن الكرخي طور قانون الحد الأخير في المتوالية العددية التي أساسها غير الواحد بل اثنان : ل = أ + (ن - ١) د وهذا القانون لم نعثر عليه في إنتاج علماء الإغريق في الجبر أو الحساب ، لذا يلزم أن ينسب للكرخي . واستخدم بكل دقة وإمعان قانون مجموع المتوالية العددية

جـ = $\frac{\text{ن}}{٢}$ (أ + ل) .

* عددان مجموع مكعبيهما يساوي مربع العدد الثالث ، أي س^{٣} + ص^{٣} = ع^{٢} .

حل الكرخي هذه المسألة مستعملاً الأعداد الجذرية ، ففرض أن ص = م س ، ع = ن س .

لذلك س^{٣} + ص^{٣} = ع^{٢} $\Longleftarrow$ س^{٣} + م^{٣} س^{٣} = ن^{٢} س^{٢} $\Longleftarrow$ س^{٣} (١ + م^{٣}) = ن^{٢} س^{٢} .

بقسمة الطرفين على س^{٢} $\Longleftarrow$ س (١ + م^{٣}) = ن^{٢} .

لهذا تكون س = $\frac{\text{ن}^{٢}}{١ + \text{م}^{٣}}$ حيث إن كل من م ، ن عددان جذريان اختياريان .

اختار عالمنا الكبير حالة خاصة حيث اعتبر أن س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣ .

لذلك يكون الناتج ١ +٢^{٣}= ٣^{٢} . هذا يقود إلى ١ + ٨ = ٩ . من هذا استنتج الكرخي أن أ س$^{\text{ن}}$ + ب ص$^{\text{ن}}$ = م ع$^{\text{ن} - ١}$.

المعادلة التي لا يخلو منها أي كتاب في علم الجبر .

* دراسة منظمة للمقادير الجبرية المرفوعة لأسس مختلفة مستخدماً العمليات الحسابية على هذه المقادير ، وكذلك دراسته للمتتاليات ، وضرب القوى وقسمتها مثل :

$$\text{س} ، \text{س}^{٢} ، \ldots \text{و} \frac{١}{\text{س}} ، \frac{١}{\text{س}^{٢}} ، \frac{١}{\text{س}^{٣}} ، \ldots ، \frac{١}{\text{س}^{٩}} ، \ldots$$

وبالتالي استنتج ما يلي :

$$(١) \quad \frac{١}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{١}{\text{س}^{٢}}$$

$$(٢) \quad \frac{١}{\text{س}^{\text{ن}}} \times \frac{١}{\text{س}^{\text{م}}} = \frac{١}{\text{س}^{\text{ن} + \text{م}}}$$

$$(٣) \quad \frac{١}{\text{س}} \times \text{س}^{٢} = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}}$$

$$(٤) \quad \frac{١}{\text{س}^{\text{ن}}} \times \text{س}^{\text{م}} = \frac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{س}^{\text{ن}}}$$

$$(٥) \quad \frac{١}{\text{س}^{\text{ن}}} \times \text{س}^{\text{م}} = \text{س}^{\text{م} - \text{ن}}$$

حيث إن م ، ن في جميع الحالات السابقة عددان صحيحان .

* تطوير القانون العام المعروف لحل معادلات الدرجة الثانية .

$$\text{س} = \left[\frac{\text{ب}}{٢} + \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢} - \text{أجـ}} \right] \div \text{أ}$$

والمقصود $\text{س} = \left[\sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢} - \text{أجـ}} - \frac{\text{ب}}{٢} \right] \div \text{أ}$

هذه الطريقة توحي بحدة ذكاء الكرخي وسعة أفقه في علم الجبر .

كما حل الكرخي $\text{س}^{٤} + ٥\text{س}^{٢} = ١٢٦$ واستخدم القانون الآتي بكل دقة

$\text{س}^{٢} = \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢} + \text{جـ}} - \frac{\text{ب}}{٢}$ ، حيث إن أ = ١ ، جـ = ١٢٦ ، ب = ٥

$$\therefore \text{س}^{٢} = \sqrt{\frac{٢٥}{٤} + ١٢٦} - \frac{٥}{٢} = \sqrt{\frac{٥٢٩}{٤}} - \frac{٥}{٢} = \frac{٢٣}{٢} - \frac{٥}{٢} = \frac{١٨}{٢} = ٩$$

* استخدم قانون المربعات $\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}\right)^{٢} = \text{أ ب}$.
* تحسينه في القانون المعروف لإيجاد الجذر التقريبي للأعداد التي لا يمكن إيجاد جذورها مثل $\text{م} = \text{ب}^{٢} + \text{جـ}$.

يجب أن يلاحظ أن $\sqrt{\text{م}} = \text{ب} + \frac{\text{جـ}}{٢\text{ب} + ١}$ فمثلاً لإيجاد الجذر التقريبي للعدد ٧ نعمل ما يأتي :

$\sqrt{٧} = \sqrt{٤ + ٣}$ حيث $\text{م} = \text{ب}^{٢} + \text{جـ} \Longleftarrow \text{م} = ٧$ ، ب = ٢ ، جـ = ٣ .

لذلك ينتج أن $\sqrt{٧} = ٢ + \frac{٣}{٤ + ١} = ٢\frac{٣}{٥} = ٢,٦$

أما إذا كانت ب = جـ أو ب أكبر من جـ فيكون $\sqrt{\text{م}} = \text{ب} + \frac{\text{جـ}}{٢\text{ب}}$.

فمثلاً لإيجاد $\sqrt{١٠}$ نعمل الآتي :

$\sqrt{١٠} = \sqrt{٣^{٢} + ١}$ لذلك م = ١٠ ، ب = ٣ ، جـ = ١ ، ملحوظ أن ب أكبر من جـ لذلك ينتج أن $\sqrt{١٠} = ٣ + \frac{١}{٦} = ٣\frac{١}{٦} = ٣,١\overline{٦}$.

والقيمة المتفق عليها اليوم هي ٣,١٦٢ .

* استنبط قانوناً جديداً لإيجاد الجذر التربيعي وذلك $\sqrt{أ} = ب + \frac{أ - ب^{٢}}{أ + ٢ب}$

فعلى سبيل المثال لإيجاد الجذر التربيعي للعدد ١٧ نجد أن الجذر التقريبي ب = ٤ ، ملحوظ أن أ = ١٧ ، $\sqrt{١٧} = ٤ + \frac{١٧ - ١٦}{٩} = ٤,١١١١١٠٠٠$

القيمة في جداول الرياضيات ٤,١٢٣١٠٦ .

* طور طريقة الجمع وطرح الأعداد الصم مثلاً لإيجاد مجموع

$\sqrt{٨} + \sqrt{١٨} = ٢\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢} = \sqrt{٥٠}$ لإيجاد حاصل طرح

$\sqrt[٣]{٥٤} - \sqrt[٣]{٢} = ٣\sqrt[٣]{٢} - \sqrt[٣]{٢} = ٢\sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{١٦}$.

ومن هذا استخدم الكرخي القانون الآتي :

$\sqrt{أ} + \sqrt{ب} = \sqrt{(أ + ب) + ٢\sqrt{أب}}$ المعروف بقانون أبي كامل شجاع المصري لجمع وطرح الأعداد الصم . ولتطبيق هذا القانون أخذ المثال :

$$\sqrt{٣} + \sqrt{١٢} = \sqrt{(٣ + ١٢) + ٢\sqrt{٣ \times ١٢}} = \sqrt{١٥ + ٢\sqrt{٣٦}}$$
$$= \sqrt{١٥ + ١٢} = \sqrt{٢٧} = ٣\sqrt{٣} .$$

* إدخال التعديلات على قانون هيرون القائل : إن مساحة المثلث تساوي المعادلة التالية :

$م = \sqrt{ح (ح - أ) (ح - ب) (ح - جـ)}$ باعتبار أن $ح = \frac{١}{٢}$ محيط المثلث المطلوب إيجاد مساحته (م) ، أما أ ، ب ، جـ فهي أطوال أضلاع المثلث ، و(م) يرمز بها للمساحة . ثم استنتج من ذلك أن مساحة أي شكل رباعي = $\sqrt{(ح - أ) (ح - ب) (ح - جـ) (ح - د)}$ حيث إن $ح = \frac{١}{٢}$ محيط الشكل الرباعي وكل من أ ، ب ، جـ ، د أطوال أضلاع الشكل الرباعي .

عكف الكرخي على التصنيف فألف الكثير ، ولكن مع شديد الأسف ضاع معظم إنتاجه العلمي ولم يعثر إلا على القليل . ولقد اتفق علماء الرياضيات في المشرق والمغرب على أن الكرخي يعد من عباقرة علماء الرياضيات في العالم ، لما في إنتاجه من الأصالة والابتكار .

ومن مؤلفاته :

١ - كتاب حول حفر الآبار .
٢ - كتاب الفخري في الجبر والمقابلة وقد ألفه في الفترة ما بين (٤٠١ - ٤٠٧هـ ، الموافق ١٠١١-١٠١٧م) .
٣ - كتاب الكافي في الحساب .
٤ - كتاب البديع .
٥ - رسالة في بعض النظريات في الحساب والجبر .
٦ - رسالة في النسبة .
٧ - رسالة في استخراج الجذور الصماء وضربها وقسمتها ، كما أعطى فيها طرقاً مبتكرة لحلها وقواعد جديدة في التربيع والتكعيب .

٨ - رسالة في برهان النظريات التي تتعلق بإيجاد مجموع مربعات ومكعبات الأعداد الطبيعية .

٩ - رسالة علق فيها على الحالات الست في الجبر التي وردت في كتاب «الجبر والمقابلة» لمحمد بن موسى الخوارزمي .

١٠- رسالة تشمل على ما يزيد على ٢٥٠ مسألة متنوعة من معادلات الدرجة الأولى والدرجة الثانية ، ومعادلات درجات أعلى .

١١- رسالة في علاقة الرياضيات في الحياة العملية .

١٢- رسالة ذكر فيها الطرق الحسابية لتسهيل بعض العمليات الحسابية كالضرب .

١٣- رسالة حسب فيها مساحات بعض السطوح .

ولم يترك الكرخي العالم المسلم المخلص لعلمه موضوعاً في علمي الحساب والجبر إلا تطرق له وطوره . فكان عالماً محنكاً وموسوعة منظمة ، فكان رحمه الله إذا كتب عن موضوع من مواضيع المعرفة أسهب فيه بأسلوب سلس واضح للقارئ .

لقد حاول أن يعطي علم الجبر استقلاله التام عن علم الهندسة والحساب ، ونجح في ذلك بصياغته القوانين الجبرية التي اعتمد عليها السموأل المغربي الذي يعتبر مؤسس علم الجبر الحديث . وفوق هذا استطاع الكرخي أن يدخل مفهوم الأعداد السالبة ، وطبقها على كثير من المعادلات الجبرية .

وقد كان من علماء المسلمين المبتكرين الذين يكرهون النقل والترجمة ، ويفضل التصنيف والتحليل والتعليق على مؤلفات غيره ، وقد شرح الكثير من النقط الغامضة في كتاب «الجبر والمقابلة» لمحمد بن موسى الخوارزمي ،

وأكدها بأمثلة كثيرة . يقول روس بول في كتابه «ملخص تاريخ الرياضيات» : «إن الكرخي طور قانون مجموع مربعات الأعداد الطبيعية إلى درجة لم يسبقه إليها أحد ، ولا تزال في القرن العشرين تستعمل دون أي تغيير فيها» . وأضاف فلورين كاجوري في كتابه «تاريخ الرياضيات» : «أن الكرخي يجب أن يعتبر مبتكراً لنظرية مجموع الأعداد الطبيعية» . والجدير بالذكر أن كثيراً من العلماء الغربيين المتأخرين نسبوا بعض إنتاج الكرخي لأنفسهم ، ومثال ذلك مجموع عددين مكعبين لا يكون عدداً مكعباً ، إذ يظن الغربيون أن مبتكر هذه النظرية هو العالم الفرنسي بيير فرما الذي عاش فيما بين (١٦٠١-١٦٦٥م) . وهذا خطأ صريح لأن هذه النظرية موجودة في مؤلفات الكرخي . إنه من المؤسف حقاً أن لا يعترف علماء الغرب بما أخذوه من عالمنا المسلم الكرخي ، المعروف بابتكاراته الكثيرة ذات الفائدة الجمة . وقد أخذت قيمة أعمال الكرخي وأبحاثه تظهر بوضوح بعد أن بدأ المحققون يدرسون كتبه التي كانت مهملة في مكتبات العالم . والكثير من مؤلفاته التي يظن أنها ضاعت لا شك أنها في مكتبات يجهل أصحابها قيمتها وهويتها . إنها كامرأة عمورية ، فهل لها من معتصم؟

السموأل المغربي الأندلسي :

هو السموأل بن يحيى بن عباس المعروف بالمغربي ، إذ إنه ينتسب إلى عائلة مغربية ، حيث كان والده من علماء الرياضيات والحكمة المشهورين آنذاك في بلاد المغرب ، (مدينة فاس المغربية) وكان يدعى يهود بن أبون (أو أبا العباس يحيى المغربي) . وقد انتقل الوالد وبمعيته ابنه السموأل من فاس بالمغرب إلى الشطر الشرقي من الدولة الإسلامية ، وحلا ببغداد التي كانت

مركز الحضارة الإسلامية ردحاً من الزمن ، إلا أنهما لم يستقرا هناك فانتقلا إلى فارس ، حيث قضى السموأل بقية عمره في مراغة أذربيجان التي تبوأت مركزاً علمياً يضاهي بغداد . فهو من كبار العلماء العرب والمسلمين ليس فقط في الرياضيات ولكن أيضاً في الطب . فكان حاد الذهن متوقد القريحة .

يقول خير الدين الزركلي في موسوعته «الأعلام» : «إن السموأل بن يحيى بن عباس المغربي : مهندس ورياضي ، عالم بالطب والحكمة ، أصله من المغرب ، سكن بغداد وانتقل إلى فارس . وكان يهودياً ، فأسلم ومات في المراغة بأذربيجان» . ويضيف جمال الدين أبو الحسن علي بن يوسف القفطي في كتابه «تاريخ الحكماء» : «قدم هو وأبوه إلى المشرق ، وكان أبوه يشدو شيئاً من علم الحكمة ، وكان والده هذا قد قرأ فنون الحكمة وأجاد العلوم الرياضية ، وأحكم أصولها وفوائدها ونوادرها ، وكان عددياً هندسياً هيئياً وله في ذلك مصنفات» .

لا يوجد سجل يحدد تاريخ ميلاد السموأل المغربي ، ولكن الذي يعرف تماماً من المراجع في تاريخ العلوم أنه ولد في المغرب وتوفي في مراغة بأذربيجان . سنة (٥٧٠هـ = ١١٧٥م) وهو في ريعان شبابه ويعتبر من كبار علماء الجبر فله مصنفات منها : «الباهر في الجبر» و«الزاهر في الجبر» وشرحه الوافي لكتاب ديوفانتس في أرثماطيقا . قدم دراسة كاملة ومفصلة لقواعد الإشارات وقسمة كثيرة الحدود على أمثالها .

ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى سعيد في كتابهما «موجز الرياضيات» : أن السموأل اهتم بدراسة قسمة كثيرة الحدود على أمثالها ، وأورد السموأل مثالاً على ذلك في كتابه «الباهر في الجبر» : نريد تقسيم ٢٠

كعب كعب و٢ مال كعب و٥٨ مال مال و٧٥ كعباً و١٢٥ مالاً و٩٦ شيئاً و٩٤ أحداً و١٤٠ جزء شيء و٥٠ جزء مال و٩٠ جزء كعب و٢٠ جزء مال مال على كعبين و٥ أشياء و٥ آحاد و١٠ أجزاء شيء .

بالرموز الحديثة تكون المسألة على الشكل الآتي :

$$٢٠س^{٦} + ٢س^{٥} + ٥٨س^{٤} + ٧٥س^{٣} + ١٢٥س^{٢} + ٩٦س + ٩٤ + \frac{١٤٠}{س} + \frac{٥٠}{س^{٢}} + \frac{٩٠}{س^{٣}} + \frac{٢٠}{س^{٤}}$$

$$٢س^{٣} + ٥س + ٥ + \frac{١٠}{س} .$$

ويحل السموأل هـــذه المسألة بطريقــة علميـــة تشبه تماماً طريقتنا التي نستعملها اليــوم ، مع اختــلاف واحــد هــو عدم استخـــدام الرموز . أما الجواب الذي حصل عليه السموأل فهو $١٠س^{٣} + س^{٢} + ٤س + ١٠ + \frac{٨}{س^{٢}} + \frac{٢}{س^{٣}}$. وهذا الجواب صحيح .

ولم يقتصر السموأل المغربي على الأمثلة التي حدودها كلها موجبة بل أخذ بعض المسائل التي بعض حدودها سالبة مثل :

اقســم $٦س^{٨} + ٢٨س^{٧} + ٦س^{٦} - ٨٠س^{٥} + ٣٨س^{٤} + ٩٢س^{٣} - ٢٠٠س^{٢} + ٢٠س$ على $٢س^{٥} + ٨س^{٤} - ٢٠س^{٢}$. حصل السموأل على الجواب :

$$٣س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س + ١٠ - \frac{١}{س} .$$

لذا يتضح لنا أن السموأل أدرك إدراكاً جيداً قواعد الإشارات .

ويذكر كل من صلاح أحمد ورشدي راشد في مقدمة كتاب «الباهر في الجبر»(١) أن السموأل طبق الإشارة (− ، + ، ÷ ، ×) المستخدمة في علم الحساب على علم الجبر ووصل إلى نتائج متقدمة في علم الجبر ومنها على سبيل المثال :

١ − ضرب القوى وقسمتها .

٢ − حساب الإشارات الجبرية .

٣ − قسمة كثير حدود في مجهول واحد على آخر .

٤ − دستور ذي الحدين وحساب أمثاله بما في ذلك اكتشاف يسمى بمثلث باسكال ، مع العلم بأن باسكال جاء متأخراً بعدة قرون عن الكرخي .

ولخص كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «الموجز في تاريخ الرياضيات» بعض نتاج السموأل المغربي نوردها هنا :

١ − برهان متطابقات جبرية وقوانين متواليات .

أ) $\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{أ}}\right)\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}}\right) = \frac{\text{أ}^{٢} + ٢\,\text{أب} + \text{ب}^{٢}}{\text{أب}} = \frac{\text{أ}^{٢} + \text{أب} + \text{أب} + \text{ب}^{٢}}{\text{أب}} =$

$= \frac{\text{أ}(\text{أ}+\text{ب}) + \text{ب}(\text{أ}+\text{ب})}{\text{أب}} = \frac{\text{أ}(\text{أ}+\text{ب})}{\text{أب}} + \frac{\text{ب}(\text{أ}+\text{ب})}{\text{أب}} = \left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}}\right) \times \left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{أ}}\right)$ (٢)

---

(١) الباهر في الجبر للسموأل المغربي تحقيق وتحليل كل من صلاح أحمد ورشدي راشد مطبعة دمشق ١٩٧٢م . ومخطوطة كتاب الباهر موجودة في مكتبة أيا صوفيا تحت رقم ٢١١٨ ، مصورة بمعهد الوثائق والمخطوطات في الجامعة العربية بالقاهرة ، وهي مخطوطة تقع في ١١٦ ورقة ، وقد انتهى نسخها سنة ٧٢٥هـ ، وكل ورقة $\frac{١}{٢}$ ٢١ × ١٥ مكونة من ١٩ سطراً والخط جيد والحروف غير منقوطة ، ويذكر أيضاً المحققان صلاح أحمد ورشدي راشد أن هناك مخطوطة أخرى لكتاب الباهر في الجبر للسموأل المغربي في مكتبة عزت أفندي تحت رقم ٣١٥٥ .

(٢) نقلها عن أبي كامل شجاع المصري .

ب) مجموع حدود متوالية عددية $\frac{\text{ن}}{٢}$ (أ + ل)

جـ) مجموع مربعات الأعداد الطبيعية التي عددها ن $= \left(\frac{\text{ن}}{٢}+\frac{١}{٦}\right)\left(\text{ن}^{٢}+\text{ن}\right) =$

$$\frac{\text{ن}\,(\text{ن}+١)\,(٢\text{ن}+١)}{٦}$$

د) $(\text{ن}+٢)\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}}\text{ي} = \text{ن}\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}}\text{ي} + ٢\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}}\text{ي} = \text{ن}\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}}\text{ي} + ٢$.

$$\frac{\text{ن}\,(\text{ن}+١)}{٢} = \text{ن}\left[\left(\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}}\text{ي}\right) + (\text{ن}+١)\right] = \text{ن}\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}+١}\text{ي}$$

هـ) $(\text{ن}-١)\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}}\text{ي}^{\text{ن}} = (\text{ن}-١)\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}-٣}\text{ي} + ٣\,(\text{ن}-١)^{٢}$

و) $\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}}\text{ي}^{٢} = \sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}}\text{ي} + \sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}}\text{ي}\,(\text{ي}-١)$

ز) $\text{ن}\,(\text{ن}+١)^{٢}\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}}\text{ي} + ٣\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}}\text{ي}^{٢}$

خ) $\text{ن}\,(\text{ن}+١) + ٢\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}-١}(\text{ن}-\text{ي})\,(\text{ن}+\text{ي}+١) =$

$$٢\text{ن}^{٢} + ٢\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}-١}(\text{ن}-\text{ي})\,(\text{ن}+\text{ي})$$

وهناك كثير من هذه المتطابقات وأمثالها وردت في كتاب «الباهر في الجبر» للسموأل المغربي مع برهانها .

٢ - قسمة وضرب الجذور الصماء وخصوصاً إذا كان المقام مؤلفاً من عدة حدود والضرب بالمرافق .

٣ - مناقشة للمسائل السيالة - ما كان ممكن الحل أو ممتنعة - . يقول السموأل في هذه الحالة : «كل قضية ومسألة ينظر فيها الحاسب أو المهندس فإنه إذا بحث عنها لا يخلو من أن يقع له برهان على وجودها فيسميها واجبة ، أو على امتناعها فيسميها ممتنعة ، ومستحيلة ولا يجد برهاناً على وجودها ولا على امتناعها أو عدمها فهو إذن جاهل فيها فيسميها ممكنة» .

ولقد اعتمد السموأل على جهوده الذاتية في دراسة كتاب «الأصول» لإقليدس ، وكذا في دراسة جبر أبي كامل شجاع بن أسلم الحاسب المصري ، وكتاب «البديع في الجبر» للكرخي ، وحساب الواسطي ، وبدأ يكون آراءه الخاصة في الرياضيات وهو في سن الثامنة عشر ، وقد صنف السموأل كتابه الشهير «الباهر في الجبر» وهو في سن التاسعة عشر .

يذكر كارل بروكلمان في كتابه «تاريخ الأدب العربي» : «أن السموأل نال شهرة عظيمة ليس في الرياضيات فحسب وإنما في الطب كذلك ، وهو من العوائل العريقة في المغرب إلا أن عائلته نزحت إلى بغداد ، واستقرت في نهاية الأمر في فارس حتى نهاية الأجل» .

وما أن استقر السموأل في مراغة حتى بدأ في الإنتاج العلمي . ولما درس الإسلام عن كتب وجد أن هذا الدين الحنيف يتمشى مع الحياة القويمة ، وأن

القرآن الكريم هو الدستور العادل الذي نزل من عند الله ، فأسلم سنة (٥٥٨هـ = ١١٦٣م) بمراغة وصار حجة يدافع عن الإسلام ، ويظهر عيوب اليهودية ، وذلك بمقدرة فائقة النظير على المقارنة المنطقية بين الإسلام واليهودية .
يقول جمال الدين أبو الحسن علي بن يوسف القفطي في كتابه «تاريخ الحكماء» : «إن السموأل أولد أولاداً هناك (في مراغة) سلكوا طريقته في الطب ، وأسلم فحسن إسلامه ، صنف كتاباً في إظهار معايب اليهود ، وكذب دعاويهم في التوراة ، ومواضع الدليل على تبديلها ، وأحكم ما جمعه في ذلك» .

وكان السموأل يردد :

﴿ إلا مَن تَابَ وآمَنَ وعَمِلَ عَمَلاً صَالِحاً فَأولئكَ يُبَدِّلُ اللهُ سَيِّئاتِهِمْ حَسَنَات وكَانَ اللهُ غَفُوراً رَحِيماً ﴾ [الفرقان : ٧٠] و**﴿ مَن جَاءَ بالحَسَنَةِ فَلَهُ عَشْرُ أمْثَالِهَا ومَن جَاءَ بِالسَّيِّئَةِ فَلا يُجْزَى إلا مِثْلَهَا وَهُمْ لا يُظْلَمُونَ﴾** [الأنعام : ١٦٠] .

اشتهر السموأل بين علماء عصره في علمي الحساب والجبر ، فبلغ في هذين العلمين مستوى عالياً كان يحسد عليه . كما صارت كتبه في الرياضيات مرجعاً يستمد منها علماء الرياضيات معلوماتهم ، ولقد طور كثيراً في حقل الجبر والمقابلة وقدم أفكاراً رياضية لم يسبقه فيها أحد ، حيث بقيت هذه الأفكار والنظريات الرياضية نبراساً لعلماء علم الجبر الحديث ، ولقد تفانى السموأل في عمله لخدمة العلم والعلماء والأمة ، فكان من العلماء الذين تعمقوا في مادتهم العلمية حتى صار حجة عصره في حقلي الجبر والحساب ، كما أنه كان في نفس الوقت طبيباً ماهراً ، وكان قد درس الطب

على يد أبي البركات هبة الله بن ملكا البغدادي (المتوفي عام ٥٤٧هـ الموافق ١١٥١م) ، ويعد السموأل من مشاهير أطباء الأمة الإسلامية آنذاك ، ليس فقط في التأليف في مجال الطب ، ولكن في ممارسته له أيضاً .

يذكر ابن أبي أصيبعة في كتابه «عيون الأنباء في طبقات الأطباء» نقلاً عن موفق الدين عبد اللطيف البغدادي[1] ما نصه : «بلغ السموأل في العدديات مبلغاً لم يصله أحد في زمانه ، وكان حاد الذهن جداً ، بلغ في الصناعة الجبرية الغاية القصوى . . . له رسائل في الجبر والمقابلة ، يرد فيها علي ابن الخشاب النحوي[2] ، وقد كان معاصره ، وكانت له أيضاً مشاركة في الحساب ونظرية في الجبر والمقابلة» .

عجباً أن يصل الغرور بعلماء الغرب إلى حد تقديس علماء اليونان في العصور الوسطى ، فصدقوا ما زعم فيثاغورث من أنه توصل إلى نظريات الرياضة بطريق الوحي ، إلا أن السموأل بدد هذه الأفكار الواهية جميعاً ، وفي هذا الصدد يقول قدري حافظ طوقان في كتابه «تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك» : «جمع السموأل أصول صناعة الجبر والمقابلة ، وبرهن على ما لم يجد أحد برهاناً عليه ، وكمله بالأعمال المبتكرة والأشكال المبتدعة ، وعلل فيه على ما زعم فيثاغورث أنه أدركه بطريق الوحي ، ونقل كثيراً عن الكرخي وغيره» .

---

(١) موفق الدين عبد اللطيف البغدادي من أصل موصلي ، ولد في بغداد سنة (٥٥٧هـ = ١١٦١م) ، وعرف باسم اللباد . كان والده من علماء الحديث والقراءات أما عمه فكان من كبار الفقهاء . نشأ البغدادي في دار علم ، فدرس النحو وعلم الكلام حتى صار حجة في العربية .

(٢) أبو محمد عبد الله بن أحمد بن الخشاب النحوي ولد في بغداد سنة (٤٩٢هـ = ١٠٩٩م) وتوفي هناك عن عمر يناهز الثلاثة والسبعين سنة . كانت له شهرة في النحو والثقافة الإسلامية ، وله اطلاع واسع في الفلسفة والحساب والهندسة .

ولقد برزت بعض الأفكار والنظريات الرياضية الهامة في كتاب السموأل «الباهر في الجبر» ، ومن ثم فهي جديرة بأن نلقي عليها نظرة سريعة ، ونشارك ما ذهب إليه هاشم الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» من أن أجل إنجازات السموأل تشمل :

١ - شرح السموأل لقواعد الإشارات التي أوردها الكرخي في مؤلفاته ، وتوضيحه للحالات المختلفة ، وبرهانه لها بطريقة جبرية .

٢ - تطوير طريقة قسمة كثيرة الحدود على أمثالها .

٣ - إيجاد جذر كثيرة الحدود ، وتطبيق الطريقة العامة لإيجاد الجذر التربيعي للأعداد على المتغيرات .

٤ - وضع برهان المتطابقات الجبرية ، وبعض قوانين المتواليات وغيرها .

٥ - قسمة وضرب الجذور الصماء .

٦ - شرح بعض المسائل السيالة .

هذا ولقد أجمع مؤرخو الرياضيات على أن السموأل المغربي هو أول من استخدم الطريقة العامة لإيجاد الجذر التربيعي للكمية الجبرية ذات الحدود الكثيرة ، ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما آنف الذكر : أن السموأل المغربي هو صاحب فكرة اتباع الطريقة الجبرية لإيجاد جذور كثيرة الحدود ، وتطبيق الطريقة العامة لإيجاد الجذر التربيعي للأعداد على المتغيرات ، ويتضح ذلك من قول السموأل في كتابه «الباهر في الجبر» : « . . . وأنا أذكر في طلب جذورها طريقة واحدة شاملة مستمرة في أخذ جذور المربعات كلها على اختلاف أجناسها . مثاله : نأخذ جذر كعب كعب كعب وأربعة أموال كعب كعب كعب . . .» إلى آخر كلامه ، ويقصد به أخذ الجذر التربيعي المتعدد الحدود .

$س^{١٢} + ٤س^{١١} + ١٠س^{١٠} + ٢٠س^{٩} + ٣٥س^{٨} + ٥٦س^{٧} + ٨٤س^{٦} +$
$١٠٤س^{٥} + ١١٥س^{٤} + ١١٦س^{٣} + ١٠٦س^{٢} + ٨٤س + ٤٩$(١) .

ويستخرج الجذر ابتداء من آخر حد بعد أن يرتب الحدود تصاعدياً فيكون آخر حد ($١س^{١٢}$) فيجد جذره ($١س^{٦}$) ثم يربع الجواب ويطرحه من الأصل ، فتخلو تلك المرتبة ، ثم يأخذ ضعف الجواب (أي $٢س^{٦}$) ويبحث عن مقدار يضربه في ($٢س^{٦}$) لينتج ($٤س^{١١}$) فيجده ($٢س^{٥}$) . هنا يضرب $٢س^{٥}$ في ($٢س^{٦} + ٢س^{٥}$) ويطرح فيكون آخر حد الآن هو ($٦س^{١٠}$) فيقسمه على ($٢س^{٦}$) فيجد النتيجة ($٣س^{٤}$) فيضرب ($٣س^{٤}$) في ($٢س^{٦} + ٤س^{٥} + ٣س^{٤}$) ، وهو ضعف الجواب زائداً $٣س^{٤}$ ويطرح ناتج الضرب مما تبقى عنده من المقدار الأصلي ، ثم يأخذ ضعف الجواب ($س^{٦} + ٢س^{٥} + ٣س^{٤}$) ويفتش عن مقدار يضربه في ($٢س^{٦}$) لينتج $٨س^{٩}$ فيجده $٤س^{٣}$ فيضيف $٤س^{٣}$ إلى $٢س^{٦} + ٤س^{٥} + ٦س^{٤}$ ويضرب الحدود الأربعة في $٤س^{٣}$ وهكذا يستمر إلى أن يجد الجذر التربيعي هو $س^{٦} + ٢س^{٥} + ٣س^{٤} + ٤س^{٣} + ٥س^{٢} + ٦س + ٧$.

وكذلك لم يهمل السموأل المقادير التي بعض حدودها سالبة والتي أيضاً تحتوي على حدود فيها س بأسس سالبة (أي $\frac{أ}{س^{ن}}$) ، فقد حاول أن يتقصى جميع الحالات التي يمكن تحصل في الحياة العملية .

---

(١) في كتاب الباهر في الجبر للسموأل «نريد أن نأخذ جذر كعب كعب كعب كعب وأربعة أموال كعب كعب كعب ، وعشرة أموال مال كعب كعب ، ٢٠ كعب كعب كعب و٣٥ مال كعب كعب ، ٥٦ مال مال كعب ، وأربعة وثمانين كعب كعب ، و١٠٤ أموال كعب ، و١١٥ مال مال ، و١١٦ كعب ، و١٠٦ مالاً ، و٨٤ شيئاً ، و٤٩ أحداً» .

مثال :

$$٢٥\text{س}^{٦} - ٣٠\text{س}^{٥} + ٩\text{س}^{٤} - ٤٠\text{س}^{٣} + ٨٤\text{س}^{٢} - ١١٦\text{س} + ٦٤ - \frac{٤٨}{\text{س}} + \frac{١٠٠}{\text{س}^{٢}} - \frac{٩٦}{\text{س}^{٣}} + \frac{٦٤}{\text{س}^{٤}} .$$

يراد إيجاد الجذر التربيعي .

الحـل :

اتبع السموأل نفس الطريقة السابقة مع إتقانه لقواعد ضرب الإشارات وطرح المقادير الجبرية من مثيلاتها ، وتبديل الإشارة في الطرح وبهذا يحصل على الجذر وهو $٥\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س}^{٢} - ٤ + \frac{٦}{\text{س}} - \frac{٨}{\text{س}^{٢}}$.

واختتم السموأل مقالته الأولى (الفصل الثاني من الباب الخامس) في كتابه «الباهر في الجبر» الذي حققه صلاح أحمد ورشدي راشد (ص٧٠ - ٧١) بقوله : «والأصل في أخذ جذور المقادير التي فيها استثناء أن ضرب الناقص في الزائد ناقص وفي الناقص زائد ، وأنا إذا نقصنا عدداً زائداً من عدد ناقص بقي مجموع العددين ناقصاً ، وإذا نقصنا عدداً ناقصاً من ناقص أكثر منه بقي تفاضلهما ناقصاً ، وإن كان الناقص أقل من المنقوص بقي تفاضلهما زائداً ، وإذا أنقصنا الناقص من الزائد بقي مجموعهما زائداً ، وإذا نقصنا زائداً من مرتبة خالية بقي فيها ذلك العدد بعينه ناقصاً ، وإذا أنقصنا الناقص من مرتبة خالية بقي فيها ذلك العدد زائداً ، وهذه أصول لا خفاء بها على من فهم ما تقدم ذكره . قد أتينا على ما يحتاج إليه من حساب الأعداد

المعلومة الصورة ، وبرهنا على ما ذكره المتقدمون ، وأوضحنا ما أغفله الأولون وفتح الله بصائرنا لإدراكه ، فلنختم المقالة بحمده وصلى الله على محمد وآله الطاهرين» . ومن ذلك يظهر واضحاً وجلياً أن السموأل المغربي وضع القواعد الأساسية في العمليات الحسابية والجبرية ، فلم يترك مجالاً للاجتهاد جزاه الله عنه خيراً .

هذا ويمثل كتاب «الباهر في الجبر» عملاً رائعاً وتطويراً عظيماً للصيغ والقواعد الرياضية التي توصل إليها رواد أفاضل في الرياضيات من أمثال الخوارزمي وثابت بن قرة وقسطا بن لوقا والكرخي وشجاع بن أسلم المصري والحسن بن الهيثم وعمر الخيام ، ويشمل كتاب «الباهــر» أربع مقالات يعرض في المقالة الأولى خمسة أبواب : الباب الأول ويحتوي على مقدمة كتاب «الباهر في الجبر» ، والباب الثاني في الضرب وفيه فصلان : (١) في ضرب العدد المفرد و(٢) في ضرب العدد المركب ، والباب الثالث في القسمة وفيه فصلان : (١) في قسمة المقادير المفردة و(٢) في قسمة المقادير المركبة ، والباب الرابع في النسبة وفيه فصلان : (١) في كيفية النسبة و(٢) في نسبة المقادير التي يعبر عنها بلفظ القسمة ، والباب الخامس في الجذور وفيه فصلان : (١) في استخراج جذور الأعداد المعلومة الصورة المفردة و(٢) في أخذ جذور الأعداد والمقادير المركبة المعلومة الصورة . أما المقالة الثانية فتحتوي على خمسة أبواب : الباب الأول في أن صناعة الجبر والمقابلة جزء من صناعة التحليل ، والباب الثاني في المسائل الست الجبرية ، وفيه فصلان : (١) في مسائل الثلاث المفردة الجبرية و(٢) في المسائل المقترنة ، والباب الثالث في الاستقراء وفيه أربع فصول : (١) في الاستقراء فيما يكون من مرتبة واحدة يعادل مربعاً أو مكعباً و(٢) فيما يكون

من مرتبتين متواليتين زائدتين كانا أو أحدهما مستثنى من الآخر و(٣) فيما يكون من مرتبتين بينهما مرتبة خالية و(٤) فيما يكون من ثلاث مراتب يعادل مربعاً ، والباب الرابع في براهين هندسية يستعان بها على استخراج المجهولات العددية وهما فصلان : (١) في الأصول العددية و(٢) في الأصول الخطوطية . والمقالة الثالثة في المقادير الصم وهو جملتان : الجملة الأولى وتشمل أربعة أبواب : الباب الأول مقدمة ، والباب الثاني في ضرب المقادير الصم المفردة وهي أربعة فصول : (١) في ضرب المقادير المنطقية و(٢) في ضرب المقادير التي مكعبها منطق في الطول و(٣) في ضرب المقادير التي تسمى متوسطة و(٤) في ضرب مقدارين مختلفي المراتب ، والباب الثالث في قسمة المقادير الصم المفردة ، والباب الرابع في جمع المقادير الصم وفيه ثلاثة فصول : (١) في جمع المقادير المنطقية في القوة وألقابها و(٢) في جمع المقادير التي مكعباتها معلومة وتفريقها و(٣) في جمع المقادير المشتركة المتوسطة وتفريقها . أما الجملة الثانية في كيفية لوجدان الخطوط المركبة وهي ستة أبواب : الباب الأول في ذكر الخطوط المركبة ومعرفة أقسامها ، والباب الثاني في علم القرائن التي يحتاج إليها في علم الخطوط المركبة ، والباب الثالث في المشاركة بين المقادير ، والباب الرابع في ضرب المقادير المركبة ، والباب الخامس في القسمة على المقادير المركبة ، والباب السادس في استخراج جذور المقادير الصم المركبة . المقالة الرابعة والأخيرة في تقاسيم المسائل وهي ثلاث أبواب : الباب الأول في المسائل الواجبة ، والباب الثاني في ذكر المسائل التي يقال لها الممكنة ، والباب الثالث في القول على المسائل الممتنعة .

مؤلفاته :

عكف السموأل المغربي على التأليف مثل غيره من علماء العرب والمسلمين ، فكان من العلماء المنتجين الذين خلفوا وراءهم مصنفات كثيرة بلغت حوالي ٨٥ مصنفاً ما بين كتاب ورسالة ومقال ، نذكر بعضاً منها على سبيل المثال فيما يلي :

١ - كتاب الباهر في الجبر .

٢ - كتاب الزاهر في الجبر .

٣ - كتاب القوامي في الحساب الهندي .

٤ - كتاب المثلث القائم الزاوية .

٥ - شرح لكتاب ديوفانتوس .

٦ - كتاب إعجاز المهندسين .

٧ - رسالة إلى ابن خدّود في مسائل حسابية .

٨ - كتاب التبصرة في علم الحساب .

٩ - كتاب الموجز المضوي في الحساب . مخطوطة موجودة باستنابول - فاتح رقم ٣٤٣٩ .

١٠- كتاب المنير في مساحة الجواهر المختلفة لاستخراج مقدار مجهولها .

١١- كتاب في المياه .

١٢- كتاب كشف عوار المنجمين وغلطهم في أكثر الأعمال والأحكام ، مخطوطة موجودة في مكتبة ليدن تحت رقم ١٠٧٤ .

١٣- كتاب نزهة الأصحاب في معاشرة الأحباب . (كتاب في الطب) ، مخطوطة موجودة في المكتبة الوطنية في باريس تحت رقم ٣٠٥٤ .

١٤- كتاب المفيد الأوسط في الطب ألفه سنة ٥٦٤هـ .

١٥- كتاب إفحام طائفة اليهود ، ونشره برلمان ، نيويورك ١٩٦٤م .

١٦- كتاب بذل المجهول في إقناع اليهود .

١٧- كتاب غاية المقصود في الرد على النصارى واليهود .

١٨- كتاب الأجوبة الفاخرة رداً على الملة الكافرة .

١٩- رسالة في التحليل والتركيب .

٢٠- رسالة إلى ابن الخشاب في مسائل حسابية جبر ومقابلة .

٢١- كتاب الكافي في حساب الدرهم والدينار .

٢٢- قصيدة في حساب اليد .

إن الأفكار الجبرية التي كانت معروفة منذ قدماء المصريين والبابليين واليونان قد جمعها محمد بن موسى الخوارزمي ونقحها وأضاف إليها الكثير من ابتكاراته في هذا المجال وأعطاها اسم «علم الجبر والمقابلة» ، ثم جاء من بعده علماء آخرون مثل الكرخي وأبو كامل شجاع بن أسلم المصري وغيرهما كثير ليطوروا علم الجبر والمقابلة ، ثم أتى من بعدهم السموأل المغربي ليقدم طرقاً جديدة لإجراء عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة وإيجاد الجذور التربيعية والتكعيبية للكميات الجبرية كثيرة الحدود . ويجب أن لا ننسى أيضاً أن السموأل المغربي هو الذي طور الطريقة التحليلية في علم الجبر ، وقد مهدت طريقة السموأل إلى علم الجبر الحديث الذي يدرس لطلاب العلم بالجامعات في المعمورة ، في وقت كان أكثر علماء العرب والمسلمين يهتمون فيه اهتماماً بالغاً بالحلول الهندسية لمعظم المسائل الجبرية .

إن السموأل المغربي قد أحاط بالعلوم الرياضية في عصره ، ولا غرو فهو من العلماء الذين منحهم الله قوة تجريدية عظيمة ، ورقياً عقلياً فريداً ، وكان السموأل المغربي من العلماء الذين لا يقصرون جهدهم على الموضوع الواحد ، ولا يقنعهم التخصص الضيق ، ومن ثم نلقى السموأل لا يقصر نفسه على مجال الرياضيات وإنما يعطي جانباً كبيراً من اهتمامه ووقته لعلم الطب ، ومن يدقق في كتابه «الباهر في الجبر» يدرك تماماً مدى ما وصل إليه السموأل من تطوير في الفكر الرياضي ، حيث تجلى سمو فكره ، وعلو كعبه ، وإبداعه العقلي وإحاطته الشاملة بجميع فروع الرياضيات .

لا يفوتنا أن نذكر في هذا المقام أن السموأل المغربي ترعرع في بيت علم ، فقد كان والده من علماء الرياضيات الكبار ، وهو الذي شجع ابنه السموأل على طلب العلم بوجه عام ، والرياضيات بوجه خاص ، فالسموأل إذن مدين لعائلته ، لأن أمراً كهذا عادة ما يكون من الأمور المهمة في تطوير شخصية العالم ، وهو بذلك قد صادف ما يسميه علماء الاجتماع بـ«البيئة العلمية» . ولو أننا درسنا التاريخ عن كثب لوجدنا أن كثيراً من الذين نبغوا في العلوم كانوا ممن كان لآبائهم اهتمام كبير في مجال العلوم .

من المؤكد أن ما سقناه عن السموأل هنا ليس بكاف حتى لمجرد التعريف به ، وجدير بالذكر أن الحقبة التي عاش فيها قد ساعدت على نبوغه ، حيث إن معظم النظريات والأفكار الجبرية كانت مهيأة له ممن سبقه من علماء العرب والمسلمين ، ولقد اعتمد السموأل مثلاً في تأليف كتابه المشهور «الباهر في الجبر» على مؤلفات علامتي الرياضيات أبي جعفر محمد ابن موسى الخوارزمي وأبي بكر محمد بن الحسن الكرخي .

وختاماً فإن الحضارة العربية الإسلامية تزخر بنماذج فريدة من علماء العرب والمسلمين الذين أسهموا إسهاماً فعالاً في مختلف صنوف العلم والمعرفة ، يجيء في طليعة هؤلاء العلماء العالم المفكر المبدع السموأل المغربي ، الذي خلف لأمتنا العربية والإسلامية تراثاً ضخماً في علمي الرياضيات والطب ، وإن هذا الإنتاج العظيم لينم عن عقلية مبدعة ، وأفق واسع ، وذكاء نادر ، وفهم لحقائق العلوم ودقائقها .

القلصادي :

هو أبو الحسن علي بن محمد بن علي القرشي البسطي المعروف بالقلصادي ، ولد ببسطة بالأندلس سنة (٨١٥هـ وتوفي سنة ٨٩١هـ = ١٤١٢ - ١٤٨٦م) بباجة من القطر التونسي . درس القلصادي ببسطة وتتلمذ على كبار علمائها ثم انتقل إلى غرناطة فاستوطنها لطلب العلم .

ويذكر خير الدين الزركلي في كتابه «الأعلام» : «أن القلصادي عالم كبير بالحساب ، فقيه من فقهاء المالكية . وهو آخر من له التآليف الكثيرة من أئمة الأندلس» . كان القلصادي حريصاً على طلب العلم ، حتى إنه عندما قصد الحج توقف في طريقه بكثير من المدن لتلقي العلم على كبار علمائها كي تتوسع مداركه ، وكان أكثر نبوغه في الرياضيات .

ويروي لنا محمد سويسي في تحقيقه لكتاب «تلخيص أعمال الحساب» لابن البناء المراكشي : «أن القلصادي بعد أن أدى مناسك الحج رجع إلى غرناطة فعاش فيها ردحاً من الزمن ، وذلك في الفترة التي كانت الاضطرابات على أشدها لمحاولة النصارى الاستيلاء على آخر معاقل المسلمين بالأندلس ، وقد شارك القلصادي في المقاومة ضد النصارى ، ثم غادر غرناطة

إلى شمال إفريقيا حيث توفي قبيل ست سنوات من سقوط غرناطة بيد الصليبيين .

وعندما حلت كارثة الاستيلاء على مسقط رأسه ، بدأ رحمه الله يحرض المقاتلين ضد النصارى الغزاة ، ويراسل أشقاءه في المشرق العربي والإسلامي للحصول على المساعدات والنجدة ، وبقي القلصادي على هذه الحالة مدة طويلة من الزمن ، ولكنه في النهاية شعر في خيبة الأمل والهزيمة الحتمية ، لذا ترك الأندلس واتجه إلى شمال إفريقيا والحزن يخيم عليه ، لأنه لا يستطيع عمل أي شيء حيال أعداء الإسلام .

اشتهر القلصادي بعلمي الحساب والجبر فكتب كتاب «كشف الأسرار عن علم الغبار» حيث كان أول من استعمل الرموز والإشارات الجبرية التي تستعمل إلى يومنا الحاضر . ويذكر أنور الرفاعي في كتابه «الإسلام في حضارته ونظمه» : «أن القلصادي استعمل حرف «جـ» للجذر و«ش» لشيء (أي للمجهول س) والمال (أي لمربع المجهول س^{٢}) و«ك» لكعب (أي لكعب المجهول س^{٣}) والحرف «ل» لعلامة يساوي وللنسبة ثلاث نقط (أي ∴) . ومع الأسف أنكر علماء الغرب ابتكار القلصادي للرموز والإشارات الجبرية ، بل تعدى تجاهلهم ذلك بأن نسبوا هذا الاكتشاف إلى فرانسوا فيته[١] خطأ وتعنتاً ، والذي أتى بعد القلصادي بما يقارب القرن والنصف .

ويقول جلال مظهر في كتابه «أثر العرب في الحضارة الأوروبية – نهاية عصور الظلام وتأسيس الحضارة الحديثة» : «ينبغي أن لا ننسى أن العرب قد

---

(١) فرانسوا فيته (Francois Viete) عالم فرنسي فيما بين (١٥٤٠-١٦٠٣م) اشتهر بعلم المثلثات والجبر والهندسة ونظرية الأعداد .

سبقوا فيته في مبدأ استعمال الرموز ، ولا شك في أن كثيراً من علماء أوروبا قد اطلعوا على بحوث العرب في الهندسة والجبر . ومن الأرجح جداً أن فيته عرف شيئاً عن محتويات كتاب القلصادي كشف الأسرار عن علم الغبار ، والذي نقل إلى اللغة اللاتينية في مبدأ استعمال الرموز فأخذه فيته وتوسع فيه بالشكل الذي نعرفه الآن» .

وأضاف محمد سويسي في تحقيقه لكتاب «تلخيص أعمال الحساب» لابن البناء بقوله : «شرح القلصادي عمل ابن البناء في الحساب وأضاف إليه عدة إضافات ذات بال خاصة في نظرية الكسور وفي إيجاد الأعداد الناقصة والزائدة والمتحابة . واستخدم القلصادي الكسور على شكلها الحالي وهو الذي استعمل حرف الجيم للدلالة على الجذر وذاك كان أصل الرمز المستعمل اليوم للجذر التربيعي» .

كان أبو الحسن القلصادي من كبار علماء العرب والمسلمين في الأندلس ليس فقط في علمي الجبر والحساب ، ولكن في معظم فروع المعرفة ، فكان تكوينه العلمي قوياً ومتنوعاً وشاملاً . لذا نجده أخذ نصيبه من جميع العلوم ووصل في جميع المواد التي درسها مرحلة عظيمة ، بل مرحلة الاجتهاد . واشتهر في مؤلفاته بحسن الترتيب والتبويب وبأسلوبه السهل الوافي .

ويستطرد محمد سويسي قائلاً : «إن القلصادي شرح بدقة متناهية طريقة إيجاد الجذور لأي عدد ، وهي الطريقة المعروفة لدى علماء العرب والمسلمين السابقين له وهي :

$\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{د}} = \text{أ} + \frac{\text{د}}{٢\text{أ}}$ وكذلك ،

$\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{د}} = \text{أ} + \frac{\text{د}}{٢\text{أ} + ١}$ إذا كانت د > أ .

ولكن طور القلصادي هذه الطريقة لإيجاد الجذر التربيعي كي يحصل على قيمة أدق وأقرب تقريب للجذر المطلوب ، وجعل لها شروطاً تضبطها ، وهي كالآتي :

إذا كان د < أ فإن $\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{د}} = \text{أ} + \frac{\text{د}}{٢\text{أ}}$.

إذا كان د > أ فإن $\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{د}} = \text{أ} + \frac{\text{د} + ١}{٢(\text{أ} + ١)}$

كما حدد القلصادي الخطأ الممكن حدوثه أن لا يزيد عن $\frac{\text{د}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}}$.

مثال (١) :

أوجد قيمة جذر $\sqrt{١١}$ بطريقة القلصادي .

الحل :

$\sqrt{١١} = \sqrt{٩ + ٢} = \sqrt{٣^{٢} + ٢} \Leftarrow$ أ = ٣ ، د = ٢ .

لذا أ > د $\Leftarrow$

إذن $\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{د}} = \frac{\text{د}}{٢\text{أ}} + \text{أ}$.

$\sqrt{١١} = \frac{٢}{٢\,(٣)} + ٣ = ٣\frac{١}{٣} = ٣,٣٣\overline{٣}$. أما قيمة الجذر التقريبي من الجداول الرياضية فهو ٣,٣١٦٦ . وينتج عن ذلك أن الخطأ التقريبي يكون ٠,٠١٦٤ . أما اقتراح القلصادي أن الخطأ لا يزيد عن $\frac{د^{٢}}{٤أ^{٢}} = ٠,١١١\overline{١}$ ، لذا نجد أن الخطأ لم يصل إلى الحد الأقصى .

مثال (٢) :

أوجد قيمة $\sqrt{١٣}$ إلى أقرب ثلاثة أرقام عشرية مستعملاً طريقة القلصادي .

الحل :

$$\sqrt{١٣} = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{٣^{٢} + ٤} \Longleftarrow أ = ٣ ،\ د = ٤ .$$

لذا نجد أن د > أ .

إذن $\sqrt{أ^{٢} + د} = أ + \frac{د + ١}{٢\,(أ + ١)}$

لذا $\sqrt{١٣} = ٣ + \frac{٤ + ١}{٢\,(٣ + ١)} = ٣ + \frac{٥}{٨} = ٣\frac{٥}{٨} = ٣,٦٢٥$.

أما القيمة الحقيقة للجذر من الجداول الرياضية فهي ٣,٦٠٦ .

ومن الواضح أن الخطأ يكون ٣,٦٢٥ − ٣,٦٠٦ = ٠,٠١٩ وباستخدام قانون القلصادي الذي فيه يحدد الخطأ = $\frac{د^{٢}}{٤أ^{٢}} = \frac{١٦}{٣٦} = ٠,٤٤٤\overline{٤}$ ومن ذلك نستخلص أن الخطأ لم يصل إلى الحد الأقصى .

ويذكر فرانسيس كاجوري في كتابه «المدخل إلى تاريخ الرياضيات» :

«أن القلصادي أعطى قيمة تقريبية للجذر التربيعي للكمية $\sqrt{(\text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب})}$

والقيمة التقريبية هي $\dfrac{\text{٤أ}^{\text{٣}} + \text{٣أب}}{\text{٤أ}^{\text{٢}} + \text{ب}}$ واستعملها كل من الإيطاليين ليوناردو أوف بيزا وتارتاليا ، وغيرهما لإيجاد القيم التقريبية للجذور الصم .

مثال :

أوجد القيمة التقريبية للجذر التربيعي : $\sqrt{\text{٥}}$ لثلاثة أرقام عشرية

الحل :

$$\sqrt{\text{٥}} = \sqrt{\text{٤} + \text{١}} = \sqrt{\text{٢}^{\text{٢}} + \text{١}} \text{ ، أ = ٢ ، ب = ١}$$

لذا نجد أن $\dfrac{\text{٤أ}^{\text{٣}} + \text{٣أب}}{\text{٤أ}^{\text{٢}} + \text{ب}} = \dfrac{\text{٤ (٢)}^{\text{٣}} + \text{٣ (٢) (١)}}{\text{٤ (٢)}^{\text{٢}} + \text{١}} = \dfrac{\text{٤ (٨)} + \text{٦}}{\text{١٧}} =$

$$\dfrac{\text{٣٢} + \text{٦}}{\text{١٧}} = \dfrac{\text{٣٨}}{\text{١٧}} = \text{٢} \dfrac{\text{٤}}{\text{١٧}} \ .$$

إذن $\sqrt{\text{٥}} = \text{٢} \dfrac{\text{٤}}{\text{١٧}} = \text{٢,٢٣٥}$

أما القديمة في الجداول الرياضية $\sqrt{\text{٥}} = \text{٢,٢٣٦١}$ ومن ذلك يتضح أن الخطأ ضئيل جداً ويساوي ٠,٠٠١١ ولذا نجد أن هذا القانون الذي توصل إليه القلصادي يعتبر أعظم إنتاج توصل إليه عالمنا الجليل القلصادي .

أما كتاب القلصادي «كشف الأسرار عن علم الغبار» فهو الكتاب الذي اشتهر به وبقي في المغرب إلى القرن العشرين الميلادي . ويجدر بنا أن نذكر

محتوياته كما ورد في كتاب «تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك» لقدري حافظ طوقان، وكتاب «هدية العارفين» للبغدادي، وكذلك «كشف الظنون» لحاجي خليفة و«الفهرست» لابن النديم وهي كالآتي :

الجزء الأول : في العدد الصحيح وهو ثمانية أبواب :

الباب الأول : في الجمع ، الجمع هو ضم الأعداد بعضها إلى بعض .

الباب الثاني : في الطرح ، وهو أن يعرف فضل ما بين عددين أحدهما أقل والآخر أكثر .

الباب الثالث : في الضرب ، وهو استخراج عدد مجهول من عددين معلومين .

الباب الرابع : في القسمة ، وهي حل المقسوم إلى أجزاء متساوية يكون عددها مثل عدد المقسوم عليه .

الباب الخامس : في حل الأعداد .

الباب السادس : في التسمية ، ومعناها قسمة القليل على الكثير .

الباب السابع : في الاختبار ، والعمل فيه أن تطرح كل واحد من المجموعتين وتجمع الباقي منهما ، وتطرح كذلك ، وما بقي فهو الجواب .

الجزء الثاني : في الكسور وهو مقدمة وثمانية أبواب :

المقدمة : في أسماء الكسور وما يتعلق بذلك ، والكسور عشرة أسماء ، وهي من النصف إلى الجزء ، وصورة النصف واحد على اثنين .

الباب الأول : في جمع الكسور .

الباب الثاني : في طرح الكسور .

الباب الثالث : في ضرب الكسور .

الباب الرابع : في قسمة الكسور .

الباب الخامس : في تسمية الكسور ، والعمل فيها كالقسمة سواء إلا أنك تسمي الخارج المسمى من خارج المسمى منه .

الباب السادس : في جبر الكسور .

الباب السابع : في خط الكسور ، والعمل فيه أن تسمي المخطوط إليه من المخطوط وما خرج فهو المطلوب .

الباب الثامن : في الضرب : وهو انتقال الكسر من اسم إلى غيره .

الجزء الثالث : في الجذور وهو مقدمة ، وثمانية أبواب :

المقدمة : في معنى كلمة جذر ، وهو عبارة عن عدد يضرب في مثله فيأتي منه المطلوب .

الباب الأول : في أخذ جذر العدد الصحيح المجذور .

الباب الثاني : في أخذ جذر العدد غير المجذور بالتقريب .

الباب الثالث : في تدقيق التقريب .

الباب الرابع : في تجذير الكسور .

الباب الخامس : في جمع الجذور .

الباب السادس : في ضرب الجذور .

الباب السابع : في قسمة الجذور وتسميتها .

الباب الثامن : في ذي الأسين .

الجزء الرابع : في استخراج المجهول ، وفيه ثمانية أبواب :

الباب الأول : في الأعداد المتناسبة .

الباب الثاني : في العمل في الكفايات .

الباب الثالث : في الجبر والمقابلة ، ومبناه على ثلاثة أجناس ، وهي الأعداد والأشياء والأموال .

الباب الرابع : في ضرب المركبات .

الباب الخامس : في جمع الأجناس المختلفة والمتفقة من علم الجبر والمقابلة .

الباب السادس : في الطرح .

الباب السابع : في الضرب ، والعمل فيه أن تضرب أحد العددين في الآخر وتجمعهما وما كان فهو أس خارج الضرب .

الباب الثامن : في القسمة ، والعمل فيه أن تسقط أس المقسوم عليه على أسس وما بقي فهو أس الخارج .

أما خاتمة الكتاب فتحتوي على أربعة فصول :

الفصل الأول : إذا كان في المعادلة استثناء .

الفصل الثاني : في الجمع على نحو بيوت الشطرنج .

الفصل الثالث : في موضوع المسألة المركبة وهل فيها عدد؟

الفصل الرابع : في استخراج العدد التام والناقص .

ويعتبر كتاب «كشف الأسرار عن علم الغبار» من الكتب القيمة والتي في متناول المبتدئين في دراسة علم الحساب والجبر. أسهب القلصادي في كثرة الأمثلة والتمارين، مع عدم إغفاله المفاهيم الرياضية مثل التعريفات والنظريات. لذا نجد أن القلصادي يتحرى في كتابه هذا أسلوب التدريس التعليمي، فيكرر بعض الأفكار الرياضية كي يتأكد من ترسيخها لدى الدارس، ويخاطب مباشرة طلاب العلم مستعملاً طريقة النقاش. وهذه بحق الطريقة الحديثة التي يركز عليها ويوصي بها علماء التربية. لذا فالقلصادي عاش في القرن التاسع الهجري بعقلية القرن الرابع عشر الهجري.

مؤلفاته :

ومن مؤلفاته ما ذكره الزركلي في كتاب «الأعلام» وغيره وهي :

١ - كتاب النصيحة في السياسة العامة والخاصة.

٢ - شرح الأرجوزة الياسمينية في الجبر والمقابلة.

٣ - كتاب في الفرائض مع شرحه.

٤ - كتاب بغية المبتدي وغنية المنتهي.

٥ - كتاب قانون الحساب وغنية ذوي الألباب.

٦ - كشف الأسرار وهي رسالة في الجبر.

٧ - كتاب كشف الجلباب عن علم الحساب.

٨ - رسالة في قانون الحساب.

٩ - كتاب أشرف المسالك إلى مذهب مالك.

١٠- كتاب هداية الإمام في مختصر قواعد الإسلام.

١١- شرح إيساغوجي في المنطق.

١٢- الكتاب الضروري في علم المواريث .

١٣- رسالة في معاني الكسور .

١٤- شرح ذوات الأسماء .

١٥- شرح وتلخيص ابن البناء .

١٦- تبصرة المبتدي بالقلم الهندي .

١٧- التبصرة الواضحة في مسائل الأعداد اللائحة .

١٨- كتاب تقريب المورارث ومنتهى العقول البواحث .

١٩- كتاب تبصرة في حساب الغبار .

٢٠- لباب تقريب المورارث ومنتهى العقول البواحث .

٢١- المستوفي لمسائل الحوفي .

وأخيراً ، فإن أبا الحسن القلصادي قدم خدمة عظيمة ليس للحضارة العربية والإسلامية فحسب ، بل للحضارة بوجه عام ، إذ بقيت مؤلفاته في الحساب مستعملة حتى القرن العشرين في مدارس وجامعات أوروبا ، وفي العالم أجمع . ويعتبر إسهام القلصادي في علم الجبر من أكبر العوامل التي طورت هذا الحقل حتى أصبح من المواضيع العلمية الضرورية في عصرنا الحاضر . وقد اعتمد القلصادي على إنتاج أساتذته في الجبر ، ومن بينهم أسلافه : الخوارزمي ، وثابت بن قرة ، والكرخي ، وعمر الخيام ، وغيرهم ممن لهم اليد الطولى في تطوير هـذا الحقـل المفيد . وقد اشتهـر القلصادي رحمه الله بكثرة أسفاره التي قام بها لطلب العلم على يد مشاهير علماء العرب آنذاك .