الفصل الرابع عشر

تحليل تمام التشتت

١٤ ـ ١ **مقدمة** : خصصنا الفصول الخمسة السابقة للتطبيقات الأساسية لطريقتي تحليل التشتت وتحليل التراجع ، وتشكل هاتان الطريقتان المستخدمتان على نطاق واسع أهم ما في جعبة الإحصائي مما يمكن وضعه في مجالات التطبيق .

وقد لاحظنا في مسائل التصنيف الثنائي التي عالجناها في الفصل الحادي عشر أننا قمنا بإختبار تأثير متحول أول بمعزل عن تأثير متحول ثان ، وذلك بإستخدام تحليل التشتت . وكان المتحول الثاني يمثل ، بصورة عامة ، أنواعاً أو أصنافاً ، أما إذا كان يمثل قياسات فعلية ، فستمكن ، في مثل هذه الحالة أيضاً ، من إختبار تأثيرات المتحول الأول بمعزل عن تأثيرات المتحول الثاني ، ولكننا سنستخدم الآن طريقة تحليل تمام التشتت . ويدعى المتحول الثاني ، بصورة عامة ، المتحول « المرافق » .

وعلى سبيل المثال ، إذا رغبنا في مقارنة تأثيرات نظم مختلفة للتغذية على وزن الخنازير ، فيمكن إعتبار الوزن الابتدائي للخنزير كمتحول مرافق . وعندما نقول ، مثلاً ، أن نظام التغذية A هو الأفضل فيجب أن نكون قادرين على القول بأن الوزن الذي كسبته المجموعة التي خضعت للنظام A لم يكن نتيجة لوزنها الإبتدائي . وحتى لو كانت الأوزان الإبتدائية متقاربة ، فإنه يستحيل على الغالب ، التأكيد بأن للعناصر التجريبية المختلفة نفس القدرة على تمثُّل الراتب الغذائي الذي تتناوله ، وهكذا يمكن قياس مقدار التمثّل هذا وأخذه بعين الإعتبار عند مقارنة نظم التغذية المختلفة .

وفي تجربة مصممة لدراسة نتائج برنامج تعليمي معين لزيادة القدرة على التهجية عند أربعة صفوف من الطلاب نقيس القدرة على التهجية ، y ، لكل طالب عند نهاية البرنامج ، ونعتبر قياس القدرة الإبتدائية على التهجية ، x ، كمتحول مرافق . ويمكننا دراسة الفروق بين فعاليات الصفوف الأربعة بإستخدام المتحول y معدّلاً من أجل المتحول x ، أي بعد تعديله وفقاً لمقدار x .

وتعتمد طريقة تحليل التشتت من أجل الفروق بين المعالجات على فصل مجموع المربعات الكلي إلى عدة أجزاء . وإذا وجدنا متوسط مربعات المعالجات كبيراً بصورة كافية نرفض الفرضية القائلة بتساوي متوسطات المعالجات . وتقود طريقة تحليل تمام التشتت إلى أختبار الفرق بين متوسطات المعالجات من خلال فصل مجموع المربعات الكلي أيضاً إلى عدة أجزاء . وفي هذه الحالة نختبر الفروق بين متوسطات « الرواسب » وحيث الرواسب هي الفروق بين الملاحظات الفعلية وكمية تراجعية تعتمد على المتحول المرافق .

١٤ ـ ٢ تعريف المسألة في حالة تصنيف أحادي : في مسائل التصنيف الأحادي وبصورة خاصة في التصميمات التامة العشوائية ، يوجد t من المجتمعات. ونختار عينات عشوائية أحجامها n_i ، $(i = 1, ..., t)$ من المجتمعات المختلفة . وستكون العينة من المجتمع i على الشكل (X_{i1}, Y_{i1}) و (X_{i2}, Y_{i2}) ..... و (X_{in_i}, Y_{in_i}) ، حيث يشير الدليل الأول إلى المجتمع ويشير الدليل الثاني إلى العنصر الخاص من العينة المأخوذة من ذلك المجتمع ويبين الجدول (١٤ ـ ١) مثالاً على بيان إحصائي تكون فيه $t = 3$ و $n_1 = n_2 = n_3 = 4$ ، وفي الجدول (١٤ ـ ٢) نجد مثالاً عددياً . وسنقدم في هذه الفقرة المبدأ العام الذي ينطلق منه تحليل تمام التشتت ، كما نقدم في الفقرات القادمة تفاصيل الحسابات العددية .

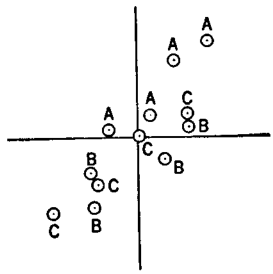
جدول ١٤ ـ ١

	المعالجات						
	A		B		C		
	x_{11}	y_{11}	x_{21}	y_{21}	x_{31}	y_{31}	
	x_{12}	y_{12}	x_{22}	y_{22}	x_{32}	y_{32}	
	x_{13}	y_{13}	x_{23}	y_{23}	x_{33}	y_{33}	
	x_{14}	y_{14}	x_{24}	y_{24}	x_{34}	y_{34}	
المجموع	$T_{x_{1.}}$	$T_{y_{1.}}$	$T_{x_{2.}}$	$T_{y_{2.}}$	$T_{x_{3.}}$	$T_{y_{3.}}$	$T_{x..}$ $T_{y..}$ المجموع الإجمالي
المتوسط	$\bar{x}_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$	$\bar{x}_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$	$\bar{x}_{3.}$	$\bar{y}_{3.}$	$\bar{x}..$ $\bar{y}..$ المتوسط الإجمالي

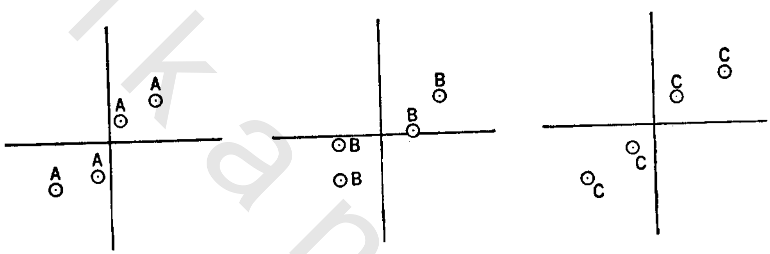
لنفرض أننا مثلنا ملاحظات الجدول (١٢ ـ ١) بيانياً في المستوى xoy حيث الفصل هو إنحراف الملاحظة x عن المتوسط الإجمالي $\bar{x}..$ أي $(x-\bar{x}..)$ ، والترتيب هو إنحراف الملاحظة y عن المتوسط الإجمالي $\bar{y}..$ أي $(y-\bar{y}..)$ وأن التمثيل البياني كان كما في الشكل (١٤ ـ ١) حيث رمزنا بِـ A للنقاط (x,y) الموافقة للمعالجة A ،وبِـ B للنقاط الموافقة للمعالجة B ، وبِـ C للنقاط الموافقة للمعالجة C . وبإستخدام طريقة التراجع البسيط التي درسناها في الفصل التاسع يمكننا حساب خط تراجع y على x من أجل هذه النقاط . ولنرمز لأمثال التراجع هذا بِـ b_t ولتشتت الإنحرافات عن خط التراجع بِـ $(S^2_{y.x})_t$ ، حيث نعني بالدليل t أننا إستخدمنا في حساب خط التراجع جميع ملاحظات التجربة . وبالطبع فإن كلاً من الفروق بين العينات والفروق ضمن كل عينة سيؤثر في حجم $(S^2_{y.x})_t$.

ونعتبر الآن المجموعات الثلاث من النقاط ، نقاط A ، نقاط B ، ونقاط C ، ونرسم كلاً منها بيانياً حول متوسطها الخاص (أي أن الفصل والترتيب في تمثيل المجموعة i هما على الترتيب $(x-\bar{x}_{i.})$ و $(y-\bar{y}_{i.})$) . فنحصل

على الشكل (١٤ ـ ٢) . ولنطبق الآن الفروع الثلاثة من

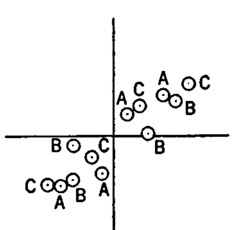


شكل ١٤ ـ ١



شكل ١٤ ـ ٢

الشكل (١٤ ـ ٢) فوق بعضها بحيث نحصل على الشكل (١٤ ـ ٣) ، ولنحسب خط تراجع y على x والتشتت حول خط التراجع مستخدمين النقاط كما تبدو في الشكل الجديد (١٤ ـ ٣) : ولنرمز لأمثال التراجع (ونسميه التراجع ضمن العينات) بِـ b_w وللتشتت بِـ $(S^2_{y.x})_w$



شكل ١٤ ـ ٣

وكما نعلم فإن خط التراجع يعطي متوسط y من أجل قيم مختلفة لِـ x وإذا كان لخطوط التراجع ضمن كل من المجتمعات الثلاثة نفس الميل فإن b_W يمثل تقديراً لهذا الميل ويكون $(S^2_{y.x})_W$ تقديراً للتشتت حول خط التراجع في كل من المجتمعات الثلاثة .

ونتوقع أن يكون التشتت حول خط التراجع في الشكل (١٤ ـ ٣) أقل منه في الشكل (١٤ ـ ١) بإعتبار أننا قسرنا الأشكال الفرعية الثلاثة في (١٤ ـ ٢) على أساس أن متوسطات المجتمعات الثلاثة متساوية . وعلى أي حال فإنه إذا كان التشتت $(S^2_{y.x})_W$ الموافق للشكل (١٤ ـ ٣) أصغر بصورة ملحوظة من التشتت $(S^2_{y.x})_t$ الموافق للشكل (١٤ ـ ١) ، فسنستنتج أن قسر الأشكال الفرعية الثلاثة في شكل واحد كان له تأثيره الهام على البيان الإحصائي ، ونقول بوجود **فروق** بين متوسطات y لا يمكن تفسيرها من خلال قياسات x .

١٤ ـ ٣ **الشروط المتعلقة بتحليل تمام التشتت** : الشروط التي يجب توفرها لتطبيق طريقة تحليل تمام التشتت تضم ، كما نتوقع ، تلك المطلوبة من أجل التراجع الخطي البسيط وتلك المطلوبة من أجل تحليل التشتت . وهكذا نجد الشروط المعتادة في الإستقلال ، التوزيع الطبيعي ، تجانس التشتتات ، كون المتحولات x مثبتة ، الخ . ولنكون أكثر تحديداً ، سنستعرض النماذج الموافقة لعدد من التصميمات الأكثر إستخداماً :

التصميم التام العشوائية :

$$Y_{ij} = \xi + \tau_i + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \ldots, t\,;\ j = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

تصميم الزمرة التامة العشوائية :

$$Y_{ij} = \xi + \rho_i + \tau_j + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, t \qquad (2)$$

تصميم المربع اللاتيني :

$$Y_{ij(k)} = \xi + \rho_i + \gamma_j + \tau_k + \beta\, X_{ij(k)} + \varepsilon_{ij(k)}$$

$$i = 1, \ldots, m \; ; \; j = 1, \ldots, m \; ; \; k = 1, \ldots, m \qquad (3)$$

تجربة عاملية بعاملين ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية :

$$Y_{ijk} = \xi + \rho_i + \alpha_j + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{jk} + \beta\, X_{ijk} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, \ldots, r \; ; \; j = 1, \ldots, a \; ; \; k = 1, \ldots, c \qquad (4)$$

ومن الأنسب التعبير عن هذه المعادلات مستخدمين إنحرافات المتحول x عن متوسطه . وعندئذ تصبح المعادلات السابقة على الترتيب :

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(X_{ij} - \bar{X}) + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, t \qquad (5)$$

$$Y_{ij} = \mu + \rho_i + \tau_j + \beta(X_{ij} - \bar{X}) + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \ldots, r \quad j = 1, \ldots, t \qquad (6)$$

$$Y = \mu + \rho_i + \gamma_j + \tau_k + \beta(X_{ij(k)} - \bar{X}) + \varepsilon_{ij(k)}$$

$$i = 1, \ldots, m \; ; \; j = 1, \ldots, m \; ; \; k = 1, \ldots, m \qquad (7)$$

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{jk} + \beta(X_{ijk} - \bar{X}) + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, \ldots, r \; ; \; j = 1, \ldots, a \; ; \; k = 1, \ldots, c \qquad (8)$$

حيث $\mu = \xi + \beta\bar{X}$ ، و $\bar{x}$ المتوسط الإجمالي للمقادير x . ونأخذ هنا بعين الإعتبار كل الشروط التي رأيناها في الفصول الخمسة السابقة حول المقادير المذكورة في هذه المعادلات .

ونضيف هنا شرطاً ضرورياً لكي يكون تطبيق طريقة تحليل تمام التشتت مشروعاً ، وهو أن المتحول المرافق x يجب ألا يتأثر بالمعالجات . أي أن المعالجات التي نطبقها على الوحدات التجريبية ، لكي نلحظ ونقيس تأثيراتها على قيم المتحول y ، يجب ألا يكون لها أي تأثير على قيم x . وإذا عدنا إلى

الفقرة السابقة نعبر عن هذا الشرط بقولنا أن خطوط التراجع البسيط الموافقة لكل من المجتمعات الِ t المدروسة يجب أن تكون متوازية . والفرضية التي التي نختبرها في هذه الحالة هي ما إذا كانت هذه الخطوط المتوازية ، متطابقة مع بعضها البعض ، أي ما إذا كانت متوسطات المتحول y الموافقة للمجتمعات الـ t المدروسة متساوية ، وذلك عندما نستخدم نفس القيمةلِ x في كل من هذه المجتمعات (متوسطات y متساوية بعد تعديلها من أجل قيم x) .

وعلى أي حال فإنه يمكن تطبيق طريقة تحليل تمام التشتت عندما تؤثر المعالجات في قيم المتحول x ، ولكن تفسير نتائج التجربة يكون مختلفاً في هذه الحالة . ولذلك فإن الباحث يجب أن يكون حذراً جداً عند تفسير نتائج تحليل تمام التشتت . وسندرس الآن بعض الأمثلة العددية التي تعين الباحث على تفسير بيان إحصائي قابل للتحليل وفقاً لطريقة تحليل تمام التشتت ، وتقدم له الطرق الحسابية الضرورية .

١٤ ــ ٤ **حالة التصميم التام العشوائية** : يمكن التعبير عن مجموع الجداءات على الشكل :

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{..})(y_{ij}-\bar{y}_{..})$$

$$=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})(y_{ij}-\bar{y}_{i.})+n\sum_{i=1}^{t}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}) \quad (9)$$

حيث n هو عدد الملاحظات من أجل كل معالجة من المعالجات . ويدعى كل مجموع جداءات من هذا النوع بعد قسمته على عدد درجات الحرية الموافق بتمام التشتت . ويسمى الطرف الأيسر من (9) بمجموع الجداءات الكلي . والحد الأول من الطرف الأيمن يسمى مجموع جداءات الخطأ التجريبي ،

أما الحد الثاني من الطرف الأيمن فيسمى مجموع جداءات المعالجات . والأشكال الحسابية لهذه الكميات هي :

$$\text{(10)} \quad \text{مجموع الجداءات الكلي} = S_{xy} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{ij} - \frac{T_{x..} T_{y..}}{nt}$$

$$\text{(11)} \quad \text{مجموع جداءات المعالجات} = T_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t} T_{x_{i.}} T_{y_{i.}} - \frac{T_{x..} T_{y..}}{nt}$$

$$\text{(12)} \quad \text{مجموع جداءات الخطأ التجريبي} = E_{xy} = S_{xy} - T_{xy}$$

ويمكن التحقق من صحة هذه الأشكال الحسابية بطريقة جبرية مماثلة لتلك المتبعة في الفصل الحادي عشر من أجل مجاميع المربعات الموافقة . أما مجاميع المربعات S_{xx} ، T_{xx} ، E_{xx} ، S_{yy} ، T_{yy} ، E_{yy} ، وهي ، على الترتيب مجموع المربعات الكلي ومجموع مربعات المعالجات ومجموع مربعات الخطأ ، وذلك من أجل كل من المتحول y والمتحول المرافق x ، فنحسبها تماماً كما في حالة تحليل التشتت .

نلخص هذه الحسابات في جدول تحليل تمام التشتت المبين في الجدول (١٤ ـ ٢) .

جدول ١٤ ـ ٢ تحليل تمام التشتت الموافق للتصميم التام العشوائية

مصدر التغير	درجات الحرية	مجاميع المربعات والجداءات $\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	الإنحرافات حول التراجع $\sum y^2-(\sum xy)^2/\sum x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
مابين المعالجات	$t-1$	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}			
ما بين الوحدات التجريبية ضمن المعالجات	$t(n-1)$	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	$S_E = E_{yy} - E_{xy}^2/E_{xx}$	$t(n-1)-1$	$s_E^2 = \frac{S_E}{t(n-1)-1}$
المجموع	$tn-1$	$S_{xx} = T_{xx} + E_{xx}$	$S_{xy} = T_{xy} + E_{xy}$	$S_{yy} = T_{yy} + E_{yy}$	$S_{T+E} = S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}$	$nt-2$	
الفرق من أجل إختبار ما بين المتوسطات المعدّلة للمعالجات					$S_{T+E} - S_E = T_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx} + E_{xy}^2/E_{xx}$	$t-1$	$\frac{S_{T+E} - S_E}{t-1}$

ولإختبار الفرضية بأنه لا توجد فروق بين التأثيرات الحقيقية للمعالجات على المتحول y ، بعد التعديل من أجل تأثير المتحول x ، نحسب النسبة :

$$F = \frac{(S_{T+E} - S_E)/t-1}{S_E/[t(n-1)-1]} = \frac{(S_{T+E} - S_E)/(t-1)}{s_E^2} \qquad (13)$$

بدرجات من الحرية هي : $\nu_1 = t-1$ و $\nu_2 = nt-t-1$

وبالإضافة إلى الإختبار F هذا فإنه من المستحسن إعداد جدول في متوسطات المعالجات بعد تعديلها ليساعدنا في تفسير نتائج التجربة . ويمكن حساب المتوسطات المعدّلة باستخدام العلاقة :

$$\text{adj. } \bar{y}_i = \bar{y}_i - b(\bar{x}_i - \bar{x}); \quad i = 1, \ldots, t, \qquad (14)$$

حيث $b = E_{xy}/E_{xx}$. وتقدير تشتت المتوسط المعدّل هو :

$$\hat{v}(\text{adj. } \bar{y}_i) = s_E^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_i - \bar{x})^2}{E_{xx}} \right] \qquad (15)$$

وتقدير تشتت الفرق بين متوسطين معدلين هو :

$$\hat{v}(\text{adj. } \bar{y}_i - \text{adj. } \bar{y}_k) = s_E^2 \left[\frac{2}{n} + \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}_k)^2}{E_{xx}} \right] \qquad (16)$$

ومن الواضح أننا نفترض سلفاً بأن أمثال التراجع β المذكور في المعادلة (5) غير الصفر ، لأنه ، فيما عدا ذلك ، يكون إدخال المتحول x المرافق في إعتبارنا مجرد تعقيد لا لزوم له . وأحياناً يرغب المجرب في التحقق من صحة هذا الفرض فيختبر الفرضية $H: \beta = 0$. ويمكنه القيام بذلك مستخدماً النسبة F المعرفة بالعلاقة :

$$F = \frac{E^2_{xy'} / E_{xx}}{S_E / (nt-t-1} = \frac{E^2_{xy} / E_{xx}}{s^2_E} \qquad (17)$$

بدرجات من الحرية $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = nt-t-1$. وتجدر الإشارة إلى أن
$x = x-\bar{x}$ ، $y = y-\bar{y}$

لنحلل الآن مثالاً عددياً هو البيان الاحصائي المعطى في الجدول (١٤ ـ ٣)

جدول ١٤ ـ ٣ زيادة الوزن y والوزن الإبتدائي x في تجربة لإطعام الخنازير

	المعالجة							
	1		2		3		4	
	x	y	x	y	x	y	x	y
	30	165	24	180	34	156	41	201
	27	170	31	169	32	189	32	173
	20	130	20	171	35	138	30	200
	21	156	26	161	35	190	35	193
	33	167	20	180	30	160	28	142
	29	151	25	170	29	172	36	189
المجموع	160	939	146	1031	195	1005	202	1098

ونتيجة الحسابات نجد :

$$S_{xx} = T_{xx} + E_{xx} = (30)^2 + \ldots + (36)^2 - \frac{(703)^3}{24} = 726.96$$

$$S_{xy} = T_{xy} + E_{xy} = (30)(165) + \ldots + (36)(189) - \frac{(703)(4073)}{24}$$
$$= 948.04$$

$$S_{yy} = T_{yy} - E_{yy} = (165)^2 + \ldots + (189)^2 - \frac{(4073)^2}{24} = 8100.96$$

$$T_{xx} = \frac{(160)^2 + (146)^2 + (195)^2 + (202)^2}{6} - \frac{(703)^2}{24} = 365.46$$

$$T_{xy} = \frac{(160)(939) + (146)(1031) + (195)(1005) + (202)(1098)}{6}$$
$$- \frac{(703)(4073)}{24} = 451.21$$

$$T_{yy} = \frac{(939)^2 + (1031)^2 + (1055)^2 + (1098)^2}{6} - \frac{(4073)^2}{24}$$
$$= 2163.13$$

$$E_{xy} = S_{xx} \div T_{xx} = 361.50$$

$$E_{xy} = S_{xy} - T_{xy} = 496.83$$

$$E_{yy} = S_{yy} - T_{yy} = 5937.83.$$

ونجد في الجدول (١٤ ــ ٤) تحليل تمام التشتت لهذا المثال العددي .

جدول ١٤ ـ ٤ تحليل تمام التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول ١٤ ـ ٣

مصدر التغير	درجات الحرية	مجاميع المربعات والجداءات $\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	الإنحرافات حول التراجع $\sum y^2 - (\sum xy)^2/\sum x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
ما بين المعالجات	3	365.46	451.21	2163.13			
ما بين الحيوانات التي تلقت نفس المعالجة	20	361.50	496.83	5937.83	5255.01	19	276.58
المجموع	23	726.96	984.04	8100.96	6864.61	22	
الفرق من أجل إختبار ما بين المتوسطات المعدّلة للمعالجات					1609.60	3	536.53

والنسبة F هي $536.53/276.58 = 1.94$ بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 3$ و $\nu_2 = 19$. وهي نسبة غير هامة عند المستوى 05. وهكذا فإننا لا نستطيع رفض الفرضية القائلة بعدم وجود فروق بين التأثيرات الفعلية للمعالجات الأربعة على زيادة وزن الخنازير بعد تعديلها وفقاً للأوزان الإبتدائية للخنازير التي خضعت للتجربة. ويصدف هنا أننا نصل إلى نفس القرارحتى لولم نقم بأية تعديلات من أجل المتحول المرافق x. ولكن النتيجة، في كثير من الأحيان، يمكن أن تتغير تماماً وفقاً لما إذا كنا نستخدم طريقة تحليل تمام التشتت أم لا. وهكذا فإن على الباحث أن يستعرض دائماً قابلية المسألة التي يدرسها للمعالجة وفق طريقة تحليل تمام التشتت.

ولإتمام مناقشة المثال العددي نقدم الجدول (١٤ ـ ٥) الذي يحوي المتوسطات المعدّلة للمعالجات.

جدول ١٤ ـ ٥ المتوسطات المعدَّلة للمعالجات من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٤ ـ ٣).

$(\bar{x} = 29.29 \quad \bar{y} = 169.71 \quad b = 496.83/361.50 = 1.374)$

	المعالجة			
	1	2	3	4
$\bar{x}_i$	26.67	24.33	32.50	33.67
$\bar{x}_i - \bar{x}$	−2.62	−4.96	3.21	4.38
$b(\bar{x}_i - \bar{x})$	−3.60	−6.82	4.41	6.02
$\bar{y}_i$	156.50	178.65	163.09	176.98
الإنحراف المعياري لِـ adj. $\bar{y}_i$	7.17	8.06	7.35	7.80

كما نختبر أيضاً الفرضية $H: \beta = 0$ فنحسب النسبة:

$$F = \frac{(496.83)^2 / 361.50}{276.58} = 2.47$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = 19$. وبما أن قيمة F لا تتجاوز $F_{.05}(1,19) = 4.38$ فلا نستطيع رفض الفرضية $\beta = 0$ وفي مثل هذه الحالة لا يكون استخدامنا لتحليل تمام التشتت مبرراً. وربما كان هذا هو السبب في أن تحليل تمام التشتت لم يقدم أي جديد عما كنا سنحصل عليه فيما لو استخدمنا تحليل التشتت البسيط.

١٤ ـ ٥ حالة تصميم الزمرة التامة العشوائية : النموذج الموافق لهذه الحالة معطى في المعادلة (6) ، وتحليل تمام التشتت معطى في الجدول (١٤ـ٦) ، ويتم حساب الكميات R_{xx} ، T_{xx} ، E_{xx} ، R_{yy} ، T_{yy} ، E_{yy} كما في تحليل التشتت العادي الموافق لتصميم الزمرة التامة العشوائية. أما مجاميع الجداءات R_{xy} ، T_{xy} و E_{xy} فنحسبها باستخدام العلاقات التالية :

$$\text{مجموع الجداءات الكلي} = \Sigma xy = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{t} X_{ij}Y_{ij} - \frac{1}{rt}(T_{x..})(T_{y..}) \quad (18)$$

$$\text{مجموع جداءات الزمر} = R_{xy} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{r}(B_{x_{i.}})(B_{y_{i.}}) - \frac{1}{rt}(T_{x..})(T_{y..}) \quad (19)$$

$$\text{مجموع جداءات المعالجات} = T_{xy} = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{t}(T_{x.j})(T_{y.j}) - \frac{1}{rt}(T_{x..})(T_{y..}) \quad (20)$$

$$\text{مجموع جداءات الخطأ التجريبي} = E_{xy} = \Sigma xy - R_{xy} - T_{xy} \quad (21)$$

$$= T_{x..} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{t} x_{ij} \quad (22)$$

مجموع الكلي للملاحظات x

$$= T_{y..} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{t} y_{ij} \quad (23)$$

المجموع الكلي للملاحظات y .

$$= Bx_{i.} = \sum_{j=1}^{t} x_{ij} \quad (24)$$

مجموع الملاحظات x ضمن الزمرة i .

$$= By_{i.} = \sum_{j=1}^{t} y_{ij} \quad (25)$$

مجموع الملاحظات y ضمن الزمرة i .

$$= T_{x.j} = \sum_{i=1}^{r} x_{ij} \quad (26)$$

مجموع الملاحظات x الموافقة للمعالجة j .

$$= T_{y.j} = \sum_{i=1}^{r} y_{ij}$$

مجموع الملاحظات y الموافقة للمعالجة j .

ولإختبار الفرضية بأنه لا توجد فروق بين التأثيرات الفعلية للمعالجات على قيمة المتحول y ، بعد تعديلها من أجل تأثير المتحول x ، نحسب النسبة :

$$F = \frac{(S_{T+E} - S_E)/(t-1)}{S_E/[(r-1)(t-1)-1]} = \frac{(S_{T+E} - S_E)/(t-1)}{s_E^2} \qquad (27)$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = t-1$ و $\nu_2 = (r-1)(t-1)-1$.

وكما في الفقرة السابقة ، فإنه من المفيد وضع جدول يحوي متوسطات المعالجات بعد تعديلها ، وإختبار الفرضية $H:\beta = 0$ حيث β هو الوسيط المذكور في النموذج المعرف بالمعادلة (6) ونحسب المتوسطات المعدّلة للمعالجات بإستخدام العلاقة :

$$\text{adj.}\,\bar{y}_{.j} = \bar{y}_{.j} - b\,(\bar{x}_{.j} - \bar{x}), \quad j = 1, \ldots, t, \qquad (28)$$

حيث :

$$b = E_{xy} / E_{xx} \qquad (29)$$

وتقدير تشتت المتوسط المعدّل لمعالجة هو :

$$\hat{v}\,(\text{adj.}\,\bar{y}_{.j}) = s_E^2 \left[\frac{1}{r} + \frac{(\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2}{E_{xx}}\right] \qquad (30)$$

وتقدير تشتت الفرق بين المتوسطين المعدلين لمعالجتين j و j' هو :

$$\hat{v}\,(\text{ad.}\,\bar{y}_{.j} - \text{adj.}\,\bar{y}_{.j'}) = s_E^2 \left[\frac{2}{r} + \frac{(\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{.j'})^2}{E_{xx}}\right] \qquad (31)$$

ولاختبار الفرضية $\beta = o$ نحسب النسبة :

$$F = \frac{E_{xy}^2 \, / \, E_{xx}}{S_E / [(r-1)\,(t-1)-1]} = \frac{E_{xy}^2 / E_{xx}}{s_E^2} \qquad (32)$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 1$ ، $\nu_2 = (r-1)\,(t-1)-1$.

جدول ١٤ ــ ٦ تحليل تمام التشتت من أجل تصميم الزمرة التامة العشوائية

		مجاميع المربعات والجداءات			الإنحرافات حول التراجع		
مصدر التغير	درجات الحرية	Σx^2	Σxy	Σy^2	$\Sigma y^2 - (\Sigma xy)^2/\Sigma x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
الزمر	$r-1$	R_{xx}	R_{xy}	R_{yy}			
المعالجات	$t-1$	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}			
الخطأ التجريبي	$(r-1)(t-1)$	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	$S_E = E_{yy} - E_{xy}^2/E_{xx}$	$(r-1)(t-1)-1$	$s_E^2 = S_E/[(r-1)(t-1)-1]$
المعالجات + الخطأ	$r(t-1)$	$S_{xx} = T_{xx} + E_{xx}$	$S_{xy} = T_{xy} + E_{xy}$	$S_{yy} = T_{yy} + E_{yy}$	$S_{T+E} = S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}$	$r(t-1)-1$	
الفرق من أجل إختبار ما بين المتوسطات المعدّلة للمعالجات					$S_{T+E} - S_E = T_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx} + E_{xy}^2/E_{xx}$	$t-1$	$(S_{T+E} - S_E)/(t-1)$

وكمثال عددي على تحليل تمام التشتت في تصميم الزمرة التامة العشوائية ، سنحلل البيان الإحصائي المعطى في الجدول (١٤ ـ ٧) .

جدول ١٤ ـ ٧ إنتاج ثلاث فصائل من نوع معين من المحاصيل في تصميم الزمرة التامة العشوائية بأربع زمر .
(x = إنتاج الوحدة التجريبية في السنة التمهيدية تحت شروط تجريبية منتظمة ؛ y = إنتاج نفس الوحدة التجريبية في سنة التجربة حيث نستخدم الفصائل أو الأنواع الثلاثة من المحصول) .

الزمرة		الفصائل A	B	C	مجموع الزمر
1	x	54	51	57	162
	y	64	65	72	201
2	x	62	64	60	186
	y	68	69	70	207
3	x	51	47	46	144
	y	54	60	57	171
4	x	53	50	41	144
	y	62	66	61	189
مجموع المعالجة	x	220	212	204	636
	y	248	260	260	768

والحسابات الضرورية هي :

$$\sum x^2 = (54)^2 + \dots + (41)^2 - \frac{(636)^2}{12} = 514$$

$$R_{xx} = \frac{(162)^2 + (186)^2 + (144)^2 + (144)^2}{3} - \frac{(636)^2}{12} = 396$$

$$T_{xx} = \frac{(220)^2 + (212)^2 + (204)^2}{4} - \frac{(636)^2}{12} = 32$$

$$E_{xx} = 514 - 396 - 32 = 86$$

$$\sum y^2 = (64)^2 + \dots + (61)^2 - \frac{(768)^2}{12} = 324$$

$$R_{yy} = \frac{(201)^2 + (207)^2 + (171)^2 + (189)^2}{3} - \frac{(768)^2}{12} = 252$$

$$T_{yy} = \frac{(248)^2 + (260)^2 + (260)^2}{4} - \frac{(768)^2}{12} = 24$$

$$E_{yy} = 324 - 252 - 24 = 48$$

$$\sum xy = (54)(64) + \ldots + (41)(61) - \frac{(636(768)}{12} = 286$$

$$R_{xy} = \frac{(162)(201) + (186)(207) + (144)(171) + (144)(189)}{3}$$

$$- \frac{(636)(768)}{12} = 264$$

$$T_{xy} = \frac{(220)(248) + (212)(260) + (204)(260)}{4} - \frac{(636)(768)}{12}$$

$$= -24$$

$$E_{xy} = 286 - 264 - (-24) = 46$$

ونلخص هذه النتائج في الجدول (١٤ ــ ٨).

جدول ١٤ ـ ٨ تحليل تمام التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٤ ـ ٧)

مصدر التغير	درجات الحرية	مجاميع المربعات والجداءات $\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	الإنحرافات حول التراجع $\sum y^2 - (\sum xy)^2 / \sum x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
الزمر (التكرارات)	3	396	264	252			
المعالجات (الفصائل)	2	32	−24	24			
الخطأ التجريبي	6	86	46	48	23.4	5	4.68
المعالجات + الخطأ التجريبي	8	118	22	72	67.9	7	
الفرق من أجل إختبارات ما بين المتوسطات المعدلة للفصائل					44.5	2	22.25

لنختبر أولاً الفرضية $H : \beta = 0$ ، أي أن الأمثال الفعلية للتراجع تساوي الصفر ، ذلك لأنه في حالة عدم رفض هذه الفرضية ، فإن تحليل تمام التشتت كله يعوزه التبرير . وهكذا نحسب النسبة :

$$F = [(46)^2/48]/4.68 = 9.42$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = 5$ وبما أن $F > F_{.05}(1,5) = 6.61$ فيمكننا القول بأن $\beta \neq 0$ مما يبرر القيام بتحليل تمام التشتت .

وقبل إختبار الفرضية H_0 بأن الفروق بين التأثيرات الفعلية للأصناف ، بعد التعديل من أجل المتحول المرافق x ، مساوية للصفر ، نلاحظ أن تحليل التشتت العادي سيعطي :

$$F = (24/2) / (48/6) = 1.5$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 2$ و $\nu_2 = 6$ مما لا يسمح لنا برفض الفرضية القائلة بأنه لا توجد فروق حقيقية بين إنتاجية الأصناف الثلاثة . ويمكن أن نرى الآن بوضوح ما سيقدمه لنا تحليل تمام التشتت من جديد في الموقف ، إذا كان هناك أي جديد ، ولذلك نحسب النسبة F التي تقدمها طريقة تحليل تمام التشتت من أجل إختبار الفرضية H_0 المذكورة أعلاه ، أي إختبار الفروق بين الأصناف الثلاثة ، بعد تعديل الإنتاج وفقاً للفروق الطبيعية في الخصوبة من وحدة تجريبية إلى وحدة تجريبية أخرى مقاسة من خلال تطبيق شروط تجريبية منتظمة على هذه الوحدات . ومن الجدول (١٤ ـ ٨) نجد بالاستفادة من المعادلة (27) أن :

$$F = 22.25/4.68 = 4.75$$

بدرجات من الحرية تساوي $\nu_1 = 2$ و $\nu_2 = 5$ وبما أنه $F = 4.75$ يقع بين $F_{.10}(2,5) = 3.78$ و $F_{.05}(2,5) = 5.79$ فلا نقول عادة أن الفروق بين الأصناف هامة من وجهة النظر الإحصائية . ولكن إنتقاء

مستوى الأهمية ٥٪ إختياري ، ولذلك فإن النتائج السابقة قد تشير إلى فروق لا يمكن إهمالها . وبالإضافة إلى ذلك نلاحظ أن تعديل الإنتاج من أجل الخصوبة التي تتغير من وحدة تجريبية إلى أخرى أدى إلى قيمة لِـ F أقرب بكثير إلى القيمة الحرجة (أي حدود منطقة الرفض) ، مما يلفت نظر المجرب إلى أنه من المعقول جداً أن يكون إختلاف الخصوبة من وحدة إلى أخرى هو الذي يحجب الفروق الحقيقية بين الأصناف وأنه إذا أعيد تنفيذ التجربة بعدد أكبر من التكرارات فقد نصل إلى نتائج جديدة هامة .

١٤ ـ ٦ **تصميم المربع اللاتيني** : النموذج الموافق لهذه الحالة معطى في المعادلة (7) والحسابات المطلوبة إلى جانب تلك التي عرفناها في حالة تحليل التشتت العادي هي مجاميع الجداءات التي نحصل عليها وفق العلاقات التالية :

(33) $\sum xy = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij(k)}\, y_{ij(k)} - \frac{1}{m^2}(T_{x..})(T_{y..})$ = مجموع الجداءات الكلي .

(34) $R_{xy} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} (T_{x_{i.}})(T_{y_{i.}}) - \frac{1}{m^2}(T_{x..})(T_{y..})$ = مجموع جداءات الصفوف

(35) $C_{xy} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} (T_{x.j})(T_{y.j}) - \frac{1}{m^2}(T_{x..})(T_{y..})$ = مجموع جداءات الأعمدة

(36) $T_{xy} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} ({}_xT_k)({}_yT_k) - \frac{1}{m^2}(T_{x..})(T_{y..})$ = مجموع جداءات المعالجات

حيث :

$T_{x..}$ = المجموع الكلي للملاحظات x .

$T_{y..}$ = المجموع الكلي للملاحظات y .

$T_{xi.}$ = مجموع الملاحظات x ضمن الصف i .

$T_{y.j}$ = مجموع الملاحظات y ضمن العمود j .

${}_xT_k$ = مجموع الملاحظات x الموافقة للمعالجة k .

${}_yT_k$ = مجموع الملاحظات y الموافقة للمعالجة k .

ومجموع جداءات الخطأ التجريبي هو :

$$E_{xy} = \sum xy - R_{xy} - C_{xy} - T_{xy} \qquad (37)$$

وقد لخصنا نتائج هذه الحسابات في الجدول (١٤ ـ ٩) . ولاختبار الفرضية $H: \beta = 0$ نحسب النسبة :

$$F = \frac{E_{xy}^2/E_{xx}}{S_E/[(m-1)\ (m-2)-1]} = \frac{E_{xy}^2/E_{xx}}{s_E^2} \qquad (38)$$

بدرجات من الحرية $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = (m-1)\ (m-2)-1$. ولإختبار الفرضية بعدم وجود فروق بين المتوسطات المعدّلة للمعالجات نحسب النسبة :

$$F = \frac{(S_{T+E} - S_E/(m-1)}{S_E/[(m-1)\ (m-2)-1] =} = \frac{(S_{T+E} - S_E)/(m-1)}{s_E^2} \qquad (39)$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = m-1$ و $\nu_2 = (m-1)\ (m-2)-1$ ونحسب

المتوسط المعدَّل للمعالجة k من العلاقة :

$$\text{adj.}\ \bar{y}_{..(k)} = \bar{y}_{..(k)} - b(\bar{x}_{..(k)} - \bar{x}) \tag{40}$$

حيث :

$$b = E_{xy} / E_{xx} \tag{41}$$

وتقدير تشتت المتوسط المعدّل لمعالجة هو :

$$\hat{v}\ (\text{adj.}\bar{y}_{..(k)}) = s_E^2 \left[\frac{1}{m} + \frac{(\bar{x}_{..(k)} - \bar{x})^2}{E_{xx}}\right] \tag{42}$$

وتقدير تشتت الفرق بين متوسطين معدّلين لمعالجتين k و k' هو :

$$\hat{v}\ (\text{adj.}\bar{y}_{..(k)} - \text{ad.}\bar{y}_{..(k')}) = s_E^2 \left[\frac{2}{m} + \frac{(\bar{x}_{..(k)} - \bar{x}_{..(k')})^2}{E_{xx}}\right] \tag{43}$$

جدول ١٤ ــ ٩ تحليل تمام التشتت من أجل تصميم المربع اللاتيني

مصدر التغير	درجات الحرية	مجاميع المربعات والجداءات $\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	الإنحرافات حول التراجع $\sum y^2-(\sum xy)^2/\sum x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
الصفوف	$m-1$	R_{xx}	R_{xy}	R_{yy}			
الأعمدة	$m-1$	C_{xx}	C_{xy}	C_{yy}			
المعالجات	$m-1$	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}			
الخطأ التجريبي	$(m-1)(m-2)$	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	$S_E=E_{yy}-E^2_{xy}/E_{xx}$	$(m-1)(m-2)-1$	$s^2_E = S_E/[(m-1)(m-2)-1]$
المعالجات + الخطأ	$(m-1)^2$	$S_{xx}=T_{xx}+E_{xx}$	$S_{xy}=T_{xy}+E_{xy}$	$S_{yy}=T_{yy}+E_{yy}$	$S_{T+E} = S_{yy}-S^2_{xy}/S_{xx}$	$(m-1)^2-1$	
الفرق من أجل إختبار ما بين المتوسطات المعدّلة للمعالجات					$S_{T+E}-S_E= T_{yy}-S^2_{xy}/S_{xx}+E^2_{xy}/E_{xx}$	$m-1$	$(S_{T+E}-S_E)/(m-1)$

١٤ ـ ٧ تجربة عاملية بعاملين ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية :

عندما نعالج تجربة عاملية نكون قادرين على اختبار ما بين المتوسطات المعدّلة من أجل كل عامل من العوامل ومن أجل كل التفاعلات . وبالإضافة إلى الحسابات التي إستعرضناها في الفقرة (١٣ ـ ٤) من أجل تحليل التشتت العادي لتجربة عاملية تحوي عاملين ، نقدم فيما يلي العلاقات التي تمكننا من حساب مجاميع الجداءات :

(44) مجموع الجداءات الكلي . $= \sum xy =$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} X_{ijk}Y_{ijk} - \frac{1}{rab}(T_{X\cdot\cdot\cdot})(T_{Y\cdot\cdot\cdot})$$

(45) مجموع جداءات التكرارات . $= R_{xy} =$

$$\frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{r}(R_{Xi\cdot\cdot})(R_{Yi\cdot\cdot}) - \frac{1}{rab}(T_{X\cdot\cdot\cdot})(T_{Y\cdot\cdot\cdot})$$

(46) مجموع الجداءات من أجل الجدول a × b $= {}_{ab}S_{xy} =$

$$= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\left(\sum_{i=1}^{r} X_{ijk}\right)\left(\sum_{i=1}^{r} Y_{ijk}\right) - \frac{1}{rab}(T_{X\cdot\cdot\cdot})(T_{Y\cdot\cdot\cdot})$$

مجموع جداءات الخطأ $= E_{xy} = \sum xy - R_{xy} - {}_{ab}S_{xy}$

$$= A_{xy} \quad \text{مجموع الجداءات من أجل العامل a} \tag{47}$$

$$= \frac{1}{rb}\sum_{j=1}^{a}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{b} x_{ijk}\right)\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{b} Y_{ijk}\right) - \frac{1}{rab}(T_{x\ldots})(T_{y\ldots})$$

$$= B_{xy} \quad \text{مجموع الجداءات من أجل العامل b} \tag{48}$$

$$= \frac{1}{ra}\sum_{k=1}^{b}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a} x_{ijk}\right)\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a} Y_{ijk}\right) - \frac{1}{rab}(T_{x\ldots})(T_{y\ldots})$$

مجموع الجداءات من أجل التفاعل AB $= (AB)_{xy} = {}_{ab}S_{xy} - A_{xy} - B_{xy}$

(49)

حيث :

$T_{x\ldots}$ = المجموع الإجمالي للملاحظات x .

$T_{y\ldots}$ = المجموع الإجمالي للملاحظات y .

مجموع الملاحظات x ضمن التكرار i . $= R_{x_{i..}} = \sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} x_{ijk}$

مجموع الملاحظات y ضمن التكرارات i $= R_{y_{i..}} = \sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} Y_{ijk}$

ونلخص النتائج في الجدول (١٤ ـ ١٠). ونعرض فيما يلي الفرضيات التي نريد إختبارها والنسبة F الموافقة لكل منها :

(i) الفرضية بأنه لا توجد فروق بين التأثيرات الفعلية لمستويات العامل a على قيم المتحول y بعد تعديلها من أجل المتحول المرافق x . ولاختبار هذه الفرضية نحسب النسبة :

$$F = \frac{(S_{A+B} - S_E)/(a-1)}{S_E/[(r-1)(ab-1)-1]} = \frac{(S_{A+E} - S_E)/(a-1)}{s_E^2} \qquad (50)$$

(ii) الفرضية بأنه لا توجد فروق بين التأثيرات الفعلية لمستويات العامل b على قيم المتحول y بعد تعديلها من أجل المتحول المرافق x ولاختبار هذه الفرضية نحسب النسبة :

$$F = \frac{(S_{B+E} - S_E)/(b-1)}{S_E/[(r-1)(ab-1)-1]} = \frac{(S_{B+E} - S_E)/(b-1)}{s_E^2} \qquad (51)$$

(iii) الفرضية بأنه لا يوجد تفاعل بين العاملين a و b في مجال تأثيرهما على قيم المتحول y بعد تعديلها من أجل المتحول المرافق x . ولإختبار هذه الفرضية نحسب النسبة :

$$F = \frac{(S_{AB+E} - S_E)/(a-1)(b-1)}{S_E/[(r-1)(ab-1)-1]} = \frac{(S_{AB+E} - S_E)/(a-1)(b-1)}{s_E^2}$$

ولاختبار الفرضية $H : \beta = 0$ نحسب النسبة :

$$F = \frac{E_{xy}^2 / E_{xx}}{s_E^2} \qquad (53)$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = (r-1)(ab-1)-1$.

ونحصل على تقديرات لتشتتات المتوسطات المعدّلة للتأثيرات من العلاقات التالية :

جدول ١٤ ـ ١٠ تحليل تمام التشتت من أجل تجربة عاملية بعاملين ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية

مصدر التغير	درجات الحرية	مجاميع المربعات والجداءات			الإنحرافات حول التراجع		
		Σx^2	Σxy	Σy^2	$\Sigma y^2-(\Sigma xy)^2/\Sigma x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
التكرارات	$r-1$	R_{xx}	R_{xy}	R_{yy}			
المعالجات : A	$a-1$	A_{xx}	A_{xy}	A_{yy}			
B	$b-1$	B_{xx}	B_{xy}	B_{yy}			
AB	$(a-1)(b-1)$	$(AB)_{xx}$	$(AB)_{xy}$	$(AB)_{yy}$			
الخطأ التجريبي	$(r-1)(ab-1)$	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	$S_E=E_{yy}-E^2_{xy}/E_{xx}$	$(r-1)(ab-1)-1$	$s^2_E = S_E/[(r-1)(ab-1)-1]$
A + الخطأ	$(a-1)+(r-1)(ab-1)$	${}_AS_{xx} = A_{xx}+E_{xx}$	${}_AS_{xy} = A_{xy}+E_{xy}$	${}_AS_{yy} = A_{yy}+E_{yy}$	$S_{A+E} = {}_AS_{yy}-{}_AS^2_{xy}/{}_AS_{xx}$	$(a-1)+(r-1)(ab-1)-1$	
الفرق من أجل اختبار ما بين متوسطات التاثير A المعدّلة					$S_{A+E}-S_E=A_{yy}-{}_AS^2_{xy}/{}_AS_{xx}+E^2_{xy}/E_{xx}$	$a-1$	$(S_{A+E}-S_E)/(a-1)$
B + الخطأ	$(b-1)+(r-1)(ab-1)$	${}_BS_{xy} = B_{xx}+E_{xx}$	${}_BS_{xx} = B_{xy}+E_{xy}$	${}_BS_{yy} = B_{yy}+E_{yy}$	$S_{B+E} = {}_BS_{yy}-{}_BS^2_{xy}/{}_BS_{xx}$	$(b-1)+(r-1)(ab-1)-1$	
الفرق من أجل إختبار ما بين متوسطات التأثير B المعدّلة					$S_{B+E}-S_E=B_{yy}-{}_BS^2_{xy}/{}_BS_{xx}+E^2_{xy}/E_{xx}$	$b-1$	$(S_{B+E}-S_E)/(b-1)$
AB + الخطأ	$(a-1)(b-1)+(r-1)(ab-1)$	${}_{AB}S_{xx} = (AB)_{xx}+E_{xx}$	${}_{AB}S_{xy} = (AB)_{xy}+E_{xy}$	${}_{AB}S_{yy} = (AB)_{yy}+E_{yy}$	$S_{AB+E} = {}_{AB}S_{yy}-{}_{AB}S^2_{xy}/{}_{AB}S_{xx}$	$(a-1)(b-1)+(r-1)(ab-1)-1$	
الفرق من أجل إختبار ما بين تأثيرات التفاعل AB المعدّلة					$S_{AB+E}-S_E=(AB)_{yy}-{}_{AB}S^2_{xy}/{}_{AB}S_{xx}+E^2_{xy}/E_{xx}$	$(a-1)(b-1)$	$(S_{AB+E}-S_E)/(a-1)(b-1)$

$$\text{A التأثير } \hat{v}(\text{adj. } \overline{y}_{.j.}) = s_E^2 \left[\frac{1}{rb} + \frac{(\overline{x}_{.j.} - \overline{x})^2}{E_{xx}} \right] \quad (50)$$

$$\text{B التأثير } \hat{v}(\text{adj. } \overline{y}_{..k}) = s_E^2 \left[\frac{1}{ra} + \frac{(\overline{x}_{..k} - \overline{x})^2}{E_{xx}} \right] \quad (51)$$

$$\text{AB التأثير } \hat{v}(\text{ad. } \overline{y}_{.jk}) = s_E^2 \left[\frac{1}{r} + \frac{(\overline{x}_{.jk} - \overline{x})^2}{E_{xx}} \right] \quad (52)$$

لنأخذ كمثال على تحليل تمام التشتت لتجربة عاملية ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية البيان الإحصائي في الجدول (١٤ ـ ١١) حيث نعتبر الحظائر الخمسة كتكرارات ومستويات العامل a هي الرواتب الغذائية المختلفة المطبقة على حيوانات التجربة ، وله ثلاثة مستويات A,B,C ، والعامل b هو عامل الجنس وله مستويان الذكور والإناث .

جدول ١٤ ـ ١١ الوزن الإبتدائي وزيادة الوزن في تجربة مقارنة لتغذية عجول الخنازير

(x = الوزن الإبتدائي بالرطل الإنكليزي ، y = زيادة الوزن بالرطل الإنكليزي)

الحظيرة		معالجات التغذية A ذكر	A أنثى	B ذكر	B أنثى	C ذكر	C أنثى	المجموع
I	x	38	48	39	48	48	48	269
	y	9.25	9.94	8.51	10.00	9.11	9.75	56.83
II	x	35	32	38	32	37	28	202
	y	8.21	9.48	9.95	9.24	8.50	8.66	54.04
III	x	41	35	46	41	42	33	238
	y	9.32	9.32	8.43	9.34	8.90	7.63	52.49
IV	x	48	46	40	46	42	50	272
	y	10.56	10.90	8.86	9.68	9.51	10.37	59.88
V	x	43	32	40	37	40	30	222
	y	10.42	8.82	9.20	9.67	8.76	8.57	55.44
المجموع	x	205	193	203	204	209	189	1203
	y	48.03	48.46	44.95	47.93	44.78	44.98	279.13

وباتباع الإجراءات الحسابية التي يلخصها الجدول (١٤ ـ ١٠) نحصل على النتائج المبينة في الجدول (١٤ ـ ١٢) .

جدول ١٤ ـ ١٢ تحليل تمام التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٤ ـ ١١)

مصدر التغير	درجات الحرية	مجاميع المربعات والجداءات $\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	الإنحرافات حول التراجع $\sum y^2-(\sum xy)^2/\sum x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
التكرارات (الحظائر)	4	605.87	39.905	4.8518			
المعالجات							
الطعام	2	5.40	−0.147	2.2686			
الجنس	1	32.03	−3.730	0.4344			
الجنس × الطعام	2	22.47	3.112	0.4761			
الخطأ التجريبي	20	442.93	39.367	8.3144	4.8155	19	0.2534
الطعام + الخطأ	22	448.33	39.220	10.5830	7.1520	21	
الفرق من أجل اختبار ما بين المتوسطات المعدّلة للطعام					2.3365	2	1.16825
الجنس + الخطأ	21	447.96	35.637	8.7488	6.0749	20	
الفرق من أجل اختبار ما بين المتوسطات المعدّلة للجنس					1.2594	1	1.2594
(الجنس × الطعام) + الخطأ	22	465.40	42.479	8.7905	4.9133	21	
الفرق من أجل إختبار ما بين التأثيرات المعدّلة لِـ (الجنس × الطعام)					0.0978	2	0.0489

ولاختبار الفرضية $H:\beta=0$ ، نحسب النسبة :

$$F = \frac{(39.367)^2/442.93}{0.2534} = 13.81$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = 19$ وهي نسبة هامة عند المستوى $\alpha = .01$. ويمكن إختبار أهمية التأثيرات المختلفة والنسب F الموافقة هي :

الطعام : $F = \frac{1.16825}{0.2534} = 4.61$

الجنس : $F = \frac{1.2594}{0.2534} = 4.97$

الطعام × الجنس : $F = \frac{0.0489}{0.2534} = 0.19$

حيث درجات الحرية مبينة في الجدول (١٤ ـ ١٢) . ويجب مقارنة هذه النسب (والإستقراءات الناتجة عنها) مع تلك الناتجة عن تحليل التشتت العادي حول زيادة الوزن دون أن نأخذ في الإعتبار الأوزان الإبتدائية . وستساعد هذه المقارنات القارىء على فهم الأسس التي يعتمد عليها تحليل تمام التشتت ، كما ستساعد ، في هذا المثال ، على إيضاح تأثير الأوزان الإبتدائية على مقدار الزيادة في الوزن تحت الشروط التي تحددها التجربة . ولكي يكون التحليل تاماً يجب إقامة جدول للمتوسطات المعدلة للمعالجات مع انحرافاتها المعيارية .

تمارين

أ ـ أعطت تجربة منفذة وفقاً لتصميم الزمرة التامة العشوائية مجاميع المربعات والجداءات التالية :

مصدر التغير	درجات الحرية	$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	b
التكرارات	5	200	600	4000	
المعالجات	5	100	200	2500	2
الخطأ التجريبي	25	300	1200	7500	4

أ ـ هل تراجع y على x هام عند المستوى $\alpha = .05$ ؟

ب ـ هل الفروق بين متوسطات المعالجات بعد تبديلها من أجل x هامة عند المستوى $\alpha = .05$

جـ ـ ما هي النتائج المستخلصة فيما يتعلق بتأثير المعالجات ؟

٢ ـ قارنا أنواعاً من فول الصويا في زمر تامة عشوائية بأربع تكرارات فلم نجد فروقاً هامة بالنسبة للإنتاج y ، ولكن لوحظ أن حدوث الإصابات ، x ، يختلف من نوع إلى آخر . وفيما يلي جدول بمجاميع المربعات والجداءات .

مصدر التغير	درجات الحرية	$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$
الأنواع	9	4684	–532	112
الخطأ	27	3317	–650	216

والمطلوب إختبار الفرضية بأن الإنتاج ، معدلاً من أجل الإصابات ، لا تختلف من نوع إلى آخر .

٣ ـ في البيان الإحصائي التالي نجد إنتاج الشوندر السكري y بالطن / فدان ، و x عدد رؤوس الشوندر في كل وحدة تجريبية . والمطلوب القيام بتحليل تمام التشتت .

السماد المطبق (المعالجة)	(i)		الزمرة (j) 1	2	3	4	5	6	مجموع ومتوسط المعالجة	
لاسماد	1	x	183	176	291	254	225	249	1378	229.7
		y	2.45	2.25	4.38	4.35	3.42	3.27	20.12	3.353
سوبر فوسفات P	2	x	356	300	301	271	288	258	1774	295.7
		y	6.71	5.44	4.92	5.23	6.74	4.74	33.78	5.630
حامض البوتاسيوم K	3	x	224	258	244	217	192	236	1371	228.5
		y	3.22	4.14	2.32	4.42	3.28	4.00	21.38	3.563
K + P	4	x	329	283	308	326	318	318	1882	313.7
		y	6.34	5.44	5.22	8.00	6.96	6.96	38.92	6.487
N نيترات الصوديوم + P	5	x	371	354	352	331	290	410	2108	3513
		y	6.48	7.11	5.88	7.54	6.61	8.86	42.48	7.080
		x	230	221	237	193	247	250	1378	229.7
N + K	6	y	3.70	3.24	2.82	2.15	5.19	4.31	21.23	3.538
N + K + P	7	x	322	367	400	333	314	385	2.121	353.5
		y	6.10	7.68	7.37	7.83	7.75	7.39	44.12	7.353
مجموع الزمرة			2015	1959	2133	1925	1874	2106	12012	286.0
			35.00	35.30	32.91	39.52	39.95	39.35	222.03	3.286

٤ ـ فيما يلي نتائج تجربة مربع لاتيني 5 × 5 حيث y هو الإنتاج من البطاطا الإيرلندية رقم 1 مقاسه بالأكياس / فدان ، و x هو النسبة المئوية للبطاطا رقم 1 . والمعالجات هي كميات مختلفة (بالرطل الإنكليزي) من السماد P_2O_5 في الفدان : a = 0 ، b = 40 ، c = 80 ، d = 120 ، e = 160

الصفوف	الأعمدة															المجموع	
	1			2			3			4			5				
	t	y	x	t	y	x	t	y	x	t	y	x	t	y	x	y	x
1	a	134.0	91	a	149.1	88	a	141.3	87	a	161.3	91	a	149.2	91	434.9	448
2	b	148.5	90	b	148.5	91	b	199.3	94	b	148.5	90	b	152.7	93	797.5	458
3	c	145.2	93	c	149.5	95	c	119.9	90	c	149.2	94	c	145.8	90	709.6	462
4	d	171.1	91	d	169.0	94	d	144.9	89	d	170.8	95	d	130.4	88	786.2	457
5	e	175.8	91	e	153.4	94	e	168.9	92	e	167.6	96	e	141.5	93	807.2	466
المجموع		774.6	456		769.5	462		774.3	452		797.4	466		719.6	455	3538.4	2291

ولدينا

$$\sum y^2 = 595038.38, \sum xy = 351944.8 \sum x^2 = 210085$$

والمطلوب تحليل هذا البيان الإحصائي بطريقة تحليل تمام التشتت .