

الفصل الخامس عشر الإحصاء الغير وسيطي

١٥ - ١ مقدمة : فرضنا في الفصول السابقة أن للمتحويلات العشوائية المدروسة توزيعاً احتمالياً محدد الشكل . وقد انطلقنا في معظم الأحيان أن هذا التوزيع الطبيعي ، مستندين في ذلك إلى ما تقدمه نظرية النهاية المركزية من آفاق عملية واسعة النطاق . وقمنا بتقدير متوسطات وتشتتات وإختبار فرضيات إحصائية حولها . وقد برزت محاولات لإيجاد إحصاءات إختبار تسمح لنا بمقارنة التوزيعات دون معرفة شكل هذه التوزيعات . واتسع نطاق مثل هذه الدراسات حتى أصبحت تشكل اليوم جزءاً لا يمكن إغفاله من الإحصاء النظري ، له تطبيقاته المفيدة في عدد من الحقول . وباعتبار أن المقارنة في هذه الحالات تجري بين توزيعات ، وليس بين الوسطاء التي تتضمنها المعادلات الرياضية لهذه التوزيعات ، فقد دُعي هذا النوع من الدراسات الإحصائية بالإحصاء غير الوسيطي . وربما كانت أهم تطبيقات الإحصاء الغير وسيطي وأوسعها إنتشاراً تلك المتعلقة بإختبار x^2 من أجل الإستقلال وجودة التلاؤم مما سنستعرضه في الفصل القادم . وفي هذا الفصل نعرض بعض التطبيقات الأخرى التي ذاع إستخدامها في حقول تطبيقية معينة :

١٥ - ٢ إختبار الإشارة : غالباً ما نرغب في التحريات التجريبية بمقارنة مادتين أو معالجتين تحت مجموعات مختلفة من الشروط التجريبية . ونحصل على أزواج من الملاحظات ، (واحدة من أجل كل مادة أو معالجة) زوج من أجل كل مجموعة من الشروط . وعلى سبيل المثال في مقارنة نوعين من

الذرة الصفراء A و B من حيث إنتاجيتها ، قد نحصل على نتائج قليلة من كل من مجموعة من التجارب التي تمت تحت شروط تجريبية متباينة . فقد تكون مثل هذه التجارب قد تمت فوق أنواع مختلفة من التربة ، مع أسمدة مختلفة ، وفي سنين مختلفة بما يترتب على ذلك من إختلافات في التأثيرات الفصلية مثل معدل هطول المطر ، درجة الحرارة ، مقدار التعرض لأشعة الشمس ، الخ ونفرض أن كلا من النوعين A و B يظهران معاً بنفس التواتر ضمن كل زمرة من زمر كل تجربة من التجارب ، بحيث تقع الملاحظات المأخوذة على مقدار الإنتاج في أزواج (رقم إنتاج من أجل كل نوع) تم الحصول عليها تحت شروط متشابهة تماماً .

ويوضح هذا المثال الظروف التي يكون إختبار الإشارة تحتها مفيداً وهي :

- ١ - توجد أزواج من الملاحظات على شيئين نريد مقارنتهما .
- ٢ - يتم الحصول على كل زوج من هذه الأزواج تحت شروط متشابهة .
- ٣ - يتم الحصول على الأزواج المختلفة تحت شروط مختلفة .

وهذا الشرط الأخير هو الذي يجعل الإختبار t غير مشروع بإعتباره يعني أن للفروق المختلفة ، مأخوذة ضمن كل زوج ، تشتتات مختلفة ، وإذا لم يكن الحال كذلك (بمعنى أنه إذا كانت الأزواج من الملاحظات متجانسة) ، فيمكن إستخدام الإختبار t ما لم توجد أسباب أخرى تمنع من ذلك ، مثل أن يكون من الواضح تماماً أن التوزيع بعيد عن كونه توزيعاً طبيعياً .

ويمكن اللجوء إلى إختبار الإشارة حتى عندما يكون الإختبار t ممكناً ، وذلك نظراً لبساطته الشديدة . فالمطلوب هو تعداد الفروق السالبة والموجبة ، ثم العودة إلى جدول جاهز للقيم الهامة (حدود منطقة الرفض) . أي أنه يمكن إختبار الفرضية بإستخدام إختبار الإشارة دون الحاجة إلى أية حسابات .

وتجدر الإشارة إلى أن تطبيق الطريقة التي سنستعرضها في هذه الفقرة يبقى مقصوداً على حالات لا توجد فيها قيمتان متساويتان للفروق . ولا يقع مثل هذا التكرار عملياً عندما تكون القياسات دقيقة جداً ، ولكن ما يسبب حدوثها هو حاجتنا ، في الغالب ، إلى تدوير الرقم العشري الثاني أو الأول ، مثلاً ، وفي هذه الحالة يجب إستثناء ما قد نحصل عليه من القيم المتكررة .

وأخيراً نفترض بأن الفروق بين الأزواج مستقلة عن بعضها البعض ، أي أن نتيجة أي من الأزواج لا تتأثر مطلقاً بنتيجة أي من الأزواج الباقية .

طريقة العمل : ليكن المطلوب هو مقارنة الماديتين أو المعالجتين A و B ولنرمز بـ x و y لقيم الملاحظتين المأخوذتين على A و B . وليكن N عدد الأزواج من الملاحظات المأخوذة . فيمكن أن نكتب أزواج الملاحظات والفروق بينها على الشكل التالي :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$$

و

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_N - y_N$$

ويعتمد إختبار الإشارة على إشارات هذه الفروق . وسنرمز بـ r لعدد الإشارات من النوع الأقل تكراراً ، وإذا كانت قيم بعض هذه الفروق صفراً فنستغني عنها وبالتالي نحفض حجم العينة N .

وكمثال عددي نأخذ البيان الإحصائي في الجدول (١٥ - ١) الذي يعطي إنتاج سلالتين من الذرة الصفراء حصلنا عليه من عدة تجارب مختلفة . وفي هذا المثال ، لدينا $N = 28$ و $r = 7$

والفرضية الإبتدائية التي سنختبرها هي أن لكل من هذه الفروق الثمانية والعشرين توزيعاً إحصائياً (وليس من الضروري أن تكون هذه التوزيعات

من نفس الشكل) وسطه يساوي الصفر. (الوسط كما عرفناه في الفصول الأولى هو القيمة التي يكون احتمال تجاوزها مساوياً للنصف، أو بعبارة أخرى يكون احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي قيمة أكبر من الوسط مساوياً لإحتمال أن يأخذ قيمة أصغر من الوسط وكل من الإحتمالين يساوي النصف) وستكون هذه الفرضية صحيحة، على سبيل المثال، عندما يكون توزيع كل فرق من هذه الفروق متناظراً حول الصفر، هذا مع العلم بأن صفة التناظر ليست أمراً ضرورياً، أي أن كون الفرضية صحيحة لا يعني بالضرورة أن التناظر موجود. وسنفرض هذه الفرضية الإبتدائية عندما يكون الفرق بين عدد الإشارات الموجبة وعدد الإشارات السالبة كبيراً. ولكن ما هي القيمة الحرجة التي نعتبر مثل هذا الفرق عندها كبيراً بكفاية، أي نعتبره فرقاً هاماً؟ وللإجابة على هذا التساؤل نعود إلى الجدول الموافق في الملحق الذي يعطي القيم الحرجة لـ 2، وذلك عند مستويات من الأهمية تساوي 1%، 5%، 10% و 25%. ونعتبر قيمة 2 هامة إذا كانت أقل من القيمة المبينة في الجدول أو تساويها، وذلك عند مستوى الأهمية الذي تبيناه.

ويعطي الجدول 7 النسب المئوية الموافقة للتوزيع الإحتمالي لعدد الإشارات الموجبة، وذلك تحت الشرط بأن الفرضية الإبتدائية صحيحة. وهذا التوزيع هو في الحقيقة التوزيع الثنائي مع $p = \frac{1}{2}$. وبصورة عامة لا توجد قيم لـ 2 موافقة تماماً لمستويات الأهمية المعتادة، مثل $\alpha = 0.05$ أو $\alpha = 0.01$. وعلى أي حال فإنه يمكننا إيجاد مستويات أهمية قريبة إلى أي مستوى مرغوب إذا كان حجم العينة كبيراً بكفاية. ومن أجل المثال المعطى في الجدول (15 - 1) حيث $N = 28$ ، نجد من الجدول 7 الموافق في الملحق أنه يمكن القيام بإختبار وحيد الجانب للفرضية القائلة بأن المجتمع يتألف من 50% على الأقل من الإشارات الموجبة. وهذا الإختبار هو أن نرفض الفرضية إذا حصلنا على 9 إشارات موجبة أو أقل في العينة التي يقدمها البيان الإحصائي وبصورة مماثلة يمكن، عند المستوى

0.044 = α . القيام بإختبار وحيد الجانب للفرضية بأن المجتمع يتألف من 50% على الأكثر من الإشارات الموجبة وذلك برفض الفرضية إذا حصلنا من العينة على 9 إشارات سالبة أو أقل (أي أكثر من 18 إشارة موجبة) . ويمكن القيام بإختبار ثنائي الجانب عند المستوى 0.088 = $\alpha = 2(0.044)$ ، وذلك برفض الفرضية إذا لاحظنا في العينة ما لا يزيد عن 9 إشارات موجبة أو ما لا يزيد عن 9 إشارات سالبة . وهذا الإختبار يحدد منطقة الرفض بانها المنطقة الموافقة لقيم r التي لا تتجاوز 9 أي $r \leq 9$. وإذا استخدمنا البيان الإحصائي في الجدول (١٥ - ١) لإختبار الفرضية الثنائية الجانب عند المستوى 0.088 = α ، فإننا سنرفض الفرضية بإعتبار أن لدينا $r = 7$ إشارات موجبة فقط .

وغالباً ما يستحيل علينا إيجاد منطقة رفض بحجم معين من أجل عينات صغيرة الحجم . وعلى سبيل المثال نجد من الجدول أنه إذا رغبنا القيام بإختبار ثنائي الجانب عند المستوى 0.10 = α ، مستخدمين $N = 12$ ملاحظة ، فإن أقرب إختيار ممكن هو $\alpha = 2(0.019) = 0.038$ (نرفض إذا كان $r \leq 2$) و $\alpha = 2(0.073) = 0.146$ (نرفض إذا كان $r \leq 3$) . وحتى إذا كانت الفرضية بأن المجتمع يحوي 50% من الإشارات السالبة و 50% من الإشارات الموجبة هي فرضية صحيحة فإن احتمال أن تكون كل الإشارات في عينة حجمها $N = 4$ ، أو حتى في عينة حجمها $N = 5$ ، من نفس النوع سيزيد عن 5% . فإحتمال كون الإشارات الأربع في عينة حجمها 4 متماثلة هو 0.125 ، وإحتمال كون الإشارات الخمس في عينة حجمها 5 متماثلة هو 0.0625 . وذلك تحت الشرط بأن الفرضية صحيحة (أي $p = \frac{1}{2}$) . ولذلك فإنه لا بد من عينة تحوي على الأقل ستة أزواج حتى يكون ممكناً لـ r أن ترفض أي قيمة تؤدي إلى رفض الفرضية عند المستوى 0.05 = α .

قوة الإختبار وحجم العينة : كما رأينا في الإختبارات الإحصائية السابقة فإن قوة إختبار الإشارة أي قدرته على فرز فرضية خاطئة ورفضها تزداد مع

جدول ١٥ - ١ انتاج سلاتين من الذرة الصفراء

رقم التجربة	انتاج السلاطة		اشارة الفرق y-x	رقم التجربة	انتاج السلاطة		اشارة الفرق y-x
	A	B			A	B	
1	47.8	46.1	+	4	40.8	41.3	-
	48.6	50.1	-		39.8	40.8	-
	47.6	48.2	-		42.2	42.0	+
	43.0	48.6	-		41.4	42.5	-
2	42.1	43.4	-	5	38.9	39.1	-
	41.0	42.9	-		39.0	39.4	-
	28.9	38.6	-		37.5	37.3	+
	29.0	31.1	-		36.8	37.5	-
3	27.4	28.0	-	6	35.9	37.3	-
	28.1	27.5	+		33.6	34.0	-
	28.0	28.7	-		39.2	40.1	-
	28.3	28.8	-		39.1	42.6	-
	26.4	26.3	+				
	26.8	26.1	+				
	33.3	32.4	+				
30.6	31.7	-					

إزدياد حجم العينة . ويمكن إعطاء احتمالات رفض فرضية ابتدائية H_0 من أجل فرضيات بديلة H_1 تحدد قيمة ما لـ p نسبة الإشارات الموجبة في المجتمع و $1-p$ نسبة الإشارات السالبة فيه . وحيث تحدد الفرضية الابتدائية H_0 أن نسبة 50% من الإشارات موجبة ($p=.50$) ونسبة 50% منها سالبة . ويقدم الجدول (١٥ - ٢) الحد الأدنى لحجم العينة بحيث لا يقل احتمال رفض الفرضية H_0 عن 95% ، وذلك عندما تكون القيمة الفعلية لـ p هي القيمة المعطاة في العمود الأيسر .

جدول ١٥ - ٢ الحد الأدنى الضروري لقيمة N حتى لا يقل احتمال رفض الفرضية $H_0: p=.50$ عن 95% في الوقت الذي تأخذ فيه p قيمة فعلية متباينة في إنحرافها عن القيمة المفترضة ، وذلك من أجل مستويات أهمية مختلفة .

P	N			
	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 25\%$
.45	1777	1297	1080	780
.40	442	327	267	193
.35	193	143	118	86
.30	106	79	67	47
.25	66	49	42	32
.20	44	35	28	21
.15	32	23	18	14
.10	24	17	13	11
.05	15	12	11	6

فعلى سبيل المثال ، يبين الجدول (١٥ - ٢) أنه إذا كانت الإشارات تتوزع فعلاً بنسبة 45:55 فلا بد من أخذ عينة تحوي 1080 زوجاً لكي يكون احتمال رفض الفرضية 95% عند المستوى $\alpha = .10$. أي أنه إذا سحبنا عينات متتالية حجم كل منها 1080 من المجتمع الذي يتصف فعلاً بأن الإشارات

فيه تتوزع بنسبة 45:55 ، فإننا نتوقع أن تؤدي 95% من هذه العينات إلى رفض الفرضية بأن الإشارات تتوزع بنسبة 50:50 (وذلك عند مستوى الأهمية $\alpha = 0.10$).

وبالطبع فإننا لا نحتاج إلى أي اختبار إذا كنا نعلم سلفاً أن الإشارات تتوزع بنسبة 45:55 . ولكن أهمية الجدول (١٥ - ٢) تنبع من الإعتبارات التالية : يهمننا عند مقارنة مادتين أن نحدد ما إذا كان لهما نفس القيمة أو أنهما مختلفتان . وقبل بدء التجربة يجب أن نقرر المدى الذي يجب ألا تنقص عنه قيمة الفرق حتى نصنف المادتين على أنهما مختلفتان أو بعبارة أخرى ما هو مدى الفرق الذي يمكن التساهل فيه عندما نقول العبارة التالية : « المادتان لهما تقريباً نفس القيمة بحيث يمكن إعتبارهما عملياً متساويتين » . ومثل هذا القرار ، بالإضافة إلى الجدول (١٥ - ٢) ، يسمح لنا بتحديد حجم العينة المطلوب . وإذا كنا نهتم بكشف إنحرافات عن الفرضية الابتدائية صغيرة بحيث يكون التوزيع الفعلي للإشارات في حدود 45:55 ، فيجب أن نكون مستعدين لأخذ عينة أحجمها كبير جداً (بين 780 و 1777 حسب مستوى الأهمية α) . أما إذا كان إهتمامنا (وهذا يرجع إلى طبيعة المسألة المدروسة) لا يتعدى كشف إنحرافات في حدود توزيع فعلي للإشارات 30:70 ، فإن عينة أصغر بكثير ستكون كافية (بين 47 و 106 وفقاً لمستوى الأهمية α) .

تعديلات اختبار الإشارة : إذا كانت الأزواج من الملاحظات مقاسة بنفس وحدات القياس (أي أنه يمكن مقارنتها ببعضها) ، فيمكن استخدام اختبار الإشارة للإجابة على تساؤلات من النوع التالي :

١ - هل المادة A أحسن من المادة B بمقدار P بالمائة ؟

٢ - هل المادة A أحسن من المادة B بمقدار Q من الوحدات ؟

ويمكن اختبار السؤال الأول بزيادة قياسات B بنسبة P في المائة ومقارنة

النتائج مع قياسات A . فإذا فرضنا مثلاً أن أزواج الملاحظات هي :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$$

وأنا نريد إختبار الفرضية بأن قياسات x المتعلقة بـ A أعلى بمقدار 5% من القياسات y المتعلقة بـ B . فعندئذ يمكن تطبيق إختبار الإشارة على إشارات الفروق التالية :

$$x_1 - 1.05y_1, x_2 - 1.05y_2, x_3 - 1.05y_3, \dots, x_N - 1.05y_N$$

ومن أجل السؤال الثاني يمكن تطبيق إختبار الإشارة معتبرين إشارات الفروق :

$$x_1 - (y_1 + Q), x_2 - (y_2 + Q), x_3 - (y_3 + Q), \dots, x_N - (y_N + Q)$$

وفي كلي الحالتين ، إذا لم يكن التوزيع الناتج للإشارات (كما تشير إليه العينة) مختلفاً إختلافاً هاماً عن 50:50 ، نقول أن البيان الإحصائي يشير إلى أنه يمكن الإجابة على التساؤل بالإيجاب . ويوجد عادة مدى معين من قيم P (أو Q) التي تؤدي إلى توزيعات غير هامة (أي توزيع للإشارات غير مختلف إختلافاً هاماً عن 50:50) . فإذا حددنا مثل هذا المدى ، مستخدمين مستوى من الأهمية $\alpha = 0.05$. فإن مثل هذا المدى هو في الواقع 95% مجال ثقة من أجل P (أو Q) .

وإذا لم تكن وحدات القياس هي نفسها من أجل جميع أزواج الملاحظات ، فيمكن القيام بالتغييرات الضرورية في سلام القياس بحيث تصبح مثل هذه التساؤلات ذات معنى .

وعندما تكون الملاحظات قادمة من مجتمع طبيعي ، يمكننا مقارنة فعالية إختبار الإشارة بالنسبة للإختبار t ، وذلك بإيجاد حجم العينة N_t الذي تكون

قوة الإختبار t من أجله مساوية لقوة إختبار إشارة قائم على عينة حجمها N . والنسبة $100 N_t/N$ تدعى فعالية إختبار الإشارة (من حيث قوته) بالنسبة للإختبار t . وتتناقص فعالية إختبار الإشارة هذه مع (١) زيادة α ، (٢) زيادة حجم العينة، و(٣) زيادة الفرق بين متوسطي المجتمعين. ويبين الجدول (١٥ - ٣) فعالية إختبار الإشارة عند إستخدامه في حالة مجتمعين طبيعيين بمتوسطين μ_1 و μ_2 ونفس التشتت σ^2 . والكمية δ في الجدول هي حاصل قسمة الفرق بين المتوسطين (بالقيمة المطلقة) على الإنحراف المعياري للفرق بين ملاحظتين أي: $\delta = |\mu_1 - \mu_2| / \sigma \sqrt{2}$

جدول ١٥ - ٣ فعالية إختبار الإشارة في حالة مجتمعين طبيعيين.

N	α	δ				
		قرب الصفر	.5	1.0	1.5	2.0
5	.0625	96	96	95	93	91
10	.0020	94	92	90	87	84
10	.0215	85	84	82	80	77
10	.1094	77	76	74	72	
20	.0118	76	75	73	70	
20	.0414	73	72	70	68	
20	.1153	70	69	67	65	
∞	α	63.7				

ونرى من هذا الجدول ، مثلاً ، أن لإختبار الإشارة المستخدم في عينة حجمها $N=20$ عند المستوى $\alpha = .0414$ نفس قوة الإختبار t المستخدم في عينة حجمها $N_t = .70N = 14$. وإذا كان $|\mu_1 - \mu_2| / \sigma \sqrt{2}$ صغيراً و N كبيراً فإن الإختبار t لا يحتاج إلا إلى 64% تقريباً من عدد الملاحظات ليكون له نفس قوة إختبار الإشارة.

١٥ - ٢ إختبار الرتب المؤشرة (إختبار ويلكوكسن): يعتبر إختبار

ويلكوكسن تعديلاً لإختبار الإشارة . ويُستخدم لإختبار الفرضية بأن وسط مجموعة من الملاحظات (أو وسط الفروق بين أزواج من الملاحظات) يساوي قيمة محدودة μ_0 ، مثلاً . ونحسب إحصاء الإختبار T كما يلي :

١ - نطرح μ_0 من كل ملاحظة .

٢ - نرتب الفروق الناتجة وفقاً لقيمها المطلقة من الأصغر إلى الأكبر .

٣ - نضع أمام كل رتبة إشارة الفرق الموافق لهذه الرتبة .

٤ - نحسب T مجموع الرتب الموجبة .

ويقدم الجدول ٨ الموافق في الملحق النسب المثوية لتوزيع إحصاء الإختبار T .

ونجد في الجدول (١٥ - ٤) مثلاً عددياً لتوضيح استخدام الإحصاء T من أجل إختبار الفرضية بأن وسط المجتمع المدروس هو $\mu_0 = 2$. وقد اخترنا عينة عشوائية من ثماني ملاحظات من هذا المجتمع . ونرى من الجدول ٨ الموافق في الملحق أنه لكي يكون مستوى الأهمية قريب من $\alpha = 0.05$ ، يمكن أن نستخدم المنطقة الحرجة (أو منطقة الرفض) المحدودة بقيم T أقل من أو تساوي 4 ، وقيم T أكبر من أو تساوي 32 . ومستوى الأهمية الموافق لهذه المنطقة الحرجة يساوي تماماً $\alpha = 2(0.027) = 0.054$. وبما أن $T = 30$ في مثالنا هنا فإن البيان الإحصائي المعطى في الجدول (١٥ - ٤) لا يقدم عند المستوى 054 . دلالة كافية على أن الفرضية غير صحيحة .

ويمكن أن تتألف من n شوطاً إذا كانت الإشارتان تظهران على التناوب .
وسيكون من المنطقي أن نرفض الفرضية بأن ترتيب الإشارات الموجبة والسالبة
هو ترتيب عشوائي ، في حال وجود عدد كبير أو عدد صغير من الأشواط .

ويمكن الاستفادة من الأشواط لإختبار ما إذا كانت عينتان عشوائيتان
قادمتين من مجتمعين لهما نفس التوزيع التكراري . ومن أجل ذلك نرتب
ملاحظات العينتين معاً في متتابعة واحدة ، ومن الأصغر إلى الأكبر . ثم
نحصى عدد أشواط الملاحظات من كل من العينتين ، فإذا وجدنا أن هذا
العدد أقل مما نتوقع حدوثه بفعل المصادفة ، فيما لو كان المجتمعان متطابقين ،
فإننا نرفض عندئذ الفرضية بأن للمجتمعين نفس التوزيع .

ويمكن أن نستخدم أيضاً نظرية الأشواط لإختبار الفرضية بأن الملاحظات
مسحوبة عشوائياً من مجتمع واحد . وللقيام بذلك نحسب وسط العينة المسحوبة ،
ونرمز للملاحظات الأقل من الوسط بإشارة (-) ، وللملاحظات فوق
الوسط بإشارة (+) ، فإذا كان عدد الأشواط الموجبة والسالبة أكبر أو أصغر
مما يمكن توقعه بفعل المصادفة ، فإننا نرفض الفرضية .

ليكن N_1 عدد الوقوعات من نفس النوع (فروق من إشارة موجبة ،
ملاحظات أقل من الوسط ، الخ) . و N_2 عدد الوقوعات من النوع الآخر
(فروق سالبة ، ملاحظات أكبر من الوسط ، الخ) . وليكن u العدد الكلي للأشواط
بين الـ $(N_1 + N_2)$ من الملاحظات . فالجدول ٩ الموافق في الملحق يعطي التوزيع
لـ u من أجل قيم لـ N_1 و N_2 أقل من أو تساوي العشرة ، وعدد من النسب
المئوية الهامة للتوزيعات ، من أجل عينات من حجم أكبر .

مثال ١ : لنفرض أن طريقة صناعية تنتج قضباناً فولاذية وأنا نقيس
قطر كل منها . وقد وجدنا بين القضبان الأربعين الأولى ستة عشر شوطاً ،
يتجاوز الوسط أو يقل عنه . ولنختبر الفرضية بأن هذه الطريقة الصناعية
تنتج قضباناً تختلف أقطارها بصورة عشوائية . ولدينا هنا حكماً $N_1 = N_2 = 20$

(باعتبار أنه لا بد أن يكون نصف الملاحظات فوق الوسط والنصف الآخر تحت الوسط وذلك وفقاً لتعريف الوسط) . وعدد الأشواط الملحوظة $u=16$ يقع بين $u=14$ و $u=27$. ولذلك فإنه لا توجد دلالة كافية لرفض الفرضية عند المستوى $\alpha = .05$

مثال ٢ : لنفرض أننا عالجنا 10 وحدات حقلية من القمح بالسماذ A ، وعشر وحدات أخرى بالسماذ B ، وسجلنا الإنتاج في الجدول التالي :

A	26.3	28.6	25.4	29.2	27.6	25.6	26.4	27.7	28.2	29.0
B	28.5	30.0	28.8	25.3	28.4	26.5	27.2	29.3	26.2	27.5

وبترتيب العينتين معاً من الأصغر إلى الأكبر ، ووضع خطوط تحت ملاحظات العينة A تمييزاً لها عن ملاحظات العينة B نجد :

25.3, 25.4, 25.6, 26.2, 26.3, 26.4, 26.5, 27.2, 27.5, 27.6, 27.7,
28.2, 28.4, 28.5, 28.6, 28.8, 29.0, 29.2, 29.3, 30.0

ويوجد 11 شوطاً توافق ، من أجل $N_1 = N_2 = 10$ ، النسبة المتوية 58.6 من توزيع u . وبما أن هذه النسبة تقع بين 2.5 و 97.5 ، فلا توجد دلالة كافية عند مستوى الأهمية 5% لرفض الفرضية بأن للمجتمعين نفس التوزيع . وبالطبع فإنه من غير المتوقع أن يهتم أي كان برفض الفرضية بأنه لا يوجد فرق بين السماذين إذا كان هناك عدد كبير من الأشواط . ويشير العدد الكبير من الأشواط في مثل هذه الحالة إلى نقص في عشوائية إختيار العينة . ولذلك يمكننا في هذا المثال استخدام إختبار وحيد الجانب ، فنرفض الفرضية فقط إذا كانت النسبة المتوية الموافقة للقيمة الملحوظة لـ u أقل من 0.05 ، أي إذا كانت قيمة u أقل أو تساوي 6 .

التقريب الطبيعي : إذا كان كل من N_1 و N_2 أكبر من 10 ، فيمكن

تقريب تابع التوزيع لـ u باستخدام جداول التوزيع الطبيعي حيث :

$$z = \frac{u - \mu_u + \frac{1}{2}}{\sigma_u}$$

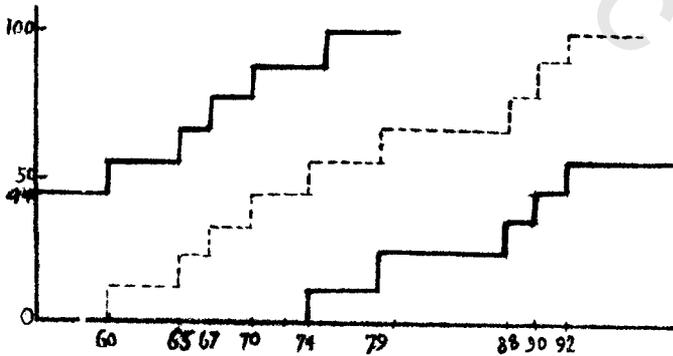
$$\mu_u = \frac{2 N_1 N_2}{N_1 + N_2} + 1, \quad \sigma_u^2 = \frac{2 N_1 N_2 (2 N_1 N_2 - N_1 - N_2)}{(N_1 + N_2)^2 (N_1 + N_2 - 1)}$$

وفي المثال ٢ أعلاه لدينا $N_1 = N_2 = 10$ ، $\mu_u = 11$ ، $\sigma_u = \sqrt{4.73} = 2.17$ ، والقيمة الملحوظة لـ u ، وهي 11 ، تعطي $z = .5/2.17 = .23$ ، ويوافق هذه القيمة لـ z النسبة المئوية 59 تقريباً .

١٥ - ٤ تقدير تابع توزيع : يمكن إقامة مجال ثقة تتنبأ من خلاله بمدى قرب المضلع التكراري المتجمع لعينة من تابع التوزيع الموافق للمجتمع الذي سحبنا منه العينة . ونلخص الطريقة فيما يلي :

نرسم المضلع التكراري المتجمع للملاحظات العينة (الخط المنقط في الشكل (١٥ - ١)) . ثم نرسم مضلعين موازيين على مسافة $d\alpha$ 100 فوق وتحت المضلع التكراري للعينة . فنحصل بذلك على شريط عرضه $d\alpha$ 200 . وهو يمثل $(1 - \alpha)$ مجال ثقة للعبارة « تابع توزيع المجتمع يقع ضمن هذا الشريط » .

شكل ١٥ - ١



ونقرأ قيم d_{α} في الجدول الموافق في الملحق . ونجد حجم العينة على يسار الجدول وخمسة مستويات من الثقة في أعلى الجدول . وعلى سبيل المثال ، إذا كان $N = 50$ ورغبنا في أن نكون واثقين ، بإحتمال يساوي 90 . ، أن الشريط يغطي تابع التوزيع الموافق للمجتمع ، فعندئذ نجد من الجدول أن $d_{90} = 0.17$. أي أن عرض الشريط هو $2(0.17) = 0.34$.

والجدول المذكور هو في الواقع جدول للنسب المتوية للتوزيع الإحتمالي لأكبر إنحراف للمضلع التكراري المتجمع للعينة عن تابع التوزيع الموافق للمجتمع الذي سحبنا منه العينة . وهكذا نقول أنه في 90 بالمائة من العينات التي حجمها $N = 50$ سيكون أعظم إنحراف للمضلع التكراري المتجمع للعينة عن تابع التوزيع الموافق للمجتمع الذي سحبنا منه العينة هو 0.17
مثال : لنفرض أن ملاحظات عينة حجمها $N = 9$ هي :

88, 92, 65, 74, 67, 79, 90, 70, 60

ف نجد من الجدول أن $d_{\alpha} = 44$ من أجل $1 - \alpha = 0.95$ و $N = 9$ (بين $N = 5$ و $N = 10$) . ويبين الشكل (١٥ - ١) مضلع العينة بخط منقط أما شريط الثقة فهو خط مستمر يبعد فوق وتحت الخط المنقط بمقدار 0.44 . ولدينا 95% ثقة أن تابع توزيع المجتمع يقع ضمن هذا الشريط .

تحديد حجم العينة : ويمكن استخدام الجدول أيضاً لتحديد حجم العينة الضروري كي نحرز 95% من الثقة بأن تابع توزيع المجتمع يقع ضمن شريط معين . فلنفرض ، على سبيل المثال ، أن أمثال الثقة التي نرغبها هي 95 . ، وأن عرض الشريط هو 0.05 . ، فعندئذ يكون $d_{\alpha} = 0.05/2$. ولكن d_{α} كما نجدها من الجدول هي $1.36/\sqrt{N}$ ، ومنه نكتب :

$$(1.36/\sqrt{N}) = 0.025$$

أو

$$N = \left(\frac{1.36}{.025} \right)^2 = (54.4)^2 = 2960$$

ومن أجل أمثال ثقة تساوي .99 ، يجب أن يكون حجم العينة :

$$N = \left(\frac{1.63}{.025} \right)^2 = 4251$$

وبصورة مماثلة ، إذا كان أمثال الثقة .99 ، وعرض الشريط .02. (أي أن يحدد المضلع التكراري المتجمع للعينة عن تابع توزيع المجتمع الذي سحبنا منه العينة بما لا يزيد عن .01) فعندئذ يكون حجم العينة المطلوب هو :

$$N = \left(\frac{1.63}{.01} \right)^2 = 26569.$$

ويمكن استخدام الطريقة المذكورة أعلاه كاختبار لجودة التلاؤم . فإذا وقع منحني تابع التوزيع المفروض بكامله ضمن %95 شريط ثقة نقوم برسمه من أجل العينة المسحوبة ، فإننا نقبل الفرضية بأن المنحني المفروض يمثل تابع التوزيع الموافق للمجتمع ، وذلك عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$. وأما إذا خرج المنحني المفروض عن حدود الشريط في نقطة أو أكثر فإننا نرفض الفرضية .

١٥ - ٥ اختبار مجموع الرتب : قمنا في المثال ٢ من الفقرة (١٥ - ٣)

بتعداد الأشواط بعد ترتيب 20 ملاحظة ، 10 من كل من مجتمعين . ويمكننا استخدام إحصاء آخر هو مجموع الرتب T' لمقارنة العيتين ، وللقيام بذلك نرتب ملاحظات العيتين وفقاً لحجمها من الأصغر إلى الأكبر ، ويقابل كل ملاحظة رقم هو مرتبتها فالرقم 1 من أجل الملاحظة الأصغر ، والرقم 2 من أجل الملاحظة التي تليها ، وهكذا . وعندئذ يكون الإحصاء T' هو مجموع الرتب الموافقة لملاحظات العينة ذات الحجم الأصغر من بين العيتين المدروستين ، أي العينة التي عدد ملاحظاتها أقل . وإذا كانت العيتان من نفس الحجم يمكن إختيار أي منهما . ونلاحظ أنه إذا كان T' مجموع N_1 رتبة ، في حالة عيتين

حجماهما N_1 و N_2 ، فإن قيمة T' محصورة حكماً بين
 $N_1(2N_2 + N_1 + 1)/2$ و $1 + 2 + \dots + N_1 = N_1(N_1 + 1)/2$

ويقدم الجدول ١٠ بعض النسب المئوية لتوزيع الإحصاء T' تحت
 الفرض بأن العينتين مسحوبتان من مجتمعين لهما نفس التوزيع الإحتمالي .
 ونرفض الفرضية بأن العينتين مسحوبتان من مجتمعين لهما نفس التوزيع إذا
 كانت قيمة T' كبيرة بصورة هامة ، أو صغيرة بصورة هامة .

وعلى سبيل المثال إذا كان $N_1 = N_2 = 10$. فترى من الجدول ١٠
 أن احتمال كون T' أصغر من أو يساوي 79 هو 0.026 . وأن احتمال كون
 T' أكبر من أو يساوي 134 هو 0.026 . وهكذا تشكل قيم T' التي تحقق
 $T' \leq 79$ أو $T' \geq 134$ منطقة رفض للفرضية عند مستوى الأهمية 5.2%
 وفي المثال ٢ من الفقرة (١٥ - ٣) كانت رتب العينة A هي 2,3,4,5,6,10
 11,12,15,17,18 ، ومنه نجد أن $T' = 99$ ؛ وبما أن هذه القيمة تقع
 خارج منطقة الرفض ($T' \leq 79$ أو $T' \geq 134$) ، فإننا نقبل ، عند المستوى
 5.2 ، الفرضية بأن للمجتمعين اللذين سحبنا منهما العينتين A و B نفس
 التوزيع الإحتمالي .

التقريب الطبيعي : إذا كان كل من N_1 و N_2 أكبر من عشرة ، فيمكن
 أن نقول ، بصورة تقريبية ، أن توزيع الإحصاء T' هو التوزيع الطبيعي
 بمتوسط .

$$\sigma_{T'}^2 = \frac{N_1 N_2 (N_1 + N_2 + 1)}{12}$$

$$\mu_{T'} = \frac{N_1 (N_1 + N_2 + 1)}{2}$$

ونستخدم عامل التصحيح من أجل الإنقطاع وهو $\frac{1}{2}$ عند حساب قيمة المتحول المعياري الموافق لـ T'_0 ، فنكتب $Z = (T'_0 - \mu_{T'_0} + \frac{1}{2}) / \sigma_{T'_0}$ ونعود بقيمة Z هذه إلى جدول التوزيع الطبيعي وفي المثال المذكور أعلاه حيث $N_1 = N_2 = 10$ نجد $\mu_{T'_0} = 105$ و $\sigma_{T'_0} = \sqrt{175} = 13.2$ ، و T'_0 أي القيمة الملحوظة لـ T' هي $T'_0 = 99$ ، ومنه $Z = -5.5/13.2 = -0.42$. ومقارنتها مع حدود منطقة الرفض عند المستوى $\alpha = 0.05$ ، وهي $Z_{0.025} = -1.96$ و $Z_{0.975} = 1.96$ ، نرى أنها تقع خارج منطقة الرفض . وبالتالي فإنه لا توجد دلالة كافية لرفض الفرضية بأن العيتين مسحوبتان من مجتمعين لهما نفس التوزيع . وبما أن توزيع T' معروف بدقة من أجل $N_1 = N_2 = 10$ ، فيمكن مقارنة التقريب الطبيعي بالقيمة الناتجة من جدول التوزيع الدقيق لـ T' . ونجد من هذا الجدول أن احتمال كون T' أصغر أو يساوي 99 هو 0.342 ، بينما نقرأ من الجدول الطبيعي أن الإحتمال الموافق لـ $Z = -0.42$ هو 0.337 . أو إذا جربنا قيمة أخرى افتراضية ولتكن $T'_0 = 79$ ، مثلاً ، فإن قيمة Z الموافقة هي : $Z = \frac{79 - 105 + \frac{1}{2}}{13.2} = -1.93$ ، ويقابلها احتمال 0.027 . بالمقارنة مع الإحتمال محسوباً دون اللجوء إلى التقريب الطبيعي وهو 0.026 .

ويطلب إختبار مجموع الرتب حوالي 5% زيادة من الملاحظات عما يتطلبه الإختبار t . من أجل مقارنة متوسطي مجتمعين طبيعيين ، وذلك لكي يكون للاختبارين نفس القوة . ونلاحظ بالطبع أنه يمكن تطبيق إختبار مجموع الرتب سواء كان المجتمعان طبيعيين أم لا .

إختبار مجموع الرتب من أجل عدة عينات : يمكن إستخدام الرتب لإختبار الفرضية بأن k من العينات أحجامها على الترتيب n_1, n_2, \dots, n_k مسحوبة من k من المجتمعات التي لها نفس التوزيع الإحتمالي . وللقيام بذلك نرتب جملة الملاحظات الموجودة في جميع العينات المدروسة وعددها $N = \sum_{i=1}^k n_i$

وفقاً لحجمها أي من الأصغر إلى الأكبر . ثم نضع أمام كل ملاحظة رقماً يمثل رتبتها ، وذلك كما رأينا في حالة عينتين . وليكن مجموع الرتب الموافقة للملاحظات العينة i ، $(i=1, \dots, k)$. ولنحسب الإحصاء :

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

وإذا كانت الفرضية صحيحة ، وقيم n_1, n_2, \dots, n_k غير صغيرة ، فيمكننا القول بأن الإحصاء H يتوزع تقريباً وفق التوزيع χ^2 بـ $(k-1)$ درجة من الحرية . وعملياً إذا كانت جميع قيم n_i ($i=1, 2, \dots, k$) أكبر من 5 فإن النسب المئوية 95 و 99 في الجدول تكون دقيقة إلى حدٍّ مرض عملياً . ونرفض الفرضية عند المستوى α إذا كانت قيمة الإحصاء H أكبر من $\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$. أما القيم المكررة ، في حال وجودها ، فنعالجها بنفس الطريقة المذكورة سابقاً .

تمارين

١ - في صناعة (جير) السيارة حصلنا على البيان الإحصائي التالي ، الذي يعطي عدد القطع النا قصة الصنع من الإنتاج اليومي البالغ 100 قطعة . فهل عدد الأشواط فوق وتحت الوسط هام عند المستوى 5% ؟

22	25	15	26	31	22	17	26
23	20	28	32	43	18	16	36
21	16	29	26	18	24	28	42
17	14	26	33	26	24	32	36
38	26	25	30	21	16	18	34

٢ - إستخدم إختبار الإشارة لتحليل البيان الإحصائي التالي ، الذي يعطي ما تكسبه عشر أزواج من الفئران ، تلقى نصفها البروتين من فستق نيء ، بينما تلقى النصف الآخر البروتين من فستق محمص . والمطلوب إختبار ما إذا كان لتحميمص الفستق أي أثر على محتوياته من البروتين . قارن النتائج مع تلك التي تحصل عليها من إستخدام الإختبار t وأوضح الفرق بين الطريقتين .

نيء	61	60	56	63	56	63	59	56	44	61
محمص	55	54	47	59	51	61	57	54	62	52

٣ - وجدنا ترتيب النباتات الصحيحة والمريضة في صف من نباتات الفراولة على الشكل التالي :

HHDH HHHH HDH DDDH HHHHHHHHHH

فهل يلقي هذا الترتيب شكاً على كون النباتات المريضة مبعثرة بصورة عشوائية بين النباتات الصحيحة ؟

٤ - يدعي خبير في تذوق الشاي أنه قادر على التمييز بين نوعين من الشاي من خلال تذوقه لكأس مصنوع من كل منهما . وفي تجربة تحوي 20 محاولة

إستطاع ، في أربعة عشر منها ، أن يميز بصورة صحيحة بين النوعين ، وكان ذلك وفقاً للترتيب التالي :

++--++++-----+++++-

حيث ترمز + للحكم الصحيح . حلل هذه النتائج باستخدام إختبار الإشارة ، وأيضاً باستخدام الأشواط .

٥ - حلل البيان الإحصائي في التمرين (٢) باستخدام إختبار الرتب المؤشرة .

٦ - قسمنا 20 من العجول ، عشوائياً ، إلى أربع حظائر متماثلة في كل منها خمسة عجول . وقدمنا في كل حظيرة نظام تغذية مختلف ، ولفترة محددة ، ثم قسنا زيادة وزن كل عجل فحصلنا على الجدول التالي :

الطعام A	الطعام B	الطعام C	الطعام D
133	163	210	195
144	148	233	184
135	152	220	199
149	146	226	187
143	157	229	193

والمطلوب تحليل هذا البيان الإحصائي مستخدماً الإحصاء H .

٧ - نريد إختبار نوعين من الدهان ، والنوع I أرخص من النوع II ، فيتألف الإختبار من إعطاء علامات لكل من النوعين ، بعد تعريضهما لشروط طقس معينة ، ولفترة ستة أشهر . وكانت نتائج خمس عينات من كل من النوعين كما يلي :

النوع I	85	87	92	80	84
النوع II	89	89	90	84	88

والمطلوب تحليل هذه النتائج مستخدماً إختبار مجموع الرتب ثم الإختبار t .