الفصل العاشر

التراجع الخطي بمتحولين مستقلين أو أكثر

١٠ـ١ التراجع الخطي بعدة متحولات مستقلة : لننتقل الآن إلى معالجة الحالات التي نشعر فيها بأن لأكثر من متحول واحد مستقل أثراً ، لا يمكن إغفاله مبدئياً ، في القيمة التي سيفترضها المتحول y . ولنفترض ، بدلاً من المعادلة الخطية البسيطة التي كانت موضع الدراسة في الفصل السابق ، المعادلة الخطية التالية ، التي تعبر عن المتحول المدروس بدلالة r من المتحولات المستقلة $(r \geqslant 2)$:

$$y = \mu + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots \beta_r x_r + \varepsilon = \mu + \sum_{i=1}^{r} \beta_i x_i + \varepsilon \qquad (1)$$

حيث $\mu, \beta_1, \dots, \beta_r$ وسطاء مجهولة هي في حكم الأعداد الثابتة ، و $x_1, x_2, \dots, x_r$ هي المتحولات المستقلة ، وما نرغبه هو إيجاد تقديرات $b_0, b_1, \dots, b_r$ للوسطاء المجهولة ، على الترتيب . وسنلجأ هنا أيضاً إلى مبدأ المربعات الدنيا ، فنجد التقديرات التي تجعل التابع Q في نهايته الصغرى حيث :

$$Q = \underset{j=1}{\overset{n}{S}} (y_j - b_0 - b_1 x_{1j} - \dots - b_r x_{rj}) \qquad (2)$$

ونرمز هنا بـ $y_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{rj}$ للملاحظة j أي القياس j المأخوذ للمتحولات $y, x_1, x_2, \dots, x_r$ ، على الترتيب . وإذا فرضنا أننا أخذنا n من القياسات ، أي أن الدليل j يتحول من 1 إلى n ، فإننا سنرمز للجمع فوق هذه القياسات من $j = 1$ إلى $j = n$ بالرمز $\underset{j=1}{\overset{n}{S}}$ ، ونحتفظ بالرمز المعتاد $\sum_{i=1}^{r}$ للجمع فوق المتحولات $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ أو بعبارة أخرى فوق المتحولات x_i

حيث يتحول i من 1 إلى r . وباشتقاق Q جزئياً بالنسبة لِ $b_0, b_1, b_2, ..., b_r$ ، على الترتيب ، ووضع هذه المشتقات مساوية للصفر ، نحصل على جملة المعادلات التالية وعددها $r + 1$:

$$
\begin{aligned}
Sy &= nb_0 + b_1sx_1 + b_2sx_2 + ... + b_rsx_r \\
Sx_1y &= b_0sx_1 + b_1sx_1^2 + b_2sx_1x_2 + ... + b_rsx_1x_r \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Sx_ry &= b_0sx_r + b_1sx_1x_r + b_2sx_2x_r + ... + b_rsx_r^2
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

وكل y أو $x_k (k = 1, 2, ..., r)$ نقصد بها y_j و x_{kj} . وكل s هي رمز لعملية جمع فوق j من $j = 1$ إلى $j = n$. فمثلاً $Sx_1y = \overset{n}{\underset{j=1}{S}} x_{1j}y_j$ $= x_{11}y_1 + x_{12}y_2 + \cdots + x_{1n}y_n$ (أي مجموع جداءات القياس الأول لِ x_1 بالقياس الأول لِ y والقياس الثاني لِ x_1 بالقياس الثاني لِ y حتى القياس n لِ x_1 بالقياس n لِ y) . و Sx_2x_r . مثلاً ، تعني .
$\overset{n}{\underset{j=1}{S}} x_{2j}x_{rj} = x_{21}x_{r1} + x_{22}x_{r2} + \cdots + x_{2n}x_{rn}$ (أي مجموع جداءات القياس الأول للمتحول x_2 بالقياس الأول للمتحول x_r والقياس الثاني لِ x_2 بالقياس الثاني لِ x_r حتى القياس n لِ x_1 بالقياس n لِ x_r) . وقد اختصرنا الدليل j لسهولة الطباعة . وإذا قسمنا المعادلة الأولى من (3) على n نجد أن :

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 - \cdots - b_k\bar{x}_k \qquad (4)$$

وهكذا يمكن تخفيض عدد المعادلات في (3) إلى r معادلة تحوي المجاهيل $b_1, b_2, ... b_r$ ، ذلك لأن العلاقة (4) تعبر عن b_0 بدلالة $b_1, b_2, ..., b_r$.
وعندما نحسب هذه الوسطاء يمكننا تعويضها في (4) للحصول على b_0 .
وإذا بدلنا في (2) b_0 بقيمتها نجد :

$$Q = \overset{n}{\underset{j=1}{S}}[(y_j - \bar{y}) - b_1(x_{1j} - \bar{x}_1) - \cdots - b_2(x_{2j} - \bar{x}_2)] \qquad (5)$$

وهي تحوي r من الوسطاء فقط هي $b_1, b_2, ..., b_r$. وهكذا يتضح لنا أنه كان يمكن منذ البداية أن نفترض $\mathcal{X}_i = x_i - \bar{x}_i$ ، $i = 1, 2, ..., r$ حيث $\bar{X}_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} / n$ ونكتب نموذج التراجع في (1) على الشكل :

(6)

$$y = \mu + \sum_{i=1}^{r} \beta_i x_i + \varepsilon = \bar{y} + \sum_{i=1}^{r} b_i x_i + e$$

حيث نقدر أمثال التراجع $b_1, ..., b_r$ بالاستفادة من عينة حجمها n من القياسات ($n \geqslant r+1$) التي نجريها على $y, x_1, ..., x_r$. (لنتذكر أن $\mathcal{X}_i = x_i - \bar{x}_i$)

وتمثل العلاقة الأولى من (6) النموذج التجريبي الحقيقي بدلالة الوسطاء μ و $\beta_1, ..., \beta_r$ ، والخطأ الحقيقي ع ، بينما تبدو العلاقة الثانية بدلالة تقديرات هذه الوسطاء (تقدير لِـμ) ويسمى الحيدان أو الخطأ e بالراسب ، وقياساً على ما رأيناه في حالة التراجع الخطي البسيط في الفصل السابق ، يمثل الراسب حيدان النقطة الملحوظة عن السطح ، أو بصورة أدق ، عن المستوى الذي تمثله معادلة التراجع $\hat{y} = \bar{y} + \sum_{i=1}^{r} b_i x_i$. ونحسب التقديرات b_i بجعل مجموع مربعات الخطأ :

(7)

$$SSE = Se^2 = S(y - \sum_{i=1}^{r} b_i x_i)^2$$

أصغر ما يمكن ، ($\mathcal{Y} = y - \bar{y}$)

ويمكن تلخيص الفرضيات التي ننطلق منها ، في تحليل التراجع الخطي بعدة متحولات وفي عمليات التقدير واختبار الفرضيات كما يلي :

١ ـ المقادير x_i ($i = 1, 2, ..., r$) متحولات مثبتة . وغالباً ما نختار قيماً متعمدة لها ثم نقيس قيمة المتحول y الموافقة .

٢ ـ من أجل قيم محددة للمتحولات x ولتكن هذه القيم $x'_1, x'_2, ...x'_r$ تتوزع قيم y' الموافقة وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي $E(y') = \mu + \sum_{i=1}^{r} \beta_i x'_i$ وتشتت σ^2. وسطح التراجع الملحوظ أو مستوى التراجع معرف بالمعادلة $\hat{y}' = \bar{y} + \sum b_i x'_i$ ونحتاج إلى فرضية التوزيع الطبيعي هذه فقط عندما

نريد وضع مجالات ثقة أو اختبار فرضيات .

٣ ـ يبقى للمتحول العشوائي y نفس التشتت σ^2 من أجل أية مجموعة من القيم نعطيها للمقادير x_i . وهذه الفرضية تدعى فرضية Homoscedasticity.

ومع أننا نقيس قيمة واحدة لِ y من أجل قيم معينة حددناها لِ x_i $(i = 1, ..., r)$ فيجب أن يبق مفهوماً أنه يوجد مجتمع طبيعي من قيم y التي كان يمكن أن نحصل على أي منها ، وأنه يوافق كل مجموعة من القيم نحددها للمقادير x_i ، مجتمع طبيعي من القيم لِ y . وأن الأخطاء ε_j، $j = 1, 2, ..., n$ حيث ε_j هو حيدان القيمة الملحوظة y_j عن مستوى التراجع الحقيقي ، هي متحولات عشوائية مستقلة فيما بينها ويتوزع كل منها وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت يساوي σ^2 . ولنتذكر أنه يمكن تطبيق النتائج في حدود قيم x_i المستخدمة في التحليل ، وليس من أجل جميع القيم الممكنة للمقادير x_i ، وأن أي تطبيق لها خارج تلك الحدود يجب أن يتم بحذر شديد .

وينبغي بناء المعادلة العامة للتراجع في مسألة ما بالاستناد إلى إطار نظري يقدمه باحث اختصاصي في الحقل الخاص بهذه المسألة . وفي العديد من الحالات لا تشكل مجموعة المتحولات المستقلة المعتمدة في مسألة معينة المجموعة المثلى من الوجهة النظرية البحتة ، ولكنها مع ذلك يمكن أن تشكل أفضل بديل تتوفر من أجله المعلومات الاحصائية . كما أن شكل نموذج التراجع ، وهو النموذج الخطي هنا ، قد لا يكون النموذج الأمثل للحالة المدروسة . ولكن سهولة الحسابات بالنسبة للنموذج الخطي تفوق الفائدة المتوخاة من استخدام نموذج أكثر دقة إلا أنه أكثر تعقيداً .

ولنعد الآن إلى المعادلة (7) ولنشتقها جزئياً بالنسبة لكل من الوسطاء b_k $(k = 1, ..., r)$ ولنضع كلاً من هذه المشتقات مساوياً للصفر فنحصل على r معادلة من النوع . :

$$b_1 Sx_k x_1 + b_2 Sx_k x_2 + ... + b_k Sx_k^2 + ... + b_r Sx_k x_r = Sx_k y. \qquad (8)$$

$(k = 1, 2, \ldots, r)$

ولتبسيط الكتابة لنفرض أن $Sx_i x_j = a_{ij}$ وأن $Sx_j y = g_i$ حيث $a_{ij} = a_{ji}$
فعندئذ يمكن كتابة مجموعة المعادلات في (8) على الشكل :

$$\begin{array}{l} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + \ldots + a_{1k} b_k + \ldots + a_{1r} b_r = g_1 \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \ldots + a_{2k} b_k + \ldots + a_{2r} b_r = g_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a \quad b_1 + a \quad b_2 + \ldots + a_{kk} b_k + \ldots + a_{kr} b_r = g_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1} b_1 + a \quad b_2 + \ldots + a_{rk} b_k + \ldots + a_{rr} b_r = g_r \end{array} \qquad (9)$$

وهي مجموعة من r معادلة في المجاهيل $b_1, b_2, \ldots, b_r$ وتسمى بالمعادلات الناظمية .

ويمكن حل هذه المجموعة من المعادلات بالطرق المعروفة في الجبر . كما يمكن للقارىء غير المزود بمعرفة رياضية كافية أن يتجاوز التفاصيل فيما تبقى من هذه الفقرة ويأخذ النتائج فقط .

ولحساب المجاهيل $b_1, \ldots, b_r$ باستخدام عكس المصفوفة لا بد من خطوة متوسطة نحسب فيها r^2 من الثوابت $\{c_{ij}\}$ $(i = 1, \ldots r \; , j = 1, \ldots, r)$
فلنفرض الآن أننا رتبنا العناصر a_{ij} و c_{ij} كما يلي:

$$A = \left| \begin{array}{l} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1r} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2r} \\ \hline a_{r1} \; a_{r2} \ldots a_{rr} \end{array} \right| \qquad C = \left| \begin{array}{l} c_{11} \; c_{12} \ldots c_{1r} \\ c_{21} \; c_{22} \ldots c_{2r} \\ \hline c_{r1} \; c_{r2} \ldots c_{rr} \end{array} \right|$$

وتسمى مثل هذه الترتيبات بالمصفوفات ، كما تسمى الكميات a و c بالعناصر . ونعرف العناصر c بأنها الأعداد التي تحقق الشروط :

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij} c_{jk} = \begin{cases} 1 & i = k . \\ 0 & i \neq k . \end{cases} \qquad (10)$$

وبعبارة أخرى فإن مجموع جداءات العناصر المتقابلة في صف من A وعمود من C يجب أن يساوي الواحد إذا كان للصف والعمود نفس الترتيب (أي الصف الأول من A والعمود الأول من C ، الصف الثاني من A والعمود الثاني من C وهكذا) ويساوي الصفر إذا لم يكن للصف والعمود نفس الترتيب . (مثلاً الصف الأول من A وأي عمود من C غير العمود الأول) .

وتسمى المصفوفة C عكس المصفوفة A ونقول أن جداءهما هو المصفوفة الواحدية I ، حيث I هي مصفوفة فيها r صفاً و r عموداً وجميع عناصرها صفر ما عدا العناصر التي تقع على طول القطر ، أي العناصر التي يكون لصفها وعمودها نفس الترتيب فتكون مساوية للواحد :

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

أي أن :

$$A.C. = I \qquad (11)$$

وبعد حساب عناصر المصفوفة C نحصل على المجاهيل b_k ، $k = 1, \dots, r$ كما يلي :

$$b_k = \sum_{j=1}^{r} c_{kj} g_j = \sum_{j=1}^{r} c_{kj} \, S x_j y \, , \quad k = 1, 2, \dots, r \qquad (12)$$

أي أن الوسيط b_k يساوي ، بصورة عامة ، إلى مجموع جداءات عناصر الصف k من المصفوفة C بالعناصر g وفق ورودها في الطرف الأيمن من المعادلات (9) .

ونرى من المعادلة (6) أن : $\bar{Y} = \mu + \sum_{i=1}^{r} \beta_i \bar{x}_i + \bar{\varepsilon} = \mu + \bar{\varepsilon}$

باعتبار أن متوسط الكمية $x_i = x_i - x_i$ يساوي الصفر . وأن $\bar{\varepsilon} = S\varepsilon/n$.

ومنه :

$$y = Y - \bar{Y} = \sum_{i=1}^{r} \beta_i x_i + \varepsilon - \bar{\varepsilon} , \qquad (13)$$

وبالاستفادة من أن $Sx_j x_i = a_{ji}$ ومن المعادلة (10) نكتب :

$$b_k = \sum_{j=1}^{r} c_{kj} \left[S x_j \left(\sum_{i=1}^{r} \beta_i x_i + \varepsilon - \bar{\varepsilon} \right) \right]$$

$$= \sum_i \left(\sum_j c_{kj} a_{ji} \right) \beta_i + \sum_j c_{kj} (S x_j \varepsilon) = \beta_k + \sum_j c_{kj} (S x_j \varepsilon)$$

وبما أن المتحولات ε مستقلة فيما بينها ويتوزع كل منها وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ^2 فنجد أن :

$$E(b_k) = \beta_k \qquad k = 1, 2, \dots, r \qquad (14)$$

أي أن b_k هو تقدير منصف لِـ β_k ؛ $k = 1, 2, \dots, r$.

ولدينا أيضاً :

$$V(b_k) = E\left[(b_k - \beta_k)^2\right] = E\left[\sum_j c_{kj} S x_j \varepsilon\right]^2$$

وإذا تذكرنا أن $S x_j \varepsilon = [x_{j1} \varepsilon_1 + x_{j2} \varepsilon_2 + \dots + x_{j\mu} \varepsilon_\mu + \dots + x_{jn} \varepsilon_n]$

ورمزنا بـ l_k للكمية $\sum_j c_{kj} S x_j \varepsilon$ فيمكن كتابة l_k على الشكل :

$$l_k = \sum_j c_{kj} \mathop{S}_{\mu=1}^{n} x_{j\mu} \varepsilon_\mu = \mathop{S}_{\mu=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r} c_{kj} x_{j\mu} \right) \varepsilon_\mu = \mathop{S}_{\mu=1}^{n} \omega_\mu \varepsilon_\mu$$

حيث $\omega_\mu = \sum_{j=1}^{r} c_{kj} x_{j\mu}$.وهكذا يكون :

$$V(b_k) = E(l_k)^2 = (S \omega_\mu^2) \sigma^2$$

ولكن :

$$S \omega_\mu^2 = S_\mu \left[\left(\sum_{j=1}^{r} c_{kj} x_{j\mu} \right) \left(\sum_{j'=1}^{r} c_{kj'} x_{j'\mu} \right) \right] = \sum_{j=1}^{r} \sum_{j'=1}^{r} c_{kj} c_{kj'} a_{jj'} = c_{kk}$$

باعتبار أن :

$$\sum_{j'=1}^{r} c_{kj'} a_{j'j} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

وأخيراً نجد :

$$V(b_k) = c_{kk} \cdot \sigma^2 \qquad k = 1, 2, \ldots, r \qquad (15)$$

ولحساب تمام التشتت بين أي زوج من التقديرات $b_1, b_2, \ldots, b_r$ نكتب وفقاً لتعريف تمام التشتت كما رأيناه في الفصل الرابع :

$$\operatorname{cov}(b_i, b_k) = E[(b_i - \beta_i)(b_k - \beta_k)]$$

$$= E\left[\left(\sum_{j=1}^{r} c_{ij} S x_j \varepsilon\right)\left(\sum_{j=1}^{r} c_{kj} S x_j \varepsilon\right)\right] = E[\ell_i \cdot \ell_k]$$

$$= E\left[\left(\underset{p=1}{\overset{n}{S}} w_{pi} \varepsilon_p\right)\left(\underset{p'=1}{\overset{n}{S}} w_{p'k} \varepsilon_{p'}\right)\right] = E\left[\underset{p}{S}\,\underset{p'}{S}\, w_{pi} w_{p'k} \varepsilon_p \varepsilon_{p'}\right]$$

$$= E\left[\underset{p}{S}\, w_{pi} w_{pk} \varepsilon_p^2\right] = \sigma^2 \underset{p}{S}\, w_{pi} w_{pk}$$

$$= \sigma^2 \underset{p}{S}\left[\left(\sum_{j=1}^{r} c_{ij} x_{jp}\right)\left(\sum_{j'=1}^{r} c_{kj'} x_{j'p}\right)\right] = \sigma^2 \left[\left(\sum_{j}\sum_{j'} c_{ij} c_{kj'}\right) \underset{p}{S}\, x_{jp} x_{j'p}\right]$$

$$= \sigma^2 \sum_{j}\sum_{j'} c_{ij} c_{kj'} a_{j'j} = \sigma^2 \sum_{j} c_{ij} \sum_{j'} c_{kj'} a_{j'j} = \sigma^2 c_{ik} ,$$

باعتبار أن :

$$\sum_{j'} c_{kj'} a_{j'j} = \begin{cases} 1 & j = k. \\ 0 & j \neq k. \end{cases}$$

وهكذا نكون قد برهنا أن :

$$\operatorname{cov}(b_i, b_k) = \sigma^2 c_{ik} \quad , \qquad i = 1, 2, \ldots, r, \quad j = 1,2, \ldots, r \quad (16)$$

ونستنتج من العلاقتين (15) و (16) ما يلي :

$$V(b_i - b_k) = V(b_i) - 2\operatorname{cov}(b_i, b_k) + V(b_k) = (c_{ii} - 2c_{ik} + c_{kk})\sigma^2 \qquad (17)$$

ويمكن كتابة مجموع مربعات الخطأ كما ذكرناه في المعادلة (7) كما يلي :

$$SSE = S\Big(y - \sum_{i=1}^{r} b_i . x_i\Big)^2 = Sy^2 - 2\Big(\sum_{i=1}^{r} b_i . Sx_i y\Big) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} b_i b_k Sx_i . x_k$$

$$= Sy^2 - \Big(\sum_{i=1}^{r} b_i . Sx_i y\Big) + \sum_{i=1}^{r} b_i \Big(\sum_{k=1}^{r} b_k Sx_i . x_k - Sx_i . y\Big) = Sy^2 - \Big(\sum_{i=1}^{r} b_i . Sx_i . y\Big) \quad (18)$$

ذلك لأن $\sum_{k=1}^{r} b_k Sx_i \, x_k = Sx_i . y$ أو $\sum_{k=1}^{r} b_k \, a_{ik} = g_i$ كما نرى من المعادلات الناظمية في (9) . وهذا يعني أن التخفيض في مجموع المربعات الكلي العائد للتراجع هو :

$$SSR = \sum_{i=1}^{r} b_i . Sx_i . y \equiv R^2 Sy^2 \qquad (19)$$

حيث تدعى R أمثال الترابط المتعدد . ويمكن البرهان على أن :

$$s^2 = SSE/(n - r - 1) \qquad E(SSE) = (n - r - 1)\,\sigma^2 \qquad (20)$$

وعندما تكون كل الوسطاء β_i مساوية للصفر ، أي $\beta_i = 0$ ،$(i = 1, 2, ..., r)$ نجد أن :

$$E(SSR) = r\sigma^2 \qquad (21)$$

وهكذا يمكن استخدام النسبة $F = SSR/rs^2$ لاختبار الفرضية الابتدائية :

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_r = 0$$

ونرفض الفرضية H_0 عند المستوى α إذا كان $F > F_\alpha(r, n-r-1)$ ونقبلها فيما عدا ذلك . أما جدول تحليل التشتت فنكتبه على الشكل :

جدول ١١ـ١ تحليل تشتت التراجع الخطي بعدة تحولات مستقلة

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	النسبة
التراجع	r	$SSR = R^2 Sy^2 \equiv \sum_{i=1}^{r} b_i g_i$	$MSR = \frac{SSR}{r}$	MSR/MSE
الانحراف حول التراجع أي الخطأ	$n-r-1$	$SSE = Sy^2 - R^2 Sy^2 = (1-R^2) Sy^2$	$s^2 = \frac{SSE}{n-r-1}$	
المجموع	$n-1$	$SST = Sy^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$		

وإذا رغبنا في معرفة ما إذا كان لِـ$(r - k)$الأخيرة من المتحولات المثبتة حصة هامة في مجمل التخفيض العائد للتراجع SSR . أي معرفة ما إذا كانت مساهمة المتحولات $X_r , \ldots , X_{k+2} , X_{k+1}$ في تخفيض مجموع مربعات الانحرافات الكلي هاماً أم لا . فيمكن حساب التخفيض العائد للمتحولات الـ k الأولى $x_1, x_2, \ldots, x_k$ باستخدام معادلة التراجع :

$$\hat{Y} = \bar{Y} + b'_1 x_1 + b'_2 x_2 + \cdots + b'_k x_k \quad (22)$$

وسنرمز لهذا التخفيض بِـ SSR_k . وعندئذ يكون التخفيض المطلوب أي التخفيض العائد للـ $(r - k)$ الأخيرة من المتحولات x_i هو الفرق $(SSR - SSR_k)$.
وتوقع هذا الفرق تابع في $\beta_r , \ldots , \beta_{k+1}$ فقط ، أي لا يحوي أياً من الوسطاء الـ k الأولى $\beta_k , \ldots , \beta_2 , \beta_1$. وبالتالي يمكن اختبار الفرضية $\beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \cdots = \beta_r = 0$ دون أن نقول شيئاً حول المتحولات الـ k الأولى $X_1, \ldots, X_k$. وتحليل التشتت في هذه الحالة مبين في الجدول (١١-٢) .

جدول ١١ـ٢ تحليل التشتت من أجل اختبار الفرضية $\beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \cdots = \beta_r = 0$

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	النسبة F
التراجع	r	$SSR = \sum_{i=1}^{r} b_i g_i$	$5SR = SSR/r$	
التخفيض العائد للمتحولات الـ الأولى	k	SSR_k		
التخفيض الذي تضيفه المتحولات الـ الباقية	$r - k$	$SSR - SSR_k$	$(SSR - SSR_k) / (r \quad k)$	$F = \frac{SSR - SSR_k}{s^2 (r-k)}$
الخطأ	$n - r - 1$	$SSE = Sy^2 - SSR$	$s^2 = SSE / (n - r - 1)$	
المجموع	$n - 1$	$SST = Sy^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$		

وتحت الفرضية :

$$H_0 : \beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \dots = \beta_r = 0$$

يكون توقع الكمية $(SSR - SSR_k) / (r - k)$ هو σ^2 وبالتالي يمكن اختبار الفرضية H_0 باستخدام النسبة :

$$F = \frac{SSR - SSR_k}{s^2(r - k)} \tag{23}$$

ونرفض H_0 عند المستوى α إذا كان $F > F_\alpha(r-k, n-r-1)$ ونقبلها فيما عدا ذلك .

١١ــ٢ طريقة دوليتل الحسابية لعكس مصفوفة : سنوضح الطريقة من خلال مثال يحوي أربعاً من المتحولات المثّبتة $(r = 4)$ ، مستخدمين بياناً إحصائياً تم جمعه لتقدير كمية الفيتامين B_2 في أوراق اللفت الخضراء (y) مقدرة بالميلليغرام في كل غرام ، وذلك من خلال معرفة (x_1) اشعاع الشمس خلال نصف اليوم الفائت مقدراً بالغرام حريرة النسبي في السنتمتر مربع في الدقيقة ، و (x_2) معدل رطوبة التربة ، و (x_3) درجة حرارة الهواء مقدرة بالفهرنهايت ، و (x_4) وهو جداء المتحولين x_1 و x_2 أي $x_4 = x_1 x_2$. وتتألف التجربة من أخذ 27 مجموعة من الملاحظات على هذه المتحولات . ولتبسيط الحسابات تم تعديل سلالم القياس بحيث قُسمت كل من قيمتي x_1 و x_2 على 100 ، وقسمت قيمه x_3 على 10 ، أما x_4 فقسمت قيمتها على 10000 . ومن المستحسن بصورة عامة تغيير سلم القياس في البيان الاحصائي الأصلي بحيث تنخفض قيم $a_{ij} = SX_iX_j$ إلى ما بين 1 و 10 إذا أمكن ذلك . ويبين الجدول (١١ــ٣) البيان الاحصائي بعد تغيير سلم القياس .

جدول ١١ــ٣ تجربة تقدير كمية الفيتامين B_2

y	x_1	x_2	x_3	x_4
110.4	1.76	0.070	7.8	.123
102.8	1.55	.070	8.9	.108
101.0	2.73	.070	8.9	.191
108.4	2.73	.070	7.2	.191
100.7	2.56	.070	8.4	.179
100.3	2.80	.070	8.7	.196
102.0	2.80	.070	7.4	.196
93.7	1.84	.070	8.7	.128
98.9	2.16	.070	8.8	.151
96.6	1.98	.020	7.6	.039
99.4	.59	.020	6.5	.011
96.2	.80	.020	6.7	.016
99.0	.80	.020	6.2	.016
88.4	1.05	.020	7.0	.021
75.3	1.80	.020	7.3	.036
92.0	1.80	.020	6.5	.036
82.4	1.77	.020	7.6	.035
77.1	2.30	.020	8.2	.046
74.0	2.03	.474	7.6	.962
65.7	1.91	.474	8.3	.905
56.8	1.91	.474	8.2	.905
62.1	1.91	.474	6.9	.905
61.0	.76	.474	7.4	.360
53.2	2.13	.474	7.6	1.009
59.4	2.13	.474	6.9	1.009
58.7	1.51	.474	7.5	.715
58.0	2.05	.474	7.6	.971
2273.5	50.16	5.076	206.4	9.460 المجموع

والمصفوفات A و G و B هي :

$$A = \begin{vmatrix} 10.25767 & .03798 & 6.87167 & 1.17904 \\ & 1.11550 & -.06320 & 1.99828 \\ & & 15.94667 & .166956 \\ & & & 3.94418 \end{vmatrix}$$

$$G = \begin{vmatrix} 31.6650 \\ -86.8374 \\ 46.7156 \\ -152.8797 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix}$$

وكما رأينا سابقاً نرمز للعنصر من المصفوفة A الواقع في الصف i والعمود j بالرمز a_{ij} كما نرمز للعنصر من المصفوفة G التي تحوي في هذا المثال أربعة صفوف وعموداً واحداً بالرمز g_i ، أما عناصر المصفوفة B فهي تقديرات أمثال التراجع ، أي تقديرات الوسطاء $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ وسنقدم في هذه الفقرة والفقرة القادمة طريقتين حسابيتين لعكس مصفوفة . أولهما طريقة دوليتل والثانية طريقة دوليتل المختصرة وتدعى ، غالباً ، بطريقة غوس ـ دوليتل .

الخطوات المتبعة في الحسابات والمبينة في الجدول (١١ـ٤) هي وفقاً للترتيب الوارد في الجدول كما يلي :

I المصفوفة الأصلية A على اليسار ، والمصفوفة الواحدية I على اليمين ، والعمود الأخير يدعى الميزان ، ويمثل مجموع كل العناصر في كل صف من صفوف الجدول . وفي جميع الحسابات التي سنذكرها تسري نفس الطريقة أو الإجراء على عناصر عمود الميزان مثلها مثل بقية عناصر الجدول . وإذا قمنا بالحسابات بصورة صحيحة فإن مجموع عناصر كل صف من صفوف الجدول الناتجة عن تطبيق الخطوات الحسابية التالية يجب أن يساوي العنصر الموافق لهذا الصف من عمود الميزان .

II نقسم كل صف على العنصر الأخير من هذا الصف وهو هنا العنصر الواقع في العمود x_4 من المصفوفة A . ونحتفظ عند الحسابات بخمسة أرقام

عشرية على الأقل ويُفضل الاحتفاظ بستة أرقام عشرية في جميع أعمال القسمة . ولنتذكر أن المهم في النتيجة هو عدد الأرقام الهامة وليس عدد المنازل العشرية .

III نطرح السطر الأخير من جميع السطور الأخرى ، حاذفين العمود x_3 نهائياً من المصفوفة الواقعة على اليسار .

IV نقسم على عناصر العمود الأيمن من المصفوفة الجديدة التي تشكلت على اليسار .

V نطرح ثانية السطر الأخير من السطور الباقية ونحذف الآن العمود x_3 .

VI ، VII نكرر نفس العملية .

VIII يعطي السطر الأول قيم c_{1j} أي $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$ والتي تنتج بقسمة العناصر في VII على العنصر الواقع في اليسار ، 9.20326 – .

IX للحصول على القيم c_{2j} نبدل قيم c_{1j} في أي من سطور المصفوفة اليسرى الموافقة للخطوة VI ، وذلك كما يلي :

لنأخذ كمثال c_{21} فنكتب :

$$C_{21} = \left\{ \begin{array}{c} -2.01565 - (-14.08052)(.219015) \\ \text{أو} \\ 0 - (-4.87726)(.219015) \end{array} \right\} = 1.06819.$$

ولنلاحظ أن c_{12} يجب أن تساوي c_{21} فيما عدا الخلاف الناشيء عن تدوير الأرقام العشرية .

$$C_{22} = \left\{ \begin{array}{c} 0 - (-14.08052)(1.06819) \\ \\ (9.83081 - (-4.87726)(1.06819) \end{array} \right\} = 15.04066.$$

X نبدل بعدها قيم c_{1j} و c_{2j} في أي من سطور المصفوفة الموافقة للخطوة IV ونحسب c_{3j} بنفس الطريقة التي حصلنا فيها على c_{2j} في الخطوة IX

السابقة . وعلى سبيل المثال يمكن حساب c_{31} بأي من الأشكال الثلاثة :

$$c_{31} = \begin{cases} .146590 - (1.45200)\ (.219015) - (-\ .081998)\ (1.06819 = -\ .083830. \\ 0 - (3.78493)\ (.219015) - (-\ .697558)\ (1.06819) = -.083832 \\ 0 - (.42798)\ (.219015) - (-.009272)\ (1.06819) = -.083830. \end{cases}$$

ونلاحظ أن الطريقتين الأولى والثالثة تؤديان إلى نفس النتيجة ولست منازل عشرية بينما تختلف الثانية بمقدار طفيف جداً عنهما . كما نلاحظ أن

$$c_{31} = c_{13}$$

وبصورة عامة نقول أن المصفوفة متناظرة إذا كان العنصر الواقع في الصف i والعمود j يساوي العنصر الواقع في الصف j والعمود i وبعبارة أخرى تكون عناصر الصف والعمود اللذين لهما نفس الترتيب متساوية مثنى مثنى فعناصر الصف الأول تطابق على الترتيب عناصر العمود الأول وهكذا ، ونلاحظ أن المصفوفة A تكون دائماً متناظرة وبالتالي فإن عكسها أي المصفوفة C تكون متناظرة أيضاً وعندما نحسب في الخطوة VIII الصف الأول من المصفوفة C أي $c_{11}, c_{12}, c_{13}\ c_{14}$ نكون بنفس الوقت قد حسبنا العمود الأول أي $c_{11}, c_{21}, c_{31}, c_{41}$. والخطوات في IX وما بعدها تستهدف حساب العناصر التي لم يتم حسابها بعد فقط . في هذه الخطوة مثلاً لانضطر لحساب c_{21} وإنما نحسب فقط c_{22}, c_{23}, c_{24} وفي الخطوة X نحسب c_{34} ، c_{33} فقط أما في الخطوة XI فنحسب c_{44} باعتبار أن $c_{41} = c_{14}$ ، $c_{42} = c_{24}$ ، $c_{43} = c_{34}$ وقد تمّ حسابها في الخطوات السابقة .

XI نبدل الآن قيم c_{1j} ، c_{2j} ، c_{3j} في أي من سطور المصفوفة اليسرى الموافقة للخطوة II ونستنتج عناصر الصف c_{4j} .وعلى سبيل المثال :

$$c_{41} = \begin{cases} 848148 - 8.70002\ c_{11} - .032213\ c_{12} - 5.82819\ c_{31} = -\ .603125. \\ 0 \qquad - .019006\ c_{11} - .558230\ C_{21} + .031627 c_{31} = -.603110 \\ 0 \quad - 41.15857\ c_{11} + .378543\ c_{21} - 95.51421\ c_{31} = -\ .603128. \\ 0 \quad - .298932\ c_{11} - .506640\ c_{21} - .042331\ c_{31} = -\ .603111. \end{cases}$$

جدرل ١١ـ٤ طريقة دوليتل لحساب عكس مصفوفة

المصفوفة A — TABLE 15.2 — المصفوفة الواحدية

	A matrix				Identity matrix				الميزان
	x_1	x_2	x_3	x_4	(1)	(2)	(3)	(4)	
I	10.25767	.03798	6.87167	1.17904	1	0	0	0	19.34636
	.03798	1.11550	−.06320	1.99828	0	1	0	0	4.08856
	6.87167	−.06320	15.94667	.166956	0	0	1	0	23.92210
	1.17904	1.99828	.166956	3.94418	0	0	0	1	8.28846
II	8.70002	.032213	5.82819	1	.848148	0	0	0	16.40857
	.019006	.558230	−.031627	1	0	.500430	0	0	2.04604
	41.15857	−.378543	95.51421	1	0	0	5.98960	0	143.28384
	.298932	.506640	.042331	1	0	0	0	.253538	2.10144
III	8.40109	−.474427	5.78586		.848148	0	0	−.253538	14.30713
	−.279926	.051590	−.073958		0	.500430	0	−.253538	−.055402
	40.85964	−.885183	95.47188		0	0	5.98960	−.253538	141.18240
IV	1.45200	−.081998	1		.146590	0	0	−.043820	2.47277
	3.78493	−.697558	1		0	−6.76641	0	3.428135	.74910
	.42798	−.009272	1		0	0	.062737	−.002656	1.47879
V	1.02402	−.072726			.146590	0	−.062737	−.041164	.99398
	3.35695	−.688286			0	−6.76641	−.062737	3.430791	−.72969
VI	−14.08052	1			−2.01565	0	.862649	.566015	−13.6675
	−4.87726	1			0	9.83081	.091150	−4.98454	1.06016
VII	−9.20326				−2.01565	−9.83081	.77150	5.55056	−14.7276
VIII	$(1)c_{11}$	c_{12}	c_{13}	c_{14}	.219015	1.06819	−.083829	−.603108	1.60027
IX	c_{21}	$(1)c_{22}$	c_{23}	c_{24}	1.06819	15.04066	−.317707	−7.92605	8.86519
X	c_{31}	c_{32}	$(1)c_{33}$	c_{34}	−.083829	−.317707	.095668	.181973	.87610
XI	c_{41}	c_{42}	c_{43}	$(1)c_{44}$	−.603108	−7.92605	.181973	4.44178	−2.90543
XII	g_i				31.6650	−86.8374	46.7156	−152.8797	
XIII	b_i				2.4631	−75.3773	1.5836	−1.3769	
XIV	$s(b_i) = \sqrt{c_{ii}s^2}$				4.7251	39.1567	3.1229	21.2790	
XV	t				< 1	1.93	< 1	< 1	
XVI	SSR = 6,908.04; SSE = 2,242.49; s^2 = 101.93								

ونلاحظ ،هنا قيمتين فيهما بعض الجنوح بينما تتفق تقريباً القيمتان الباقيتان (الثانية والرابعة) وتتوافقان بدورهما مع قيمة c_{14} كما تقضي خاصة التناظر. ومن المستحسن بصورة عامة الا نستخدم السطر الأول أو الثالث لأن عدداً من العناصر التي تحويها كبيرة جداً نسبياً . والأمثال الكبيرة (مثل 41. و 95. في المعادلة الثالثة) تخضع أكثر بكثير للخطأ الناشيء عن تدوير الأرقام العشرية ، ذلك لأننا نحتاج فيهما إلى أرقام إضافية حتى نحافظ على دقة من مرتبة ست منازل عشرية . وبعبارة أخرى عندما نحاول حساب c_{41} لست منازل عشرية فإن العوامل الداخلة في الحساب يجب أن تكون كلها محسوبة لست منازل عشرية . ولكن من أجل أرقام مثل 41. و 95. نحتاج إلى الاحتفاظ بثمانية أرقام هامة لكي يبقى لدينا ست منازل عشرية ، ولا نستطيع الاحتفاظ بثمانية أرقام هامة في حساباتنا ما لم نحتفظ بعدد أكبر من الأرقام الهامة في المصفوفة الأصلية A . ويخلق تدوير الأرقام العشرية مشاكل في حسابات عكس مصفوفة ولذلك فإنه من المستحسن حمل عدة أرقام غير ضرورية في البداية لكي تمكننا فيما بعد من الاستغناء عن عدد منها بحيث ننتهي بالعدد من المنازل العشرية التي نراها ضرورية .

وفي مثالنا نكون قد حصلنا مع نهاية الخطوة XI على المصفوفة C وهي عكس المصفوفة A . وإذا أردنا الحصول على تحقيق إضافي إلى جانب عمود الميزان ، فيمكننا حساب الجداء AC حسب قاعدة ضرب مصفوفتين ، ثم نتحقق من أن النتائج تساوي على وجه التقريب ، وفي حدود الدقة التي أردناها للحسابات،المصفوفة الواحدية I . ولحساب العنصر j i من المصفوفة الناتجة عن ضرب A و C نحسب مجموع جداءات العناصر المتقابلة في الصف i من A والعمود j من C . وهكذا نكتب :

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} c_{kj}$$

ونحسب الآن العناصر القطرية في المصفوفة ، لنرى فيما إذا كانت مساوية

(ضمن حدود الدقة المطلوبة) للواحد :

$d_{11} = (10.25767)\ (.219015) + \ldots + (1.17904)\ (-.603108) = 1.0000198,$
$d_{22} = (.03798)\ (1.06819) + \ldots + (1.99828)\ (-7.92605) = 1.0000380,$
$d_{33} = 1.0000014,$
$d_{44} = 1.0000057.$

وتقع القيمتان الأخيرتان ضمن الدقة المرغوبة وهي خمس منازل عشرية ، إلا أن d_{11} و d_{22} تقع في حدود أربع منازل عشرية فقط . وهكذا يجب ألا نأمل في دقة تتجاوز الأربع منازل عشرية في حساب التقديرات b إذا استخدمنا المصفوفة الناتجة C .

XII نحسب الآن عناصر المصفوفة G أي $g_i = SX_i y$, $i = 1, 2, \ldots, r$

XIII نحصل على التقديرات b_i باستخدام العلاقة :

$$b_i = \sum_{i=1}^{4} c_{ij}\, g_j$$

وعلى سبيل المثال :

$b_1 = (.219015)\ (31.6650) + \ldots + (-.603108)\ (-152.8797) = 2.4631$

ومن المستحسن في هذه المرحلة ، إما إعادة حساب التقديرات b_i للتأكد من عدم وجود خطأ في الحساب ، أو التحقق من صحة الحساب بتعويض قيم b_i في المعادلات الناظمية الأصلية ، والتأكيد من أنها تحقق هذه المعادلات . فمثلاً :

$$10.25767 b_1 + \ldots + 1.7904 b_4 = 31.6650.$$

وبتعويض قيم b_i نجد أن الطرف الثاني يساوي 31.6614 مما يشير إلى نقص بسيط في الدقة . ويمكن الحصول على قيم أكثر دقة لِ b_i باستخدام المصفوفة C'' كما سنبين بعد قليل .

XIV $$SSR = \sum_{i=1}^{4} b_i g_i = b_1 g_1 + b_2 g_2 + b_3 g_3 + b_4 g_4$$

$= (2.4631)\ (31.6650) + \ldots + (-1.3769)\ (-152.8797) = 6908.04$

$SSE = Sy^2 - SSR = 9150.53 - 6908.04 = 2242.49$
$s^2 = SSE / (n - r - 1) = 2242.49 / (27 - 4 - 1) = 101.93$

XV الانحراف المعياري للتقدير b_i هو $s(b_i) = \sqrt{c_{ii} s^2}$ ، $(i = 1, 2, 3, 4)$

XVI $t = \dfrac{|b_i|}{s(b_i)}$

وإذا رغبنا في تحسين النتائج إلى عدد أكبر من الأرقام الهامة فيمكن استخدام طريقة هو تيلنج والطريقة كما يلي :

(1) نحسب المصفوفة $(2 - AC)$ الذي نحصل عليه بطرح العناصر القطرية في المصفوفة AC من 2 وتغيير إشارة العناصر الباقية .

$$2 - AC = \begin{vmatrix} .9999802 & -.0000771 & .0000044 & .0000195 \\ -.0000035 & .9999620 & -.0000008 & -.0000046 \\ -.0000033 & -.0000092 & .9999986 & -.0000124 \\ -.0000079 & -.0000778 & -.0000013 & .9999943 \end{vmatrix}$$

(2) نحسب الآن جداء C بالمصفوفة الجديدة $2 - AC$ ولنرمز للمصفوفة الناتجة بـ C'' ، أي $C'' = C(2 - AC)$. وتكون C'' هي البديل المطلوب للمصفوفة C ، ونستخدمها لحساب قيم التقديرات b وسنرمز لها بـ b''_i ، $i = 1, 2, 3, 4$.

(3) $b''_i = \sum_{i=1}^{4} c''_{ij} g_j$ ونجد :

$b''_i = [\ 2.46332 \quad -75.3747 \quad 1.58369 \quad -1.37645]$

(4) وبتبديل هذه القيم لـ b''_i في المعادلات الناظمية نجد أنها تحققها بشكل أفضل من قيم b_i التي حسبناها في الخطوة XIII . إذ نجد هنا القيم التالية للطرف الأيمن من المعادلات الناظمية :

$[\ 31.6649 \quad -86.8375 \quad 46.7156 \quad -152.8800]$

بالمقارنة مع القيم المضبوطة وهي :

$[\ 31.6650 \quad -86.8374 \quad 46.7156 \quad -152.8797]$

(5) إذا استخدمنا هذه القيم لـ b''_i نجد أن $SSR = \sum b''_i g_i = 6907.76$ بالمقارنة

مع 6908.04 التي وجدناها سابقاً في الخطوة XIV . وهكذا فإنه لا توجد فروق تُذكر في النتائج نتيجة استخدام التقديرات b_i الأقل دقة .

۱۱ــ۳ طريقة دوليتل المختصرة : سنقدم الآن طريقة مختصرة لحساب عكس مصفوفة متناظرة . $(a_{ij} = a_{ji})$.

جدول ۱۱ــ٥ طريقة دوليتل المختصرة لحساب عكس مصفوفة متناظرة

	x_1	x_2	x_3	x_4	y	الميزان
I	10.25767	.037980	6.87167	1.17904	31.6650	50.0114
		1.11550	−.063200	1.99828	−86.8374	−83.7488
			15.94667	.166956	46.7156	69.6377
				3.94418	--152.8797	−145.5912
II A_1	10.25767	.037980	6.87167	1.17904	31.6650	50.0114
B_1	1	.00370260	.669906	.114942	3.08696	4.87551
III A_2		1.11536	−.088643	1.99391	−86.9546	−83.9340
B_2		1	−.079475	1.78768	−77.9610	−75.2528
IV A_3			11.33625	−.464424	18.5923	29.4641
B_3			1	−.040968	1.64007	2.59910
				.22516	−.3104	−.0852
				1	−1.3786	−.3784

الحل التراجعي من أجل (c_{ij})

c_{1j}	.219003	1.06806	−.0838254	−.603037
c_{2j}		15.03894	−.317667	−7.92514
c_{3j}			.0956668	.181951
c_{4j}				4.44129

ونوضح فيما يلي الخطوات المتبعة في حسابات طريقة دوليتل المختصرة :

I نكتب من المصفوفة A القطر والجزء الأعلى الأيمن (أي الجزء الواقع

... القطر) بالإضافة إلى العمود G $(g_i = SX_iy)$ ، وعمود الميزان . وفيما ... عمود الميزان نفترض أن جميع عناصر المصفوفة A موجودة . أي أن ... الصف يتضمن جمع عناصر الجزء الغائب من A وهو الجزء الأيسر ... ونظير الجزء الأيمن العلوي بالنسبة للقطر . وسنرمز لعناصر الجزء الموجود ... الجدول (11.5) بـ a_{ij} .

II $A_{1j} = a_{1j}$ أي أن الصف الأول من I يبقى بدون تغيير .

$$B_{1j} = A_{1j} / A_{11} = A_{1j} / 10.25767.$$

III $A_{2j} = a_{2j} - [A_{12}\,B_{1j}$ أو $A_{1j}\,B_{12}]$ ، حيث ترمز a_{2j} لعناصر الصف الثاني من I ، و $A_{12}\,B_{1j} = A_{1j}\,B_{12}$ باستثناء ما يعود للخطأ الناتج عن تدوير الأرقام العشرية ، وكما رأينا عند التعليق على أخطاء التدوير في الفقرة السابقة فمن المستحسن هنا أن نختار بين $A_{12}\,B_{1j}$ أو B_{12} A_{1j} ذلك الذي يكون عنصراه أقرب إلى بعضهما .

$$A_{22} = 1.11550 - (.037980)\,(.0037026) = 1.11536.$$
$$A_{23} = -.063200 - \begin{cases}(.037980)\,(.669906) = -0.088643.\\ (.0037026)\,(6.87167) = -0.088643.\end{cases}$$

$$B_{2j} = A_{2j} / A_{22}.$$

IV $A_{3j} = a_{3j} - (A_{13}\,B_{1j} + A_{23}\,B_{2j}) = a_{3j} - (A_{1j}\,B_{13} + A_{2j}\,B_{23})$

$$A_{33} = 15.94667 - [(6.87167)\,(.669906) + (-.088643)\,(-.079475) = 11.33625$$

$$A_{34} = .166956 - \begin{cases}(6.87167)\,(.114942) + (-.088643)\,(1.78768) \\ = -0.464422 \\ (1.17904)\,(.669906) + (-.079475)\,(1.99391) \\ = -0.464424\end{cases}$$

$$B_{3j} = A_{3j} / A_{33}.$$

V $A_{4j} = a_{4j} - (A_{14}\,B_{1j} + A_{24}\,B_{2j} + A_{34}\,B_{3j})$

$$= a_{4j} - (A_{1j}\,B_{14} + A_{2j}\,B_{24} + A_{3j}\,B_{34}).$$

$$A_{44} = 3.94418 - [(1.17904)\,(.114942) + (1.99391)\,(1.78768) + (.464424)\,(.040968)] = 0.22516$$

$$B_{4j} = A_{4j} / A_{44}$$

وإذا اقتصرت رغبة المجرب على حساب التقدير ات (b_i) والتخفيض الاجمالي في مجموع المربعات العائد للتراجع أي SSR دون الاهتمام بـ $s^2\,(b_i)$ و$s\,(b_i\,b_j)$، فيمكنه إتمام حساباته دون تحديد عكس المصفوفة A ، وذلك كما يلي :

$$
\begin{aligned}
b_4 &= B_{4y} = -1.3786. \\
b_3 &= B_{3y} - B_{34}\,b_4 = 1.64007 + (.040968)\,(-1.3786) = 1.5836. \\
b_2 &= B_{2y} - B_{23}\,b_3 - B_{24}\,b_4 = -77.9610 - (-.07475)\,(1.5836) \\
&\quad - (1.78768)\,(-1.3786) = -75.3706. \\
b_1 &= B_{1y} - B_{12}\,b_2 - B_{13}\,b_3 - B_{14}\,b_4 = 3.08696 - (.0037026) \\
&\quad (-75.3706) - (.669906)\,(1.5836) - (.114942)\,(-1.3786) = \\
&= 2.4636.
\end{aligned}
$$
٧١

$$SSR=\sum_{i=1}^{4} b_i\,(Sx_i y)=(2.4636)(31.6650)+\cdots+(-1.3786)(-152.8797)=6907.74$$

ويمكن البرهان على أنه يمكن كتابة SSR على الشكل $SSR=\sum_i A_{iy}\,B_{iy}$ وفي مثالنا هنا نجد :

$$SSR=\sum_{i=1}^{4} A_{iy}\,B_{iy}=(31.6650)(3.08696)+\cdots+(-.3104)(-1.3786)=6907.74$$

وإذا قرر المجرب حذف المتحولات الـ k الأخيرة مثلاً فإن طريقة دوليتل المختصرة توفر عليه الجهد الذي يتطلبه كتابة النموذج في (1) بحيث يتضمن المتحولات المثبتة الـ $(r-k)$ الأولى فقط ثم إجراء الحسابات كلها من جديد . وهكذا فإننا إذا حذفنا المتحولات الـ k الأخيرة تبقى كل الحسابات المتعلقة بالمتحولات الـ $(r-k)$ الأولى بدون تغيير ، ونادراً ما يعرف المجرب ، بالطبع ، أي المتحولات ستكون غير ضرورية قبل إجراء التحليل . إلا أنه توجد حالات تكون فيها بعض المتحولات المستقلة باهظة التكاليف أو صعبة القياس بحيث يميل المجرب إلى الاستغناء عنها . في مثل هذه الحالة يمكن أن يضع المجرب هذه المتحولات كآخر متحولات في النموذج ويحذفها بعد التحليل إذا تبين

له أنها لا تسهم بشيء هام في SSR . وعلى سبيل المثال ، فإن المساهمة التي يضيفها المتحولان x_3 و x_4 أعلاه إلى SSR هي $30.91 = (A_{3y} B_{3y} + A_{4y} B_{4y})$ بدرجتين من الحرية .

وإذا كان الباحث في حاجة إلى عكس المصفوفة A أي المصفوفة C فإن الحسابات تتم كما يلي :

VII نحسب أولاً قيم c_{j4} $(i = 1, 2, 3, 4)$.

$$c_{44} = 1 / A_{44} = 1/ .22516 = 4.44129.$$
$$c_{34} = - c_{44} B_{34} = -(4.44129)\ (-.040968) = .181951.$$
$$c_{24} = - c_{34} B_{23} - c_{44} B_{24} = (.181951)\ (.079475) - (4.44129)\ (1.78768) = - 7.92514$$
$$c_{14} = - c_{24} B_{12} - c_{34} B_{13} - c_{44} B_{14} = -.603037.$$

ونتحقق من صحة الحسابات بحساب $a_{14} c_{14} + \dots + a_{44} c_{44} = .99997$ ومقارنة الناتج مع الواحد .

VIII قيم c_{j3}

$$c_{43} = c_{34} = .181951.$$
$$c_{33} = 1/A_{33} - c_{34} B_{34} = .0882136 - (.181951)\ (-.040968) = .0956668$$
$$c_{23} = - c_{33} B_{23} - c_{34} B_{24} = (.0956668)\ (.079475) - (.181951)\ (1.78768) = - .317667.$$
$$c_{13} = - c_{23} B_{12} - c_{33} B_{13} - c_{34} B_{14} = -.0838254.$$

ونتحقق بنفس الطريقة من صحة الحسابات بحساب :

$$a_{13} c_{13} + \dots + a_{43} c_{43} = 1.0000008.$$

IX قيم c_{j2}

$$c_{42} = c_{24} = - 7.92514,\ c_{32} = c_{23} = - .317667,$$
$$c_{22} = 1/A_{22} \quad c_{23} B_{23} - c_{24} B_{24}$$
$$= .8965715 - (-.317667)\ (-.079475) + (7.92514)\ (1.78768)$$
$$= 15.03894.$$
$$c_{12} = - c_{22} B_{12} - c_{23} B_{13} - c_{24} B_{14} = 1.06806.$$

ولدينا هنا :

$$c_{12} \quad a_{12} + \ldots + c_{42}\, a_{42} = .99993 \qquad X$$

$$c_{11} = 1/A_{11} - c_{12}\, B_{12} - c_{13}\, B_{13} - c_{14}\, B_{14}$$

$$= .0974880 - (1.06806)\,(.0037026) + (.0838254)\,(.669906)$$

$$+ (.603037)\,(.114942) = .219003,$$

و

$$c_{11}\, a_{11} + \ldots + c_{41}\, a_{41} = 1.0000002.$$

XI والحسابات المتعلقة بالتقديرات b_i ، SSR ، و $s^2(b_i)$ تجري كما رأينا في الفقرة السابقة . .

$$b_i = [2.46334 \quad -75.3693 \quad 1.58356 \quad -1.37975],\ SSR = 6907.79$$

ويمكن مقارنة قيم b هنا مع القيم التيحسبناهافي VI . ومع أن بعض قيم b_i ليست جد دقيقة فإن SSR تختلف قليلاً ، وفي الرقم العشري الأخير. ويمكن استخدام طريقة هويتلنج ، هنا أيضاً ، لتحسين دقة المصفوفة C . وإذا كان من المعروف سلفاً أننا نحتاج إلى المصفوفة C فيمكن وضع المصفوفة الواحدية على يمين الجدول (١١ـ٥) ، تماماً كما في طريقة دوليتل الموصوفة في الفقرة السابقة ، وإتمام نفس الخطوات من I إلى VI المذكورة أعلاه .

١١ـ٤ تحليل النتائج : ينظر الباحث ، بصورة عامة ، إلى التراجع البسيط لِـ y على كل من المتحولات المثبتة x للحصول على فكرة بسيطة عن مدى فائدة كل منها . ولو أن المجرب قام أولاً بملاءمة نموذج تراجع بسيط لِـ y بدلالة المتحول x_2 فقط لاكتشف أن العلاقة بين y و x_2 هامة جداً ، ومع ذلك فإننا لو اختبرنا الفرضية $\beta_2 = 0$ ، مستخدمين المتحولات الأربع ، لما توصلنا إلى قيمة هامة لإحصاء الاختبار t ، أي لما وجدنا دلالة كافية لرفض هذه الفرضية . فلدينا هنا : $t = \dfrac{|b_2|}{s(b_2)} = |b_2| / \sqrt{c_{22}\, s^2}$

$$= |-75.3747| / \sqrt{(15.040626)(101.93)} = 1.92$$

بينما $t_{05}\ (22) = 2.074$. وسيزداد المجرب حيرة عند دراسته لتحليل التشتت التالي من أجل المتحولات الأربعة بعد أن أضفنا إليه سطراً يتعلق بالتراجع البسيط لِ y على x_2 بمفردها :

جدول ١١ـ٦ تحليل التشتت من أجل البيان الاحصائي في الجدول (١١ـ٣)

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	النسبة F
التراجع (مستخدمين المتحولات الأربعة)	4	6907.76	1726.94	16.94
التراجع (مستخدمين X_2 فقط) .	1	6759.98	6759.98	
التخفيض العائد لِ x'_1 ، x_3 ، x_4	3	147.78	49.26	
الخطأ	22	2242.77	101.94	
المجموع	26	9150.53		

ونجد من هذا التحليل أن التخفيض الإجمالي العائد لاستخدام معادلة التراجع التي تحوي المتحولات الأربع x_1, x_2, x_3, x_4 هو تخفيض هام لدرجة عالية :

$$F = \frac{1726.94}{101.94} = 16.94$$

بينما $F_{05}\ (4,22) = 2.82$. كما نلاحظ أن التخفيض العائد للمتحولات الثلاثة x_1, x_3, x_4 غير هام البتة . وهذا يقودنا إلى الاستنتاج بأن المتحول x_2 يشكل عامل تنبؤ هام جداً ، وأن العوامل الأخرى التي تضمها الدراسة لا تضيف شيئاً إلى كفاءة وجودة تقدير كمية الفيتامين B_2 الذي سنحصل عليه فيما لو استخدمنا

نموذجاً يضم x_2 فقط .

لماذا لم نجد إذن دلالة كافية لرفض الفرضية $\beta_2=0$ مستخدمين النتائج التي حصلنا عليها من النموذج الذي يحوي المتحولات الأربع ؟ ويقبع الجواب في الطبيعة الخاصة للمتحول x_4 باعتباره جداء x_1 و x_2 مما يجعل المتحولين x_2 و x_4. على درجة عالية من الترابط ، وبالتالي فإن التقديرين b_2 و b_4 على درجة عالية من الترابط بحيث ينقسم التأثير الفعلي لِ x_2 على y إلى جزء تسهم به b_2 وآخر تسهم به b_4 . ومن المستحيل تفسير b_2 على أنه يمثل نسبة التغيير في y عندما يتغير x_2 بينما تبقى المتحولات الأخرى ثابتة ، ذلك لأن x_4 سيتغير حكماً مع تغير x_2 . والتغير في $\hat{y}$ عندما يتغير x_2 معطى في الحقيقة بالعلاقة :

$$z=\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2}=b_2+b_4x_1 \tag{24}$$

والقيمة المتوسطة لهذا التغير هي :

$$\bar{z}=b_2+b_4\bar{x}_1=-75.3747-1.3765\,(1.8578)=-77.9320$$

ويمكن تقدير تشتت هذه القيمة المتوسطة $\bar{z}$ كما يلي :

$$s^2(\bar{z})=s^2(b_2)+(\bar{x}_1)^2s^2(b_4)+2\bar{x}_1s(b_2b_4)$$

$$=[15.04063+4.44178\,(1.8578)^2-2\,(1.8578)\,(7.92605)]\,(101.94)$$
$$=(.92105)\,(101.94)=93.893,$$

والانحراف المعياري $s(\bar{z})$ يساوي 9.6899 وبالتالي :

$$t=\frac{77.93}{9.69}=8.04$$

وهي قيمة هامة بصورة مرتفعة باعتبار أن $t_{.05}\,(22)=2.074$

وقد اختير هذا المثال ليوضح بعض الصعوبات في تفسير تحليل التراجع عندما تكون بعض المتحولات المثبتة على صلة وثيقة ببعضها . وفي حالة وجود متحولين على درجة عالية من الترابط لا يكون من الواقعي أن نفترض إمكانية تثبيت أحدهما بينما يتحول الآخر . ويمكن تفسير أمثال التراجع المتعدد (غير البسيط) فقط على أنها التغيير الوسطي في y من أجل تغير قدره الواحدة في x_i

وبقاء كل المتحولات المستقلة الأخرى ثابتة . وهكذا فإنه عند تفسير زوج مترابط من أمثال التراجع ، تنبغي معرفة العلاقة القائمة بين المتحولات x . قبل أن نتمكن من دراسة التغير الحقيقي في y عندما يتغير أحد المتحولات x . ولا نقصد هنا القول بأنه من غير المستحسن أن نستخدم متحولاً مثل $x_4 = x_1 x_2$ ، بل على العكس ، غالباً ما يكون من المستحسن أن نستطيع قول شيء ما عن كيفية تغير z من أجل قيم مختلفة لِـ x_1 . وعلى سبيل المثال ، إذا كان x_1 درجة الحرارة و x_2 معدل هطول المطر فسيكون من المفضل كثيراً أن نعرف كيف يتغير تأثير هطول بوصة من المطر في درجات مختلفة من الحرارة . وستكون مجرد معرفة تراجع الانتاج على درجة الحرارة ومعدل سقوط المطر قليلة الفائدة ما لم يتضمن نموذج التراجع جداءهما أيضاً . وقد يكون من غير العملي في بعض المسائل أن نعتبر إمكانية إبقاء أي من المتحولات x ثابتاً بينما يتغير متحول آخر . وفي مثل هذه الحالة يجب أن نعتبر معادلة التراجع ككل .

ويمكن حساب تقدير لتشتت القيمة المقدّرة لمتوسط y (أي $\hat{y}'$) من أجل قيم محددة x'_i للمتحولات x باستخدام الكميات (c_{ij}) وقيمة s^2 . فإذا فرضنا أن :

$$\hat{y}' = \bar{y} + \sum_{i=1}^{k} b_i (x'_i - \bar{x}_i) \tag{25}$$

نجد :

$$s^2(\hat{y}') = s^2\left[\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{k} c_{ii} x_i'^2 + 2\sum_{i<j}\sum c_{ij} x'_i x'_j\right]$$

$$= s^2\left[\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x'_i x'_j\right] \tag{26}$$

حيث $x'_i = x'_i - \bar{x}_i$. وباستخدام قيم c_{ij} الناتجة عن استخدام طريقة هوتيلنج نجد من أجل مثال الفيتامين B_2 :

$$s^2(\hat{y}') = 101.94\,[\tfrac{1}{27} + x_1(.219012x_1 + 1.068180x_2 - .083828x_3]$$

$-.603104x'_4 + x'_4\,(1.068180x'_1 + 15.040626x'_2 - .317704x'_3$
$-7.926049x'_4) + x'_3\,(-.083828x'_1 - 317704x'_2 + .095668x'_3$
$+.181971x'_4) + x'_4\,(-.603104x'_1 - 7.926049\,x'_2 + .181971x'_3$
$+ 4.441777x'_4\,)]$

وبصورة مشابهة فإن تقدير تشتت التنبؤ بقيمة واحدة لِ y من أجل قيم محددة للمتحولات x معطى بالعلاقة :

$$s^2\,(\hat{y}') + s^2 \qquad (27)$$

ومجالات الثقة من أجل أمثال التراجع $\beta_i\,(i = 1,\ldots, r)$، $E\,[y|x_1 = x'_i, \ldots, x_r = x'_r]$ ونرمز له اختصاراً بـ $E\,[y|[x'_i]]$ ، و $y|\,[x'_i]$ هي على الترتيب :

$$b_i - t_\alpha\, s(b_i) < \beta_i < b_i + t_\alpha\, s\,(b_i)\,. \qquad (28)$$

$$\hat{y}' - t_\alpha\, s\,(\hat{y}') < E\,[\,y|\{x'_i\}] < \hat{y}' + t_\alpha\, s\,(\hat{y}')\,. \qquad (29)$$

$$\hat{y}' - t_\alpha \sqrt{s^2(\hat{y}') + s^2} < y|\{x'_i\} < \hat{y}' + t_\alpha \sqrt{s^2(\hat{y}') + s^2}\,. \qquad (30)$$

١١ــ٥ الترابط المتعدد والترابط الجزئي : نعرف المقدار R المذكور في جدول تحليل التشتت (١١ــ١) بأمثال الترابط المتعدد وهو يتصل صلة وثيقة بمعادلة التراجع المتعدد . ونرى من الجدول (١١ــ١) كيف يمكن تفسير R^2 بصورة مماثلة لتفسير المقدار r^2 في الفصل السابق . وهكذا نقول أنه يمكن النظر إلى R كأمثال بسيط للترابط الخطي يقيس ، ضمن العينة ، مدى تواجد العلاقة الخطية بين $\hat{y}$ و y أي بين القيمتين الملحوظة والمقدّرة للمتحول المدروس y . وطريقة أخرى للنظر إلى R هي القول بأنها تقيس درجة الترابط الخطي المشترك بين جميع المتحولات التي تتطرق إليها التجربة أي المتحولات $y, x_1, x_2, \ldots x_r$ ويجب أن نتوقع ، بالطبع ، أن تكون قيمة R التي نحصل عليها في أي مسألة أكبر من أي من أمثال الترابط البسيط التي تعبر عن درجة الارتباط الخطي بين y وأي متحول من المتحولات المستقلة x بمفرده . ومن الواضح أنه يمكن كتابة أمثال الترابط المتعدد على الشكل :

$$R^2 = \frac{SST - SST}{SST} \tag{31}$$

وبالتالي فإن $0 < R^2 < 1$. أما أمثال الترابط البسيط بين y وأي من المتحولات المستقلة x_i فنحسبه من العلاقة :

$$r_{iy} = r_{yi} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_i)(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\left[\sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2\right]\left[\sum_{j=1}^{n} (y_j - \bar{y})^2\right]}} \tag{32}$$

$$= \frac{Sx_i y}{\sqrt{Sx_i^2 \cdot Sy^2}} = \frac{g_i}{\sqrt{a_{ii} \cdot Sy^2}}$$

وأمثال الترابط البسيط بين x_p و x_q نعرفه بالعلاقة :

$$r_{pq} = r_{qp} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (x_{pj} - \bar{x}_p)(x_{qj} - \bar{x}_q)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{pj} - \bar{x}_p)^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{qj} - \bar{x}_q)^2}} \tag{33}$$

$$= \frac{Sx_p x_q}{\sqrt{Sx_p^2}\sqrt{Sx_q^2}} = \frac{a_{pq}}{\sqrt{a_{pp} \cdot a_{qq}}}$$

١١ـ٦ حذف متحول مستقل أو أكثر من نموذج التراجع : لنفرض أننا قررنا بعد الانتهاء من تحليل التراجع حذف متحول أو أكثر من المتحولات المستقلةالتي اعتمدناها في بداية التجربة كنتيجة لما أشارت إليه نتائج التحليل عن عدم جدواها . فما هي أسهل الطرق للقيام بذلك ؟

إذا كنا نريد المتحول المستقل x_p نحسب الكميات c'_{ij} ، التي تشكل

عناصر المصفوفة c في النموذج المعدّل الجديد ، من خلال العلاقة :

$$C'_{ij} = c_{ij} - \frac{c_{ir}\, c_{jr}}{c_{rr}} \tag{34}$$

كما نحسب التقديرات الجديدة لأمثال التراجع b'_i من العلاقة :

$$b'_i = b_i - \frac{b_r}{c_{rr}}\, c_{ri} \tag{35}$$

وسينقص مجموع مربعات التراجع بالمقدار :

$$\frac{b_r^2}{c_{rr}}$$

وهذا المقدار نفسه سينضم إلى مجموع مربعات الخطأ . وبالطبع فإن درجات الحرية الموافقة للتراجع تنقص واحداً وتزيد درجات الحرية الموافقة للخطأ بمقدار الواحد .

وإذا أردنا حذف متحولين مستقلين فإن الطريقة نفسها تُعاد في مرحلتين ، ومن المشكوك فيه عندئذ أن تكون هذه الطريقة أقصر من كتابة المعادلات الناظمية الموافقة للنموذج الجديد المعدَّل وحلّها من جديد ما لم يكن عدد المتحولات المستقلة أكثر من 5 .

تمارين

١ ـ تعطي دراسة تمت في 18 منطقة بياناً إحصائياً حول معدل الانتحار ، العمر ، نسبة الذكور ، والفشل في الحياة . والمطلوب ملاءمة معادلة تراجع خطي لِ y على x_3, x_2, x_1 حيث :

معدل الانتحار	$y =$
العمر	$x_1 =$
نسبة الذكور	$x_2 =$
الفشل في الحياة	$x_3 =$

ثم القيام بالتحليل الكامل . وفيما يلي ملخص للبيان الاحصائي :

$\Sigma\, y = 285.3$

$\Sigma\, x_1 = 531.09$

$\Sigma\, x_2 = 911.95$

$\Sigma\, x_3 = 1800$

$\Sigma\, y^2 = 4905.6904$

$\Sigma\, x_1^2 = 15731.2223$

$\Sigma\, x_2^2 = 46218.4473$

$\Sigma\, x_3^2 = 199843.52$

$\Sigma\, yx_1 = 8536.6165$

$\Sigma\, yx_2 = 14500.1161$

$\Sigma\, yx_3 = 29644.847$

$\Sigma\, x_1x_2 = 26913.822$

$\Sigma\, x_1x_3 = 53614.575$

$\Sigma\, x_2x_3 = 91131.630$

٢ ـ أنجز التحليل التام للبيان الاحصائي التالي . وفسر النتائج .

رقم الأرنب	جرعة الكولسترول غرام في اليوم	معدل الكولسترول في الدم (بالملغ)	الوزن الابتدائي (بالكلغ)	نسبة الوزن النهائي إلى الوزن الابتدائي	معدل الغذاء اليومي من أجل كل كغ من الوزن الابتدائي (بالغرام في اليوم)	درجة تصلب الشرايين ،
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
1	30	424	2.46	0.90	18	2
2	30	313	2.39	0.91	10	0
3	35	243	2.75	0.95	30	2
4	35	365	2.19	0.95	21	2
5	43	396	2.67	1.00	39	3
6	43	356	2.74	0.79	19	2
7	44	346	2.55	1.26	56	3
8	44	156	2.58	0.95	28	0
9	44	278	2.49	1.10	42	4
10	44	349	2.52	0.88	21	1
11	44	141	2.36	1.29	56	1
12	44	245	2.36	0.97	24	1
13	45	297	2.56	1.11	45	3
14	45	310	2.62	0.94	20	2
15	45	151	3.39	0.96	35	3
16	45	370	3.57	0.88	15	4
17	45	379	1.98	1.47	64	4
18	45	463	2.06	1.05	31	3
19	45	316	2.45	1.32	60	4
20	45	280	2.25	1.08	36	4
21	44	395	2.15	1.01	27	1
22	49	139	2.20	1.36	59	0
23	49	245	2.05	1.13	37	4
24	49	373	2.15	0.88	25	1
25	51	224	2.15	1.18	54	3
26	51	677	2.10	1.16	33	4
27	51	424	2.10	1.40	59	4
28	51	150	2.10	1.05	30	0

٣ ـ في تجربة لجمع معلومات احصائية عن حالة التربة وما تحويه أوراق اللفت الخضراء من فيتامينات . تمّ جمع بيان إحصائي حيث المتحولات غير المستقلة هي حامض الأسكوربيك بالميلليغرام y_1 ، والريبوفلافين y_2 بالميكروغرام كل منهما في كل مائة ميللغرام من الورق المجفف . والمتحولات المستقلة هي رطوبة التربة (مقسومة على 10) x_1 ، ومتوسط درجة الحرارة بالفهرنهايت (مقسومة على 100) x_2 ، وكل منهما مقاس على عمق ثمانية بوصات . والاشعاع بالحريرة غرام في السنتمتر المربع في الدقيقة (مقسومة على 1000) x_3 ، والتبخر بالسنتمترات x_4 ، وكل منهما مقاس من أجل الثمانية والأربعين ساعة الماضية ؛ وعدد الأيام منذ تاريخ الزرع (مقسوماً على 100) x_5 ، وكانت المتوسطات ومجاميع المربعات والجداءات كما يلي :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	المتوسط
x_1	6.6510	2.6722	4.4957	2.6338	.14360	.5475
x_2		4.8750	8.3609	4.3597	−3.2533	2.7156
x_3			19.8174	9.5315	−6.6767	1.4353
x_4				5.2394	−3.1452	.5810
x_5					3.7799	1.0881
y_1	−.60160	−1.5771	−1.6953	−.81984	.94173	2.8497
y_2	−3.2590	7.1768	10.9862	5.9285	−7.1415	6.1834

$Sy_1^2 = 1.5025,\quad Sy_2^2 = 28.6900,\quad n = 32.$

والمطلوب إتمام تحليل التراجع .

٤ ـ حُلّلت 25 عينة من أوراق التبغ لتحديد مكوّناتها الكيميائية العضوية وغير العضوية ، واستخدم التراجع الخطي المتعدد لاكتشاف طبيعة ومدى العلاقة بين بعض من هذه المكوّنات . والمتحولات التي اعتُبرت غير مستقلة

كانت نسبة احتراق السيجارة بالبوصة في الألف ثانية y_1 ، النسبة المئوية للسكر في الورقة y_2 ، والنسبة المئوية للنيكوتين y_3 . أما المتحولات المستقلة (أو المثبتة) فكانت مجمل النيتروجين x_1 ، الكلوربن x_2 ، البوتاسيوم x_3 ، الفوسفور x_4 ، الكالسيوم x_5 ، الماغنيزيوم x_6 . ونعطي في الجدولين التاليين نتائج القياسات في العينات الخمس وعشرين ومجاميع المربعات والجداءات :

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	1.55	20.05	1.38	2.02	2.90	2.17	.51	3.47	.91
	1.63	12.58	2.64	2.62	2.78	1.72	.50	4.57	1.25
	1.66	18.56	1.56	2.08	2.68	2.40	.43	3.52	.82
	1.52	18.56	2.22	2.20	3.17	2.06	.52	3.69	.97
	1.70	14.02	2.85	2.38	2.52	2.18	.42	4.01	1.12
	1.68	15.64	1.24	2.03	2.56	2.57	.44	2.79	.82
	1.78	14.52	2.86	2.87	2.67	2.64	.50	3.92	1.06
	1.57	18.52	2.18	1.88	2.58	2.22	.49	3.58	1.01
	1.60	17.84	1.65	1.93	2.26	2.15	.56	3.57	.92
	1.52	13.38	3.28	2.57	1.74	1.64	.51	4.38	1.22
	1.68	17.55	1.56	1.95	2.15	2.48	.48	3.28	.81
	1.74	17.97	2.00	2.03	2.00	2.38	.50	3.31	.98
	1.93	14.66	2.88	2.50	2.07	2.32	.48	3.72	1.04
	1.77	17.31	1.36	1.72	2.24	2.25	.52	3.10	.78
	1.94	14.32	2.66	2.53	1.74	2.64	.50	3.48	.93
	1.83	15.05	2.43	1.90	1.46	1.97	.46	3.48	.90
	2.09	15.47	2.42	2.18	.74	2.46	.48	3.16	.86
	1.72	16.85	2.16	2.16	2.84	2.36	.49	3.68	.95
	1.49	17.42	2.12	2.14	3.30	2.04	.48	3.28	1.06
	1.52	18.55	1.87	1.98	2.90	2.16	.48	3.56	.84
	1.64	18.74	2.10	1.89	2.82	2.04	.53	3.56	1.02
	1.40	14.79	2.21	2.07	2.79	2.15	.52	3.49	1.04
	1.78	18.86	2.00	2.08	3.14	2.60	.50	3.30	.80
	1.93	15.62	2.26	2.21	2.81	2.18	.44	4.16	.92
	1.53	18.56	2.14	2.00	3.16	2.22	.51	3.73	1.07
المجمو	42.20	415.39	54.03	53.92	62.02	56.00	12.25	89.79	24.10
Sx^2 أو Sy^2		101.4644	6.5921	1.8311	8.8102	1.5818	.0258	3.7248	.3828

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
x_1	−.3589	−.0125	−.0244	1.6379	.5057	.2501	−9.6105	2.6691
x_2		−.3469	.0352	.7920	.2173	−1.5136	12.8511	−2.0617
x_3			−.0415	−1.4278	−.4753	.5007	2.4054	−.9503
x_4				.0043	.0154	−.0421	.3945	−.0187
x_5					.9120	−.1914	−9.3692	3.4020
x_6						−.1586	−3.2733	1.1663

والمطلوب :

أ ـ حلّل تراجع النسبة المئوية للنيكوتين y_3 على مجمل النيتروجين x_1 والبوتاسيوم x_3 .

ب ـ حلّل تراجع نسبة احتراق السيجارة y_1 على x_2 ، x_3 ، x_4 . ما هو تأثير حذف x_3 ؟

جـ ـ حلّل تراجع النسبة المئوية للسكر y_2 على x_1 x_2 x_5 وx_6 . ما هو تأثير حذف x_5 و x_6 ؟

Table VI. Upper 1 Per Cent Points of the Studentized Range*

The entries are $q_{.01}$, where $P(q < q_{.01}) = .99$

ν \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6	253.2	260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.4	294.3	298.0
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69	32.59	33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50	37.95
3	8.26	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69	17.13	17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55	19.77
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24	14.40
5	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.48	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.36	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65
8	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.33	8.41	8.49	8.57
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.49	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.08	8.15	8.23
11	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95
12	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.35	7.42	7.48	7.55
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.13	7.20	7.27	7.33	7.39
15	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26
16	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.81	6.87	6.94	7.00	7.05
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.73	6.79	6.85	6.91	6.97
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.28	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.77	6.82
24	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	5.69	5.76	5.83	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.16	6.21
60	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60	5.67	5.73	5.78	5.84	5.89	5.93	5.97	6.01
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.37	5.44	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65

جدول ١٧ توزيع F المجمع

m درجة حرية في الصورة و n درجة حرية في المخرج

$J0 \qquad \overline{[(m-2)/2]!\,[(n-2)/2]!}$

G	n	m: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	60	120	∞
.90		39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	60.7	61.2	61.7	62.3	62.8	63.1	63.3
.95		161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	250	252	253	254
.975	1	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	977	985	993	1000	1010	1010	1020
.99		4,050	5,000	5,400	5,620	5,760	5,860	5,930	5,980	6,020	6,060	6,110	6,160	6,210	6,260	6,310	6,340	6,370
.995		16,200	20,000	21,600	22,500	23,100	23,400	23,700	23,900	24,100	24,200	24,400	24,600	24,800	25,000	25,200	25,400	25,500
.90		8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.46	9.47	9.48	9.49
.95		18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
.975	2	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5
.99		98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5
.995		199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199
.90		5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.15	5.14	5.13
.95		10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.57	8.55	8.53
.975	3	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.0	13.9	13.9
.99		34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.5	26.3	26.2	26.1
.995		55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9	43.7	43.4	43.1	42.8	42.5	42.1	42.0	41.8
.90		4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.93	3.92	3.90	3.87	3.84	3.82	3.79	3.78	3.76
.95		7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.75	5.69	5.66	5.63
.975	4	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.46	8.36	8.31	8.26
.99		21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.8	13.7	13.6	13.5
.995		31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1	21.0	20.7	20.4	20.2	19.9	19.6	19.5	19.3
.90		4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.17	3.14	3.12	3.11
.95		6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.43	4.40	4.37
.975	5	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.23	6.12	6.07	6.02
.99		16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.38	9.20	9.11	9.02
.995		22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8	13.6	13.4	13.1	12.9	12.7	12.4	12.3	12.1
.90		3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.80	2.76	2.74	2.72
.95		5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.74	3.70	3.67
.975	6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.07	4.96	4.90	4.85
.99		13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.23	7.06	6.97	6.88
.995		18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4	10.2	10.0	9.81	9.59	9.36	9.12	9.00	8.88
.90		3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.56	2.51	2.49	2.47
.95		5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.38	3.30	3.27	3.23
.975	7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.36	4.25	4.20	4.14
.99		12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	5.99	5.82	5.74	5.65
.995		16.2	12.4	10.9	10.1	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.53	7.31	7.19	7.08
.90		3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.29
.95		5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.01	2.97	2.93
.975	8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.89	3.78	3.73	3.67
.99		11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.20	5.03	4.95	4.86
.995		14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.40	6.18	6.06	5.95

بقية جدول ١٧ توزيع F .

.90	9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21	2.18	2.16
.95		5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.79	2.75	2.71
.975		7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.56	3.45	3.39	3.33
.99		10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.65	4.48	4.40	4.31
.995		13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.62	5.41	5.30	5.19
.90	10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.15	2.11	2.08	2.06
.95		4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.84	2.77	2.70	2.62	2.58	2.54
.975		6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.31	3.20	3.14	3.08
.99		10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.25	4.08	4.00	3.91
.995		12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.07	4.86	4.75	4.64
.90	12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96	1.93	1.90
.95		4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.47	2.38	2.34	2.30
.975		6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	2.96	2.85	2.79	2.72
.99		9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.32	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.70	3.54	3.45	3.36
.995		11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.33	4.12	4.01	3.90
.90	15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.87	1.82	1.79	1.76
.95		4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.16	2.11	2.07
.975		6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.64	2.52	2.46	2.40
.99		8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.21	3.05	2.96	2.87
.995		10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.69	3.48	3.37	3.26
.90	20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.64	1.61
.95		4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.04	1.95	1.90	1.84
.975		5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.35	2.22	2.16	2.09
.99		8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.78	2.61	2.52	2.42
.995		9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.12	2.92	2.81	2.69
.90	30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.08	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.61	1.54	1.50	1.46
.95		4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.84	1.74	1.68	1.62
.975		5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.07	1.94	1.87	1.79
.99		7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.39	2.21	2.11	2.01
.995		9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.63	2.42	2.30	2.18
.90	60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.48	1.40	1.35	1.29
.95		4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.65	1.53	1.47	1.39
.975		5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.82	1.67	1.58	1.48
.99		7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.03	1.84	1.73	1.60
.995		8.49	5.80	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.19	1.96	1.83	1.69
.90	120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.54	1.48	1.41	1.32	1.26	1.19
.95		3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.55	1.43	1.35	1.25
.975		5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.69	1.53	1.43	1.31
.99		6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.86	1.66	1.53	1.38
.995		8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	1.98	1.75	1.61	1.43
.90	∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.34	1.24	1.17	1.00
.95		3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.32	1.22	1.00
.975		5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.57	1.39	1.27	1.00
.99		6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.70	1.47	1.32	1.00
.995		7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.79	1.53	1.36	1.00

جدول الا قيم $P(i) = \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i}$ من أجل بعض التوزيعات الثنائية

$n=30$ ($n=25$ ، $n=20$ ، $n=15$ ، $n=10$ ، $n=5$

n	p \ i	0·01	0·02	0·04	0·06	0·08	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5		
5	0	0·95099	0·90392	0·81537	0·73390	0·65908	0·59049	0·32768	0·16807	0·07776	0·03125	5	5
	1	·04803	·09224	·16987	·23422	·28656	·32805	·40960	·36015	·25920	·15625	4	
	2	·00097	·00376	·01416	·02990	·04984	·07290	·20480	·30870	·34560	·31250	3	
	3	·00001	·00008	·00059	·00191	·00433	·00810	·05120	·13230	·23040	·31250	2	
	4			·00001	·00006	·00019	·00045	·00640	·02835	·07680	·15625	1	
	5						·00001	·00032	·00243	·01024	·03125	0	
10	0	0·90438	0·81707	0·66483	0·53862	0·43439	0·34868	0·10737	0·02825	0·00605	0·00098	10	10
	1	·09135	·16675	·27701	·34380	·37773	·38742	·26844	·12106	·04031	·00977	9	
	2	·00415	·01531	·05194	·09875	·14781	·19371	·30199	·23347	·12093	·04395	8	
	3	·00011	·00083	·00577	·01681	·03427	·05740	·20133	·26683	·21499	·11719	7	
	4		·00003	·00042	·00188	·00522	·01116	·08808	·20012	·25082	·20508	6	
	5			0·00002	0·00014	0·00054	0·00149	0·02642	0·10292	0·20066	0·24609	5	
	6				·00001	·00004	·00014	·00551	·03676	·11148	·20508	4	
	7						·00001	·00079	·00900	·04247	·11719	3	
	8							·00007	·00145	·01062	·04395	2	
	9								·00014	·00157	·00977	1	
	10								·00001	·00010	·00098	0	
15	0	0·86006	0·73857	0·54209	0·39529	0·28630	0·20589	0·03518	0·00475	0·00047	0·00003	15	15
	1	·13031	·22609	·33880	·37847	·37343	·34315	·13194	·03052	·00470	·00046	14	
	2	·00921	·03230	·09882	·16910	·22731	·26690	·23090	·09156	·02194	·00320	13	
	3	·00040	·00286	·01784	·04677	·08565	·12851	·25014	·17004	·06339	·01389	12	
	4	·00001	·00017	·00223	·00896	·02234	·04284	·18760	·21862	·12678	·04166	11	
	5		0·00001	0·00020	0·00126	0·00427	0·01047	0·10318	0·20613	0·18594	0·09164	10	
	6			·00001	·00013	·00062	·00194	·04299	·14724	·20660	·15274	9	
	7				·00001	·00007	·00028	·01382	·08113	·17708	·19638	8	
	8					·00001	·00003	·00345	·03477	·11806	·19638	7	
	9							·00067	·01159	·06121	·15274	6	
	10							0·00010	0·00298	0·02449	0·09164	5	
	11							·00001	·00058	·00742	·04166	4	
	12								·00008	·00165	·01389	3	
	13								·00001	·00025	·00320	2	
	14									·00002	·00046	1	
	15										·00003	0	
20	0	0·81791	0·66761	0·44200	0·29011	0·18869	0·12158	0·01153	0·00080	0·00004		20	20
	1	·16523	·27249	·36834	·37035	·32816	·27017	·05765	·00684	·00049	0·00002	19	
	2	·01586	·05283	·14580	22457	·27109	·28518	·13691	·02785	·00309	·00018	18	
	3	·00096	·00647	·03645	·08601	·14144	·19012	·20536	·07160	·01235	·00109	17	
	4	·00004	·00056	·00645	·02333	·05227	·08978	·21820	·13042	·03499	·00462	16	
	5		0·00004	0·00086	0·00477	0·01454	0·03192	0·17456	0·17886	0·07465	0·01479	15	
	6			·00009	·00076	·00316	·00887	·10910	·19164	·12441	·03696	14	
	7			·00001	·00010	·00055	·00197	·05455	·16426	·16588	·07393	13	
	8				·00001	·00008	·00036	·02216	·11440	·17971	·12013	12	
	9					·00001	·00005	·00739	·06537	·15974	·16018	11	
	10						0·00001	0·00203	0·03082	0·11714	0·17620	10	
	11							·00046	·01201	·07099	·16018	9	
	12							·00009	·00386	·03550	·12013	8	
	13							·00001	·00102	·01456	·07393	7	
	14								·00022	·00485	·03696	6	
	15								0·00004	0·00129	0·01479	5	
	16								·00001	·00027	·00462	4	
	17									·00004	·00109	3	
	18										·00018	2	
	19										·00002	1	
	20											0	
		0·99	0·98	0·96	0·94	0·92	0·9	0·8	0·7	0·6	0·5	p \ i	n

جدول III توزيع «ستيودنت» t المجمع

$$\int_{-\infty} \frac{}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\,\sqrt{\pi n}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}\,dx$$

F / n	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	8.883
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

جدول (I) التوزيع الطبيعي المتجمع

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

x	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$F(x)$	.90	.95	.975	.99	.995	.999	.9995	.99995	.999995
$2[1 - F(x)]$	.20	.10	.05	.02	.01	.002	.001	.0001	.00001

جدول II توزيع كاي - مربع المجمع χ^2

$$F(u) = \int_0^u \frac{x^{(n-2)/2}e^{-x/2}\,dx}{2^{n/2}[(n-2)/2]!}$$

n \ F	.005	.010	.025	.050	.100	.250	.500	.750	.900	.950	.975	.990	.995
1	$.0^4393$	$.0^3157$	$.0^3982$	$.0^2393$	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

استمرار الجدول ٧١

n	p / i	0·01	0·02	0·04	0·06	0·08	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5		
25	0	0·77782	0·60346	0·36040	0·21291	0·12436	0·07179	0·00378	0·00013			25	25
	1	·19642	·30789	·37541	·33975	·27036	·19942	·02361	·00144	0·00005		24	
	2	·02381	·07540	·18771	·26023	·28211	·26589	·07084	·00739	·00038	0·00001	23	
	3	·00184	·01180	·05996	·12735	·18807	·22650	·13577	·02428	·00194	·00007	22	
	4	·00010	·00132	·01374	·04471	·08995	·13842	·18668	·05723	·00710	·00038	21	
	5	0·00000	0·00011	0·00240	0·01199	0·03285	0·06459	0·19602	0·10302	0·01989	0·00158	20	
	6		·00001	·00033	·00255	·00952	·02392	·16335	·14717	·04420	·00528	19	
	7			·00004	·00044	·00225	·00722	·11084	·17119	·07999	·01433	18	
	8				·00006	·00044	·00180	·06235	·16508	·11998	·03223	17	
	9				·00001	·00007	·00038	·02944	·13364	·15109	·06089	16	
	10					0·00001	0·00007	0·01178	0·09164	0·16116	0·09742	15	
	11						·00001	·00401	·05355	·14651	·13284	14	
	12							·00117	·02678	·11395	·15498	13	
	13							·00029	·01148	·07597	·15498	12	
	14							·00006	·00422	·04341	·13284	11	
	15							0·00001	0·00132	0·02122	0·09742	10	
	16								·00035	·00884	·06089	9	
	17								·00008	·00312	·03223	8	
	18								·00002	·00092	·01433	7	
	19									·00023	·00528	6	
	20									0·00005	0·00158	5	
	21									·00001	·00038	4	
	22										·00007	3	
	23										·00001	2	
30	0	0·73970	0·54548	0·29386	0·15626	0·08197	0·04239	0·00124	0·00002			30	30
	1	·22415	·33397	·36732	·29921	·21382	·14130	·00928	·00029			29	
	2	·03283	·09883	·22192	·27693	·26961	·22766	·03366	·00180	0·00004		28	
	3	·00310	·01882	·08630	·16498	·21881	·23609	·07853	·00720	·00027		27	
	4	·00021	·00259	·02427	·07108	·12843	·17707	·13252	·02084	·00120	0·00003	26	
	5	0·00001	0·00028	0·00526	0·02359	0·05807	0·10230	0·17228	0·04644	0·00415	0·00013	25	
	6		·00002	·00091	·00627	·02104	·04736	·17946	·08293	·01152	·00055	24	
	7			·00013	·00137	·00627	·01804	·15382	·12185	·02634	·00190	23	
	8			·00002	·00025	·00157	·00576	·11056	·15014	·05049	·00545	22	
	9				·00004	·00033	·00157	·06756	·15729	·08228	·01332	21	
	10				0·00001	0·00006	0·00037	0·03547	0·14156	0·11519	0·02798	20	
	11					·00001	·00007	·01612	·11031	·13962	·05088	19	
	12						·00001	·00638	·07485	·14738	·08055	18	
	13							·00221	·04442	·13604	·11154	17	
	14							·00067	·02312	·11013	·13544	16	
	15							0·00018	0·01057	0·07831	0·14446	15	
	16							·00004	·00425	·04895	·13544	14	
	17							·00001	·00150	·02687	·11154	13	
	18								·00046	·01294	·08055	12	
	19								·00013	·00545	·05088	11	
	20								0·00003	0·00200	0·02798	10	
	21								·00001	·00063	·01332	9	
	22									·00017	·00545	8	
	23									·00004	·00190	7	
	24									·00001	·00055	6	
	25										0·00013	5	
	26										·00003	4	
		0·99	0·98	0·96	0·94	0·92	0·9	0·8	0·7	0·6	0·5	i / p	n

جدول ۷ حدود فاصله تحمل [illegible] طبیعی

N \ P	γ = 0.75					γ = 0.90					γ = 0.95					γ = 0.99				
	0.75	0.90	0.95	0.99	0.999	0.75	0.90	0.95	0.99	0.999	0.75	0.90	0.95	0.99	0.999	0.75	0.90	0.95	0.99	0.999
2	4.498	6.301	7.414	9.531	11.920	11.407	15.978	18.800	24.167	30.227	22.858	32.019	37.674	48.430	60.573	114.363	160.193	188.491	242.300	303.054
3	2.501	3.538	4.187	5.431	6.844	4.132	5.847	6.919	8.974	11.309	5.922	8.380	9.916	12.861	16.208	13.378	18.930	22.401	29.055	36.616
4	2.035	2.892	3.431	4.471	5.657	2.932	4.166	4.943	6.440	8.149	3.779	5.369	6.370	8.299	10.502	6.614	9.398	11.150	14.527	18.383
5	1.825	2.599	3.088	4.033	5.117	2.454	3.494	4.152	5.423	6.879	3.002	4.275	5.079	6.634	8.415	4.643	6.612	7.855	10.260	13.015
6	1.704	2.429	2.889	3.779	4.802	2.196	3.131	3.723	4.870	6.188	2.604	3.712	4.414	5.775	7.337	3.743	5.337	6.345	8.301	10.548
7	1.624	2.318	2.757	3.611	4.593	2.034	2.902	3.452	4.521	5.750	2.361	3.369	4.007	5.248	6.676	3.233	4.613	5.488	7.187	9.142
8	1.568	2.238	2.663	3.491	4.444	1.921	2.743	3.264	4.278	5.446	2.197	3.136	3.732	4.891	6.226	2.905	4.147	4.936	6.468	8.234
9	1.525	2.178	2.593	3.400	4.330	1.839	2.626	3.125	4.098	5.220	2.078	2.967	3.532	4.631	5.899	2.677	3.822	4.550	5.966	7.600
10	1.492	2.131	2.537	3.328	4.241	1.775	2.535	3.018	3.959	5.046	1.987	2.839	3.379	4.433	5.649	2.508	3.582	4.265	5.594	7.129
11	1.465	2.093	2.493	3.271	4.169	1.724	2.463	2.933	3.849	4.906	1.916	2.737	3.259	4.277	5.452	2.378	3.397	4.045	5.308	6.766
12	1.443	2.062	2.456	3.223	4.110	1.683	2.404	2.863	3.758	4.792	1.858	2.655	3.162	4.150	5.291	2.274	3.250	3.870	5.079	6.477
13	1.425	2.036	2.424	3.183	4.059	1.648	2.355	2.805	3.682	4.697	1.810	2.587	3.081	4.044	5.158	2.190	3.130	3.727	4.893	6.240
14	1.409	2.013	2.398	3.148	4.016	1.619	2.314	2.756	3.618	4.615	1.770	2.529	3.012	3.955	5.045	2.120	3.029	3.608	4.737	6.043
15	1.395	1.994	2.375	3.118	3.979	1.594	2.278	2.713	3.562	4.545	1.735	2.480	2.954	3.878	4.949	2.060	2.945	3.507	4.605	5.876
16	1.383	1.977	2.355	3.092	3.946	1.572	2.246	2.676	3.514	4.484	1.705	2.437	2.903	3.812	4.865	2.009	2.872	3.421	4.492	5.732
17	1.372	1.962	2.337	3.069	3.917	1.552	2.219	2.643	3.471	4.430	1.679	2.400	2.858	3.754	4.791	1.965	2.808	3.345	4.393	5.607
18	1.363	1.948	2.321	3.048	3.891	1.535	2.194	2.614	3.433	4.382	1.655	2.366	2.819	3.702	4.725	1.926	2.753	3.279	4.307	5.497
19	1.355	1.936	2.307	3.030	3.867	1.520	2.172	2.588	3.399	4.339	1.635	2.337	2.784	3.656	4.667	1.891	2.703	3.221	4.230	5.399
20	1.347	1.925	2.294	3.013	3.846	1.506	2.152	2.564	3.368	4.300	1.616	2.310	2.752	3.615	4.614	1.860	2.659	3.168	4.161	5.312
21	1.340	1.915	2.282	2.908	3.827	1.493	2.135	2.543	3.340	4.264	1.599	2.286	2.723	3.577	4.567	1.833	2.620	3.121	4.100	5.234
22	1.334	1.906	2.271	2.984	3.809	1.482	2.118	2.524	3.315	4.232	1.584	2.264	2.697	3.543	4.523	1.808	2.584	3.078	4.044	5.163
23	1.328	1.898	2.261	2.971	3.793	1.471	2.103	2.506	3.292	4.203	1.570	2.244	2.673	3.512	4.484	1.785	2.551	3.040	3.993	5.098
24	1.322	1.891	2.252	2.959	3.778	1.462	2.089	2.489	3.270	4.176	1.557	2.225	2.651	3.483	4.447	1.764	2.522	3.004	3.947	5.039
25	1.317	1.883	2.244	2.948	3.764	1.453	2.077	2.474	3.251	4.151	1.545	2.208	2.631	3.457	4.413	1.745	2.494	2.972	3.904	4.985
26	1.313	1.877	2.236	2.938	3.751	1.444	2.065	2.460	3.232	4.127	1.534	2.193	2.612	3.432	4.382	1.727	2.469	2.941	3.865	4.935
27	1.309	1.871	2.229	2.929	3.740	1.437	2.054	2.447	3.215	4.106	1.523	2.178	2.595	3.409	4.353	1.711	2.446	2.914	3.828	4.888

30	1.297	1.855	2.210	2.904	3.708	1.417	2.025	2.413	3.170	4.049	1.497	2.140	2.549	3.350	4.278	1.668	2.385	2.841	3.733	4.768
35	1.283	1.834	2.185	2.871	3.667	1.390	1.988	2.368	3.112	3.974	1.462	2.090	2.490	3.272	4.179	1.613	2.306	2.748	3.611	4.611
40	1.271	1.818	2.166	2.846	3.635	1.370	1.959	2.334	3.066	3.917	1.435	2.052	2.445	3.213	4.104	1.571	2.247	2.677	3.518	4.493
45	1.262	1.805	2.150	2.826	3.609	1.354	1.935	2.306	3.030	3.871	1.414	2.021	2.408	3.165	4.042	1.539	2.200	2.621	3.444	4.399
50	1.255	1.794	2.138	2.809	3.588	1.340	1.916	2.284	3.001	3.833	1.396	1.996	2.379	3.126	3.993	1.512	2.162	2.576	3.385	4.323
55	1.249	1.785	2.127	2.795	3.571	1.329	1.901	2.265	2.976	3.801	1.382	1.976	2.354	3.094	3.951	1.490	2.130	2.538	3.335	4.260
60	1.243	1.778	2.118	2.784	3.556	1.320	1.887	2.248	2.955	3.774	1.369	1.958	2.333	3.066	3.916	1.471	2.103	2.506	3.293	4.206
65	1.239	1.771	2.110	2.773	3.543	1.312	1.875	2.235	2.937	3.751	1.359	1.943	2.315	3.042	3.886	1.455	2.080	2.478	3.257	4.160
70	1.235	1.765	2.104	2.764	3.531	1.304	1.865	2.222	2.920	3.730	1.349	1.929	2.299	3.021	3.859	1.440	2.060	2.454	3.225	4.120
75	1.231	1.760	2.098	2.757	3.521	1.298	1.856	2.211	2.906	3.712	1.341	1.917	2.285	3.002	3.835	1.428	2.042	2.433	3.197	4.084
80	1.228	1.756	2.092	2.749	3.512	1.292	1.848	2.202	2.894	3.696	1.334	1.907	2.272	2.986	3.814	1.417	2.026	2.414	3.173	4.053
85	1.225	1.752	2.087	2.743	3.504	1.287	1.841	2.193	2.882	3.682	1.327	1.897	2.261	2.971	3.795	1.407	2.012	2.397	3.150	4.024
90	1.223	1.748	2.083	2.737	3.497	1.283	1.834	2.185	2.872	3.669	1.321	1.889	2.251	2.958	3.778	1.398	1.999	2.382	3.130	3.999
95	1.220	1.745	2.079	2.732	3.490	1.278	1.828	2.178	2.863	3.657	1.315	1.881	2.241	2.945	3.763	1.390	1.987	2.368	3.112	3.976
100	1.218	1.742	2.075	2.727	3.484	1.275	1.822	2.172	2.854	3.646	1.311	1.874	2.233	2.934	3.748	1.383	1.977	2.355	3.096	3.954
110	1.214	1.736	2.069	2.719	3.473	1.268	1.813	2.160	2.839	3.626	1.302	1.861	2.218	2.915	3.723	1.369	1.958	2.333	3.066	3.917
120	1.211	1.732	2.063	2.712	3.464	1.262	1.804	2.150	2.826	3.610	1.294	1.850	2.205	2.898	3.702	1.358	1.942	2.314	3.041	3.885
130	1.208	1.728	2.059	2.705	3.456	1.257	1.797	2.141	2.814	3.595	1.288	1.841	2.194	2.883	3.683	1.349	1.928	2.298	3.019	3.857
140	1.206	1.724	2.054	2.700	3.449	1.252	1.791	2.134	2.804	3.582	1.282	1.833	2.184	2.870	3.666	1.340	1.916	2.283	3.000	3.833
150	1.204	1.721	2.051	2.695	3.443	1.248	1.785	2.127	2.795	3.571	1.277	1.825	2.175	2.859	3.652	1.332	1.905	2.270	2.983	3.811
160	1.202	1.718	2.047	2.691	3.437	1.245	1.780	2.121	2.787	3.561	1.272	1.819	2.167	2.848	3.638	1.326	1.896	2.259	2.968	3.792
170	1.200	1.716	2.044	2.687	3.432	1.242	1.775	2.116	2.780	3.552	1.268	1.813	2.160	2.839	3.627	1.320	1.887	2.248	2.955	3.774
180	1.198	1.713	2.042	2.683	3.427	1.239	1.771	2.111	2.774	3.543	1.264	1.808	2.154	2.831	3.616	1.314	1.879	2.239	2.942	3.759
190	1.197	1.711	2.039	2.680	3.423	1.236	1.767	2.106	2.768	3.536	1.261	1.803	2.148	2.823	3.606	1.309	1.872	2.230	2.931	3.744
200	1.195	1.709	2.037	2.677	3.419	1.234	1.764	2.102	2.762	3.529	1.258	1.798	2.143	2.816	3.597	1.304	1.865	2.222	2.921	3.731
250	1.190	1.702	2.028	2.665	3.404	1.224	1.750	2.085	2.740	3.501	1.245	1.780	2.121	2.788	3.561	1.286	1.839	2.191	2.880	3.678
300	1.186	1.696	2.021	2.656	3.393	1.217	1.740	2.073	2.725	3.481	1.236	1.767	2.106	2.767	3.535	1.273	1.820	2.169	2.850	3.641
400	1.181	1.688	2.012	2.644	3.378	1.207	1.726	2.057	2.703	3.453	1.223	1.749	2.084	2.739	3.499	1.255	1.794	2.138	2.809	3.589
500	1.177	1.683	2.006	2.636	3.368	1.201	1.717	2.046	2.689	3.434	1.215	1.737	2.070	2.721	3.475	1.243	1.777	2.117	2.783	3.555
600	1.175	1.680	2.002	2.631	3.360	1.196	1.710	2.038	2.678	3.421	1.209	1.729	2.060	2.707	3.458	1.234	1.764	2.102	2.763	3.530
700	1.173	1.677	1.998	2.626	3.355	1.192	1.705	2.032	2.670	3.411	1.204	1.722	2.052	2.697	3.445	1.227	1.755	2.091	2.748	3.511
800	1.171	1.675	1.996	2.623	3.350	1.189	1.701	2.027	2.663	3.402	1.201	1.717	2.046	2.688	3.434	1.222	1.747	2.082	2.736	3.495
900	1.170	1.673	1.993	2.620	3.347	1.187	1.697	2.023	2.658	3.396	1.198	1.712	2.040	2.682	3.426	1.218	1.741	2.075	2.726	3.483
1000	1.169	1.671	1.992	2.617	3.344	1.185	1.695	2.019	2.654	3.390	1.195	1.709	2.036	2.676	3.418	1.214	1.736	2.068	2.718	3.472
∞	1.150	1.645	1.960	2.576	3.291	1.150	1.645	1.960	2.576	3.291	1.150	1.645	1.960	2.576	3.201	1.150	1.645	1.960	2.576	3.291