الفصل الثاني عشر

تصميم الزمرة التامّة العشوائية وتصميم المربّع اللاتيني

ناقشنا في الفصل السابق طريقة تحليل التشتت وتطبيقها في حالتي التصنيف الأحادي والثنائي ، كما درسنا بالتفصيل التصميم التام العشوائية الذي يقدم أفضل طريقة للاستفادة من تحليل التشتت في حالة التصنيف الأحادي . وفي معظم الأبحاث والتحريات يكون عدد العوامل التي يجب دراستها أكثر من الواحد مما يجعل المعلومات الإحصائية مصنفة وفق بعدين أو أكثر . وإذا كنا قد تعرضنا في الفصل السابق إلى طريقة تحليل التشتت في حالة التصنيف الثنائي فإننا سنخصص هذا الفصل لدراسة تصميم الزمرة التامة العشوائية وتصميم المربع اللاتيني اللذين يقدمان الطريقة المثلى للاستفادة من تحليل التشتت في حالتي التصنيف الثنائي والثلاثي على الترتيب .

١٢ ـ ١ **تصميم الزمرة التامة العشوائية** : إذا لم تكن جميع الوحدات التجريبية التي تضمها التجربة متجانسة فلا يمكن استخدام التصميم التام العشوائية . إذ نعلم أنه إذا تضمنت التجربة t معالجة ، وكررنا تطبيق كل معالجة في b من الوحدات التجريبية ، فإن أحد الشروط اللازمة لتطبيق التصميم التام العشوائية هو أن تكون الـ bt من الوحدات التجريبية ، وهي مجمل الوحدات التي تتضمنها التجربة ، متجانسة ، أي أنه لا توجد مصادر يمكن أن ننسب لها تغير في الإنتاج من وحدة تجريبية إلى وحدة أخرى سوى الاختلاف بين المعالجتين المطبقتين في مثل هاتين الوحدتين . وبالطبع فإنه قلّما تتوفر للباحث مثل هذه الشروط . وفي هذه الحالة نلجأ إلى تصميم

الزمرة التامة العشوائية فنقسم الوحدات التجريبية إلى b زمرة تحوي كل منها t وحدة تجريبية (تكون الزمرة تامة اذا كان عدد الوحدات التجريبية فيها مساوياً لعدد المعالجات) ، وبحيث تتوفر خاصة التجانس فيما بين الوحدات التجريبية ضمن كل زمرة ، مما يمكننا من أن نحسب بسهولة ويسر مركبة جديدة من مركبات التشتت نعزوها إلى التغير من زمرة إلى زمرة أو ما بين الزمر . وتُوزع المعالجات على الوحدات التجريبية ضمن كل زمرة بصورة عشوائية . وبينما كانت المعالجات توزَّع بصورة عشوائية على جميع الوحدات التجريبية في التصميم التام العشوائية فقد وضعنا هنا قيداً على العشوائية بحيث تتناول الوحدات التجريبية ضمن كل زمرة على حدة .

ولإيضاح الفكرة الكامنة وراء هذا التصميم لنفرض ستة أنواع من الشوفان ، نريد المقارنة بين إنتاجية كل منها ، ولدينا قطعة من الأرض كافية لثلاثين وحدة تجريبية . ولكننا نعلم من سجل إنتاج هذه الأرض أنه يوجد تغير في الخصوبة من الشمال إلى الجنوب ، والأجزاء الواقعة في أقصى الشمال هي الأكثر خصوبة وتتناقص هذه الخصوبة كلما اتجهنا نحو الجنوب . ففي حالة كهذه يبدو منطقياً أن نقسم الأرض إلى خمس زمر تحوي كل زمرة ست وحدات تجريبية ، وبحيث تحوي الزمرة الأولى الوحدات الست الأكثر خصوبة ، وتحوي الزمرة الثانية الوحدات الست التي تأتي في المرتبة الثانية من الخصوبة ، وهكذا حتى نصل إلى الزمرة الخامسة التي تحوي الوحدات الست الأقل خصوبة والواقعة في أقصى الجنوب . وبعدها نوزع الأنواع الستة من الشوفان على الوحدات الست ضمن كل زمرة بصورة عشوائية وبحيث تتم عملية التوزيع العشوائية بصورة منفصلة ضمن كل زمرة .

وكمثال آخر لنفرض أن عملية صناعية لإنتاج سلعة معينة تستخدم مواداً أولية من ثلاثة مصادر مختلفة . ولنفرض أن المعالجات التي سنختبرها هي أربعة آلات مختلفة مصممة لإنتاج هذه السلعة . وإذا اعتبرنا المصادر الثلاثة

المختلفة للمواد الأولية زمراً فيمكن تقسيم المادة الأولية من كل مصدر إلى أربعة أجزاء تكون بمثابة الوحدات التجريبية ضمن كل زمرة ، ثم نخصص الآلات الأربعة بصورة عشوائية لهذه الأجزاء الأربعة .

وفي كلي المثالين يلاحظ القارئ أن عدد الوحدات التجريبية ضمن كل زمرة يساوي تماماً عدد المعالجات التي تهدف التجربة لدراستها ، وهذا يدعونا إلى وصف الزمرة بأنها تامة تمييزاً لها عن الحالة التي يكون فيها عدد المعالجات كبيراً ، وتحقيق صفة التجانس بين الوحدات ضمن كل زمرة صعباً ، مما يضطرنا ، حفاظاً على شرط التجانس ، أن نجعل عدد وحدات الزمرة أقل من عدد المعالجات المدروسة . وبذلك نحصل على تصميمات جديدة تنضوي تحت عنوان تصميمات الزمرة غير التامة .

١٢ ـ ٢ **الحسابات في تصميم الزمرة التامة**: سنوضح هذه الحسابات من خلال مناقشة تفصيلية للمثال التالي حيث نقارن تأثيرات عشرة أشكال من التعيين أو الراتب الغذائي اليومي على زيادة وزن العجول . ولزيادة كفاءة التجربة قسمنا العجول الأربعين المتوفرة للتجربة إلى أربع جماعات وذلك وفقاً لوزنها الابتدائي (أي وزنها عند بداية التجربة) . وسنشير إلى هذه الجماعات على أنها الزمر الأربعة في التجربة . ونوزع المعالجات (وهي أشكال الراتب الغذائي اليومي أو مخصصات الطعام اليومية) بصورة عشوائية على العجول ضمن كل زمرة . وكانت نتيجة التجربة كما يظهر في الجدول (١٢ ـ ١) التالي :

جدول ١٢ ـ ١ الزيادة في الوزن (بالليبرة) لأربعين عجلاً خضعت لمخصصات إطعام مختلفة

(يوجد تعديل في سلم القياس توخياً للسهولة)

الزمر	المعالجات (الراتب الغذائي اليومي)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	5	8	6	1	3	8	6	4	4
2	3	4	7	5	2	5	8	12	5	4
3	3	5	10	5	1	7	7	2	6	2
4	5	5	9	2	2	8	8	5	3	3

وقد رمزنا للمعالجات العشر بالأحرف الأبجدية من A إلى J . وبينما تبدو النتائج في الجدول (١٢ ـ ١) مرتبة وفقاً للتسلسل الهجائي إلا أن توزع المعالجات ضمن كل من الزمر الأربع كان كما يبدو في الجدول (١٢ ـ ٢) وبالطبع فإن الترتيبة التي نراها في (١٢ ـ ٢) كان يمكن أن تظهر ، نتيجة للتوزيع العشوائي ، بأشكال عديدة مختلفة .

جدول ١٢ ـ ٢ توزع المعالجات كما تمخضت عن تطبيق العشوائية

1	الزمرة	H	B	F	A	C	I	E	J	D	G
2	الزمرة	A	I	G	H	J	D	F	E	C	B
3	الزمرة	E	A	C	I	B	H	D	G	J	F
4	الزمرة	J	F	D	B	H	I	A	C	G	E

وسنقسم التغير الكلي بين قيم الملاحظات في البيان الإحصائي (١٢ ـ ١) أي مجموع المربعات الكلي إلى ثلاثة أجزاء :

(i) التغير بين الزمر ، (ii) التغير بين المعالجات ، و (iii) الخطأ التجريبي أو التغير المنسوب إلى التحولات الكيفية والكمية للفروق بين المعالجات من زمرة إلى زمرة . ونحسب مجاميع المربعات الموافقة لمصادر التغير الثلاثة

هذه كما يلي :

(1) $$SST = \sum^{b} \sum^{t} (Y_{ij} - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{t} Y_{ij}^2 - \frac{T^2}{bt}$$ مجموع المربعات الكلي

(2) $$SSB = t \sum_{i=1}^{b} (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{b} B_i^2}{t} - \frac{T^2}{bt}$$ مجموع مربعات الزمر

(3) $$SSR = b \sum_{j=1}^{t} (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y})^2 = \frac{\sum_{j=1}^{t} T_j^2}{b} - \frac{T^2}{bt}$$ مجموع مربعات المعالجات

(4) $$SSE = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{t} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y})^2 = SST - SSB - SSR$$ مجموع مربعات الخطأ

(5) $$T = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{t} Y_{ij}$$ المجموع الكلي

(6) $$B_i = \sum_{j=1}^{t} Y_{ij}$$ مجموع الملاحظات في الزمرة i

(7) $$T_j = \sum_{i=1}^{b} Y_{ij}$$ مجموع الملاحظات الموافقة للمعالجة j

(8) $$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{t} Y_{ij}}{bt} = \frac{T}{bt}$$ المتوسط الإجمالي للتجربة

(9) $$\bar{Y}_{i.} = \sum_{j=1}^{t} Y_{ij} / t = \frac{B_i}{t}$$ متوسط الزمرة i

(10) $$\bar{Y}_{.j} = \sum_{i=1}^{b} Y_{ij} / b = \frac{T_j}{b}$$ متوسط المعالجة j

و Y_{ij} هي القيمة الناتجة من الوحدة التجريبية في الزمرة i التي خضعت للمعالجة j

$(i = 1, 2, ..., b; j = 1, 2, ..., t)$. وفي مثالنا نجد :

$$SST = 2^2 + 5^2 + \ldots + 3^2 + 3^2 - \frac{(200)^2}{40} = 260 \quad (11)$$

$$SSB = \frac{(47)^2 + (55)^2 + (48)^2 + (50)^2}{10} - \frac{(200)^2}{40} = 3.8 \quad (12)$$

$$SSR = \frac{(13)^2 + (19)^2 + \ldots + (18)^2 + (13)^2}{4} - \frac{(200)^2}{40} = 163.5 \quad (13)$$

$$SSE = 260 - 3.8 - 163.5 = 92.7 \quad (14)$$

١٢ ـ ٣ الفرضيات التي تكمن وراء تصميم الزمرة التامة العشوائية : لكي نتمكن من تطبيق طرق التقدير ، واللجؤ إلى تحليل التشتت من أجل إختبار الفرضيات في تصميم الزمرة التامة العشوائية ، ننطلق من الفرض بتحقق الشروط التالية :

١ ـ الملاحظات y_{ij} $(i = 1, \ldots, t; j = 1, \ldots, b)$ هي متحولات عشوائية بتوزع كل منها حول متوسط ξ_{ij} ثابت .

٢ ـ الوسطاء ξ_{ij} توابع تجميعية في وسطاء أخرى موافقة للزمر والمعالجات . ويمكن التعبير عن هذه التوابع على الشكل :

$$\xi_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j \quad (15)$$

حيث

$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{t} \xi_{ij}}{t} - \mu \quad , \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t} \xi_{ij}}{bt} \quad (16)$$

و

$$\tau_j = \frac{\sum_{i=1}^{b} \xi_{ij}}{b} - \mu \quad (17)$$

وهكذا يكون

$$\sum_{i=1}^{b} \beta_i = \sum_{j=1}^{t} \tau_j = 0 \quad (18)$$

٣ ـ المتحولات العشوائية y_{ij} متجانسة أي أن لكل منها نفس التشتت σ^2 .

٤ ـ تتوزع المتحولات y_{ij} مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي .

ويمكن تلخيص هذه الفرضيات بما يلي : يمكن تمثيل الملاحظات بالنموذج الرياضي الاحتمالي :

$$Y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, t \\ j = 1, \dots, b \end{matrix} \qquad (19)$$

حيث μ ، β_i ، τ_j ثوابت تحقق ما يلي :

$$\sum_{i=1}^{b} \beta_i = \sum_{j=1}^{t} \tau_j = 0 \qquad (20)$$

وتمثل β_i التأثير الفعلي للزمرة i مقاساً كإنحراف عن المتوسط ، وتمثل τ_j التأثير الفعلي للمعالجة j مقاساً كإنحراف عن المتوسط . والمتحولات ε_{ij} مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ^2 . وقد فرضنا هنا نموذج الثوابت . أما في نموذج مركبات التشتت فنفترض أن المقادير τ_j متحولات عشوائية مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ_τ^2 .

١٢ ـ ٤ اختبار الفرضيات في تصميم الزمرة التامة العشوائية : إذا عوضنا عن Y_{ij} ، $\bar{Y}_{i.}$ ، $\bar{Y}_{.j}$ ، و $\bar{Y}$ بدلالة النموذج المعرف بالمعادلة (19) فيمكن البرهان على أن توقع مجموع مربعات الزمر توقع مجموع مربعات المعالجات هو كما يلي :

$$E(SSB) = (b-1)\sigma^2 + t\sum_{i=1}^{b} \beta_i^2 \qquad (21)$$

$$E(SSR) = (t-1)\sigma^2 + b\sum_{j=1}^{t} \tau_j^2 \qquad (22)$$

والفرضية التي يهدف تصميم الزمرة التامة العشوائية إلى اختبارها هي عادة الفرضية بأنه لا توجد فروق بين التأثيرات الفعلية للمعالجات المختلفة المدروسة ؛ أي الفرض بأن كلاً من المعالجات تقدم نفس التأثير على الخاصة المقيسة . ونعبر عن ذلك رياضياً على الشكل :

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_t = 0 \quad (23)$$

أو

$$H_0 : \sum_{i=1}^{t} \tau_i^2 = 0 \quad (24)$$

وبالاستناد إلى الفرض بأن البيان الاحصائي هو عينة عشوائية من مجتمع طبيعي نجد أن المتحول العشوائي SSE/σ^2 يتبع التوزيع كاي مربع بِـ $(t-1)$ $(b-1)$ درجة من الحرية . وبطريقة مشابهة لما رأيناه في الفقرة (١١ ـ ٨) يتضح لنا هنا أنه إذا كانت الفرضية الإبتدائية H_0 صحيحة فعندئذ تتبع النسبة :

$$\frac{SSR}{\sigma^2 + \frac{b}{t-1}\sum_{j=1}^{t}\tau_j^2}$$

التوزيع كاي مربع بِـ $t-1$ درجة من الحرية . ونستنتج بطريقة مماثلة أيضاً أنه إذا وفقط إذا كانت الفرضية الإبتدائية صحيحة فإن النسبة :

$$F = \frac{SSR/(t-1)}{SSE/(b-1)(t-1)} = \frac{\text{متوسط مربعات المعالجات}}{\text{متوسط مربعات الخطأ}} = \frac{MSR}{MSE} , \quad (25)$$

تتبع التوزيع F بِـ $\nu_1 = t-1$ و $\nu_2 = (b-1)(t-1)$ من درجات الحرية . وهكذا يمكن استخدام النسبة F كإحصاء إختبار من أجل الفرضية H_0 .

ونلخص هذه النتائج في جدول تحليل التشتت (١٢ ـ ٣) الموافق لتصميم الزمرة التامة العشوائية .

جدول ١٢ ـ ٣ تحليل التشتت في تصميم الزمرة التامة العشوائية

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات	F النسبة
الزمر	$b-1$	SSB	$MSB=\frac{SSB}{b-1}$	$\sigma^2+\frac{t}{b-1}\sum_{i=1}^{b}\beta_i^2$	
المعالجات	$t-1$	SSR	$MSR=\frac{SSR}{t-1}$	$\sigma^2+\frac{b}{t-1}\sum_{j=1}^{t}\tau_j^2$	$\frac{MSR}{MSE}$
الخطأ	$(b-1)(t-1)$	SSE	$MSE=\frac{SSE}{(t-1)(b-1)}$	σ^2	
المجموع	$bt-1$	SST			

وفي مثالنا هنا نجد جدول تحليل التشتت التالي :

جدول ١٢ ـ ٤ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي المعطى في الجدول (١٢ ـ ١)

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات	النسبة F
الزمر	3	3.8	1.26	$\sigma^2 + \frac{10}{3}\sum_{i=1}^{4} \beta_i^2$	
المعالجات	9	163.5	18.17	$\sigma^2 + \frac{4}{9}\sum_{j=1}^{10} \tau_j^2$	
الخطأ التجريبي	27	92.7	3.43	σ^2	5.29
المجموع	39	260			

ولاختبار الفرضية : $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{10} = 0$

نحسب النسبة $F = \frac{MSR}{MSE} = \frac{18.17}{3.43} = 5.29$ وبما أنها أكبر من

$$F_{.01}\ (9,27) = 3.14$$

فإننا نرفض الفرضية H_0 عند المستوى $\alpha = .01$ ، ونقرر أنه ليس للمعالجات العشرة (الرواتب الغذائية العشرة المطبقة على العجول) نفس التأثيرات بالنسبة لزيادة وزن العجول . ولكن هذا القرار بمفرده لا يرضي تساؤلاتنا . إذ نريد معرفة المعالجات ذات التأثير الضعيف لكي نتجنب على الأقل اعتبارها في تجاربنا المقبلة التي تدرس نفس الموضوع ، بالإضافة إلى التعرف على المعالجات الأجود التي يمكن أن نوصي باتباعها . وتوجد معلومات مفيدة في هذا المجال يمكن اقتباسها من دراسة متوسطات المعالجات . وسيكون من المفيد أن نقدم مع جدول تحليل التشتت جدولاً يضم متوسطات المعالجات والانحراف المعياري الموافق لها . ولكل من متوسطات المعالجات في تصميم الزمرة التامة العشوائية نفس الإنحراف المعياري. ونقدر تشتت متوسط المعالجة j من العلاقة :

$$\hat{V}\,(\bar{y}_{.j}) = \frac{MSE}{b} = \frac{\text{متوسط مربعات الخطأ}}{\text{عدد الملاحظات الموافقة لكل معالجة}} \qquad (26)$$

جدول ١٢ ـ ٥ تقديرات المتوسط الفعلي لزيادة الوزن من البيان الإحصائي في الجدول (١٢ ـ ١)

المعالجات

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
متوسط المعالجات	3.25	4.25	8.5	4.5	1.5	5.75	7.75	6.25	4.5	3.25
الإنحراف المعياري لكل متوسط معالجة	$= \sqrt{\frac{1}{4}\,(3.43)} = 0.93$									

بالعودة إلى الجدول (١٢ ـ ٣) نجد أن توقع متوسط مربعات الزمر هو $\sigma^2 + \frac{t}{b-1}\sum_{i=1}^{b}\beta_i^2$ ، فهل يمكن اختبار الفرضية $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$ ؟ ويمكن الحصول على الجواب بالعودة إلى الطريقة العشوائية المتبعة في تصميم الزمرة التامة العشوائية ، فقد وزعنا فيها المعالجات ضمن كل زمرة بصورة عشوائية إلا أن تشكيل الزمر ، أي طريقة تقسيم الوحدات التجريبية كلها إلى زمر ، بعيد جداً عن كونه عشوائي . وفي الحقيقة تُشكل الزمر بحيث تكون التأثيرات β_i على أكبر قدر ممكن من الاختلاف ، خاضعين لقيد واحد هو أن كل زمرة يجب أن تحوي t من الوحدات التجريبية المتجانسة قدر الإمكان . وهذا لا يترك أي مبرر لإختبار الفرضية $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$ وهكذا نقول أنه يمكن الاستفادة من تصميم الزمرة التامة العشوائية لإختبار فرضية تتعلق بتأثيرات المعالجات ، ولكن لا يمكن استخدامه ولاختيار فرضية حول تأثيرات الزمر .

١٢ ـ ٥ المقارنات في تصميم الزمرة التامة العشوائية : بصورة مماثلة لما رأيناه في التصميم التام العشوائية يكون من المفيد غالباً دراسة مقارنات معينة بين المعالجات بدلاً من الاكتفاء باختبار الفرضية $H_0: \tau_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, t)$ ولإيضاح الفكرة سنحلل البيان الإحصائي المبين في الجدول (١٢ ـ ٦) . وهذه المعلومات الإحصائية ناتجة عن عملية صناعية معينة استخدمنا فيها أربع ماكينات ، ونقيس انتاجية كل منها بعدد القطع التي تنتجها في اليوم . وسنعتبر الأيام الخمسة التي استمرت فيها التجربة زمراً ، والآلات الخمسة هي المعالجات .

جدول ١٢ ـ ٦ الإنتاج اليومي لأربع آلات منتجة

(الرقم يمثل عدد القطع الناتجة في يوم واحد)

اليوم	الماكينة A	B	C	D
1	293	308	323	333
2	298	353	343	363
3	280	323	350	368
4	288	358	365	345
5	260	343	340	330
	1419	1685	1721	1739

ومع الإطلاع على مواصفات الماكينات الأربع تتوضح لنا معلومات إضافية . فعلى سبيل المثال ، تمثل الماكينة A النوع القياسي المستخدم الآن في الصناعة ، بينما تمثل الماكينات B ، C ،و D تصاميم جديدة مقترحة لتحل محل الماكينة A . وبالإضافة إلى ذلك نعرف أن B و C تحوي أجزاء متحركة مصنوعة من صفائح الألمنيوم بينما لا تتصف D بمثل هذه الخاصة . كما نعلم من المواصفات الصناعية لِـ B أن تشحيمها يتم بصورة آلية بينما لا تتصف C بذلك . ولتقصي آثار هذه الخواص على الإنتاجية يمكن قبل البدء بالتجربة وضع المقارنات المبينة في الجدول (١٢ ـ ٧) والتي تمليها المواصفات السابقة .

جدول ١٢ ـ ٧ التمثيل الرمزي لثلاث مقارنات مختارة من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٢ ـ ٦)

المقارنة	الماكينة A	B	C	D
1	+3	−1	−1	−1
2	0	+1	+1	−2
3	0	−1	+1	0

وبصورة مماثلة للطريقة التي عرضناها في الفقرة (١١ ـ ٩) يمكن ايجاد مجموع المربعات الموافق لكل من المقارنات الثلاث باستخدام العلاقة :

$$\text{مجموع مربعات المقارنة رقم } k = \frac{\left(\sum_{j=1}^{4} c_{jk} T_j\right)^2}{b \sum_{j=1}^{4} c_{jk}^2} \qquad (27)$$

حيث ترمز c_{jk} للأمثال التي تحدد المقارنة رقم k في الجدول (١٢ ـ ٧) .
وهكذا نجد :

$$\text{مجموع مربعات A في مقابل البقية} = \frac{[3\,(1419) - 1685 - 1721 - 1739]^2}{5\,(9 + 1 + 1 + 1)} = \frac{(-888)^2}{60} = 13142.4$$

$$\text{مجموع مربعات B و C في مقابل D} = \frac{[1685 + 1721 - 2\,(1739)]^2}{5\,(1 + 1 + 4)} = \frac{(-72)^2}{30} = 172.8$$

$$\text{مجموع مربعات B مقابل C} = \frac{(-1685 + 1721)^2}{5\,(1 + 1)} = \frac{(36)^2}{10} = 129.6$$

ويصبح تحليل التشتت كما في الجدول (١٢ ـ ٨) . وقد حسبنا مجاميع مربعات الزمر ، المعالجات ، والخطأ التجريبي بنفس الطريقة التي أوضحناها

في الفقرة (١٢ ـ ٢) . وإذا أضفنا مجاميع المربعات الموافقة للمقارنات الثلاث إلى بعضها نحصل على مجموع مربعات المعالجات ، ذلك لأن المقارنات الثلاث متعامدة (أنظر الفقرة ١١ ـ ٩)

ونلاحظ أن النسبة F المتعلقة بالمعالجات هامة وأن المقارنة « A في مقابل الباقي » هامة بصورة مرتفعة (النسبة F الموافقة لهذه المقارنة هي $60.05 = \frac{13142.4}{218.85}$) .
وأهمية النسبة F المتعلقة بالمعالجات تعني أننا نرفض الفرضية القائلة بتساوي إنتاجية الماكينات الأربع ، ونقرر وجود فرق هام بينها . أما أهمية المقارنة الأولى فإنها تشير إلى رفض الفرضية القائلة بأنه لا يوجد فرق بين إنتاجية الماكينة المستخدمة حالياً A ومتوسط إنتاجية الآلات المقترحة ، وبالتالي نقرر ضرورة إستبدال الماكينة بواحدة من الماكينات الأحدث B ، C ،أو D . والتساؤل الذي يطرح نفسه هو أي الماكينات B ، C ، أو D أفضل ؟ وللإجابة نلاحظ أن المقارنة B في مقابل C غير هامة وبالتالي نستنتج أنه ليس لميزة التشحيم الذاتي أي أثر يُذكر في مجال الإنتاجية (وهي النتيجة التي كان يمكن الحصول عليها بدون اللجؤ إلى أي تحليل إحصائي) أما المقارنة B و C في مقابل D فهي غير هامة أيضاً ، وهكذا نستنتج أيضاً أن كون أجزاء متحركة مصنوعة من صفائح الألمنيوم ليس له تأثير يُذكر في إنتاجية الماكينة . والخلاصة فإننا سنوصي إدارة المصنع في هذه الحالة بتركيب إحدى الماكينات ذات التصميم الحديث B أو C أو D . أما إختيار واحدة منها دون الأخرى فيعود إلى عوامل أخرى غير الإنتاجية التي تدرسها التجربة مثل الكلفة ، سهولة التشغيل ، المظهر ، أو أية عوامل أخرى تبدو هامة لإدارة المصنع .

١٢ ـ ٦ فقدان معلومات إحصائية في تصميم الزمرة التامة العشوائية :

بعد كل الجهود التي يبذلها الباحث في تخطيط التجربة وتنفيذها على الطبيعة فقد تعترضه صعوبات من أهمها وأكثرها حدوثاً فقدانه لبعض الملاحظات أو القياسات أي حصوله على بيان إحصائي ناقص . والأسباب التي قد تؤدي

جدول ١٢ ـ ٨ تحليل التشتت للبيان الإحصائي في الجدول (١٢ ـ ٦)

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	النسبة F
الزمر	4	2146.2	536.55	
المعالجات	3	13144.8	4381.6	20.02
A مقابل الباقي	1	13142.4		
B و C مقابل D	1	172.8		
B مقابل C	1	129.6		
الخطأ التجريبي	12	2626.2	218.85	
المجموع	19	18217.2		

إلى فقدان ملاحظة متعددة : موت حيوان ، وحدة تجريبية في الزراعة يغمرها فيضان ، عامل ينتابه مرض فلا يقوم بالعمل المطلوب منه ، تعرّض وعاء زجاجي يحوي مادة مصنوعة (مربيات مثلاً) تدرسها التجرة للكسر ، أو فقدان السجل الذي يحوي الملاحظة الخ . وبما أن معظم التصاميم تحوي درجة معينة من التوازن أو التناظر فإن فقدان ملاحظة سيقضي على مثل هذا التوازن . ولا بد أن يؤدي ذلك إلى تعقيد الموقف ويتطلب إدخال تعديلات في التحليل المعتاد للتجربة ، وتوجد طرق لتحليل بيان إحصائي غير مصمم على أساس من التوازن أو التناظر يمكن اللجؤ إليها في مثل هذه الحالة . إلا أن للإحصائي طرقاً أخرى أكثر بساطة سندرسها في هذه الفقرة ونقدم الخطوات الحسابية التي يتضمنها .

نذكر أولاً حالتين لا تقدمان في حالة تصميم الزمرة التامة العشوائية صعوبات تذكر وهما (i) فقدان زمرة بكاملها أو (ii) فقدان الملاحظات الخاصة بمعالجة معينة . وفي حالة فقدان زمرة أو أكثر نقوم بالتحليل متجاهلين تماماً الزمر المفقودة شريطة أن يكون عدد الزمر الباقية إثنين على الأقل ، أي أننا نعتبر التجربة وكأنها مصممة في الأصل على أساس أن عدد الزمر هو العدد الذي تبقى لدينا . وفي حال فقدان الملاحظات المتعلقة بمعالجة يمكن أيضاً تجاهل هذه المعالجة وإتمام التحليل وكأن التجربة مصممة أساساً لدراسة المعالجات الباقية فقط . وينبغي على الباحث متابعة الأسباب التي أدت إلى غياب جميع الملاحظات المتعلقة بمعالجة معينة ويتخذ قراره بما يتفق وتلك الأسباب .

والحالة الأكثر حدوثاً هي غياب ملاحظة واحدة وعندئذ لا بد من الحصول على تقدير لقيمة هذه الملاحظة ولنرمز لها بِـ M ثم نحلل التجربة مستخدمين القيمة المقدّرة . والمبدأ المتبع في تقدير الملاحظة الغائبة هو أن نتبنى قيمة لـ M تجعل عبارة مجموع مربعات الخطأ (وهي تابع في M) في نهايتها الصغرى . أي أننا نشتق هذه العبارة بالنسبة لِـ M ونكتب الناتج مساوياً للصفر . وبحل

المعادلة الناتجة نحصل على العلاقة التالية لتقدير M :

$$\hat{M} = \frac{tT + bB - S}{(t-1)(b-1)} \qquad (28)$$

حيث

t = عدد المعالجات

b = عدد الزمر

T = مجموع الملاحظات ضمن المعالجة الموافقة للملاحظة المفقودة .

B = مجموع الملاحظات ضمن الزمرة التي تحوي الملاحظة المفقودة .

S = مجموع كل الملاحظات الفعلية في التجربة .

وبعد تبديل القيمة $\hat{M}$ من أجل الملاحظة المفقودة نحلل البيان الإحصائي الجديد بالطريقة المعتادة ، ونحسب SSB ، SSR ، SSE و SST وفقاً للطريقة الحسابية المبينة في الفقرة (١٢ ـ ٢) . ولتجنب نتائج غير منصفة لا بد من تعديلات بسيطة في بنية جدول تحليل التشتت : والتعديل الأول هو تخفيض عدد درجات الحرية الموافق لكل من مجموع مربعات الخطأ SSE ، ومجموع المربعات الكلي SST ، بمقدار الواحد . والتعديل الثاني هو إجراء تخفيض في كمية مجموع مربعات المعالجات بحيث تصبح العبارة الجديدة لمجموع المربعات هذا تقديراً منصفاً لِـ σ^2 تحت الشرط بأن الفرضية $H_0 : \tau_j = 0$ $(j = 1, 2, ..., t)$ صحيحة . أي أنه تحت هذه الفرضية تكون قيمة توقع مجموع مربعات المعالجات SSR الذي حصلنا عليه بعد إضافة التقدير $\hat{M}$ إلى البيان الإحصائي أكبر من σ^2 ، ولجعل هذا التوقع مساوياً لِـ σ^2 ، كما يجب أن يكون ، نقوم بالتخفيض المذكور أعلاه ونتفادى الحصول على إختبار غير منصف للفرضية H_0 . ويمكن البرهان على أن كمية التخفيض أو التصحيح الضروري معرف بالعلاقة :

$$Z \text{ التصحيح } = \frac{[B-(t-1)M]^2}{t(t-1)} \qquad (29)$$

ومجموع مربعات المعالجات الذي سنستخدمه في جدول تحليل التشتت هو إذن :

$$SSR' = SSR - Z \qquad (30)$$

وتحليل التشتت المطلوب لإختبار الفرضية H_0 هو التحليل المبين في الجدول (١٢ ـ ٩) . أما النسبة F فهي :

$$F = \frac{SSR'/(t-1)}{SSE/[(b-1)\ (t-1)-1]} \qquad (31)$$

جدول ١٢ ـ ٩ تحليل التشتت في حالة غياب ملاحظة واحدة من تصميم الزمرة التامة العشوائية

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات
الزمر	b-1	SSB	SSB/(b-1)
المعالجات	t-1	SSR′	SSR′/ (t-1)
الخطأ التجريبي	(b-1) (t-1)-1	SSE	SSE/[(b-1 (t-1)-1]
المجموع	bt-2	SST-Z	

بنفس الطريقة يمكن معالجة حالة غياب ملاحظتين أو أكثر . وفي حال غياب ملاحظتين ليستا في نفس الزمرة يكون التصحيح الضروري في مجموع مربعات المعالجات هو :

$$Z = \frac{[B'-(t-1)M']^2 + [B''-(t-1)M'']^2}{t\ (t-1)} \qquad (32)$$

حيث

t = عدد المعالجات

B′ = مجموع كل الملاحظات ضمن الزمرة التي تحوي الملاحظة المفقودة الأولى .

B″ = مجموع كل الملاحظات ضمن الزمرة التي تحوي الملاحظة المفقودة الثانية .

M′ = تقدير الملاحظة المفقودة الأولى .

M″ = تقدير الملاحظة المفقودة الثانية .

١٢ ـ ٧ تحليل تصميم الزمرة التامة العشوائية في حال وجود أكثر من ملاحظة واحدة من كل وحدة تجريبية : لنفرض أن المعالجات هي خمسة أنواع من الأسمدة نريد اختبار تأثيراتها المختلفة على إنتاج الشوفان . وأننا قررنا إستخدام تصميم الزمرة التامة العشوائية بست زمر . وقد رأينا عند الحصاد أنه يكفي الحصول على عينة نختارها بصورة عشوائية من كل وحدة تجريبية . أي بدلاً من الحصول على إنتاج الوحدة التجريبية بكاملها نكتفي بإنتاج ثلاث مربعات طول ضلع كل منها 3 أقدام ، وذلك من كل وحدة تجريبية . ونحصل بذلك على أرقام الإنتاج من 90 من هذه المربعات . ولنفرض أن النتائج كانت ، بعد تعديلات في سلم القياس ، تتوخى السهولة في الحسابات ، كما هو مبين في الجدول (١٢ ـ ١٠) .

والنموذج الموافق لبيان إحصائي من هذا النوع هو :

$$Y_{ijk}=\mu+\beta_i+\tau_j+\varepsilon_{ij}+\eta_{ijk} \qquad \begin{aligned} i &= 1, \dots, b;\\ j &= 1, \dots, t,\\ k &= 1, \dots, n.\end{aligned} \qquad (33)$$

حيث تمثل β_i التأثير الفعلي للزمرة i ، و τ_j التأثير الفعلي للمعالجة j ، ε_{ij} خطأ العشوائية الموافق للوحدة التجريبية من الزمرة i الخاضعة للمعالجة j (وهي تمثل أيضاً كل التأثيرات العائدة لعوامل خارجية لم نحسب حسابها في عاملي الزمر والمعالجات) و η_{ijk} هو خطأ العشوائية الموافق للعينة k من الوحدة التجريبية ij . أي الخطأ الذي يخلقه الإقتصار على إنتاج عينة من الوحدة التجريبية بدلاً من الحصول على إنتاج الوحدة التجريبية بكاملها . ونفرض

بالإضافة إلى ذلك أن :

$$\sum_{i=1}^{b} \beta_i = \sum_{j=1}^{t} \tau_j = 0 \qquad (34)$$

وأن المتحولات ε_{ij} مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت يساوي σ^2، أما المتحولات η_{ijk} فهي أيضاً مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت يساوي σ_η^2 كما نفرض أخيراً أن المتحولات ε_{ij} مستقلة إحصائياً عن المتحولات η_{ijk} .

وبعد أن عرضنا الفروض التي تقف وراء التصميم في هذه الحالة نعود إلى حساب مجاميع المربعات المختلفة فنعرضها فيما يلي :

مجموع المربعات الكلي $= SST = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk}-\bar{Y})^2$

$$= \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^2 - \frac{T^2}{btn} \qquad (35)$$

مجموع مربعات ما بين الوحدات التجريبية $= SSC$

$$= n\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}(\bar{Y}_{ij.}-\bar{Y})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t} C_{ij}^2}{n} - \frac{T^2}{btn} \qquad (36)$$

(37) مجموع مربعات الخطأ الناشيء عن العينات $= SSP = SST - SSC$

مجموع مربعات الزمر $= SSB = tn\sum_{i=1}^{b}(\bar{Y}_{i..}-\bar{Y})^2$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{b} B_i^2}{tn} - \frac{T^2}{btn} \qquad (38)$$

(39) مجموع مربعات المعالجات $= SSR$

$$= bn\sum_{j=1}^{t}(\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y})^2 = \frac{\sum_{j=1}^{t} T_j^2}{bn} - \frac{T^2}{btn}$$

جدول ١٢ ـ ١٠ قيم الإنتاج من 90 مربعاً وفق سلّم معدّل

الزمر	الأسمدة 1	2	3	4	5
1	57	67	95	102	123
	46	72	90	88	101
	28	66	89	109	113
2	26	44	92	96	93
	38	68	89	89	110
	20	64	106	106	115
3	39	57	91	102	112
	39	61	82	93	104
	43	61	98	98	112
4	23	74	105	103	120
	36	47	85	90	101
	18	69	85	105	111
5	48	61	78	99	113
	35	60	89	87	109
	48	75	95	113	111
6	50	68	85	117	124
	37	65	74	93	102
	19	61	80	107	118

$$\text{مجموع مربعات الخطأ التجريبي} = SSE = n\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y})^2$$

$$= SSC - SSB - SSR \qquad (40)$$

حيث

$$T = \text{المجموع الكلي} = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \qquad (41)$$

$$C_{ij} = ij \text{ مجموع الملاحظات ضمن الوحدة التجريبية} = \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \qquad (42)$$

$$B_i = i \text{ مجموع ملاحظات الزمرة} = \sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \qquad (43)$$

$$T_j = j \text{ مجموع ملاحظات المعالجة} = \sum_{i=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \qquad (44)$$

$$\bar{y} = \text{المتوسط الإجمالي للتجربة} = \frac{T}{btn} \qquad (45)$$

$$\bar{y}_{ij.} = ij \text{ متوسط الوحدة} = \frac{C_{ij}}{n} \qquad (46)$$

$$\bar{y}_{i..} = i \text{ متوسط الزمرة} = \frac{B_i}{tn} \qquad (47)$$

$$\bar{y}_{.j.} = j \text{ متوسط المعالجة} = \frac{T_j}{bn} \qquad (48)$$

و y_{ijk} هي الملاحظة k المأخوذة من الوحدة ij . ويبين الجدول (١٢ ـ ١١) تحليل التشتت في هذه الحالة .

ولدينا في المثال المعطي في الجدول (١٢ ـ ١٠) النتائج الحسابية التالية ، حيث b=6 ، t=5 ، و n=3 :

$$\begin{aligned}
SST &= 71907.6 \\
SSC &= 66771.0 \\
SSP &= 71907.6 - 66771.0 = 5136.6 \\
SSB &= 422.3 \\
SSR &= 65043.7 \\
SSE &= 66771.0 - 422.3 - 65043.7 = 1305.0
\end{aligned}$$

ولاختبار الفرضية $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \quad = \tau_t = 0$ نحسب النسبة :

$$F = \frac{\text{متوسط مربعات المعالجات}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبي}}$$

ونرفض الفرضية عند المستوى α إذا كانت $F > F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ حيث $\nu_1 = t - 1$ و $\nu_2 = (b-1)(t-1)$ وبالنسبه لمسألة دمج الخطأ التجريبي وخطأ العينات وإجراء الإختبار F بالإعتماد على الخطأ الناتج ، يمكن العودة إلى الفقرة (١١ ـ ١٢) حيث ناقشنا مثل هذا الموضوع ، وعرضنا بعض المؤشرات التي يمكن الإهتداء بها قبل القيام بمثل هذا العمل . ويبين الجدول التالي تحليل التشتت من أجل المثال الذي نناقشه .

وقيمة النسبة F هي : (انظر الجدول ١٢ ـ ١١)

$$F = \frac{16260.9}{65.25} = 249.2$$

وهي نسبة هامة بصورة مرتفعة ، وبالتالي فإننا نرفض الفرضية $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_t = 0$ ونقرر أنه توجد فروق هامة بين تأثيرات الأنواع الخمسة من الأسمدة على إنتاج الشوفان .

جدول ١٢ ـ ١١ تحليل التشتت من أجل الزمرة التامة العشوائية بِـ n ملاحظة ضمن كل وحدة تجريبية

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
الزمر	$b-1$	SSB	$SSB/(b-1)$	$\sigma_\eta^2 + n\sigma^2 + [nt/(b-1)]\sum_{i=1}^{b}\beta_i^2$
المعالجات	$t-1$	SSR	$SSR/(t-1)$	$\sigma_\eta^2 + n\sigma^2 + [nb/(t-1)]\sum_{j=1}^{t}\tau_j^2$
الخطأ التجريبي	$(b-1)(t-1)$	SSE	$SSE/(b-1)(t-1)$	$\sigma_\eta^2 + n\sigma^2$
خطأ العينات	$bt(n-1)$	SSP	$SSP/bt(n-1)$	σ_η^2
المجموع	$btn-1$	SST		

الجدول (١٢ ـ ١٢) تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي المعطى في الجدول (١٢ ـ ١٠)

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
الزمر	5	422.3	84.5	$\sigma_\eta^2 + 3\sigma^2 + \frac{15}{5}\sum_{i=1}^{6}\beta_i^2$
المعالجات	4	65043.7	16260.9	$\sigma_\eta^2 + 3\sigma^2 + \frac{18}{4}\sum_{j=1}^{5}\tau_j^2$
الخطأ التجريبي	20	1305.0	65.25	$\sigma_\eta^2 + 3\sigma^2$
خطأ العينات	60	5136.6	85.61	σ_η^2
المجموع	89	71907.6		

١٢ ـ ٨ تقدير مركبات التشتت والفعالية النسبية لتصميم الزمرة التامة العشوائية : بالاستفادة من الجدول (١٢ ـ ١١) نرى بسهولة أنه يمكن تقدير σ_η^2 بِـ s_η^2 حيث :

$$s_\eta^2 = \frac{SSP}{bt(n-1)} \tag{49}$$

وتقدير σ^2 بِـ s^2 حيث :

$$s^2 = \frac{SSE/(b-1)(t-1) - SSP/bt(n-1)}{n} \tag{50}$$

وإذا حدث أن حصلنا على تقدير سالب فإننا نعتبر التقدير صفراً .

ويرغب الباحث أحياناً في تقدير فعالية إستخدامه لتصميم الزمرة التامة العشوائية وذلك بالنسبة لما كان سيحصل عليه فيما لو استخدم التصميم التام العشوائية ، أي فيما لو وزعنا المعالجات بصورة عشوائية فوق جميع الوحدات التجريبية . وبعبارة أخرى فإن الباحث يرغب في معرفة ما إذا كان قد خسر أو ربح في مجال كفاءة أو فعالية التصميم عندما قام بتجميع الوحدات التجريبية في زمر متجانسة . وكما هو متوقع فإننا نعرف الفعالية النسبية لتصميم الزمرة التامة العشوائية . في مقابل التصميم التام العشوائية (ونرمز لها بِـ R.E.) كما يلي :

$$R.E. = \frac{\text{تقدير متوسط مربعات الخطأ التجريبي في التصميم التام العشوائية}}{\text{تقدير متوسط مربعات الخطأ التجريبي في تصميم الزمرة التامة العشوائية}} \tag{51}$$

وإذا رمزنا بِـ B لمتوسط مربعات الزمر و E لمتوسط مربعات الخطأ التجريبي في تصميم الزمرة التامة العشوائية ، فيمكن البرهان على أن :

$$R.E. = \frac{(b-1\ B + b\ (t-1)\ E}{(bt-1)\ E} \tag{52}$$

وإذا كان هناك من مبرر لاستخدام تصميم الزمرة التامة العشوائية فيجب ألا يقل متوسط مربعات الزمر B عن متوسط الخطأ التجريبي E . وعندها

ستكون قيمة الفعالية النسبية .R.E أكبر أو تساوي الواحد كما هو متوقع وعلى سبيل المثال ، نجد من الجدول (١٢ ــ ٨) أن :

$$R.E. = \frac{4\ (536.55)\ +\ 5\ (3)\ (218.85)}{19\ (218.85)} = 1.31$$

وهذا يعني أن تصميم الزمرة التامة العشوائية . هو على وجه التقريب 131 % فعال بالمقارنة مع التصميم التام العشوائية .

١٢ ــ ٩ منحنيات الإستجابة : تحليل التراجع لتأثيرات المعالجات ــ

لنفرض أن المعالجات المدروسة هي (i) مستويات (أو معدلات) مختلفة لتطبيق نفس السماد ، (ii) أوزان مختلفة لجسم متحرك في مسألة تدرس حركة هذا الجسم ، أو (iii) درجات مختلفة لتناول منشط في تجربة في مجال علم النفس الخ . وعندما تبرز حالات من هذا النوع نرغب في تشكيل فكرة عن كيفية تغير الخاصة المقيسة مع تغير مستوى المعالجة المطبقة . أي أننا نريد معرفة ما إذا كان التغير في الخاصة المقيسة يتم على أساس خطي ، تربيعي ، ... عندما يزيد أو ينقص مستوى المعالجة . وبعبارة أخرى نرغب في معرفة شيء ما عن شكل منحني الإستجابة بحيث نتمكن من تقدير المستوى الأمثل للمعالجة . والخطوة الأولى في القيام بمثل هذا التحليل هو تمثيل متوسطات المعالجات بيانياً لتشكيل فكرة أولية عن شكل منحني الإستجابة . ونستخدم كثيرات الحدود المتعامدة التي ذكرناها في الفصل التاسع للقيام بتحليل دقيق للبيان الإحصائي يقدم الجواب على المسألة المطروحة أعلاه . وسنقتصر على الحالات التي تختلف فيها مستويات المعالجة بمقادير متساوية ، ولا يشكل هذا القيد أية صعوبة بإعتبار أن الشيء المعتاد في هذه الحالات هو إستخدام مستويات بخطوات متساوية .

وقد رأينا في الفقرة (١٢ ــ ٥) أنه يمكن تفسيم مجموع مربعات المعالجات SSR إلى (t–1) جزءاً من خلال مقارنات متعامدة . وما سنعرضه الآن هو ببساطة طريقة أخرى لمثل هذا التقسيم بحيث يوافق كل من مجاميع المربعات

الجزئية الآن (وكل منها بدرجة واحدة من الحرية) إحدى الحدود الخطية ، التربيعية ، التكعيبية ، الخ . من معادلة منحني الإستجابة . ويمكن الحصول على مجاميع المربعات الجزئية بإستخدام الجداول التي تعطي أمثال كثيرات الحدود المتعامدة للحصول على الأمثال ξ'_{jk} ثم تعويضها في العلاقة التالية :

$$\text{مجموع المربعات العائد للحدّ من الدرجة } k = \frac{\left(\sum_{j=1}^{t} \xi'_{jk} T_j\right)^2}{b\sum_{j=1}^{t} (\xi'_{jk})^2} \qquad (53)$$

حيث ξ'_{jk} هي أمثال كثيرة الحدود و T_j مجموع المعالجة j . وبإستخدام العلاقة (53) يمكن إذن حساب مجاميع المربعات الجزئية المطلوبة .

ومن المستبعد جداً أن يقوم الباحث بعزل أكثر من الحدود الثلاثة الأولى الخطية ، التربيعية ، والتكعيبية عند تجزئة مجموع مربعات المعالجات ؛ ويدعى الباقي ، في حال وجوده ، بالإنحراف عن التراجع ويوافقه ، في حال عزل حدود حتى الدرجة m ،عدد من درجات الحرية يساوي $t-m-1$ ولإيضاح هذه الطريقة لنحلل البيان الإحصائي المعطي في الجدول (١٢ ـ ١٣) .

جدول ١٢ ـ ١٣ إنتاج نوع من الحبوب وفقاً لمستويات من سماد معين
(الوحدة التجريبية = $\frac{1}{40}$ من الايكر والإنتاج مقاس بالقنطار الإنكليزي)

مستويات السماد

الزمر	لاسماد	10 ليبرة في الوحدة التجريبية	20 ليبرة في الوحدة التجريبية	30 ليبرة في الوحدة التجريبية	40 ليبرة في الوحدة التجريبية
1	20	25	36	35	43
2	25	29	37	39	40
3	23	31	29	31	36
4	29	30	40	42	48
5	19	27	33	44	47
مجموع المعالجات	114	142	175	191	214

والتمثيل البياني لمجاميع المعالجات (تراتيب) بدلالة مستويات المعالجة (فصول) تقترح علينا الشكل الخطي لمنحني الإستجابة (وهو المنحني الذي يمثل العلاقة الفعلية القائمة بين مستوى تطبيق السماد من جهة والإنتاج الموافق له من جهة أخرى) ومع ذلك فإننا سنعزل من مجموع مربعات المعالجات الحد التربيعي إلى جانب الحد الخطي . ونحسب وفقاً للطريقة الموضحة في الفقرة (١٢ ـ ٢) مجاميع المربعات التالية :

مجموع مربعات الزمر $= SSB = 154.16$

مجموع مربعات المعالجات $= SSR = 1256.56$

مجموع مربعات الخطأ $= SSE = 193.44$

مجموع المربعات الكلي $= SST = 1604.16$

وللحصول على الجزء الخطي من مجموع مربعات المعالجات ، وسنرمز له بـ T_j نفتش عن أمثال كثيرة الحدود الموافقة في الجدول (١٢ ـ ١٤) (أو تؤخذ

هذه الأمثال بصورة عامة من مراجع الجداول الإحصائية) ونستخدم العلاقة (5 3) فنجد :

$$T_L = \frac{[(-2)(114) + (-1)(142) + (0)(175) + (1)(191) + (2)(214)]^2}{5\,[(-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (2)^2]} = \frac{(249)^2}{50} = 1240.02$$

وبصورة مشابهة نجد الجزء التربيعي من مجموع مربعات المعالجات ، وسنرمز له بِـ T_Q :

$$T_Q = \frac{[(2)(114) + (-1)(142) + (-2)(175) + (+1)(191) + (2)(214)]^2}{5\,[(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (+1)^2 + (2)^2]} = \frac{(-27)^2}{70} = 10.41$$

ويكون مجموع مربعات « الإنحراف عن التراجع » ونرمز له بِـ T_D هو الباقي من مجموع مربعات المعالجات أي :

$$T_D = SSR - T_L - T_Q = 1256.56 - 1240.02 - 10.41 = 6.13$$

ونلخص هذه النتائج في جدول تحليل التشتت (١٢ ـ ١٥) .

جدول ١٢ ـ ١٤ أمثال كثيرات الحدود المتعامدة في عدد من الحالات .

j	t = 2	t = 3		t = 4			t = 5			
	k = 1	k = 1	k = 2	k = 1	k = 2	k = 3	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
1	− 1	− 1	+ 1	− 3	+ 1	− 1	− 2	+ 2	− 1	+ 1
2	+ 1	0	− 2	− 1	− 1	+ 3	− 1	− 1	+ 2	− 4
3		+ 1	+ 1	+ 1	− 1	− 3	0	− 2	0	+ 6
4				+ 3	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	− 2	− 4
5							+ 2	+ 2	+ 1	+ 1

وبحساب النسبة $F = 314.14/12.09 = 25.98$ بِـ $\nu_1 = 4$ و $\nu_2 = 16$ من درجات الحرية نرفض الفرضية $H_0 : \tau_j = 0$ ، $(j = 1, \dots, 5)$.

وكانت هذه النتيجة متوقعة بالطبع نظراً لطبيعة المعالجات . وإذا حسبنا النسبة $F = 1240.02/12.09 = 102.57$ بـ $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = 16$ من درجات الحرية يتضح لنا أن منحني الإستجابة يفصح عن نزوع خطي قوي . وهذا ما يشير إليه منذ البداية التمثيل البياني لمجاميع المعالجات . أما الحد التربيعي فهو غير هام وكذلك الإنحراف عن التراجع . وهكذا نستنتج ان منحني الإستجابة هو خط مستقيم ضمن حدود المستويات المستخدمة من السماد (أي بين 0 إلى 40 ليبرة في الوحدة التجريبية المستخدمة) ، وهذا يقترح علينا بوضوح أنه يمكن زيادة الإنتاج أيضاً مع زيادة السماد ، أي أننا لم نبلغ بعد المستوى الأمثل لتطبيق هذا السماد ، وأنه لا بد من القيام بالمزيد من التجارب ضمن الإتجاه الذي تمخضت عنه التجربة الحالية .

١٢ ـ ١٠ **تصميم المربع اللاتيني** : يستخدم تصميم المربع اللاتيني كثيراً في الزراعة والصناعة . وهو يسمح لنا بإختبار وجود فرق بين تأثيرات المعالجات مع وجود نوعين من القيود على الوحدات التجريبية . أي أنه تعميم لفكرة تصميم الزمرة التامة العشوائية حيث فرضنا قيداً واحداً على الوحدات التجريبية وهو أن يجري تصنيفها وفق زمر متجانسة . وسنعرض فيما يلي مثالين يوضحان القيدين المفروضين في حالة تصميم المربع اللاتيني وكيفية تطبيقهما .

مثال ١ : لنفرض أننا نريد إختبار وجود فرق بين تأثيرات خمسة أنواع من الأسمدة وتتوفر لنا خمس وعشرون وحدة تجريبية . ولكن الخصوبة تتغير في التربة في إتجاهين (مثلاً من الشمال إلى الجنوب ومن الشرق إلى الغرب) وعندئذ يبدو من المنطقي إقامة الزمر في كل من الإتجاهين وبحيث تحوي كل زمرة خمس وحدات تجريبية . وهو ما يتم فعلاً في تصميم المربع اللاتيني تحت عنواني الصفوف والأعمدة . ونوزع المعالجات بصورة عشوائية ولكن بحيث تظهر كل معالجة مرة واحدة فقط في كل صف وفي كل عمود .

جدول ١٢ ـ ١٥ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول ١٢ ـ ١٣

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات
الزمر	4	154.16	38.54
المعالجات	4	1256.56	314.14
خطي	1	1240.02	1240.02
تربيعي	1	10.41	10.41
الانحراف عن التراجع	2	6.13	3.07
الخطأ التجريبي	16	193.44	12.09
المجموع	24	1604.16	

مثال ٢ : لنفرض أننا نريد إختيار وجود فرق في إنتاجية أربع آلات تصنع سلعة معينة . ومن المعروف أن لكل من العامل الذي يدير الآلة والفترة من يوم العمل الذي يتم فيه تشغيل الآلة تأثيره في الإنتاجية . ففي مثل هذه الحالة نعتبر العمال الأربعة « أعمدة » وفترات أربعة من اليوم « صفوفاً » ، ثم نخصص الآلات بصورة عشوائية إلى الخلايا الستة العشر في المربع (الصفوف الأربعة والأعمدة الأربعة) وبحيث تُستخدم كل آلة مرة واحدة فقط من قبل كل عامل ومرة واحدة فقط في كل من الفترات الزمنية الأربع .

وإذا رمزنا للمعالجات بالحروف D ، C ، B ، A فيمكن ، على سبيل المثال ، أن يأخذ المربع اللاتيني الشكل التالي :

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

ويوجد 576 إمكانية لترتيب مربع لاتيني في الأحرف الأربعة D ، C ، B ، A فأيها نختار ؟ نقول أن المربع اللاتيني قياسي إذا كانت الحروف في الصف الأول والعمود الأول مرتبة وفق الأبجدية الهجائية ، ووفقاً لهذا التعريف يكون الشكل المذكور أعلاه مربعاً قياسياً من بين جميع المربعات اللاتينية 4×4 . ويوجد أربعة مربعات قياسية من نوع المربع القياسي 4×4 . ويزداد عدد المربعات القياسية بسرعة مع ازدياد عدد الأحرف . ونلاحظ أنه يمكن ترتيب كل من هذه المربعات القياسية الأربعة بِـ $4!(4-1)! = 144$ شكلاً ، أي أنه يوجد $4\,(144) = 576$ من المربعات اللاتينية 4×4 . والتوزيع العشوائي للمعالجات يمكن أن يتم في هذه الحالة بإختيار أحد المربعات القياسية الأربعة بطريقة

عشوائية ثم نرتب الأعمدة الأربعة في هذا المربع ثم الصفوف الثلاثة الأخيرة بطريقة عشوائية . (وبالطبع يمكن أيضاً إختيار إحدى الترتيبات الـ 576 ، في حال توفرها جميعاً أمام المجرب ، بطريقة عشوائية) . ويمكن إتباع نفس الطريقة العشوائية من أجل المربعات 5 × 5 و 6 × 6 . ومن أجل المربعات الأكبر توجد طريقة للحصول على ترتيبة عشوائية للمربع المطلوب سنعرضها فيما يلي ، ومن الملحوظ أنها تولّد كل الترتيبات الممكنة ولكنها غير منصفة من حيث أنها لا تمنح كل الترتيبات الممكنة فرصاً متساوية في أن يقع عليها الإختيار. ونجمل خطوات هذه الطريقة على الشكل التالي :

(i) نوزع الحروف في الصف الأول بطريقة عشوائية ، وهذا يمكن أن يُنتج ، في حال وجود k حرفاً ، !k من تباديل الأحرف .

(ii) نوزع الحروف الـ (k−1) الباقية بصورة عشوائية في الوحدات الباقية من العمود الأول ، وهذا يمكن أن يتم بِـ !(k−1) من الطرق .

(iii) نستمر بهذه الطريقة حتى نملأ جميع الصفوف والأعمدة مستثنين في كل صف وعمود الأحرف التي تكون قد استُخدمت في هذا الصف أو العمود .

ولتوضيح الحسابات التي يتضمنها تحليل البيان الإحصائي الناتج عن تصميم المربع اللاتيني سندرس المثال الثاني . ولنفرض أن النتائج في مثل هذه التجربة هي النتائج المعطاة في الجدول (١٢ ـ ١٦) حيث تشير الأحرف إلى الماكينات الأربع .

ونفرض ، بصورة عامة ، أنه يمكن التعبير عن الملاحظات وفق النموذج :

$$Y_{ij(k)} = \mu + \rho_i + \gamma_j + \tau_k + \varepsilon_{ij(k)} \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, m \end{matrix} \qquad (54)$$

حيث ρ_i هو تأثير الصف i و γ_j تأثير العمود j و τ_k تأثير المعالجة k وأن :

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j = \sum_{k=1}^{m} \tau_k = 0 \qquad (55)$$

والمتحولات $\varepsilon_{ij(k)}$ مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت يساوي σ^2. ونضع الدليل k بين قوسين للتذكير بأنه غير مستقل عن i و j .

جدول ١٢ ـ ١٦ عدد القطع التي تنتجها أربع ماكينات في تصميم مربع لاتيني
(التوزيع العشوائي للماكينات مبين بواسطة الحروف بين قوسين)

الفترات الزمنية	العمال			
	1	2	3	4
1	31 (C)	43 (D)	67 (A)	36 (B)
2	39 (D)	96 (A)	40 (B)	48 (C)
3	57 (B)	33 (C)	40 (D)	84 (A)
4	85 (A)	46 (B)	48 (C)	50 (D)

يمكن حساب مجاميع المربعات التالية :

$$\text{مجموع المربعات الكلي} = SS = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{ij(k)}-\bar{Y}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ij(k)}^2 - \frac{T^2}{m^2} \qquad (56)$$

$$\text{مجموع مربعات الصفوف} = SSR = m\sum_{i=1}^{m}\left(\bar{Y}_{i.(.)}-\bar{Y}\right)^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R_i^2 - \frac{T^2}{m^2} \qquad (57)$$

$$\text{مجموع مربعات الأعمدة} = SSC = m\sum_{j=1}^{m}\left(\bar{Y}_{.j(.)}-\bar{Y}\right)^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} C_j^2 - \frac{T^2}{m^2} \qquad (58)$$

$$\text{مجموع مربعات المعالجات} = SST = m\sum_{k=1}^{m}\left(\bar{Y}_{..(k)}-\bar{Y}\right)^2 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} T_k^2 - \frac{T^2}{m^2} \qquad (59)$$

$$\text{مجموع مربعات الخطأ} = SSE = SS - SSR - SSC - SST \qquad (60)$$

$$T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ij(k)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} Y_{ij(k)} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} Y_{ij(k)}$$ = المجموع الإجمالي للملاحظات

R_i = مجموع الملاحظات في الصف i

C_j = مجموع الملاحظات في العمود j

T_k = مجموع الملاحظات التي تتلقى المعالجة k .

وفي مثالنا نجد :

$$SS = (31)^2 + \ldots + (50)^2 - \frac{(843)^2}{16} = 5959.438$$

مجموع مربعات الصفوف
$$= SSR = \frac{(177)^2 + (223)^2 + (214)^2 + (229)^2}{4} - \frac{(843)^2}{16} = 408.188$$

مجموع مربعات الأعمدة
$$= SSC = \frac{(212)^2 + (218)^2 + (195)^2 + (218)^2}{4} - \frac{(843)^2}{16} = 88.688$$

مجموع مربعات المعالجات
$$= SST = \frac{(332)^2 + (179)^2 + (160)^2 + (172)^2}{4} - \frac{(843)^2}{16} = 4946.688$$

مجموع مربعات الخطأ
$$= SSE = 5959.438 - 408.188 - 88.688 - 4946.688 = 515.874$$

وتحليل التشتت بصورة عامة مبين في الجدول (١٢ ــ ١٧). أما تحليل التشتت الموافق للبيان الإحصائي في (١٢ ــ ١٦) فهو مبين في الجدول (١٢ ــ ١٨).

جدول ١٢ ــ ١٧ تحليل التشتت من أجل تصميم المربع اللاتيني m × m

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
الصفوف	$m-1$	SSR	$MSR = SSR/(m-1)$	$\sigma^2 + \frac{m}{m-1}\sum_{i=1}^{m} \rho_i^2$
الأعمدة	$m-1$	SSC	$MSC = SSC/(m-1)$	$\sigma^2 + \frac{m}{m-1}\sum_{j=1}^{m} \gamma_j^2$
المعالجات	$m-1$	SST	$MST = SST/(m-1)$	$\sigma^2 + \frac{m}{m-1}\sum_{k=1}^{m} \tau_k^2$
الخطأ التجريبي	$(m-1)(m-2)$	SSE	$MSE = \frac{SSE}{(m-1)(m-2)}$	σ^2
المجموع	m^2-1	SS		

جدول ١٢ ـ ١٨ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٢ ـ ١٦) .

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات *
الفترات الزمنية	3	408.188	136.06	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4} \rho_i^2$
العمال	3	88.688	29.56	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{j=1}^{4} \gamma_j^2$
الماكينات	3	4946.688	1648.90	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{4} \tau_k^2$
الخطأ	6	515.874	85.98	σ^2
المجموع	15	5959.438		

وبالنظر لطبيعة الترتيبة العشوائية في هذا التصميم لا يمكننا إختبار فرضيات حول تأثيرات الصفوف أو الأعمدة . وإنما الفرضية الوحيدة التي يمكن إختبارها هي الفرضية $H_0: \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_m = 0$. بالإضافة طبعاً إلى الفرضيات المتعلقة بمقارنات متعامدة بين المعالجات . ولاختبار الفرضية $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$ أي للفرضية بأنه لا توجد فروق بين إنتاجية الماكينات نحسب النسبة $F = \frac{MST}{MSE} = \frac{1648.9}{85.98} = 19.18$ ونقارنها مع $F_{.01}(3, 6) = 9.78$. وبما أن $19.18 > 9.78$ نرفض الفرضية H_0 ونقرر وجود فروق بين إنتاجية الماكينات .

١٢ ـ ١١ فقدان ملاحظات في تصميم المربع اللاتيني : بصورة مشابهة لما رأيناه في تصميم الزمرة التامة العشوائية توجد طرق تساعد الباحث على تخطيّ الصعوبات الناشئة عن غياب ملاحظة أو أكثر من نتائج التجربة . وسنناقش هنا حالة غياب ملاحظة واحدة فقط . وفي هذه الحالة يمكن تقدير الملاحظة الغائبة M من العلاقة :

$$\hat{M} = \frac{m(R + C + T) - 2S}{(m-1)(m-2)} \qquad (61)$$

حيث :

R = مجموع الملاحظات في نفس الصف الذي يحوي الملاحظة الغائبة .
C = مجموع الملاحظات في نفس العمود الذي يحوي الملاحظة الغائبة .
T = مجموع الملاحظات التي تلقت نفس المعالجة التي تلقتها الملاحظة الغائبة .
S = مجموع كل الملاحظات المتوفرة .

وبعد تبديل القيمة المقدّرة $\hat{M}$ في جدول البيان الإحصائي نحسب مجاميع المربعات المختلفة كالمعتاد ولكن يجب أن نتذكر أن مجموع مربعات المعالجات الناتج سيكون منحازاً بالزيادة (أي أن توقعه أكبر من توقع متوسط مربعات المعالجات المبين في الجدول (١٢ ـ ١٧) ، ولا بد من القيام بالتصحيح المناسب

قبل اختبار الفرضية $H_0: \tau_k = 0$. $(k = 1, ..., m)$. ومجموع مربعات المعالجات المصحح معطى بالعلاقة :

$$SST' = SST - Z \qquad (62)$$

حيث :

$$Z = \frac{[S - R - C - (m-1)\, T]^2}{(m-1)^2\, (m-2)^2} \qquad (63)$$

ونخفض بمقدار الواحد عدد درجات الحرية الموافق للمجموع الكلي وعدد درجات الحرية الموافق لمجموع مربعات الخطأ .

١٢ ـ ١٢ ملاحظات إضافية تتعلق بتصميم المربع اللاتيني : سنناقش في هذه الفقرة وبإختصار شديد القضايا التالية . (i) وجود أكثر من ملاحظة واحدة في كل وحدة تجريبية ، (ii) المقارنات بين المعالجات و (iii) دراسات تراجعية للمركبات الخطية ، التربيعية ، الخ . لمنحنيات الإستجابة التي تبين تأثير المستويات المختلفة لتطبيق معالجة معينة . وكما نتوقع فإن معالجة هذه القضايا في تصميم المربع اللاتيني مماثلة تماماً لتلك التي ناقشاها في الفقرات (١٢ ـ ٧) ، (١٢ ـ ٥) و(١٢ ـ ٩) ، على الترتيب ، ولا حاجة للتكرار في تفاصيل المناقشة .

في حال وجود ملاحظة في كل خلية من خلايا تصميم المربع اللاتيني . يمكننا أن نحسب كالمعتاد مجاميع المربعات العائدة للصفوف ، الأعمدة ، المعالجات ، ومجموع المربعات الكلي . إلا أنه لحساب مجموع مربعات الخطأ التجريبي لا بد أولاً من الحصول على مجموع المربعات الموافق لِـ « ما بين الخلايـــا » ولنرمز له بِـ SSA ، وهو يقيس التغير بين مجاميع الخلايا الـ m^2 التي يحويها تصميم المربع اللاتيني . وبعدها نحصل على مجموع مربعات الخطأ التجريبي كما يلي :

$$SSE = SSA - SSR - SSC - SST \qquad (64)$$

ومجموع مربعات خطأ العينة هو :

$$SSP = SS - SSA \tag{65}$$

وتحليل التشتت الموافق معطى في الجدول (١٢ ـ ١٩) . أما إحصاء الإختبار للفرضية $H_0 : \tau_1 = \ldots = \tau_m = 0$ فهو النسبة :

$$F = \frac{\text{متوسط مربعات المعالجات}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبي}} = \frac{MST}{MSE} \tag{66}$$

ونرفض الفرضية H_0 عند المستوى α إذا كان $F > F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ حيث $\nu_1 = m-1$ ، $\nu_2 = (m-1)(m-2)$

جدول ١٢ ـ ١٩ تحليل التشتت في المربع اللاتيني $m \times m$ بِـ n ملاحظة في كل خلية

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات
الصفوف	$m-1$	SSR	$MSR = SSR/(m-1)$
الأعمدة	$m-1$	SSC	$MSC = SSC/(m-1)$
المعالجات	$m-1$	SST	$MST = SST/(m-1)$
الخطأ التجريبي	$(m-1)(m-2)$	SSE	$MSE = SSE/(m-1)(m-2)$
خطأ العينة	$m^2(n-1)$	SSP	$MSP = SSP/[m^2(n-1)]$
المجموع	m^2n-1	SS	

وإذا قررنا إختبار عدد من المقارنات قبل تنفيذ التجربة فيمكن القيام بذلك بطريقة مطابقة تماماً لما رأيناه في حالة تصميم الزمرة التامة العشوائية في الفقرة (١٢ ـ ٥) . وكذلك بالنسبة للدراسة التراجعية للمركبات الخطية التربيعية ، الخ . لمنحنيات الإستجابة ، في تجربة لدراسة الفروق بين تأثيرات

مستويات مختلفة لمعالجة معينة ، فإنها تتم هنا بنفس الطريقة وبإستخدام نفس العلاقة (53) التي رأيناها في الفقرة (١٢ ـ ٩) في حالة تصميم الزمرة التامة العشوائية . والتعديل الوحيد المطلوب هو ملاحظة أن $b=t=m$ في حالة المربع اللاتيني .

١٢ ـ ١٣ فعالية تصميم المربع اللاتيني بالنسبة للتصميم التام العشوائية وتصميم الزمرة التامة العشوائية : إذا رمزنا بـ R ، C ، و E لمتوسط مربعات الصفوف ، الأعمدة ، والخطأ التجريبي ، على الترتيب ، في تصميم المربع اللاتيني ، فيمكن حساب فعالية هذا التصميم بالنسبة للتصميم التام العشوائية من العلاقة :

$$\text{R.E.} = \frac{R + C + (m-1)\,E}{(m+1)\,E} \qquad (67)$$

وفعاليته بالنسبة لتصميم الزمرة التامة العشوائية ، مفترضين أن الصفوف قد استُخدمت زمراً ، معطاة بالعلاقة :

$$\text{R.E.} = \frac{C + (m-1)\,E}{m\,E} \qquad (68)$$

وإذا استُخدمت الأعمدة زمراً تصبح العلاقة (68) على الشكل :

$$\text{R.E.} = \frac{R + (m-1)\,E}{m\,E} \qquad (69)$$

تمارين

١ ـ البيان الإحصائي التالي ناتج عن تجربة منفذة وفق تصميم الزمرة التامة العشوائية. والمطلوب إتمام تحليل التشتت، وإختبار الفرضية بأن التأثيرات الحقيقية للمعالجات الأربع متساوية. أعرض جميع الفروض التي تستند إليها للقيام بهذا الإختبار.

الزمر	المعالجات			
	1	2	3	4
1	20	18	16	17
2	18	18	16	20
3	20	18	17	18
4	20	16	20	17
5	19	16	16	20

٢ ـ يقدم البيان الإحصائي التالي زيادة أوزان الخنازير في تجربة لمقارنة رواتب غذائية يومية مختلفة والمطلوب تحليل وتفسير البيان مع إعطاء أهمية خاصة للمقارنة بين الرواتب الغذائية I ، II ، III مع الراتبين الغذائيين IV و V.

التكرارات	الراتب I	الراتب II	الراتب III	الراتب IV	الراتب V
1	165	168	164	185	201
2	156	180	156	195	189
3	159	180	189	186	173
4	167	166	138	201	193
5	170	170	153	165	164
6	146	161	190	175	160
7	130	171	160	187	200
8	151	169	172	177	142
9	164	179	142	166	184
10	158	191	155	165	149

٣ ـ فيما يلي تصميم زمرة تامة عشوائية بقيمتين مفقودتين . والمطلوب تقدير القيمتين المفقودتين وإتمام تحليل التشتت .

الزمر	المعالجات				
1	43	35	37	42	157
2	45	39	40	47	171
3	42	30	M″	43	115 + M″
4	M′	43	48	49	140 + M′
5	41	34	36	44	155
مجموع المعالجات	171 + M′	181	161 + M″	225	738 + M′ + M″

٤ ـ استخدمنا تصميم المربع اللاتيني 5 × 5 لإختبار تأثيرات خمسة أنواع من الأسمدة على إنتاج البطاطا ، وكانت نتائج التجربة كما يلي :

الصف	العمود 1	2	3	4	5	مجموع الصف
1	A 449	B 444	C 401	D 299	E 292	1885
2	B 463	C 375	D 323	E 264	A 415	1840
3	C 393	D 353	E 278	A 404	B 425	1853
4	D 371	E 241	A 441	B 410	C 392	1855
5	E 258	A 430	B 450	C 385	D 347	1870
مجموع العمود	1934	1843	1893	1762	1871	9303

مجموع المعالجات

A:2139	B:2192	C:1946	D:1693	E:1333	

٥ ـ فيما يلي إنتاج قصب السكر (قنطار انكليزي في كل $\frac{1}{40}$ من الفدان

وهي مساحة الوحدة التجريبية) في تجربة مربع لاتيني لمقارنة خمسة أنواع من الأسمدة :

A 14	E 22	B 20	C 18	D 25
B 19	D 21	A 16	E 23	C 18
D 23	A 15	C 20	B 18	E 23
C 21	B 46	E 24	D 21	A 18
E 23	C 16	D 23	A 17	B 19

حيث :

A : لا سماد

B : سماد غير عضوي

C : 10 طن سماد في الفدان

D : 10 طن سماد في الفدان .

E : 30 طن سماد في الفدان .

ما هي النتائج المستخلصة من هذه التجربة .

٦ ـ جربنا 5 مستويات من سماد معين في مربع لاتيني 5 × 5 ، وكان تحليل التشتت كما يلي :

	درجات الحرية	متوسط المربعات
الصفوف	4	25
الأعمدة	4	20
المعالجات	4	28
الخطأ	12	15

وكان مجموع الإنتاج في الوحدات الخاصة بكل مستوى كما يلي :

المستوى	1	2	3	4	5
مجموع الإنتاج	2	14	26	30	28

والمطلوب تجزئة مجموع مربعات المعالجات إلى :

	درجات الحرية
مركبة خطية	1
مركبة تربيعية	1
الباقي	2

هل توجد أية مقارنة هامة ؟

٧ ـ نُفذت تجربة لقياس قطر التيلة بالميكرون على غلاف بذرة القطن في النوع 128 من أنواع القطن المكسيكي ، وذلك في ستة مناطق مختلفة . وتمت القياسات على عينة من عشر بذور . فكانت النتائج كما في الجدول التالي :

البذرة	المنطقــة						المجموع
	1	2	3	4	5	6	
A	16.49	17.80	17.45	16.75	17.54	17.54	103.66
B	15.45	15.96	15.71	14.13	14.40	14.40	90.05
C	16.23	15.96	16.49	14.92	14.66	14.92	93.18
D	18.33	17.28	16.49	16.49	17.28	17.80	103.67
E	16.49	18.33	17.54	17.02	17.28	18.06	104.72
F	16.49	17.54	17.05	15.71	15.45	14.66	96.90
G	15.96	15.71	16.23	16.49	15.18	16.49	96.06
H	16.75	16.23	14.66	15.96	13.35	16.75	93.70
I	14.40	18.33	17.02	14.66	15.71	17.02	97.14
J	16.49	17.02	16.75	17.54	15.71	16.49	100.00
المجموع	163.08	170.16	165.48	159.67	156.56	164.13	979.08

أ ـ بين أن تحليل التشتت التالي صحيح واملأ درجات الحرية :

مصدر التغير	درجات الحرية	متوسط المربعات
البذور		4.15
المناطق		2.22
الخطأ		.692

ب ـ ماذا يمكنك القول فيما يتعلق بالفروق بين المناطق ؟

ج ـ ما هو الإنحراف المعياري لمتوسط المنطقة ؟

د ـ ما هي حدود الثقة للفرق بين متوسطي المنطقتين 1 و 6 ؟