الفصل الرابع

المتحولات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

٤ ـ ١ مقدمة : لنتذكر أن التجربة هي كل عملية تؤدي إلى قياس أو ملاحظة . وتنتج معظم التجارب ذات الأهمية قياسات عددية تتغير من نقطة عينة إلى أخرى وبالتالي يدعى هذا القياس بالمتحول العشوائي . فقد عرفنا المتحول العشوائي بأنه تابع عددي معرف فوق فراغ العينة . وكأمثلة نقول أن سعر الإغلاق لعملة معينة في السوق المالية هو حادثة عددية . وملاحظة عدد العيوب التي تحويها قطعة أثاث جديدة أو تسجيل معدل طالب معين هي أمثلة أخرى على تجارب تؤدي إلى حوادث عددية . وينتج المجتمع الموافق للتجربة عن إعادة التجربة عدداً كبيراً جداً من المرات . وكما لاحظنا سابقاً فقد لا نستطيع أبداً الحصول على القياس الموافق لكل عنصر من عناصر المجتمع ولكننا نستطيع التصور بأننا قمنا بذلك . والبديل العملي هو أن نكتفي بالحصول على مجموعة صغيرة من القياسات تدعى العينة وسنستخدم معلومات هذه العينة لوصف المجتمع .

وقد ذكرنا أن القياس الذي نحصل عليه من تجربة ينتج قيمة محددة لمتحول عشوائي ويمثل قياساً سحبناه من مجتمع . ولكن كيف نستطيع أن نستخدم قياساً واحداً أو عينة أكبر تتضمن n من القياسات ، مثلاً ، للقيام باستقراءات حول المجتمع ؟ يمكن أن نقترح ، مع الاحتفاظ بمثال قذف قطعة الزهر في الفقرة ٣ ـ ١ في الذهن ، القيام بحساب احتمال الحصول على عينة كتلك التي حصلنا عليها وذلك من أجل مجموعة كبيرة من النماذج الاحتمالية (والنموذج الاحتمالي

هو الحد النظري للتوزيع التكراري للمجتمع) ثم نختار منها ذلك النموذج الذي يمنح العينة التي بين أيدينا أكبر احتمال ممكن . وتبدو مثل هذه الطريقة في الاستقراء معقولة بالبداهة . والقارىء الذي يجد صعوبة في هضم الفكرة نقول أننا سنعود إلى مناقشة موضوع الاستقراء الاحصائي بالتفصيل في فصل قادم . ونكتفي هنا بملاحظة أن مثل هذه الطريقة تتطلب معرفة الاحتمال الموافق لكل قيمة من قيم المحول العشوائي . وبعبارة أخرى تتطلب تابع التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي . ويزودنا الفصل السابق بطرق تمكننا من الحصول على هذه الاحتمالات من أجل بعض المتحولات العشوائية .

٤–٢ تصنيف المتحولات العشوائية : لنسأل أنفسنا ما هو فراغ العينة الموافق لتجربة قياس المعدل اليومي لهطول المطر . وإذا استخدمنا مسطرة مدرجة لهذا القياس فإن معدل الهطول سيوافق نقطة على هذه المسطرة والتي يمكن النظر إليها بدورها على أنها نقطة على محور موجه . وفراغ العينة يمكن إذن أن يكون أي نقطة من مجال من هذا المحور . وبالطبع فإنه يوجد من النقاط في أي مجال من محور موجه ، مهما كان صغيراً ، ما لا نهاية له ولا يمكن عدّه . وكمثال آخر نسأل عن فراغ العينة للتجربة التالية : نقذف قطعة نقود حتى نحصل على وجه الطرّة للمرة الأولى . وليكن المتحول العشوائي الذي يهمنا هو عدد القذفات الضرورية . ومن الواضح أن نتيجة التجربة ستعطي قيمة لِ x هي عبارة عن عدد صحيح أي أن x يساوي 1 أو 2 أو 3 إلى ما لا نهاية له .

ولكن هل يمكن تخصيص احتمال لكل قيمة ممكنة من قيم x بحيث تبقى هذه الاحتمالات محققة لشروط النموذج الاحتمالي وبصورة خاصة بحيث يكون مجموع هذه القيم على كثرتها مساوياً للواحد تماماً ؟ وقبل الإجابة على هذا السؤال نلاحظ في المثالين السابقين نوعين من فراغ العينة المتولدين عن متحولين عشوائيين مختلفين في طبيعتهما . فنقاط مجال من المحور الموجه هي مجموعة لا نهائية من النقاط إلا أنه لا يمكن عدّها أي أنه لا يمكن إقامة توافق

بين هذه النقاط وبين الأعداد الصحيحة الموجبة ... ,3 ,2 ,1. بينما القيم التي يمكن أن يأخذها المتحول العشوائي في المثال الثاني هي مجموعه الأعداد الصحيحة الموجبة وهي مجموعة لا نهائية إلا أنها قابلة للعدّ . ونقول عن فراغ العينة الأول أنه فراغ عينة مستمر بينما فراغ العينة الثاني هو فراغ عينة منفصل . ويمكن أن نجيب الآن على السؤال المطروح بقولنا « نعم » من أجل فراغ منفصل و« لا » من أجل فراغ مستمر . وهذا يعني أنه يجب تطوير نموذج احتمالي جديد من أجل الفراغات المستمرة .

تعريف : نقول عن فراغ عينة أنه فراغ مستمر إذا كان يحوي لا نهاية غير معدودة من النقاط .

تعريف : نقول عن فراغ عينة أنه فراغ منفصل إذا كان يحوى عدداً منتهياً أو لا نهائياً قابلاً للعد من النقاط .

ونصنف المتحولات العشوائية وفقاً لذلك إلى صنفين أحدهما مستمر والآخر منفصل

تعريف : نقول أن المتحول العشوائي مستمر إذا كان يفترض مجموعة لا نهائية غير معدودة من النقاط . أي إذا كان فراغ العينة الذي يولده هذا المتحول مستمراً .

تعريف : نقول أن المتحول العشوائي منفصل إذا كان يفترض مجموعة منتهية أو لا نهائية معدودة من النقاط . أي إذا كان فراغ العينة الذي يولده هذا المتحول منفصلاً .

٤ـ٣ المتحولات العشوائية المنفصلة وتوزيعاتها الاحتمالية : رأينا أنه يمكن التعرف على نوع المتحول العشوائي من خلال عدد وطبيعة القيم التي يمكن أن يفترضها. وإذا أمكن أن يفترض عدداً منتهياً أو لا نهائياً قابلاً للعد من القيم فإنه يجب أن يكون منفصلاً . وفي معظم المسائل العملية تمثل المتحولات المنفصلة قياسات على شكل تعداد مثل عدد البكتريا في سنتمتر مكعب من الماء أو عدد

القطع التي تحوي عيباً صناعياً في إنتاج صناعي معين أو عدد المنازل الريفية المكهربة في منطقة معينة ، أو عدد الاضطرابات الوظيفية في محرك طائرة فوق فترة زمنية معينة .

وعدد القطع التي تحوي عيباً صناعياً في عينة من عشر قطع هو متحول عشوائي منفصل يمكن أن يفترض القيم $0, 1, 2, \ldots, 10$ أي إحدى عشر قيمة . وعدد البكتريا x في سنتمتر مكعب من الماء محدود بدون شك مع أنه يمكن أن يكون كبيراً جداً . أي أن $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ حيث n عدد كبير جداً .

وتابع التوزيع لمتحول عشوائي منفصل هو علاقة أو جدول أو خط بياني يقدم الاحتمال الموافق لكل قيمة من قيم المتحول العشوائي . وكما رأينا في نهاية الفقرة ٣ـ٧ فإن مجموعة القيم التي يمكن لمتحول عشوائي أن يفترضها تشكل فراغ عينة وكل قيمة للمتحول العشوائي هي حادثة عددية وأن هذه الحوادث العددية متنافية . وإذا رمزنا للاحتمال الخاص بالقيمة x لمتحول عشوائي منفصل بـ $p(x)$ فإن مجموع الكميات $p(x)$ فوق كل القيم الممكنة لِ x يساوي الواحد . وهكذا يحقق تابع التوزيع لمتحول عشوائي منفصل الشرطين :

$$0 \leq p(x) \leq 1 \quad (١)$$

$$\sum_{x} p(x) = 1. \quad (٢)$$

حيث $\sum_{x}$ يعني المجموع فوق كل قيم x . أي أن تابع التوزيع هو نموذج احتمالي .

مثال ٤ـ١ لتكن التجربة قذف قطعتي نقود وليكن x عدد أوجه النقش التي نحصل عليها . ونقاط العينة لهذه التجربة مع احتمالاتها الموافقة مبينة في الجدول التالي :

نقطة العينة	القطعة I	القطعة II	$P(E_i)$	x
E_1	H	H	$\frac{1}{4}$	2
E_2	H	T	$\frac{1}{4}$	1
E_3	T	H	$\frac{1}{4}$	1
E_4	T	T	$\frac{1}{4}$	0

ونلاحظ أن فراغ العينة S الموافق للتجربة يحوي النقاط E_1, E_2, E_3, E_4 .
وأن القيم الممكنة لـ x وهي 0، 1 و 2 تشكل كل منها حادثة عددية والحادثة $x = 0$ تتضمن نقطة العينة E_4 فقط وبالتالي احتمالها هو احتمال E_4 ويساوي $\frac{1}{4}$ والحادثة العددية $x = 1$ تتضمن نقطتي العينة E_2 و E_3، والإحتمال الموافق لها هو مجموع احتمالي نقطتي العينة E_2 و E_3 ويساوي $\frac{1}{2}$ ، أما الحادثة العددية $x = 2$ فتتضمن نقطة العينة E_1 فقط واحتمالها يساوي $\frac{1}{4}$. كما نلاحظ أن القيم الممكنة لِ x هي حوادث عددية متنافية لأن كل نتيجة للتجربة تؤدي إلى قيمة واحدة وواحدة فقط للمتحول x . وهكذا يتضح فراغ العينة الجديد الذي ولّده المتحول العشوائي x والذي يتألف من مجموعة القيم التي يمكنه افتراضها (أي مدى التابع x المعرف فوق نقاط فراغ العينة S) . وطالما أن مجموع احتمالات القيم المختلفة لِ x ستكون مساوية تماماً لمجموع احتمالات نقاط فراغ العينة S فإن مجموعها سيكون دائماً مساوياً للواحد أي أن تابع التوزيع للمتحول x يحقق بدوره شروط النموذج الاحتمالي . باعتبار أن كلاً من $P(0)$ ، $p(1)$ و $p(2)$ أصغر من الواحد و $p(0) + p(1) + P(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

أي أن $\sum_{x=0}^{2} p(x) = 1$ و

$0 \leq P(x) \leq 1$ من أجل $x = 0, 1, 2$. ويقدم الجدول (٤ـ١) تابع التوزيع الموافق للمتحول x .

جدول (٤ـ١) تابع توزيع المتحول x ، (x = عدد أوجه الطرة الملحوظة .)

x	p (x)
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

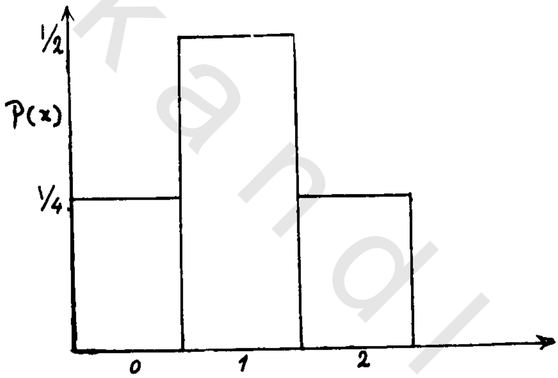
$$1 = \sum_{x=0}^{2} P(x)$$

ونلاحظ أنه يمكن في هذه الحالة تلخيص هذا الجدول بالعلاقة التابعية :

$$p(x) = \frac{C_x^2}{4} \quad x = 0, 1, 2.$$

باعتبار أن $C_2^2 = 1,\ C_1^2 = 2,\ C_0^2 = 1$

وقدمنا $p(x)$ على شكل جدول ثم على شكل علاقة . فلنمثله الآن بيانياً ، أي لنتدمه على شكل مضلع تكراري . كـالمضلع الذي ناقشناه في الفقرة (٢ـ٢) . وسيحوي المضلع التكراري لِـ x ثلاثة صفوف توافق $x = 0$ ، $x = 1$ و $x = 2$ حيث نقيم فوق كل قيمة مستطيلاً ارتفاعه يساوي احتمال هذه القيمة (أي تكرارها النظري) . وهكذا نحصل على المضلع كما في الشكل ٤ـ١ .



شكل (٤ـ١) المضلع الاحتمالي لتابع التوزيع

وهذا المضلع هو الشكل النظري للمضلع الذي ناقشناه في (٢ـ٢) . أي أنه الصورة النظرية للمضلع التكراري لكافة قياسات المجتمع . ولو حصل القارىء على عينة من هذا المجتمع ، أي لو قذف قطعتي نقود متوازنتين ، مثلاً ، $n = 100$ مرة ، وسجل كل مرة عدد أوجه النقش x التي حصل عليها ، ثم أقام مضلعاً تكرارياً لهذه القياسات المائة لِـ x ، فسيجد أن المضلع التكراري الناتج مشابه جداً للمضلع المبين في الشكل (٤ـ١) وإذا كرر التجربة 1000 مرة فإنه

سيحصل على مضلع تكراري أكثر شبهاً بالشكل (٤ـ١) .

مثال ٤ـ٢ ليكن x العدد الملحوظ عند قذف قطعة زهر . ويعطي الجدول (٤ـ٢) نقاط العينة .

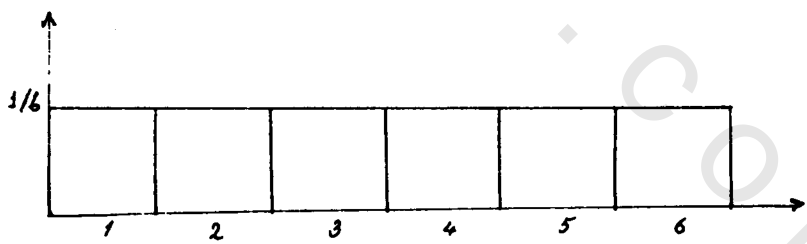
جدول ٤ـ٢ قذف قطعة زهر . التوزيع الاحتمالي لِ x .

نقطة العينة	العدد الملحوظ	$P(E_i)$	x	$P(x)$
E_1	1	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{6}$
E_2	2	$\frac{1}{6}$	2	$\frac{1}{6}$
E_3	3	$\frac{1}{6}$	3	$\frac{1}{6}$
E_4	4	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{6}$
E_5	5	$\frac{1}{6}$	5	$\frac{1}{6}$
	6	$\frac{1}{6}$	6	$\frac{1}{6}$

وكل قيمة لِ x تمثل هنا حادثة عددية تحوي نقطة عينة واحدة . ونلاحظ بسهولة أن العلاقة :

$$p(x) = \tfrac{1}{6},\ x = 1,2,3,4,5,6$$

تمثل تابع التوزيع الاحتمالي لِ x . ويبين الشكل (٤ـ٢) التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي .



شكل ٤ـ٢ التوزيع الاحتمالي لِ x في المثال ٤ـ٢ .

مثال ٤ـ٣ نعود الآن إلى تجربة ذكرناها في الفقرة (٤ـ٢) وهي قذف قطعة نقود متوازنة حتى يظهر وجه النقش للمرة الأولى . وليكن x عدد القذفات

اللازمة لذلك . إذا رمزنا للنقش بِـ H وللطرة بـِ T فيمكن كتابة نقاط العينة على الشكل :

E_1 : H
E_2 : T H
E_3 : T T H
E_4 : T T T H
E_5 : T T T T H
⋮

من الناحية النظرية يمكن ألا تنتهي التجربة أبداً أي أن فراغ العينة يحوي لا نهاية من النقاط إلا أنها لا نهاية معدودة . واحتمال E_1 هو $\frac{1}{2}$ باعتبار أن القطعة متوازنة بالفرض ، واحتمال E_2 أي احتمال ظهور طرّة في القذفة الأولى ثم نقش في القذفة الثانية هو احتمال تقاطع حادثتين مستقلتين ووفقاً لقانون الجداء يكون $P(E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^2$. وبصورة مشابهة نجد أن $P(E_3) = (\frac{1}{2})^3$ وهكذا وبصورة عامة نكتب $P(E_n) = (\frac{1}{2})^n \quad n = 1, 2, \ldots$. ولكن $P(x = 1) = P(E_1) = \frac{1}{2}$ و $P(x = 2) = P(E_2) = (\frac{1}{2})^2$ وهكذا ... وبالتالي فإن تابع التوزيع هو :

$$p(x) = (\tfrac{1}{2})^x, \quad x = 1, 2, 3, \ldots \quad (1)$$

ويلخص الجدول (٤-٣) تابع التوزيع :

جدول (٤-٣) قذف قطعة نقود حتى يظهر وجه النقش للمرة الأولى

x = عدد القذفات الضرورية

نقطة العينة	$P(E_i)$	x	$P(x)$
E_1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
E_2	$\frac{1}{4}$	2	$(\frac{1}{2})^2$
E_3	$\frac{1}{8}$	3	$(\frac{1}{2})^3$
E_4	$\frac{1}{16}$	4	$(\frac{1}{2})^4$
E_5	$\frac{1}{32}$	5	$(\frac{1}{2})^5$
⋮	⋮	⋮	⋮

وللتحقق من أن التابع $p(x)$ يحقق الشرط الثاني من شروط تابع التوزيع الاحتمالي أي $\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = 1$ نكتب :

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = p(1) + p(2) + p(3) + \ldots = \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + \ldots\ldots$$

$$= \tfrac{1}{2}[1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \ldots] = \tfrac{1}{2} \frac{1}{1-\tfrac{1}{2}} = 1.$$

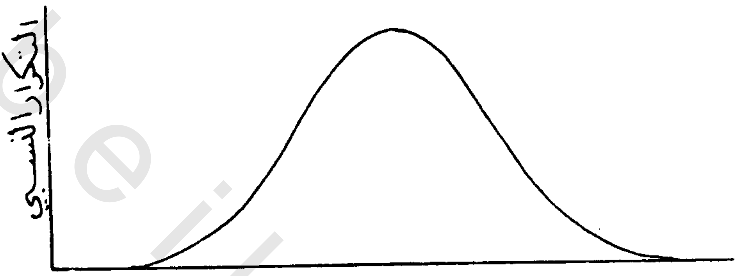
لأن ما ضمن قوسين هو مجموع سلسلة هندسية حدها الأول 1 وأساسها يساوي النصف وبالتالي فإن مجموعها $2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$. وهكذا نجد فراغ عينة يحوي عدداً لا نهائياً من النقاط ولكل نقطة منه احتمال بصورة يكون مجموع هذه الاحتمالات فوق كافة نقاط العينة مساوياً للواحد تماماً .

٤ـ٤ المتحولات العشرائية المستمرة :

تشكل الأوزان ، الأطوال ، القوى أمثلة على متحولات عشوائية مستمرة وقياسات مثل هذه المتحولات تشكل بدون انقطاع نقاطاً على محور موجه أو مجالات بين قياس وآخر . ولا يمكننا تخصيص احتمال لكل نقطة عينة في حالة متحول عشوائي مستمر ولا بد من التفكير في نموذج احتمالي مختلف عما رأيناه في حالة متحول منفصل . لنعد بذاكرتنا الآن إلى مناقشة المضلع التكراري في الفقرة ٢ـ٢ وبصورة خاصة إلى مضلع التكرار الخاص بمعدلات ثلاثين طالباً ، شكل ٢ـ٢ . فلو حصلناعلى عدد أكبر فأكبر من المعدلات فعندئذ سنخفض عرض المجالات الجزئية . وسيتغير المظهر العام للمضلع التكراري في اتجاه التخلص من مظاهر عدم الانتظام . وعندما يصبح عدد القياسات كبيراً جداً وعرض المجالات الجزئية صغيراً جداً فسيظهر التكرار النسبي وكأنه عملياً منحن (انظر شكل ٤ـ٣) .

والتكرار النسبي الموافق لمجال جزئي معين أو فئة هو نسبة القياسات في المجتمع الواقعة ضمن هذا المجال الجزئي وهي أيضاً احتمال أن نسحب قياساً من المجتمع فنجده يقع ضمن هذا المجال الجزئي . وإذا عدلنا المساحة الكلية

تحت مضلع التكرار النسبي هذا إلى الواحد (ويمكن القيام بذلك باعتبار طول المجال الجزئي وحدة القياس على المحور الأفقي) فعندئذ تمثل المساحات تحت منحني التكرار احتمالات. وفي الحقيقة كانت هذه الفكرة هي الأساس الذي طبقنا بموجبه القاعدة التجريبية في الفصل الثاني.

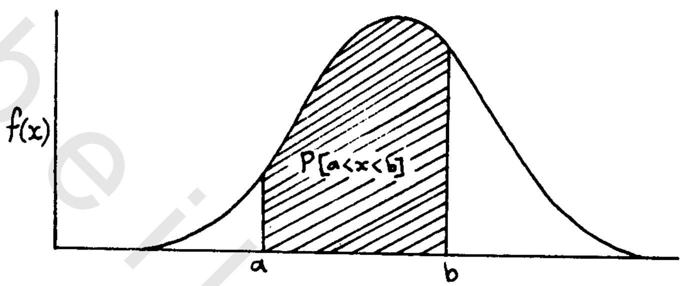


الشكل ٤ـ٣ منحني التكرار النسبي المجتمع

لنبن الآن نموذجاً من أجل التوزيع الاحتمالي لمتحول عشوائي مستمر. لنفرض الآن أن متحولاً عشوائياً x يأخذ قيمة فوق محور الأعداد الحقيقية (أنظر الشكل ٤ـ٤). ولنوزع احتمالاً قدره الواحد على طول هذا الخط، إلى حد كبير. كما يوزع شخص حفنة من الرمل بحيث توافق كل ذرة رمل قياساً من قياسات المجتمع. وستتكوم ذرات الرمل أو القياسات. وبالتالي الاحتمال في أماكن معينه من الخط. ونقول عندئذ أن كثافة الاحتمال في مثل هذه الأماكن أكبر منها في أماكن أخرى. وسيكون لهذه الكثافة قيمة غير سالبة (إما صفر أو موجبة) في كل نقطة من نقاط المحور ولو تصورنا أن هذه الكثافة تتغير من نقطة إلى أخرى وفق علاقة $f(x)$ فإن المنحني $f(x)$ هو منحني الكثافة (أو منحني التكرار). والتابع $f(x)$. ويقدم الشكل ٤ـ٤ تمثيلاً بيانياً له. يقدم النموذج الرياضي لمضلع التكرار النسبي للمجتمع كما يوجد في الواقع. والمساحة الكلية تحت المنحني $f(x)$ يجب أن تكون الواحد أما المساحة فوق مجال معين وتحت $f(x)$ فهي احتمال أن يقع القياس x في ذلك المجال. وهكذا فإن احتمال أن يكون $a < x < b$ يساوي إلى المساحة تحت

منحني الكثافة بين الخطين الشاقوليين $x = a$ و $x = b$. أي أن $P(a < x < b)$ هو التابع الأصلي لِ $f(x)$ محسوباً عند b ناقصاً قيمة هذا التابع الأصلي عند a .

ويبقى السؤال المحيّر هو كيف نختار النموذج ، أي تابع الكثافة $f(x)$. الموافق لحالة فيزيائية معينة ؟



شكل ٤ــ٤ تابع الكثافة الاحتمالية $f(x)$ أو منحني التكرار .

وما يمكن أن نقوله هنا هو أن نستفيد من كل المعلومات المتوفرة لنا ثم نختار النموذج $f(x)$ وفق أفضل ما لدينا من قدرة على الحكم الصحيح . وتتفرع المسألة هنا إلى مسألتين فمثلاً قد نعرف أن $f(x)$ على شكل جرس ولكن من بين مثل هذه النماذج ما هو منحني التكرار المحدد الذي يوافق الحالة المدروسة . وقد لا نعرف ،على الوجه الآخر ، حتى الشكل الأولي لِ $f(x)$ ونتساءل مثلاً عما إذا كان يجب أن نفترضه على شكل جرس أم أنه ليس على شكل جرس . ويتطرق الاستقراء الاحصائي إلى كل من المسألتين ويزودنا الاحصاء الرياضي بطرق لمعالجة مثل هذه المسائل سواء أكان المتحول x مستمر أًأم منقطعاً . وبعد أن يقع اختيارنا على النموذج المناسب يمكننا في حالة المتحول العشوائي المستمر حساب أي مساحة تحت منحني التكرار باستخدام الحساب التكاملي . وفي العديد من النماذج المعروفة والكثيرة الاستخدام في طرق الإحصاء تتوفر جداول جاهزة تزودنا بمثل هذه المساحات . ولكن هل يمكن الحصول على نتائج مفيدة باستخدام نماذج لم نتأكد تماماً من صحتها أي من تمثيلها بصورة دقيقة للمجتمع المدروس ؟ لننظر هنا إلى الفيزيائي والكيميائي والمهندس . فالمعادلات والدساتير

ومختلف العلاقات العددية المستخدمة في مختلف فروع العلوم هي نماذج رياضية تقدم لنا تقريبات جيدة للواقع العملي . ويستخدم المهندس معادلاته لتحديد حجم وموضع ركائز جسر أو جناح طائرة وما يهمه فقط هو أن تقدم الجسور وأجنحة الطائرات الخدمات التي صُممت من أجلها . وبصورة مشابهة فإن بلوغ الهدف النهائي العملي في المسائل الاحصائية هو القاعدة التي نقيس بها فائدة الطرق الاحصائية . فهل تدلل التجربة على صحة ما تزودنا فيه الطريقة من استقراءات أي من تنبؤات وقرارات تتعلق بالمجتمع المدروس أم لا ؟ وفي الحقيقة توجد العديد من الطرق الاحصائية التي تمتلك مثل هذه الخاصة وتشير إلى ذلك تطبيقات الإحصاء العديدة والمفيدة جداً في معظم حقول العلم والبحث العلمي وفي طليعتها العلوم الصناعية والزراعية والفيزيائية والاجتماعية والاقتصادية .

٤ـ٥ التوقع الرياضي :

التوزيع الاحتمالي الذي استعرضناه في الفقرتين السابقتين يقدم نموذجاً لتوزيع التكرار النظري لمتحول عشوائي وبالتالي يجب أن يكون له متوسط وتشتت وانحراف معياري ، بالإضافة إلى المقاييس الوصفية الأخرى . ونذكر أن كلاً من المتوسط والتشتت هما معدلات . وسنحسب هنا معدل متحول عشوائي معرف فوق مجتمع نظري ، ويسمى مثل هذا المعدل بالتوقع الرياضي أو اختصاراً توقع المتحول العشوائي .

ولكي نفهم طريقة حساب متوسط مجتمع أو توقع متحول عشوائي نعرض المثال التالي : ليكن x عدد أوجه النقش الملحوظة عند قذف قطعتي نقود . فتابع التوزيع هو :

x	P (x)
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

ولنفرض أننا كررنا التجربة عدداً كبيراً من المرات ، مثلاً $n = 4,000,000$ مرة . فنتوقع بالبداهة ملاحظة النتيجة $x = 0$ مليون مرة ، والنتيجة $x = 1$ مليوني مرة ، والنتيجة $x = 2$ مليون مرة . وعندها يكون المعدل الوسطي لقيم x في الملايين الأربعة من المرات التي كررنا فيها التجربة أو متوسط x هو :

$$\frac{\text{مجموع القياسات } x}{n} = \frac{10^6 . (0) + 2.10^6 . (1) + 10^6 . (2)}{4 . 10^6}$$

$$= (\tfrac{1}{4}) . (0) + (\tfrac{1}{2}) . (1) + (\tfrac{1}{4}) . (2)$$

$$= (0) . p\,(0) + (1) . p\,(1) + (2) . p\,(2)$$

أي أن متوسط x يساوي :

$$\sum_{x=0}^{2} x \,.\, P(x) = 1$$

ونلاحظ أن هذه النتيجة ليست من باب الصدفة وأنه يبدو من المنطقي تعريف توقع متحول عشوائي منفصل x كما يلي :

تعريف : ليكن x متحولاً عشوائيا منفصلاً تابع توزيعه $p\,(x)$. ولنرمز لتوقع x بـِ $E\,(x)$ ، فعندئذ يكون :

$$E\,(x) = \sum_{x} x \,.\, P\,(x) \qquad (2)$$

حيث $\sum_{x}$ يعني المجموع فوق كل القيم الممكنة للمتحول x .

وبصورة مشابهة تماماً نعرف توقع متحول عشوائي مستمر . إلا أن المجموع في التعريف السابق يصبح تكاملاً . أي أننا نحتاج فيه إلى معرفة بالحساب التكاملي مما يجعله خارج نطاق هذا الكتاب .

ويمكن التحقق من أن عملية حساب التوقع تتصف بالخواص التالية :

١ ـ إذا كان c عدداً ثابتاً و x متحولاً عشوائياً فإن :

$$E\,(c) = c \qquad (3)$$

$$E\,(cx) = cE\,(x) \qquad (4)$$

٢ ـ إذا كان x_1 و x_2 متحولين عشوائيين فإن :

$$E\,(x_1 + x_2) = E\,(x_1) + E\,(x_2) \qquad (5)$$

٣ ـ ومن الخاصتين السابقتين نكتب :

$$E(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n) = C_1 E(x_1) + C_2 E(x_2) + \dots + c_n E(x_n) \quad (6)$$

مثال ٤ـ٤ ليكن المتحول العشوائي x هو العدد الملحوظ عند قذف قطعة زهر . فقد رأينا في المثال (٤ـ٢) تابع توزيع x . وعليه يكون توقع x هو :

$$E(x) = \sum_{x=1} x P(x) = (1).P(1) + (2).P(2) + \dots + (6).P(6)$$
$$= (1)(\tfrac{1}{6}) + (2).(\tfrac{1}{6}) + \dots + (6).(\tfrac{1}{6})$$
$$= \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{21}{6} = 3.5$$

مثال ٤ـ٥ : تباع ثمانية آلاف بطاقة من يانصيب خيري بليرة سورية واحدة للبطاقة . والجائزة قيمتها 3000 ل.س. فإذا اشترى زيد بطاقتين فما هو ربحه المتوقع ؟

لنرمز بِـ x لربح زيد فالمتحول x يمكن أن يأخذ إحدى قيمتين فإمّا أن يخسر ليرتين (أي أن ربحه 2 −) أو أنه سيربح 2998 ل.س واحتمال القيمة الأولى هو 7998/8000 واحتمال القيمة الثانية هو 2/8000 . ويمكن تلخيص تابع توزيع x بالجدول التالي :

p (x)	x
$\frac{7998}{8000}$	− 2
$\frac{2}{8000}$	2998

وسيكون الربح المتوقع هو : $E(x) = \sum_{x} x P(x)$

$$= \frac{(-2)(7998)}{8000} + (2998)\left(\frac{2}{8000}\right) = -1.25.$$

ولنذكر أن توقع x هو معدل المجتمع النظري الذي سينتج فيما لو كررنا هذا اليانصيب عدداً كبيراً جداً من المرات وشارك زيد في كل مرة ببطاقتين . وفيما لو حصل هذا فإن حصيلة زيد قد تكون خسارة ليررة وربع .

مثال ٤ـ٦ وكمثال ثالث لنأخذ مسألة تحديد قيمة الاشتراك السنوي لبوليصة تأمين قيمتها 1000 ل.س وتغطي نوعاً من الحوادث وقع خلال فترة زمنية طويلة بمعدل اثنين في المائة . إذا فرضنا x ربح شركة التأمين الناشىء عن بيع البوليصة . ولنرمز بـ c لقيمة الاشتراك السنوي . وسنحسب c بحيث يكون $E(x) = 0$. أي أن c هي القيمة المطلوبة لكي لا يكون أحد الطرفين رابحاً على حساب الآخر في المدى الطويل . وبالطبع قد تضيف الشركة إلى هذه القيمة النفقات الادارية ونسبة الربح التي تحددها . والحل أصبح واضحاً . إذن نحسب $E(x)$ وهو تابع في c . ونضعه مساوياً للصفر ثم لحل المعادلة الناتجة بالنسبة لِ c أي نحل المعادلة :

$$E(x) = \sum_x x\, P(x) = 0 .$$

والخطوة الأولى هي تحديد القيم الممكنة لِ x و $p(x)$. وهذا ما يبينه الجدول التالي :

الربح = x	p (x)
c	$\frac{98}{100}$
$-(1000 - c)$	$\frac{2}{100}$

وبوضع توقع x مساوياً للصفر نجد :

$$E(x) = \sum_x x\, P(x) = c\left(\frac{98}{100}\right) + [-(1000 - c)]\left(\frac{2}{100}\right) = 0$$

أو :

$$\frac{98}{100}\,c + \frac{2}{100}\,c - 20 = 0$$

ومنه :

$$c = 20$$

تعلمنا كيف نجد توقع متحول عشوائي x ، ولندرس الآن كيف نجد توقع تابع ما في x وليكن $g(x)$ مثلاً . لنعد إلى المثال (٤ـ١) حيث قذفنا قطعتي نقود ولنفرض أن $g(x) = x^2$. فتمثل عندئذ الكمية x^2 حادثة عددية تتحول فوق فراغ العينة بحيث تأخذ x^2 قيمة واحدة وواحدة فقط من أجل

كل نقطة عينة من فراغ العينة . وهذا يوضح لنا أن أي تابع في متحول عشوائي هو متحول عشوائي بدوره . وتابع توزيع x مع قيم x^2 الموافقة معطاة في الجدول التالي :

x	x^2	p (x)
0	0	$\frac{1}{4}$
1	1	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$

وبتكرار التجربة عدداً كبيراً من المرات ، مثلاً $n = 4,000,000$ مرة فإننا نتوقع على وجه التقريب أن تأخذ x^2 القيمة صفر مليون مرة وأن يكون $x^2 = 1$ عدداً من المرات يساوي 2.10^6 وأن تجد مليون مرة $x^2 = 4$.والقيمة المتوسطة لِـ x^2 ستكون عندئذ :

$$\frac{\text{مجموع القياسات}}{n} = \frac{10.^6\,(0) + 2.10^6\,(1) + 10^6.\,(4)}{4.10^6}$$

$$= (\tfrac{1}{4})\,(0) + (\tfrac{1}{2})\,(1) + (\tfrac{1}{4})\,(4) = \sum_{x=0}^{2} x^2\, P(x)$$

وهكذا نستنتج التعريف التالي :

تعريف: ليكن x متحولاً عشوائياً منفصلاً توزيعه $P(x)$ ، وليكن $g(x)$ تابعاً عددياً في x . فعندئذ يكون توقع $g(x)$ بالتعريف هو :

$$E[g(x)] = \sum_x g(x).P(x) \qquad (7)$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $g(x) = [x - E(x)]^2 = (x - \mu)^2$ يكون $E(x-\mu)^2$ هو تشتت المتحول العشوائي x .

تعريف : نعرف تشتت المتحول العشوائي x بأنه $E(x-\mu)^2$ ونرمز له بِـ σ^2 أو $v(x)$ . .

مثال ٤ــ٧ احسب التشتت σ^2 للمتحول x المذكور في المثال (٤ــ١) .

رأينا أن $E(x) = \mu = 1$ والتشتت σ^2 هو التعريف :

$$= (0-1)^2 . p(0) + (1-1)^2 . p(1) + (2-1)^2 . p(2)$$

$$= (1)(\tfrac{1}{4}) + (0).(\tfrac{1}{2}) + (1)(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}$$

مثال ٤ـ٨ ليكن x متحولاً عشوائياً توزيعه الاحتمالي معطى بالجدول :

x	$p(x)$
-1	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{1}{4}$

والمطلوب حساب توقع الكمية $(x^2 - 1)$.

$$E(x^2-1) = \sum_x (x^2-1).p(x) = 0(\tfrac{1}{8}) + (-1)(\tfrac{1}{4}) + (0)(\tfrac{3}{8}) + 3(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}$$

ونلاحظ أنه يمكن كتابة التشتت على الشكل $\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$ ذلك لأن :

$$E(x-\mu)^2 = E(x^2 - 2\mu x + \mu^2) = E(x^2) - E(2\mu x) + E(\mu^2)$$

$$= E(x^2) - 2\mu E(x) + \mu^2 = E(x^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(x^2) - \mu^2$$

وباستخدام خواص التوقع وتعريف التشتت نجد أن تشتت جداء عدد ثابت c في متحول عشوائي x هو تشتت x مضروباً بمربع العدد c . ذلك لأن :

$$E[cx - E(cx)]^2 = E(c^2x^2) - [E(xc)]^2 = c^2 E(x^2) - [c.E(x)]^2$$

$$= c^2 E(x^2) - c^2 [E(x)]^2 = c^2 [E(x^2) - (E(x))^2] = c^2 E[x - E(x)]^2.$$

وإذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متحولات مستقلة فإن تشتت المجموع = مجموع التشتتات . أي أنه إذا فرضنا أن تشتت x_i هو σ_i^2 حيث $i = 1, 2, \ldots, n$ ، فإن :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2 \qquad (8)$$

وكنتيجة لذلك إذا فرضنا أن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عينة عشوائية من توزيع متوسطه μ وتشتته σ^2 فإن :

$$V(\bar{x}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}(\underbrace{\sigma^2 + \cdots + \sigma^2}_{n \text{ مرة}}) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad (9)$$

و :

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [E(x_i)] =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mu) = \frac{n\mu}{n} = \mu \qquad (10)$$

وذلك بصرف النظر عن طبيعة المجتمع المدروس .

تعريف : نعرف تمام التشتت بين متحولين عشوائيين x و y ، ونرمز له بـ $cov(x, y)$ ، على الشكل :

$$cov(x,y) = E\,[x - E(x)]\,[y - E(y)] \qquad (11)$$

وإذا رمزنا بـ μ لـ $E(x)$ وبـ β لـ $E(y)$ تصبح العلاقة (11) على الشكل :

$$cov(x,y) = E\,[(x - \mu)(y - \beta)] \qquad (12)$$

تمارين

١ ـ نقذف ثلاث قطع من النقود وليكن x عدد أوجه الطرّة الملحوظة . أوجد تابع التوزيع الاحتمالي لِ x . ارسم المضلع الاحتمالي للتوزيع ، واحسب توقع وتشتت x .

٢ ـ لنفرض أن جهاز راديو يحوي ستة ترانز ستورات . اثنان منها لا يعملان . اخترنا بصورة عشوائية ثلاثة ترانز ستورات ونزعناها من الراديو وفحصناها . وليكن x عدد ما وجدناه عاطلاً من بينها . أوجد تابع التوزيع للمتحول x . عبر عن نتائجك بيانياًعلى شكل مضلع احتمالي .

٣ ـ ليكن x متحولاً عشوائياً تابع توزيعه معطى بالجدول :

x	p (x)
o	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{8}$

احسب توقع وتشتت x . ارسم تابع التوزيع بيانياً .

٤ ـ لنشبه التجربة في التمرين الثاني بوضع علامات مميزة على ست قطع نقود ، بحيث يمثل اثنان منها قطعاً ناقصة الصنع وأربع تمثل قطعاً تامة الصنع . ضع قطع النقود هذه في قبعة ، اخلطها جيداً واسحب ثلاثاً منها ثم سجل x عدد القطع الناقصة الصنع الملحوظة . أعد القطع إلى القبعة ثانية وكرر العملية نفسها

من جديد ، وهكذا حتى تحصل على $n = 100$ ملاحظة لقيم x . ارسم مضلع التكرار النسبي لهذه العينة وقارنه مع المضلع الاحتمالي الذي حصلت عليه في التمرين الثاني .

٥ ـ بالإشارة إلى التمرين الأول، ومستخدماً المضلع الاحتمالي أوجد الكسر من الاحتمال الكلي الواقع ضمن انحرافين معياريين على جانبي المتوسط . وقارن النتيجة مع نظرية تشيبيشيف .

٦ ـ بالإشارة إلى التمرين الثاني . أوجد $\mu = E(x)$ وهو متوسط x من أجل المجتمع النظري ، وذلك باستخدام تابع التوزيع الذي حصلنا عليه هناك . ثم احسب المتوسط $\bar{x}$ للعينة من القياسات المائة التي ولدناها في التمرين الرابع . هل يقدم $\bar{x}$ تقديراً جيداً لِـ μ ؟

٧ ـ أوجد تشتت x حيث x هو العدد الملحوظ عند قذف قطعة زهر . (انظر المثال ٤ـ٢) . واستخدم المضلع الاحتمالي لحساب النسبة من الاحتمال الواقعة ضمن انحرافين معياريين على جانبي المتوسط .

٨ ـ احسب التشتت σ^2 من أجل المجتمع في التمرين الثاني وتشتت العينة S^2 في التمرين الرابع وقارنهما . .

٩ ـ إسحب عينة من $n = 50$ قياساً من مجتمع قذف قطعة الزهر في المثال (٤ـ٢) وذلك بقذف قطعة زهر 50 مرة وتسجيل x بعد كل قذفة . احسب $\bar{x}$ و S^2 من أجل العينة . قارن $\bar{x}$ مع توقع X^2 كما وجدناه في المثال (٤ـ٤) ، و S^2 مع تشتت x الذي حصلنا عليه في التمرين (٨) . هل يقدم $\bar{x}$ و s^2 تقديرين جيدين لِـ μ و σ^2 على الترتيب .

١٠ ـ باستخدام تابع التوزيع الذي حصلنا عليه في التمرين الثاني ، أوجد النسبة من المجتمع الكلي من القياسات الواقعة ضمن انحرافين معياريين على جانبي المتوسط ، قارن مع نظرية تشيبيشيف . أعد من أجل العينة في التمرين الرابع .

١١ ـ تاجر للتجهيزات الثقيلة يتصل في اليوم بزبون واحد أو زبونين

وذلك باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ على الترتيب . وسينتج كل اتصال إما لا شيء أو صفقة بيع قيمتها 50.000 ل.س وذلك باحتمال 9/10 و 1/10 على الترتيب . فما هو توقع قيمة مبيعاته اليومية ؟

١٢ ـ منطقة تحوي عدداً كبيراً من البيوت الريفية . ويعتقد أن 60% منها مؤمن ضد الحريق . اختير أربعة مالكي بيوت ريفية بصورة عشوائية من مجتمع المنطقة بكاملها . وقد أمّن x من بينهم بيته ضد الحريق . أوجد تابع توزيع x . ما هو احتمال أن يكون ثلاثة من بينهم على الأقل ممن أمّنوا بيوتهم ضد الحريق ؟

١٣ ـ تستخدم أداة لتحري الحريق ثلاث خلايا حساسة ضد درجات الحرارة المرتفعة وهي تعمل مستقلة عن بعضها البعض بحيث يمكن لأي واحدة منها أو أكثر أن تبدأ الإنذار ضد الحريق . وتتصف كل منها بأن احتمال أن تبدأ الإنذار عندما تصل درجة الحرارة إلى 100 أو أكثر هو 0.8 . وليكن x عدد الخلايا التي تعطي انذاراً عند وصول درجة الحرارة إلى 100 أو أكثر . احسب تابع توزيع x . احسب احتمال قيام إنذار عند بلوغ الحرارة درجة 100 .

١٤ ـ احسب توقع وتشتت المتحول العشوائي x المعرف في التمرين السابق .

١٥ ـ يمتلك رجل بيتاً في منطقة نعلم وفقاً لخبرة سابقة أنه يمكن أن يتعرض لانهيار كامل باحتمال 001. ولانهيار بنسبة 50% باحتمال 01. . إذا تجاهلنا كل الخسائر الجزئية الأخرى ، فكيف تحدد شركة التأمين رسماً سنوياً عادلاً لبوليصة تأمين قيمتها 20,000 ل.س ؟