الفصل التاسع

الاحتمالات Probabilities

لا شك أن لدينا جميعًا فكرة عامة عن ماذا يقصد بمفهوم « الإحتمال » مع أننا لا نستطيع أن نعطى تعريفًا محددًا لهذا المفهوم . فهناك عدد من الكلمات والتعابير تستخدم الواحدة منها بدلاً عن الأخرى بكل عفوية فى اللغة العادية لتعنى مفهوم « الإحتمال » . فتجد كلمات بالإنجليزية مثل : Likelihood , chance , odds ... إلخ كلها تعنى نفس الشئ لكلمة « إحتمال » . هذه المفاهيم تستخدم بكثرة وفى عدد من الأحوال المختلفة جدًا ، وأمثلة قليلة تكفى لتبيان هذه الاستخدامات المتباينة : فنحن نسأل مثلاً: ما إحتمال أن تمطر السماء اليوم ؟ بالإشارة إلى حدث محدد : « تمطر اليوم » ، والذى يعنى أنها قد لا تمطر أو قد تمطر فى المستقبل . والتعبير : يحتمل ألاَّ يكون « جونز » قد قتل والدة زوجته ؛ مشابه للمثال السابق لكنه يشير إلى حدث قد وقع بالفعل لكننا لا نملك معلومات كافية لنجعل التعبير مؤكدًا . أو يمكننا أن نتحدث عمَّاذا يمكن أن يحدث فى المدى البعيد ، مثل : إن تُقامِرْ فربما أنك ستفقد قميصك . هنا لا تفترض الإشارة خسارة القميص فى محاولة واحدة « لإلقاء زهرات النرد "tossing the dice" وإنما تكون الإشارة هنا إلى : ماذا سيحدث إذا ما أُعيدت التجربة مرات عديدة . « إن مولودًا ذكرًا وُلد فى الولايات المتحدة لأبوين من البيض ربما يعيش على الأقل ٦٥ سنة » . هذا التعبير يبدو أنه يشير إلى عموم طفل من هذا النوع كما تعكسه جداول الحياة Life - Tables أكثر منه تعبيرًا يشير إلى الطفل « جيمى براون » مثلاً . من الواضح أننا لو كنا

نتحدث بتبصرٌ عن « الإحتمال » وخصوصًا لو أدخنا إخصائى علم الرياضيات The Mathematician فى الصورة فإن المفهوم يجب أن يُعرَّف تعريفًا محددًا وبدرجة كافية حتى يكون باستطاعتنا جميعًا أن نستخدمه وبنفس المعنى . ولسوء الحظ ، فإنه ليس بالأمر السَّهل ، على أية حال ، الحصول على تعريف يرضى عالم الرياضيات وأيضًا يرضى فكرتنا العامة عن ماذا نعنى بهذا المفهوم أو التعبير ، عادة . وكما سنرى ، فإن الرياضِيَّ يري أنه من الضرورى أن يفكر باحتمالات مسبَّقةً A Priori Probabilities لا يمكن فى الواقع الحصول عليها عمليًا ، ولا تعتمد على أية عينة من البيانات. فى الأجزاء التى تتبع سيُعرَّف مفهوم « الإحتمال » بلغة الرياضيات وستناقش بعض ميزاته الرياضية المهمة . وفى نفس الوقت ستكون هناك محاولة لجعل هذا التعريف وتلك الميزات الرياضية تبدو معقولة فى ضوء الإستعمال اليومى والتجربة .

الإحتمالات المسبَّقة A Priori Probabilities

نحن فى الإحصاء نهتم بالتعميم على مجتمع البحث الذى يتكون عادة من عدد كبير من الأفراد . ومجتمع كهذا قد يكون موجودًا فعلاً وممكن حصره، كما يمكن تحديده بوضوح ، مثل : عدد سكان الولايات المتحدة ، أو الذكور من المواطنين البيض الذين تزيد أعمارهم عن ٦٥ سنة . وفى هذه الحالة عادة ما نأخذ ما يشبه العينة من مجموع السكان ويكون الإهتمام موجه للسكان أنفسهم (أو جزء منهم) بصفة أساسية ، قبل أن يكون الإهتمام موجه للأفراد الذين من المحتمل أن تشملهم عينة ما . ومجتمع البحث يمكن أيضًا أن يكون مجتمعًا إفتراضيًا hypothetical يشتمل ، مثلاً ، على عدد غير محدود من التجارب التى أجريت فى « ظروف مشابهة » . ولذلك فإن

الإحْصَائى لا يهتم بالحدث (event) الواحد أو الفرد الواحد إلا بالقدر الذى يمكن أن يساعده فى الحصول على معلومات عن مجتمع البحث (population) . وبما أن هذا الكتاب يختص بالإحصاء ، فسنستخدم تعبير « إحتمال » لا ليشير إلى أحداث أو وقائع متفردة مثل « تُمطر اليوم » ، « جونز قاتل » .... الخ » ، ولكن ليشير إلى عدد كبير من الوقائع أو الأحداث (events) أو لما يحدث فى المدى البعيد(١) .

كيف نستطيع معالجة « الإحتمال » من وجهة نظر الأحداث المتكررة ؟ أولاً من الضرورى التفكير باتجاه تجربة إفتراضية تُجرى عدداً كبيراً من المرات فى ظروفٍ متشابهة . وبالطبع فإن الظروف تتغيَّر فى الواقع ، ولكن يجب أن يكون من الممكن - على الأقل - أن نتخيَّل أن الظروف لا تتغيَّر ! كل نتائج هذه التجارب يجب أن نتوقعها فى كل واحدة من هذه التجارب المثالية . وهكذا فإنه يجب علينا أن نتعلم التفكير فى صورة مثل أن قطعة نقود محايدة (Honest) يمكن أن ترمى عدداً كبيراً جداً من المرات فى نفس الظروف كل مرة ، وبإمكانية حدوث أحد حدثين ممكنين [الواجهة : «الصورة» " Head " ، أو الخلف : الكتابة Tail] فى كل مرة ترمى فيها تلك القطعة . وسنتجاهل حقيقة أن قطعة النقود ربما يصيبها التلف فى عملية إسقاطها المتكرر أو أنها ربما ترتكز على حافتها فى بعض تجارب إسقاطها . ويجب أن نتعلم تصوُّر حزمة ورق اللعب " Playing Cards " وقد خلطت جيداً وبحيث لا مجال لإلتصاق أىٍّ ورقة مع ورقة أخرى ، ولو أنه لا وجود لمثل هذه الحزمة من ورق اللعب فى الواقع المعاش بنفس الكيفية .

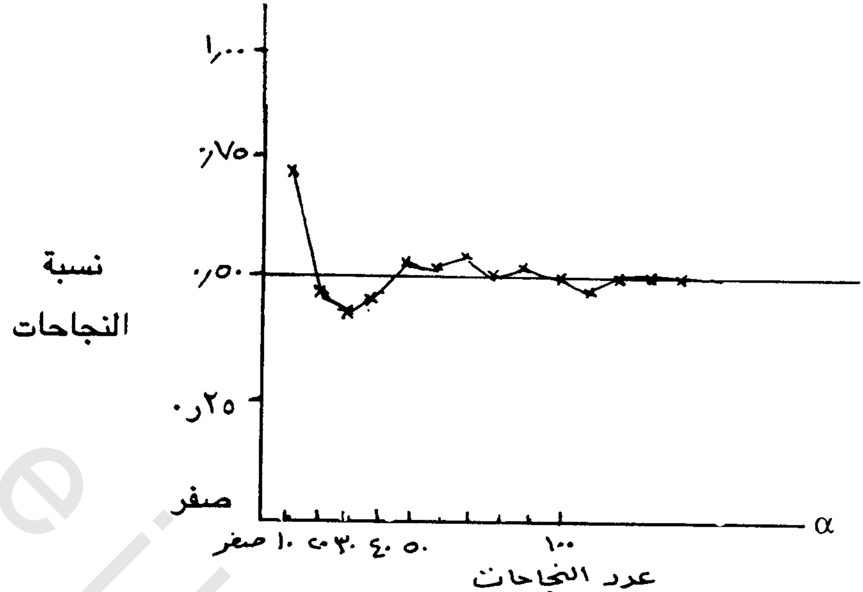
---

(١) من الممكن معالجة الإحتمالات من زاوية « الحدث الوحيد » ونحتفظ فى نفس الوقت بنفس المزايا الرياضية كما ستناقش فى الجزء اللاحق (٩ - ٢) (أنظر المرجع الثامن) . وتعج هذه المعالجة الأخرى أيضاً بصعوبات فى المفاهيم كما هو الأمر مع الطريقة التى استخدمت فى هذا الكتاب .

دعنا نطلق الإسم « حدث » (event) أو « واقعة » على نتيجة أى تجربة أو على منظومة من نتائج هذه التجربة . « فالحدث » قد يكون حدثًا بسيطًا [غير قابل للتجزئة nondecomposable] أو مركبًا [مجموعة أحداث بسيطة] Compound . هكذا فإن الحدث « أ » يمكن أن يكون هو العدد « ٦» فى مرة واحدة ترمى فيها زهرة النرد (die) والحدث «ب» مركب يمكن أن يحتوى على النتائج ٢ ، ٤ أو ٦ فى مرة واحدة ترمى فيها الزهرة ؛ والحدث « ج » [أيضًا مركب] يمكن أن يكون هو الحصول على ٧ فى مرتين رُميت فيهما الزهرة . تقليداً ، فإننا نستخدم كلمة « نجاح » متى ما حصل الحدث الذى نحن بصدده وكلمة « اخفاق » عندما لا يحصل هذا الحدث(١). فالتجربة يمكن أن تجرى مرات عديدة جدًا ويمكن الحصول على تناسب عدد المرات التى يحدث فيها أى حدث معين .

نحن (إلى الآن) لسنا مستعدين كثيرًا لإيراد تعريف رسمى « للإحتمال». أولاً : من الضرورى أن ترجع إلى معرفتك لما يحدث عمليًا عندما تجرى عملية مثل رمى قطعة النقود مرات متعددة . إفترض أننا بدأنا تجربة رمى قطعة النقود وأنه فى كل مرةٍ عاشرة تُرمى فيها القطعة نسجل عدد النجاحات [قل « واجهة » قطعة النقود « الصورة »] لمجموع المحاولات والنتائج المتحصل عليها ستكون شيئًا مشابهًا لما يبدو فى الشكل (٩ -١) أدناه .

(١) هذا الإستخدام الفنى لكلمتى « نجاح» و « إخفاق »» ليس بالضرورة أن يماثل الإستخدام العام للكلمتين . فالنجاح قد يشير إلى نجاح إنحسار مرض الكساح أو إلى انتخاب رجل (ديماجوجى) .



الشكل (٩ – ١) تأرجح نسبة النجاحات وهى تقترب من الحد ٥ و ٠

وفى الرميات العشر الأولى للقطعة لا نتوقع عادة الحصول على ٥ واجهات للقطعة [٥ « صور »] حتى ولو بقطعة نقود سليمة تمامًا من كل عيب ٠

وربما نحصل في الأولى على سبع « صور » والمجموعة الأخرى من المنظومة يمكن أن ينتج عنها عددٌ من الكتابات أكثر من عدد «الصور» ، والمجموعة التى تلى هذه يمكن أن ينتج عنها عدد أكبر من الصور مقارنة بعدد الكتابات ، وهكذا ٠ فبعدما نكون قد قمنا بـ مائة محاولة مستخدمين قطعة نقود سليمة ، نتوقع أن تكون نسبة النجاحات «ح» تساوى حوالى ٥ر٠ ؛ وبعد ١٠٠٠ محاولة لابد أن تكون نسبة النجاحات (الصور) إلى مجموع المحاولات أقرب لهذه النسبة ٠ وهكذا فإننا نتوقع أن تقترب نسبة النجاحات من مجموع المحاولات من الثبات – بمعنى أنها لا تتأرجح كثيراً من منظومة عشر محاولات لمنظومة عشر محاولات أخرى٠

وبعد ٠٠٠ر١٠ محاولة ، حتى وإن يكن قد قُدِّر لنا أن نتحصل على عشرين كتابة على التوالي (وهى حدث ضئيل الإحتمال) فإن التأثير على

النسبة المذكورة يمكن إهماله لضآلته(١) • ولكن لو حدث هذا فى المنظومتين الثالثة والرابعة فإن الأثر سيكون بالغًا • ولذلك كلما كان عدد المحاولات كبيرًا اقتربت النسبة من قيمة معينة يسميها الرياضيون « الحد Limit » • فلو استطعنا تخيل محاولة تُجرى إلى ما لا نهاية يمكن أيضًا أن نتخيل نسبة تصير بالضبط هذه القيمة المعينة – أى ٥ر٠ وحيث أننا انخرطنا فى فكرة اللانهائية بينما وجدها الرياضيون مفهومًا ممعنًا فى عدم التحديد) (ambiguous concept ، ربما يكون مفضلاً أن نفكر في ضوء عدد كبير جدًا من المحاولات •

فكرة « الحد » (Limit) يمكن أن تُعَرَّف بتحديد أدق • نحن نقول إن النسبة تقترب من « الحد » إذا كنا نستطيع رمى قطعة النقود عددًا معلومًا من المرات حتى نستطيع أن نتأكد تقريبًا من أن النسبة المتحصل عليها يمكن أن تعبِّر عن « الحد » Limit فى حدود الدرجة المطلوبة من الدقة • وذلك في حالة أننا قد قررنا من قبل كم هى « درجة القرب » من « الحد » لهذه النسبة • وبمعنى آخر ، فإننا أولاً نختار عددًا صغيرًا جدًا ، سمِّه «ى»، يمثل الدرجة المطلوبة للقرب من الحد » • degree of approximation • افترض أننا جعلنا قيمة « ى » تساوى ٠٠١ر٠ وإذا كان هناك حدّ ، يكون

(١) لاحظ أنه لم يذكر بأن العدد المطلق من «الصُّور» والعدد المطلق من «الكتابة» يتساويان تقريبًا أو أنه إذا كان هناك زيادة فى عدد «الصُّور» من البداية فإن عدد واجهات «الكتابة» (tails) سيلحق به • ربما تكون هناك زيادة فى عدد واجهات « الصورة » بصفة مطلقة إنما النسبة ستقترب من ٥ر٠ حتى ولو حدث هذا • وهكذا فإنه إن كان هناك ٣٥ « صورة » و١٥ « كتابة » فى المحاولات الأولى ، فإن نسبة عدد الصور ستكون ٧ر٠، زيادة ٢٠ صورة فى ١٠٠ محاولة (يعنى ٦٠ صورة) يعطى نسبة ٦ر٠ ؛ ونفس الزيادة (أى ٢٠) فى ٢٠٠ محاولة (يعنى ١١٠ صورة) تعطى ٥٥ر٠ •

هناك عدد كبير من المرات التى رُميت فيها قطعة النقود [سمٍّ عدد هذه المرات «ن»] بحيث أننا نستطيع ، إلى حد كبير أن نكون إيجابيين فى زعمنا أن النسبة المتحصل عليها من النجاحات ستكون بين ± ١٠٠٠ر من الإحتمال الحقيقي (١) . علاوة على ذلك ، وبغض النظر عن مدى صغَر قيمة « ى » التى نختارها ، فإنه دائمًا يكون باستطاعتنا أن نجد عددًا معلومًا من المرات التى تُرمى فيها القطعة يُبرر صحة هذه القيمة . أما إذا لم يكن هناك « حد » فإن هذا فى العموم لا يكون ممكنًا .

إنها ليست ضرورة منطقية على الإطلاق أن النِّسب المتحصل عليها بهذه الكيفية ستثبت على قيمة حدية Limiting value . وفى الحقيقة فإنه على الأقل يكون هناك تصوّر بأن مثل هذه النسب تظل متأرجحة وعلى غير ثبات إلى مالا نهاية . وإن كانت هذه هى الحقيقة ، فإننا فى الواقع لا نستطيع أن نتحدث عن إحتمال واحد ، للحصول عل « صورة » ، مرتبط بقطعة النقود . ولكن عندما يتوفر « حد » Limit مثل هذا فاننا يمكن ، على أية حال ، أن نُعَرِّف الإحتمال ك : « حد » Limit من نسبة النجاحات (نسبة عدد المرات التى نحصل فيها على « صورة ») لمجموع المحاولات (الرميات). وبمعنى أقل دقة ، فإن الإحتمال هو نسبة النجاحات [فى المدى البعيد] .

سيكون من الأسهل فى المناقشات اللاحقة أن نتحدث وكأننا نفكر فى إحتمالات الأحداث أو الوقائع الفردية Single events . وهكذا يمكننا أن

---

(١) مناقشة مجالات الثقة (Confidence intervals) فى الفصل الثانى عشر تساعد على شرح السبب في أننا لا يمكن أبدًا أن نكون متأكدين بأن الإحتمال الحقيقي هو بين الحدود المتحصل عليها .

نسأل : ما هو إحتمال الحصول على «٦» فى مرة واحدة تُرمى فيها الزهرة، أو احتمال الحصول على « آس » باللون الأحمر red ace فى سحبة واحدة من حزمة ورق اللعب (Playing Cards) ؟ • وفى الحقيقة فإن استخدامنا للتعبير – فى مرة واحدة تُرمى فيها الزهرة – » هو مجرد محاولة استخدام تعبير غير متقن • فالذى نعنيه فى الحقيقة هو : ما هى نسبة عدد المرات التى يمكن أن نحصل فيها على «٦» من مجموع مرات عديدة ومتكررة يمكن أن تُقْذَف فيها الزهرة ؟ إذًا لنسهِّل الأمر ، فنحن نشير إلى مرة واحدة تُرمى فيها الزهرة فيما نحن نعنى فى الحقيقة أن نفس الزهرة رميت مرات عديدة غير محدودة •

هناك نقاط عديدة وكثيرة تحتاج إلى نقاش قبل أن نخوض فى تجربة نقاش المزايا الرياضية للإحتمالات • فتجارب الواقع المعاش عندما تكرر ، تتبع فى الحقيقة النمط العام الذى نوقش سابقًا ومُثِّل له بيانيًا فى الشكل (٩-١)• بمعنى أن الحد يمكن أن يقترب منه –أى من النمط– ويمكن تقديره

هذا يقودنا للحديث عن قاعدة المتوسطات » The law of averages ولنتوقع أن أغلب قطع النقود ستُظْهِر واجهات « الصور » heads فى حوالى نصف عدد المرات أو أن « لاعبى « البردج » الجيدين سوف يُخلطون مع الرديئين (good bridge hands will be mixed with poor ones) • وعلى أية حال ، فإن وقفة إحتياط تكون مطلوبة فيما يختص بقاعدة المتوسطات هذه • بعض الناس يفسرون قاعدة كهذه لتعنى أنه إذا رميت قطعة النقود وأحرزت فى الرميات ١٠ « صور » (10 heads) متتالية ، فإن منظومة العشر رميات المتتالية الأخرى تأتى بواجهات الكتابة tails « نسبة لقاعدة المتوسطات » • وتفسير كهذا يعتمد تنبؤً عن حدث واحد فقط single event (يعنى نتيجة الرمية الحادية عشرة) • وكما سيتم نقاشه فيما يلى ،

فإننا سنعتبر أن الذى حدث فى منظومة الرميات العشر الأول لا علاقة له البتة بما سيحدث فى الرميات العشر فى المنظومة اللاحقة (١) . والقريحة التى تقود إلى الإستراتيجية السليمة تقول بأنه إذا شهد اللاعب ١٠ «نجاحات» متتالية (عشر «صور» متتالية) فى ١٠ محاولات فيكون من الأوفق أن يتنبأ هذا اللاعب بأنه سيحصل على «صورة» (نجاح) فى المحاولة الحادية عشر بإعتبار أن قطعة النقود ليست محايدة .

يجب أن يكون واضحاً أن الإحتمالات المسبقة (a priori probabilities) كما عُرِّفت فى هذا القسم لا يمكن الحصول عليها بطرق عملية ولو أنها – أى الإحتمالات المسبقة – يمكن أن تُقدَّر . ليس هذا لأننا يجب أن نتصور تجارب مثالية فحسب ، لكن أيضاً لأنه ليس هناك تجربة يمكن أن تكرر إلى مالا نهاية . فبعددٍ كافٍ من المحاولات ، على أية حال ، يمكن أن يُقدر إحتمالٌ ما لأية درجة من درجات الدقة . إن كل القواعد الرياضية التى ستبين فى الجزء اللاحق من هذا الفصل وكذلك كل الحجج الرياضية التى تنطوى على الاستدلالات الإحصائية تختص بالإحتمالات المسبّقة أكثر من اختصاصها بنوعية الإحتمالات التى يمكن أن يتحصل عليها الباحث (٢) .

---

(١) هذا لا ينطبق على بنى البشر – حقيقة يجب أن تؤخذ في الإعتبار كلما أخذت قياسات متكررة عن بنى البشر أو حيوانات أخرى (الجزء ٩ – ٥) .

(٢) بتعبير أدق ، فإن الباحث يمكنه الحصول فقط على تناسبات Proportions حيث أن عدد المحاولات أو الحالات يكون دائماً معروفاً أو محدداً Finite .

عند تطبيق الحجج الإحصائية على أى علم من العلوم التطبيقية ، نجد أنه (فى المجال المنطقى المشار إليه فى الفصل الثامن) يجب علينا افتراض إحتمالٍ كى نتمكن من تطبيق الحجج الرياضية . عندها يمكن أن نقول : لو أن هذا هو الإحتمال المسبق الصحيح ، فإن نتائج إمبريقية (تجريبية) معينة هى محتملة [أو غير محتملة] . وهكذا فإن «أ» هى النظرية الرياضية ، «ب» هى النتائج التجريبية المتنبأ بها ، وليس هناك مجال لاختبار النظرية مباشرة . فإن إتضح أن « ب » ليست حقيقية ، يمكننا أن نلغى « أ » ؛ لكن إذا كانت « ب » حقيقة فإن نظرية أخرى « س » مثلاً ، تحتوى على إحتمالات مسبقة مختلفة يمكن أن تكون هى المسؤولة عن النتائج . فإذا أردنا أن نتجنب الخطأ (مغالطة المصادرة على المطلوب) The fallacy of affirming the Consequence يكون من الضرورى أن نفترض إحتمالات نعتقد أنها فى الواقع ليست حقيقية ثم نواصل العمل على تفاديها . فى الفصل الذى يلى سنتناول أمثلة محددة نطبق فيها هذا الذى ذهبنا إليه .

٩ – ٢ الخصائص الرياضية للإحتمالات : –

Mathematical Properties Of Probabilities

مع أنك قد لا تحتاج ثانيةً لحساب الإحتمالات ، إلا أنه يكون من المهم ملاحظة أن أيًا من الجداول التى سوف نستخدمها لاختبار الفروض تستبطن عدداً من المزايا الرياضية البسيطة للإحتمالات . ليس من الممكن فى كتاب كهذا أن نتعمق فى نظرية الإحتمالات . لذلك ، فإن الغرض من النقاش الذى يلى هو مجرد إعطاء فكرة ما عن النهج الذى يتعامل به الرياضيون مع الإحتمالات وهم يضعون الأسس للإستدلال الإحصائى Stattistical inference . يمكننا أن نبدأ بتعيين ثلاث خصائص رياضية

للإحتمالات المسبقة. الخاصيةالأولى تكاد لا تحتاج إلى أى تعليق ، فيما أننا لا نستطيع الحصول على أقل من « صفر » من النجاحات (Successes) ولا أكثر من «ن» منها فى «ن» من المحاولات . يتبع ذلك أنه لكل حدث «أ» فإن إحتمال حدوث «أ» [يكتب إحتمال (أ)] لابد أن يكون أكبر من أو يساوى «صفرا» ، وأصغر من أو يساوى واحد صحيحًا . وهكذا فإن :

صفر ≥ إحتمال (أ) ≥ ١

حيث أن الرمز ≥ يُقرأ : أصغر مِن أو يساوى . وإذا كان إحتمال (أ) = ١ ، فإن الحدث (أ) من المؤكد أن يحدث . وإذا كان إحتمال (أ) = صفراً، فإن الحدث (أ) لا يمكن له أن يحدث .

قاعدة الجمع : The addition rule

الخاصية الثانية من خصائص الإحتمالات هي الأكثر أهمية . ولبساطتها فإننا أولاً سنعالج حالة خاصة من « قاعدة الجمع » . والتى يمكن أن تبين كما يلى : إذا كان الحدثان «أ» و «ب» متمانعين mutually exclusive ، فإن إحتمال الحصول على «أ» أو «ب» [يكتب : إحتمال (أ) أو (ب)] يساوى إحتمال الحصول على «أ» زائدًا إحتمال الحصول على «ب» – أي إحتمال (أ) + إحتمال (ب) . وتكتب الصيغة مكتملة كالآتى : –

إحتمال (أ أو ب) = إحتمال (أ) + إحتمال (ب) ، إذا كان «أ» و «ب» متمانعان . . (٩ – ١) .

ونعنى بالتعبير « متمانعان » أن «أ» و «ب» ليس بالإمكان حدوثهما معًا فى نفس الوقت ، فى التجربة الواحدة . وهكذا فإنه من المستحيل أن

نحصل على « آس » ace وعلى «ملك» King فى سحبة واحدة من حزمة ورق اللعب ولذلك ، وبتطبيق قاعدة الجمع على حزمة ورق اللعب غير المتحيزة سنحصل على : -

إحتمال (اس ace أو ملك king) = إحتمال (آس) + إحتمال (ملك)

$= \frac{١}{١٣} + \frac{١}{١٣} = \frac{٢}{١٣}$. وبالطبع فيمكننا أن نتحصل على نفس هذه النتيجة بالتركيز على أن هناك مجموعة تتألف من ٨ من الآسات والملوك فى حزمة ورق اللعب ، ومع مبدأ الإحتمال المتساوى فى الإختيار equal probability of selection فإن إحتمال الحصول على واحدٍ من هذه الأوراق يكون

$\frac{٨}{٥٢}$ أو $\frac{٢}{١٣}$. وبالمثل فإن إحتمال الحصول إمّا على ٥ أو على ٦ فى رمية واحدة للزهرة سيكون $\frac{١}{٦} + \frac{١}{٦}$ أو $\frac{١}{٣}$.

وقاعدة الجمع يمكن لها أن تُمدد لتغطى أكثر من حدثين . وهكذا إذا كان «أ» ، ب ، ج . . ، ك هى أحداث events متمانعة فإن : إحتمال (أ أو ب أو ج . . . أو ك) = إحتمال (أ) + إحتمال (ب) + إحتمال (ج) + . . . + إحتمال (ك) (٩ - ٢) . لو أن مجتمعًا ما يتكون سكانه من الطبقة العليا (١٠٠ شخص) والطبقة العليا -الوسيطة (٢٠٠ شخص) والطبقة الدنيا- الوسيطة (٤٠٠ شخص) والطبقة الدنيا (٣٠٠ شخص) مثلاً ، فإن إحتمال الحصول على شخص من الطبقة العليا أو الطبقة العليا - الوسيطة أو الطبقة الدنيا - الوسيطة فى سحبة واحدة سيكون : -

$\frac{١٠٠}{١٠٠٠} + \frac{٢٠٠}{١٠٠٠} + \frac{٤٠٠}{١٠٠٠} = \frac{٧٠٠}{١٠٠٠} =$ ٧ر٠ إذا كان لكل

شخص فرصة متساوية للإختيار ٠

وبما أن الإحتمالات هى بالضرورة نسب أو تناسبات Proportions ، يتبع ذلك أننا لو تحصلنا على كل الأحداث البسيطة الممكنة ، وكل منها يكون متمانعاً مع الأحداث الأخرى ، فإن مجموع هذه الأحداث يكون واحداً صحيحاً أى يمثل الوحدة (unity) ٠ وهكذا فإننا لو جمعنا إحتمالات الحصول على البستون Spade أو الكُوبة heart أو سِباتي Club أو ديناري diamond يجب أن نحصل على مجموع يساوى « 1 » ٠ فإحتمال عدم حدوث الحدث أ يساوى مجموع الإحتمالات لكل الأحداث المتمانعة المتبقية ٠ ولو خصمنا إحتمال « أ » من الوحدة (unity) ، فإننا بهذا سنحصل على إحتمال عدم الحصول على «أ» ما دام :

إذا كان ١ = احتمال (أ) + إحتمال (ب) + إحتمال (ج)

+ ٠٠٠ + إحتمال (ك)

فإن :

[١ – إحتمال (أ)] = إحتمال (ب) + إحتمال (ج) + ٠٠٠٠

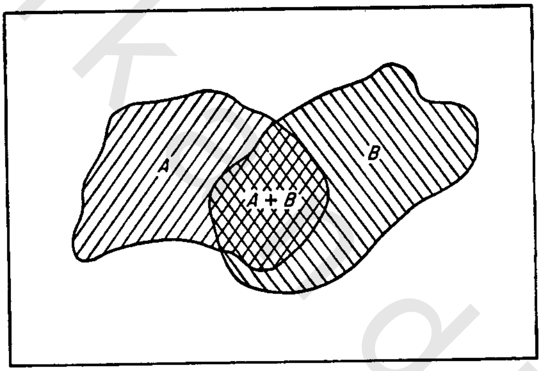
+ إحتمال (ك) ٠

إحتمال عدم الحصول على « ملكة » Queen ، مثلاً ، هو [١ – $\frac{١}{١٣}$] ، أو $\frac{١٢}{١٣}$ ٠

حتى الآن لم يتعدَّ إهتمامنا الأحداث المتمانعة (mutually exclusive events) ٠ هناك قانون عام « لقاعدة الجمع » يمكن التعبير عنه كما يلى :

إذا كان أ و ب هما أيّ حدثين [ليسا بالضرورة متمانعين ، فإن

إحتمال (أ أو ب) = إحتمال (أ) + إحتمال (ب) - إحتمال (أ وَ ب) ... (٩ - ٣) حيث أن إحتمال (أ وَ ب) تمثل إحتمال الحصول على كلا أ وَ ب (١) . وبوجه عام ، فإن إحتمال الحصول إما على أ أو على « ب » يمكن الحصول عليه أولاً بجمع إحتمال الحصول على أ مع إحتمال الحصول على ب وبعد ذلك نطرح إحتمال الحصول على كلا أ وَ ب في نفس الوقت . والسبب وراء طرح إحتمال (أ وَ ب) هو أن إحتمال حصول هذا الحدث المزدوج أشير إليه مرتين : مرة في إحتمال (أ) ومرة أخرى في إحتمال (ب). الشكل ٩ - ٢ أدناه يمكن أن يساعد على فهم هذه الحالة .



الشكل ٩ - ٢ عرض هندسي للإحتمالات بمساحات

تتناسب مع إحتمال (أ) ، إحتمال (ب)

وإحتمال (أ وَ ب) .

---

(١) كلمة أو كما يستخدمها الرياضي تحتوى على إحتمال أن حدوث «أ» و «ب» كليهما متوقعان . ولذلك فإن التعبير (أ أو ب) يعنى أ وَ / أو ب) . وبناءً على رموز نظرية المجموعات (Set theory notation) فان (أ أو ب) تعنى نفس الشئ الذى يعنيه أ $\cup$ ب في حين أن (أ وَ ب) تعنى نفس الشئ الذى يعنيه أ $\cap$ ب .

فى الشكل ٩ – ٢ فإن إحتمالات أ و̄ ب عُبِّر عنها بواسطة مساحات معينة تتناسب مع قيمها العددية حيث أن مساحة المستطيل أخذت باعتبارها وحدة واحدة . بوجه عام ، يكون هناك بعض التداخل – أى أن أ و̄ ب سوف لا يكونان متمانعين . فإحتمال الحصول إما على أ أو ب أو كليهما مُثِّل له بالمساحةالكلية المظللة تقاطعيًا . ولأن المساحة الأصغر المظللة يمكن أن تضاف مرتين ، مرة فى « أ » وأخرى فى « ب » ، هكذا نرى لماذا هو ضرورى أن نطرح إحتمال (أ و̄ ب) لنحصل على مجموع المساحة المظللة تقاطعيًا (١) .

دعنا نأخذ مثالاً رقميًا . إفترض أن « أ » هو واقعة حصول الشخص على « ملكة » Queen فى سحبة واحدة من حزمة ورق اللعب ، و̄ « ب » هو واقعة سحب ورقة البستونى Spade . فى هذه الحالة فإن «أ» و̄ «ب» ليسا متمانعين ، حيث أنه يمكن سحبهما فى نفس الوقت – يعنى سحب «ملكة البستونى» Queen of Spades . ولذلك فإن إحتمال (أ أوِ ب) = إحتمال (أ) + إحتمال (ب) – إحتمال (أ و̄ ب) =

$$\frac{٤}{٥٢} + \frac{١٣}{٥٢} - \frac{١}{٥٢} = \frac{١٦}{٥٢} = \frac{٤}{١٣} .$$

---

(١) يتعين أن تقنع نفسك بأنه للحصول على إحتمال (أ أو ب) (ولكن ليس إحتمال حدوث كليهما فى نفس الوقت) فإننا سنطرح ٢ × إحتمال (أ و̄ ب) من [إحتمال (أ) + إحتمال (ب)] ، ونتيجة مشابهة يمكن الحصول عليها في حالة ثلاث أحداث أو أكثر من الأحداث غير المتمانعة .

يمكن أن يُفْطن إلى هذه النتيجة بالإشارة إلى أن أيّاً من أ أو ب يمكن الحصول عليه بسحب أيٍ ورقة من البستونى Spade أو واحدة من الـ : «الملكات» Queens الثلاث المتبقية أىْ ، واحدة من الأوراق الست عشرة. أما إذا كنا قد أضفنا - وببساطة - إحتمال (أ)و إحتمال (ب) ، فإن : ملكة البستونى Queen of Spades تكون قد أُخذت فى الإعتبار لمرتين .

فى الباب اللاحق سنتناول قاعدة عامة لحساب إحتمال (أ وَ ب) إذ أنه ليس دائمًا يكون من السَّهل الحصول على هذه القيمة . لاحظ أنه إذا كانت الواقعتان متمانعتين فإنه سوف لن يكون هناك تضارب ؛ إذ أن إحتمال (أ وَ ب) = صفرًا . ولذلك فإن القاعدة العامة تُختصر إلى الحالة الخاصة للقاعدة فى شكل قاعدة الجمع التى تمت مناقشتها سلفًا .

قاعدة الضرب : -

هناك خاصية ثالثة للإحتمالات تمكننا من الحصول على إحتمال حدوث واقعتين (أو أكثر) يحدثان فى آنٍ واحدٍ . يمكن التعبير عن هذه الميزة بما يلى : إذا ما كان أ وَ ب أىّ حدثين ، فإن إحتمال الحصول على كلٍّ من أ وَ ب فى نفس الوقت يساوى **ناتج ضرب إحتمال الحصول على واحد من الحدثين فى «الإحتمال الشرطى» للحصول على الآخر فى حالة وقوع الحدث الأول .**

وبالرموز :

إحتمال (أ وَ ب) = إحتمال (أ) × إحتمال (ب / أ)

= إحتمال (ب) × إحتمال (أ / ب) .... (٩ - ٤)

حيث أن الرموز : إحتمال (أ / ب) وإحتمال (ب / أ) تمثل مايسمى

بالإحتمالات الشرطية Conditional probabilities • فإحتمال (أ /ب) مثلاً ، يجب أن يقرأ « إحتمال (أ) فى حالة حدوث « ب » » • فالتعبير « الإحتمال الشَّرطى » يعنى أننا نعلم ، مثلاً ، أن إحتمال حدوث «أ» يمكن أن يعتمد على ما إذا كان الحدث « ب » سيحدث أم لا • وبمعنى آخر ، فإن إحتمال حدوث «أ» مع العلم أنَّ «ب» قد حدث ، قد يختلف عن إحتمال حدوث «أ» مع العلم أنّ «ب» لم يحدث • وهكذا فإنه إذا كانت «ب» تشير إلى واقعة أنَّ شخصًا يقود سيارته بإهمال ، و «أ» يشير إلى واقعة أن السائق قد ارتكب حادثًا مروريًا ، فإننا نتوقع أن إحتمال (أ /ب) يكون أكبر من إحتمال (أ) طالما أن القيادة بإهمال هى سبب لحوادث المرور •

وقبل أن نبيِّن فائدة « قاعدة الضرب » دعنا نُقَدِّم مفهومًا جديدًا ومهمًا • فإذا كان هناك واقعتان « أ » وَ « ب » فإننا نصفهما بأنهما مستقلان إحصائيًا Statistically independent فقط إذا كان إحتمال (أ / ب) = إحتمال (أ) ، وإحتمال (ب / أ) = إحتمال (ب) • وهكذا فإنه إذا كان إحتمال حدوث الواقعة أو الحدث « أ » يبقى كما هو بغض النظر عما إذا حدثت الواقعة « ب » أو لم تحدث ، ونفس هذا الشئ ينطبق على الواقعة « ب » ، فإن الواقعتين « أ » وَ « ب » مستقلتان إحصائيًا عن بعضهما البعض • وبصفة خاصة ، فإن هذا يعنى أن معرفة حدوث إحدى الواقعتين لا يُمكِّن الشخص من التنبؤ بالحدث الآخر • وعلى سبيل المثال ، فإن إحتمال الحصول على « آس » ace مع العلم أن الورقة المسحوبة حمراء يكون ($\frac{٤}{٥٢}$) • ولذلك فإن اللون والقيمة الأسمية face value للورقة مستقلان إحصائيًا • فالمعرفة بأن الورقة المسحوبة حمراء اللون لا تساعد الشخص على التنبؤ بأن هذه الورقة تكون «آس» » ace أو لا تكون •

وبالمقابل ، فإن المعرفة بأن الورقة المسحوبة هى « آس » ace لا تساعد الشخص على التنبؤ بلونها . وبهذه المناسبة يمكن ملاحظة أن الوقائع أو الأحداث المتمانعة (mutually exclusive events) ليست مستقلة . فإذا كان «أ» وَ « ب » هما حدثان متمانعان ، نجد دائمًا أن إحتمال (أ/ب) = إحتمال (ب/أ) = صفرًا . لماذا ؟ فى حالة إذا كان أ وَ ب مستقلين إحصائيًا، نجد أن إحتمال (ب/أ) = إحتمال (ب) ، وقاعدة الضرب تأخذ الشكل المبسَّط التالى : -

إحتمال (أ وَ ب) = إحتمال (أ) × إحتمال (ب) .. إذا كان «أ» وَ «ب» مستقلين . هذه الحالة الخاصة من قاعدة الضرب تكون عادة أسهل استخدامًا بكثير من القاعدة العامة الأكثر شمولاً . وسنوضح أولاً « قاعدة الضرب » فى الحالة الخاصة التى يكون فيها «أ» وَ «ب» مستقلين إحصائيًا عن بعضهما البعض . نحن عادة نفكر فى الإعادات replications لتجربة ما على أنها - أى الإعادات - مستقلة إحصائيًا عن بعضها البعض . وهكذا فإننا إذا رمينا بقطعة النقود مرة واحدة لا نتوقع أن يكون هناك تأثير للنتيجة المتحصل عليها هذه المرة على النتيجة التى سوف نتحصل عليها فى مرة لاحقة تُرمى فيها قطعة النقود ذاتها . فإحتمال الحصول على وجه «الصورة» (heads) يظل ثابتًا فى جميع المرات التى يتم فيها رمي قطعة النقود مرة تلو الأخرى . فمعرفتنا بأنا سنحصل على وجه «الصورة» فى مرة واحدة يُرمى فيها بالقطعة لا تساعدنا على التنبؤ بما سنحصل عليه من نتيجة [وجه «كتابة» أم وجه «صورة»] فى مرة تليها يُرمى فيها بقطعة

النقود(١) .

فباستخدام قاعدة الضرب إذًا ، يمكننا أن نحسب إحتمال الحصول على وجه «صورة» فى كل مرة من مجموع مرتين متتاليتين ، نرمى فيهما بقطعة النقود وذلك ، بضرب إحتمالات الحصول على «صورة» فى أىٍّ محاولة من المحاولات المعينة . إذا كانت قطعة النقود سليمة ، فإن إحتمال الحصول على « صورة » فى كل مرة من مرتين متتاليتين ترمى فيهما هذه القطعة يكون ($\frac{١}{٢}$) × ($\frac{١}{٢}$) ، أو ($\frac{١}{٤}$) . وبنفس الطريقة إذا كان «أ» هو واقعة حصولنا على « ورقة حمراء » وَ «ب» هو واقعة حصولنا على «آس» ace ، فإن إحتمال الحصول على « آس أحمر » " red ace " [إحتمال (أ وَ ب)] يكون كما فى المعادلة :

---

(١) نحن نفترض أن الإحتمال الحقيقى معروف وأن مهمتنا هى التنبؤ بنتيجة أى تجربة محددة . وبالطبع فإنه فى غياب معرفة الإحتمال الحقيقى يمكن أن نُقدِّره بالإستعانة بنتائج تجارب سابقة ، ومن ثم ، يستخدم هذا التقدير للتنبؤ بالنتائج المستقبلية . ليس هذا ما نعنيه عندما نقول – فى حالة الاستقلال الإحصائى – معرفة حدث واحد لا تساعدنا على التنبؤ بحدث آخر . وهكذا فإن معرفة الحصول على ٢٠ «صورة» "heads" بالتتابع تحملنا على التنبؤ بأن قطعة النقود المستخدمة ليست سليمة (biased coin) – أى أن الإحتمال الحقيقى للحصول على «صورة» هو قيمة ما أكبر من ٥ر٠ . وهذا بدوره سيقود إلى التنبؤ «بصورة» فى المحاولة الحادية والعشرين . والإفتراض ، على أية حال ، هو أنه إذا كانت قطعة النقود غير سليمة يجب أن تكون هذه الحقيقة معروفة سلفًا . وهكذا فإنه إذا علم أن قيمة « ح » هى فى الحقيقة ٨ر٠ ، فإن معرفة الحصول على ٢٠ صورة عل التوالى لا تزيد من فرص مقدرتنا على التنبؤ بالحدث الذى يلى .

إحتمال (أ وَ ب) = احتمال (أ) × إحتمال (ب)

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{١٣}$$

$$= \frac{١}{٢٦} \ .$$

دعنا نضرب مثالين لا يتفق مفهوم الإستقلال الإحصائى مع أىٍّ منهما . الأول يتضمن الحالة التى فيها متغيرين مرتبطين بحيث تساعد معرفة أحدهما بالتنبؤ بالآخر . هَبْ أننا حصلنا على البيانات الإفتراضية التالية لألفين من المجتمعات المحلية .

السمة / حجم فئة المجتمع	صغير	متوسط	كبير	المجموع
معدلات جريمة مرتفعة	٣٠٠	٦٠٠	٣٠٠	١٢٠٠
معدلات جريمة منخفضة	٦٠٠	١٠٠	١٠٠	٨٠٠
المجموع	٩٠٠	٧٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

إذا سحب مجتمع محلى واحد من هذه المجتمعات عشوائياً (١) ، ومن غير

(١) العينة العشوائية ستعرف لاحقًا فى هذا الفصل . فى العينة العشوائية ، كل الأفراد وكل مجموعات الأفراد لهم فرص متساوية فى الإختيار ضمن أفراد العينة .

ترتيب مسبق ، ما هو إحتمال أن يكون ذا حجم كبير وله معدلات جريمة مرتفعة فى نفس الوقت ؟ بما أن هناك ٣٠٠ من المجتمعات المحلية بحجم كبير وبمعدلات جريمة مرتفعة من مجموع ألفى مجتمع ، فإن إحتمال الحصول على واحد من هذه المجموعة المختارة يكون وبكل وضوح : $\frac{٣٠٠}{٢٠٠٠}$ = ١٥ر ٠ وذات الإحتمال سوف نتحصل عليه باستخدام قاعدة الضرب ٠

لتكن « أ » واقعة أننا سنحصل على مجتمع محلى ذا حجم كبير ، و «ب» واقعة أن هذا المجتمع له معدلات جريمة مرتفعة ٠ وبما أن هناك ٤٠٠ من المجتمعات المحلية ذات الحجم الكبير ككل ، فإن إحتمال (أ) يساوى $\frac{٤٠٠}{٢٠٠٠}$ أو ٢٠٠ر من ضمن مجموع ١٢٠٠ من المجتمعات ذات معدلات الجريمة المرتفعة هناك ، على أية حال ، ٣٠٠ منها ذات حجم كبير ٠ لذلك إذا علمنا أن المجتمع له معدلات جريمة مرتفعة ، فإن إحتمال كونه مجتمعًا كبيرًا يساوى $\frac{٣٠٠}{١٢٠٠}$ أو ٢٥ ر٠ وبالمثل فإن إحتمال الحصول على مجتمع ذي معدلات جريمة مرتفعة يكون $\frac{١٢٠٠}{٢٠٠٠}$ أو ٦ر ٠ ولكن إذا كان معلومًا أن المجتمع كبيرً ، فإن إحتمال كونه مجتمعا ذا معدلات جريمة مرتفعة يكون $\frac{٣٠٠}{٤٠٠}$ أو ٧٥ ر ٠ وهكذا فإننا نحصل على : -

إحتمال (أ) = ٢ر ؛ إحتمال (أ / ب) = ٢٥ر٠

إحتمال (ب) = ٦ر ؛ إحتمال (ب / أ) = ٧٥ ر ٠

وباستخدام قاعدة الضرب فإننا نحصل على الإحتمال الآتى للحصول على مجتمع بحجم كبير وله معدلات جريمة مرتفعة :

إحتمال (أ وَ ب) = إحتمال (أ) × إحتمال (ب / أ).

= ٢ر × ٧٥ر = ١٥ر.

= إحتمال (ب) × إحتمال (أ / ب)

= ٦ر × ٢٥ر = ١٥ر .

أما بالنسبة للمثال الثانى ، فلنفترض أننا نود أن نحسب إحتمال الحصول على «آسين » إثنين " two aces " فى سحبتين سُحبتا من حزمة ورق اللعب، دع «أ» تمثل حدث الحصول على « آ س » واحد (ace) فى السحبة الأولى وَ « ب » تمثل حدث الحصول على « آ س » آخر (ace) فى السحبة الثانية . هل « أ » وَ « ب » مستقلان إحصائيًا ؟ الجواب يعتمد على عما إذا كنا قد أعدنا الورقة التى سحبناها فى السحبة الأولى إلى حزمة ورق اللعب ثم خلطنا حزمة ورق اللعب جيداً قبل أن نسحب الورقة الثانية فى السحبة التالية . فإذا استخدمنا أسلوب « العينة بالإرجاع » [أو العينة بالإعادة] Sampling with replacement فإن السحبتين تكونان مستقلتين طالما أن احتمال الحصول على أىٍّ « آ س » واحد (ace) يظل ثابتًا من سحبة إلى أخرى ، وطالما أن نتيجة السحبة الأولى لا يمكن أن تؤثر على نتيجة السحبة التالية . فى هذه الحالة :

إحتمال (أ وَ ب) = إحتمال (أ) × إحتمال (ب)

$$= \frac{١}{١٣} \times \frac{١}{١٣} = \frac{١}{١٦٩} .$$

افترض الآن أننا نتبع أسلوب « العينة بدون إعادة » Sampling without replacement بمعنى أننا لا نعيد الورقة التى سحبناها فى المرة الأولى – لا نعيدها إلى حزمة ورق اللعب عندما نود السحب لمرة ثانية . وبهذا لو حدث أن تحصلنا على « آ س » ace فى السحبة الأولى فإن إحتمال الحصول على « آ س » ace فى السحبة للمرة الثانية يكون $\frac{٣}{٥١}$ طالما أن المتبقى من «الأسات » The aces هو ثلاثة فقط بين الإحدى والخمسين ورقة المتبقية . ومن جهة أخرى فإننا إن لم نكن قد تمكنا من الحصول على « آ س » ace فى السَّحبة الأولى فإن إحتمال الحصول عليه فى السحبة الثانية يكون $\frac{٤}{٥١}$. لذلك ، وفى هذه الحالة ، ليس هناك إستقلال إحصائى وعلينا استخدام « الإحتمال الشرطى » The conditional probability لحساب إحتمال (أ وَ ب) – وهكذا فإن :

إحتمال (أ وَ ب) = إحتمال (أ) × إحتمال (ب / أ)

$$= \left(\frac{٤}{٥٢} \right) \times \left(\frac{٣}{٥١} \right) = \frac{١}{٢٢١} .$$

يجب الإشارة إلى أن « قاعدة الضرب » التى نناقشها يمكن أن تمتد لتشمل أكثر من حدثين . مثال ذلك ، لو أن أ ، ب وَ ج ثلاثة أحداث مستقلة إحصائيًا عن بعضها البعض ، فإن :

إحتمال (أ وَ ب وَ ج) = إحتمال (أ) × إحتمال (ب) × إحتمال (ج).

إن مبادئ « الإحتمالات الشرطية » يمكن بدورها أن تتوسع بكل بساطة.

فإذا كان علينا – مثلاً – أن نسحب أربع ورقات « بدون إعادة » يمكن أن نحسب إحتمال الحصول على « ٤ »« آسات » كما يلى :

إحتمال (٤ آسات) = $(\frac{٤}{٥٢}) \times (\frac{٣}{٥١}) \times (\frac{٢}{٥٠}) \times (\frac{١}{٤٩}) = \frac{١}{٢٧٠٧٢٥}$

ولو أن هناك ثلاثة أحداث ؛ أ ، ب وَ ج ليست مستقلة إحصائياً عن بعضها البعض ، فإننا يمكن أن نحصل على إحتمال حدوثها معًا من خلال المعادلة :

إحتمال (أ وَ ب وَ ج) = إحتمال (أ) × إحتمال (ب/أ) × إحتمال (ج/ أ وَ ب) .

حيث أن إحتمال (ج / أ وَ ب) يشير إلى إحتمال (ج) فى حالة حدوث كلٍّ من «أ» وَ «ب» . وبالطبع فإننا يمكن أن نستغل معادلات مشابهة بواسطة إعادة ترتيب مواقع «أ» ، «ب» وَ «ج» . افترض أن بحوزتنا البيانات التالية : –

العنصر واللون السياسى / الإتجاه	البيض		الملونون		المجموع
	الجمهوريون	الديمقراطيون	الجمهوريون	الديمقراطيون	
يفضل زيادة الرفاهية	٥٠	١٠٠	٢٥	٢٢٥	٤٠٠
يعارض زيادة الرفاهية	٣٥٠	٢٠٠	٢٥	٢٥	٦٠٠
المجموع	٤٠٠	٣٠٠	٥٠	٢٥٠	١٠٠٠

إذا كان « أ » هو حدث سحب أحد « البيض » ، « ب » هو حدث حصولنا على « جمهورى » وَ « ج » هو حدث أن يكون الشخص من بين الذين « يفضلون زيادة الرفاهية » . فطالما أن هناك فقط ٥٠ من الجمهوريين البيض الذين يفضلون زيادة الرفاهية ، فإن : إحتمال (أ وَ ب وَ ج) = $\frac{٥٠}{١٠٠٠}$ = ٠٥ر٠ . نجد من الجدول أيضاً أن إحتمال (أ) = $\frac{٧٠٠}{١٠٠٠}$ ؛ إحتمال (ب / أ) = $\frac{٤٠٠}{٧٠٠}$ ؛ وإحتمال (ج / أ وَ ب) = $\frac{٥٠}{٤٠٠}$. آخر هذه الأرقام – أى $\frac{٥٠}{٤٠٠}$ – ينتج من حقيقة أنه من بين الـ ٤٠٠ شخص الذين هم «أ» وَ«ب» [جمهوريون بيض] هناك فقط ٥٠ منهم يؤيدون زيادة الرفاهية . وبتطبيق « قاعدة الضرب » نحصل على النتيجة :-

إحتمال (أ وَ ب وَ ج) = إحتمال (أ) × إحتمال (ب / أ) × إحتمال (ج / أ وَ ب) .

$$= \frac{٧٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٤٠٠}{٧٠٠} \times \frac{٥٠}{٤٠٠} = ٠٥ر٠ \ .$$

وكإختبار على صحة هذه المعادلة يمكن أن نستخدم المعادلة :

إحتمال (أ وَ ب وَ ج) = إحتمال (ج) × إحتمال (ب / ج) × إحتمال (أ / ب وَ ج) .

$$= \frac{٤٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٧٥}{٤٠٠} \times \frac{٥٠}{٧٥} = \frac{٥٠}{١٠٠٠} = ٠٥ر٠ \ .$$

إن فكرة الأحداث المستقلة إحصائيًا لصيقة جدًا بفكرة الإستقلالية بين متغيرين [أو أكثر] ؛ وهى الفكرة التى سوف نناقشها بشئٍ من التفصيل فى الفصول اللاحقة . كنا قد استخدمنا سلفًا مثال حزمة ورق اللعب التى لها ميزة أن « القيمة الظاهرية » face value وأى سلسلة من سلاسل أنواع ورق اللعب وهى : البستونى ، الكُوبة ، دينارى والسباتى (Spade, heart dia- monds and clubs) المختلفة مستقلان - بمعنى أن معرفة أحدهما لا تساعد على التنبؤ بالآخر . ففى كلا المثالين [المثال الذى يقارن حجم المجتمع المحلى بمعدلات الجريمة وذلك الذى يقارن العنصر ، التفضيل السياسى والإتجاهات نحو رفاهية المجتمع] وجدنا أنه من الضرورى أن نستخدم « الإحتمالات الشرطية » للحصول على النتائج الصحيحة . فى هذه الحالات نقول إن المتغيرات المقارنة ليست مستقلة أو أنها مرتبطة . ولتبسيط الموضوع دعنا نعتبر مثال المجتمعات المحلية دون سابق معرفة . إفترض أن ذات النسبة (٦٠ ٪) من المجتمعات الصغيرة والمتوسطة والكبيرة لها معدلات جريمة عالية . ففى هذه الحالة فإن معرفة حجم المجتمع لا تكون لها أى فائدة فى التنبؤ بمعدلات الجريمة . وإذا اعتبرنا نفس المجاميع الهامشية فإن النتائج عندئذٍ تكون كما هو موضح أدناه :

حجم المجتمع / السمة	صغير	متوسط	كبير	المجموع
معدلات جريمة مرتفعة	٥٤٠	٤٢٠	٢٤٠	١٢٠٠
معدلات جريمة منخفضة	٣٦٠	٢٨٠	١٦٠	٨٠٠
المجموع	٩٠٠	٧٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

أولاً يتعين عليك التأكد من أنه لا داعى لا ستخدام الاحتمالات الشرطية وذلك بسبب هذه البيانات الافتراضية . لاحظ أيضًا أن الإحتمال (أو التناسب) المقابل لكل خلية من خلايا الجدول يساوى حاصل ضرب الإحتمالين فى المجموعين الهامشيين المقابلين . فعلى سبيل المثال ، لو أننا اختبرنا الخلية العليا من الجهة اليمنى نجد أن الإحتمال $\frac{٥٤٠}{٢٠٠٠}$ = ٢٧ و . هو بالضبط ناتج أو حاصل ضرب الإحتمالات المقابلة للمجموع الهامشى للعمود الأول (يعنى $\frac{٩٠٠}{٢٠٠٠}$ = ٤٥ ر .) والمجموع الهامشى للصف الأول (يعنى ، $\frac{١٢٠٠}{٢٠٠٠}$ = ٦ر.) . والشئ ذاته ينطبق على كل خلية متبقية فى الجدول . فحيثما كان ممكنًا لتصنيفات متغيرين أن تُرتب فى «تكرار متعامد » Cross - classification له هذه الميزة ، يمكننا القول بأن المتغيرات مستقلة إحصائيًا عن بعضها البعض . فى الفصول اللاحقة سوف نطوِّر إختبارات إحصائية للإستقلالية بالإضافة إلى مقاييس للتبعية measures of dependency بناءً على هذه القاعدة البسيطة .

تعليق على (نظرية «بيز») (Bayes' Theorm)

إذا كان إحتمال (أ وَ ب) = إحتمال (أ) × إحتمال (ب / أ) ، يمكننا أن نحل للإحتمال الشرطى فنحصل على :

$$\text{إحتمال (ب / أ)} = \frac{\text{إحتمال (أ وَ ب)}}{\text{إحتمال (أ)}}$$

$$= \frac{\text{إحتمال (ب)} \times \text{إحتمال (أ / ب)}}{\text{إحتمال (أ)}}$$

ولكن إحتمال (أ) البادى فى المقام يمكن أن يجزأ إلى التعبيرين : إحتمال (ب) × إحتمال (أ/ب) + إحتمال (ب̄) × إحتمال (أ/ب̄) ، طالمــا أن «ب̄» و «ب» [ليست ب̄] متمانعان .

وهذا يقود للمعادلة :

إحتمال (ب/أ) = إحتمال (ب) × إحتمال (أ/ب) ÷ [إحتمال (ب) × إحتمال (أ/ب) + إحتمال (ب̄) × إحتمال (أ/ ب̄)]

والتي تعرف بنظرية «بيز» Bayes' Theorm . وهذه النظرية يمكنها أن تعمم لخيارات عديدة ... ب١ ، ب٢ ... ب ك مادامت هذه الخيارات متمانعة وشاملة بحيث أن :

مجـ (و = ١ ... و = ك) ح(بو) = ١

$$\sum_{i=1}^{i=k} P(Bi) = 1$$

فاحتمال أي مفردة « ب و » "Bi" مع العلم أن « أ » قد حدث ، يمكن أن يكتب كما في المعادلة التالية :

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)\,P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{i=k} P(B_i)\,P(A/B_i)}$$

ح (ب و / أ) = ح (ب و) × ح (أ / ب و) ÷ مجـ (و = ١ ... و = ك) ح (ب و) × ح (أ / ب و) .

إن نظرية «بيز» يمكن أن تطبق ، بالطبع ، متى ما حصلنا على كل

الاحتمالات الشرطية وغير الشرطية . وعلى الرغم من أن هذه التطبيقات ليست مفيدة بطريقة متميزة ، إلا أنه يمكن استخدامها في الحالات التي تقوم فيها « الاحتمالات السيكلوجية » مقام فكرة التكرارات النسبية Relative Frequencies . ولعلَّ تحفُّظ « هيز» (مرجع ٥) (Hays) على مثل هذا الاستخدام ناتج عن ندرة اختبار طريقة «بيز» في التطبيقات الاحصائية المباشرة - حتي الآن . ورغم هذا ، فإننا نقترح بعض الاستخدامات لهذه الطريقة . خذ في البداية مسألة بسيطة جداً . افترض أننا نريد أن نختار وبطريقة عشوائية ، حاوية واحدة من ضمن حاويتين بهما كرات ، ثم نختار من تلك الحاوية كرةً واحدة وبطريقة عشوائية أيضاً . هذا، علماً بأن الحاوية الأولى تضم عدداً من الكرات ؛ نصف هذا العدد بلون أبيض والنصف الآخر بلون أسود . في حين أن الحاوية الثانية تضم عدداً من الكرات ثلثاه بلون أبيض والثلث الباقي بلون أسود . فإذا عُلِمَ أن كرة بيضاء قد أختيرت ويراد ، مثلاً ، معرفة ما إذا كان قد تم اختيار هذه ، من الحاوية الأولى . لاحظ أن هذا نوع من أنواع « الاحتمالات العكسية In- verse Probabilities) التي تناسب - وبوجه خاص - فكرة الاحتمالات التي تعكس درجة معرفتنا . ربما يعتقد بأن الحاوية الأولى قد اختيرت أو لم تختر . ولذلك ، فاحتمال اختيار الحاوية الأولى قد يكون « واحداً صحيحاً » أو « صفراً » . أما إذا كنا سنراهن على أساس معرفتنا سَحْبَ كرة بيضاء، يمكن ، عندئذ ، أن نتساءل : ما هي فُرص اختيار هذه الكرة من الحاوية الأولى ؟ وبمعنى آخر ، ما هو احتمال إختيار الحاوية الأولى ؟ هذا بالتأكيد وجه معقول لطرح المسألة .

لو كانت « أ » تمثل واقعة (أو حدث) اختيار كرة بيضاء ، « ب » تمثل واقعة اختيار الحاوية الأولى و « بَ » تمثل واقعة اختيار الحاوية الثانية ،

فبتطبيق نظرية «بيز» نحصل على :

$$\text{احتمال (ب/ أ)} = \frac{\text{احتمال (ب)} \times \text{احتمال (أ/ ب)}}{\text{احتمال (ب)} \times \text{احتمال (أ/ ب)} + \text{احتمال (بَ)} \times \text{احتمال (أ/ بَ)}}$$

$$= \frac{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}} = \frac{\frac{١}{٤}}{\frac{١}{٤} + \frac{١}{٣}} = \frac{٣}{٧} \cdot$$

وهذه نتيجة ما كان من الممكن التنبؤ بها عن طريق حجج الحِس العام Common Sense .

لاحظ أنه طالما أن كلا الحاويتين قد اختيرتا على أساس الفرص المتساوية Equal Probability ، فإن احتمال (ب) = احتمال (بَ) = ٠,٥ - الشئ الذي يمكن معه تبسيط المعادلة « البييزية » Baye's Formula .

دعنا الآن نتطرق إلى مسألة بعيدة كل البعد عن المفهوم التقليدي للإحصاء ولو أنها واقعية بدرجة معقولة من وجهة نظر الاحتمالات السيكلولجية Psychological Probabilities ، المتضمنة لعدم إلمام المتتبع بالتكرارات النسبية ، أو اعتبارات أخرى يمكن أن تستخدم لإعطاء احتمالات مسبقة A Priori Probabilities . هب أن لمجموعة عمل Action Group أربعة بدائل من وسائل العمل التي لكل منها تكلفة مختلفة وأيضاً فرص نجاح مختلفة. وهب أن شخصاً مهتماً بهذه المجموعة ، واعتماداً على تقييمه للتكاليف النسبية Relative Costs لبدائل الوسائل المسماة « ب١ » ، « ب٢ » ، ب٣ » ، « ب٤ » ، أعطي الاحتمالات غير الموضوعية التالية لبدائل الوسائل المذكورة ، على التوالى . والاحتمالات هي : ٤, ، ٣, ، ٢, ، ١, . افترض أنه قدَّر احتمالات النجاح لبدائل الوسائل لتكون ٣, ، ٥, ، ٦, ، .

على التوالى بترتيبها السابق . فإذا عَلِمَ أن المجموعة نجحت في عملها ولكنه ما استطاع التأكد : أي وسيلة من الوسائل الأربعة اسخدمت ؟ كيف يمكنه أن يعيد تقييم تقديراته الأصلية لاحتمالات الوسائل الأربعة المختلفة إذا عرف أن النجاح « أ» هو الذي حدث ؟ وبتطبيق الصورة الأشمل لنظرية «بيز» في حالة الوسيلة الأولى « $ب_١$ » نتحصل على :

$$\text{احتمال}\ (ب_١ / أ) = \frac{\text{احتمال}\ (ب_١) \times \text{احتمال}\ (أ / ب_١)}{\sum_{و = ١}^{و = ك} [\text{احتمال}\ (ب_و) \times \text{احتمال}\ (أ / ب_و)]}$$

$$= \frac{(٫٤)\ (٫٣)}{(٫٤)\ (٫٣) + (٫٣)\ (٫٥) + (٫٢)\ (٫٦) + (٫١)\ (٫٩)}$$

$$= \frac{٫١٢}{٫٤٨}$$

$$= ٫٢٥$$

وهكذا فإن المهتم – وعلى أساس هذه المعرفة الإضافية – يمكن أن يعِّين الاحتمال غير الموضوعي بمقدار ٢٥, للوسيلة الأولى . وباستخدام حسابات مماثلة يمكنه أن يُعَيِّن الاحتمالات غير الموضوعية Subjective Probabilities لبقية الوسائل البديلة فتكون ٣١٢٥, ، ٢٥, ، ١٨٧٥, على التوالى .

٩ – ٣ التباديل Permutations

بات من الضروري الآن الدخول في تعقيدات أكبر ، فنحن لم نكن قد تطرقنا سوى لمسائل غاية في البساطة يمكن حلها بالاحساس العام Intuitively على وجه التقريب . وغني عن القول إن غالبية المسائل التي تدور حول الإحتمالات هي أكثر تعقيداً بكثير مما تطرقنا إليه حتي هذه اللحظة . ومن أجل معالجة مسائل أكثر تعقيداً يكون من الضروري الأخذ بالاعتبار التراتيب The Order التي من الممكن أن تحصل عن طريقها الأحداث . فعلى سبيل المثال ، افترض أننا نود أن نحسب إحتمال الحصول على «أس» Ace ، و «ملك» King ، و «ملكة» Queen في ثلاث سحبات (بإعادة) . نستطيع أن نحسب احتمال الحصول على « أس » Ace في السحبة الأولى ، و « ملك» King في السحبة الثانية ، و « ملكة » Queen فى السحبة الثالثة.

· الإحتمال المشار إليه سيكون $\left(\frac{١}{١٣}\right)^{٣}$ ولكنه – أي هذا الإحتمال – يمثل

إحتمال الحصول على « أس » ace يتبعه « ملك » king تتبعه « ملكه » Queen بهذا الترتيب · وهناك طرق أخرى للحصول على « آ س » ace ، « ملك » king ثم « ملكة » Queen فى ثلاث سحبات إن لم نكن نهتم بالكيفية التى تُسحب بها هذه الورقات الثلاث · هناك فى الحقيقة ست طرق للحصول على هذه الورقات :

آس ، ملك ، ملكة : ace, king, queen ؛

آس ، ملكة ، ملك : ace, Queen, king ؛

ملك ، آس ، ملكة : King, ace, Queen ؛

ملك ، ملكة ، آس : king, Queen, ace ؛

ملكة ، آس ، ملك : Queen, ace, king, ؛

ملكة ، ملك ، آس : Gueen, king, ace

يلاحظ أن كل واحدة من هذه الإمكانيات تنطوى على الإحتمال ذاته . ولذلك إذا كنا مهتمين باحتمال الحصول على هذه الورقات بأىٍّ ترتيب من التراتيب المذكورة ، يمكننا جمع إحتمالاتها المنفصلة (طالما أنها متمانعة) فنحصل على : $٦ \times \left(\frac{١}{١٣} \right)^{٣}$.

وهكذا باستخدام « قاعدة الضرب » جعلنا الحدث « أ » يشير إلى نتيجة السحبة الأولى ، الحدث « ب » يشير إلى نتيجة السحبة الثانية ... وهكذا . ويمعنى آخر فاننا أخذنا فى الإعتبار الإمكانية (أو الترتيب) order بينما عادة نكون مهتمين باحتمالات الحصول على مجموعة معينة من الأحداث . فربما نود ، مثلاً ، معرفة إحتمال وجود أربعة « آسات » aces فى لعبة « بردج » (Bridge) ، أو إحتمال الحصول على نسبة معينة من السود فى عينة ما ، بغض النظر عن الكيفية order التى تم بها السحب . يكون من البساطة بمكان – عند حساب مثل هذا النوع من الإحتمالات – أن نعيِّن إحتمال أىٍّ ترتيب order مُعْطَى من تراتيب orders النتائج المحتملة possible outcomes . وإذا كانت كل الترتيبات الأخرى لها الفرصة ذاتها للظهور ، يمكننا عندئذ – وبكل بساطة – أن نضرب عدد الترتيبات orders بإحتمال حدوث كل واحد منها . وبهذا نلاحظ أننا قد وظَّفنا كلا القاعدتين – « قاعدة الضرب » و «قاعدة الجمع» . هناك معادلات حاسمة يمكن إستخدامها لنتمكن من أن نحسب على وجه الدقة ، عدد التراتيب الممكنة في مسألة معينة .

إذا ما وجدنا أن هناك عدداً معيناً من الأحداث المختلفة - سمّها « ن » التي تحدث بترتيب معين that occur in a particular order ، نشير إلى ذلك بأنه « تباديل الأحداث » a permutation of these events . وعندما لا يهمنا الترتيب order، نشير إلى « مجموعات الأحداث » بكلمة « توافيق » Com-binations . مثال ذلك في « التوافيق » الفردية آس ، ملك ، ملكة "ace, king Queen يكون هناك ستة تراتيب أو تباديل واضحة ، كما رأينا سابقاً . دعنا الآن نرى كيف يمكن التوصل إلى معادلات حساب عدد التباديل بأمثلة بسيطة . ولنبدأ بالحالة التي تكون فيها جميع الأحداث «ن» واضحة ومميزة. كم طريقة يمكن أن يعاد بواسطتها ترتيب هذه الأحداث ؟ من الواضح أننا إذا تعرّضنا لعدد « ن » من المواقع الرتبية ordinal positions المختلفة - مثلاً عدد « ن » من الكراسي المصفوفة - فإن أوّل كرسي يمكن أن يُشغل بأي شخص من الأشخاص أو بأي حدث من الأحداث . وبشغل الكرسي الأوّل يمكن أن يشغل الكرسي الثاني بأي حدث من الـ (ن - ١) من الأحداث المتبقية ؛ الكرسي الثالث بأي حدث من الـ (ن - ٢) من الأحداث المتبقية ..... وهكذا . وعندما نأتي إلى الكرسي الأخير سيتبقى لنا خيار واحد فقط - أي موقع position واحد (إمكانية واحدة) .

وهكذا فسيكون هناك :

ن (ن - ١) (ن - ٢) .... (٣) (٢) (١) = ن ! ترتيبات ممكنة ، حيث أن الرمز « ن! » يشير إلى سلسلة الضرب الطويلة في الجانب الأيمن من المعادلة أعلاه ويطلق عليه - أي على الرمز - مضروب «ن» N-Factorial » . افترض مثلا ، أن لدينا ثلاث عشرة ورقة من أوراق اللعب بمختلف القيم الإسمية الثلاث عشرة ، وقلبناها ظهراً على عقب واحدة تلو الأخرى . كم تبديلاً من التباديل permutations المختلفة يمكن الحصول

عليها ؟ الورقة الأولى يمكن أن تحمل أي قيمة من بين القيم الثلاث عشرة . وإذا علمنا أن الورقة الأولى قد فُتِحت فإن الورقة الثانية يمكن أن تحمل أية قيمة من القيم الاثنتي عشرة المتبقية . وهكذا يكون هناك ١٣ × ١٢ من النتائج الممكنة للورقتين المسحوبتين أولاً . وبمواصلة السحب من مجموعة الأوراق يمكن الأختتام بالقول بأن هناك :

(١٣) (١٢) (١١) (١٠) ..... (٣) (٢) (١) = ١٣ !

= ٦ر٢٢٧ر٠٢٠ر٨٠٠ إمكانية مختلفة من إمكانيات ترتيب هذه الأوراق الثلاث عشرة .

هب ثانية ، أن الأحداث events ليست كلها مميَّزة distinct كما في المثال السابق (أى أن الثلاث عشرة ورقة ليست كلها بقيم مختلفة تماماً) . فمثلاً إذا كانت لدينا ثلاث عشرة ورقة ، إثنتان منها قد تكونان « آس » وقد لا نفرق بين المجموعات المختلفة . في هذه الحالة فإن الترتيب الذى اختير بواسطة « آ سين » two aces لا يهم ، لكن افترض أنهما اختيرا في السحبتين : الخامسة والحادية عشرة . فإذا كان « الآسان» the two aces مميزين ، مثلا ، الآس رقم (١) ورقم (٢) ace (1) , ace (2) ، فإن لكل تبديل permutation مميز يتم فيه إختيار الآس رقم (١) ace (1) قبل إختيار الآس رقم (٢) ace (2) يكون هناك تبديل مماثل يسبق فيه اختيار الآس رقم (٢) ace (2) اختيار الآس رقم (١) ace . وهكذا رأينا أنه كلما تعذر التمييز بين هذين الآسين two aces كان هناك نصف التباديل الممكنة فى الحالة التى كانت فيها كل الأحداث متميِّزة . ولهذا السبب فان مجموع التباديل فى هذه الحالة سيكون : -

$$\frac{ن!}{٢!} = \frac{ن!}{٢} .$$

أفترض أن هناك ثلاثة « آسات » Three aces (بدلاً من « آسين » two aces) سميناها الآس رقم (١) ace (1) ، والآس رقم (٢) ace (2) ، والآس رقم (٣) ace (3) . بهذا سيكون هناك ٣! = ٦ تباديل تتضمنها هذه الحالات لا يمكن تمييزها . ولذلك فإن مجموع التباديل التى تتكون من الثلاث عشرة ورقة ، تساوى $\frac{١٣!}{٣!}$. وعلى العموم ، إذا كان هناك عدد من الأشياء (ن) ، وثلاثة من هذه الأشياء لا يمكن تمييزها عن الأخرى ، فإن عدد التباديل سوف يكون $\frac{ن!}{٣!}$. وهذا المنطق يمكن أن يعمم بكل سهولة على أكثر من مجموعة واحدة من الأشياء ، إن كانت هذه المجموعات لا تتميز فيما بينها . إفترض أن مجموعة أوراق اللعب الثلاث عشرة تحتوى على ثلاثة آسات aces ، وأربعة « ملوك » kings لتكون بذلك الأوراق الست المتبقية جميعها مميزة . وطالما أن الثلاثة آسات ace - إذا أمكن تمييزها - يمكن أن ترتب من خلال ثلاثة تباديل (٣!) ، والأربعة « ملوك » kings من خلال أربعة تباديل (٤!) يجب علينا ، إذن ، أن نقسم ١٣! على ٣! ٤! لنحصل على عدد التباديل ذات التمييز الحقيقى .

لعل القاعدة العامة قد اتضحت الآن . فإذا كان لدينا عدد «ن» من الأحداث (أو الوقائع) التى قُسِّمت بطريقة ما ، بحيث أن المجموعة الأولى منها تحتوى على عدد « $ر_١$ » من العناصر غير المميزة indistinguishable elements والمجموعة الثانية تحتوى على « $ر_٢$» من العناصر غير المميزة ..... وبوجه عام ، فإن أيٍّ مجموعة معينة - سمِّها « و » - تتضمن على «$ر_و$» من العناصر المماثلة ، وإذا كان هناك عدد «ك» من هذه المجموعات التى تتميز عن بعضها البعض ، فإن المجموع الكلى للتباديل

سوف يكون $\frac{\text{ن}!}{\text{ل}_{١}!\ \text{ل}_{٢}!\ \cdots\ \text{ل}_{\text{ن}}!}$. خذ مثالاً آخراً : إذا كان هناك خمس وعشرون طفلاً موزعين حسب أعمارهم كما يلي : -

العمر	عدد الأطفال
٣ سنوات	٦
٤ سنوات	٨
٥ سنوات	٩
٦ سنوات	١
٧ سنوات	١
المجموع	٢٥

فإن هناك: $\frac{٢٥!}{٦! \times ٨! \times ٩! \times ١! \times ١!}$ من التباديل الممكنة لهؤلاء الأطفال إن كانوا سيميزون فقط بأعمارهم .

هناك حالة خاصة للقاعدة العامة لتحديد عدد تباديل الوقائع (أو الأحداث) التى لا تكون جميعها مميزة . ويشترط فى تطبيق هذه الحالة الخاصة والمهمة ، أن يكون هناك نوعان فقط من الأحداث (مثال : عدد مرات النجاح وعدد مرات الاخفاق) . فإذا كان هناك عدد « ن » من

الأحداث منها « ر » ناجحة ، و (ن − ر) مخفقة ، وإذا كان كلا النوعين من الأحداث ليسا مميزين (بمعنى أن الأحداث الناجحة ليست مميزة فيما بينهـا وكـذا الأحداث المخفقة) فإن المعادلة العامة لعدد التباديل تختصر

إلى $\dfrac{ن\,!}{ر\,!\,(ن - ر)\,!}$.

فمثلاً إذا رمينا قطعة نقود معدنية ١٠ مرات وتحصلنا على ٦ « كتابات » خلال هـذه المرات ، فإن عدد التباديل المميزة من نوعى الحدث («كتابة» أو «صورة») سوف تكون $\dfrac{١٠\,!}{٦\,!\,٤\,!}$ = ٢١٠ تبديلاً . وسوف نستخدم هذه الحالة الخاصة المهمة بكثافة فى الفصل المقبل عندما نتطرق إلى توزيع « ذو الحدين » .

العمل باستخدام المعاملات factorials يمكن أن يكون فى غاية التعقيد إذا لم تتم الإستفادة من الإختصارات الحسابية Computational short cuts . ولحسن الحظ ، عند العمل بنسب المعاملات ratio of factorials فإن قدراً كبيراً من الاختصارات cancelation يمكن إجراؤها كما رأينا في المثال السابق والذي يحتوي على النسبة $\dfrac{١٠\,!}{٦\,!\,٤\,!}$. والترتيب التالى يفصح عن القيم العددية numerical values للمعاملات من ١ إلى ٢٠ مع ملاحظة أن المعاملات فى العمود الثانى هى معاملات تقريبية .

١ ! = ١	١١ ! = ٣ر٩٩٢ × ١٠ ^{٧}
٢ ! = ٢	١٢ ! = ٤ر٧٩٠ × ١٠ ^{٨}
٣ ! = ٦	١٣ ! = ٦ر٢٢٧ × ١٠ ^{٩}
٤ ! = ٢٤	١٤ ! = ٨ر٧١٨ × ١٠ ^{١٠}
٥ ! = ١٢٠	١٥ ! = ١ر٣٠٨ × ١٠ ^{١٢}
٦ ! = ٧٢٠	١٦ ! = ٢ر٠٩٢ × ١٠ ^{١٣}
٧ ! = ٥٠٤٠	١٧ ! = ٣ر٥٥٧ × ١٠ ^{١٤}
٨ ! = ٤٠٣٢٠	١٨ ! = ٦ر٤٠٢ × ١٠ ^{١٥}
٩ ! = ٣٦٢٨٨٠	١٩ ! = ١ر٢١٦ × ١٠ ^{١٧}
١٠ ! = ٣٦٢٨٨٠٠	٢٠ ! = ٢ر٤٣٣ × ١٠ ^{١٨}

وفيما يختص بالقيم الكبيرة ل «ن» ، من الممكن الضغط على الحدود التي يجب أن تقع بينها «ن» المعاملية (ن!) ، وذلك باستخدام « تقريب » « ستيرلنج» " Stirling's approximation " وهو كما يلي : –

$$\sqrt{٢ن\pi}\left(\frac{ن}{هـ}\right)^{ن} < ن! < \sqrt{٢ن\pi}\left(\frac{ن}{هـ}\right)^{ن} \times \left(١ + \frac{١}{١٢ن - ١}\right)$$

علماً بأن π يساوى ٣ر١٤١٥٩ تقريبًا ، « هـ » يساوى ٢ر٧١٨٢٨ تقريباً . الطلاب الذين يلمون بكيفية استخدام اللوغريثمات يجدون أنه من

الأسهل العمل بلوغريثمات المعاملات logs of factorials . وبهذا تقلب عمليات الضرب إلى عمليات جمع النسب ratios إلى فروق differences . مثال ذلك : -

$$\text{لو}.1 \quad \left(\frac{!\text{٨}}{!\text{٣}} \right) = \text{لو} \quad \frac{\text{١×٢×٣×٤×٥×٦×٧×٨}}{\text{١×٢×٣}}$$

لو ٨ + لو ٧ + لو ٦ + لو ٥ + لو ٤

+ لو٣ + لو٢ + لو١

-{لو٣ + لو٢ + لو١}

= { لو ٨ + لو ٧ + لو ٦ + لو ٥ + لو ٤ }.

أمثلة :

دعنا نُقْدِم على بعض تطبيقات هذه المبادئ على مسائل عن الإحتمالات ، لكنها - أى المسائل - ذات طبيعة أكثر تعقيداً مما ناقشناه حتى الآن . وكما أشارت مقدمة هذا الجزء ، فإن من أهم الاستراتيجيات العامة لكثير من المسائل التي لا معنى فيها لترتيب الإختيار ، هو أن نحسب إحتمال تبديل معين ثم نضرب هذا الإحتمال بعدد التباديل المختصة . افترض ، مثلاً ، أننا نود إيجاد إحتمال الحصول على « آس » واحد بالضبط وعلى الأقل أربعة « ملوك » kings في أربعة سحبات بافتراض قانون « السحب بإعادة». نحن ندرك أن هذا يتم إما بالحصول على « آس » واحد وثلاثة «ملوك» kings أو « آس » واحد وملكين 2 kings وورقة أخرى ليست «آس» ace أو ملك king. وبتمثيل هذه الإمكانيات رمزيًا ، مثل ، أ ك ك ك ، وَ أ ك ك ث

(« ث » ترمز إلى « ورقة غير معلومة ») يجدر بنا التنبه إلى أن

هناك $\frac{!٤}{!٣}$ = أربع طرق لترتيب « الآس » والثلاثة « ملوك » kings ،

فيما نجد أن هناك $\frac{!٤}{!٢}$ = اثنتي عشرة طريقة لترتيب التوافيق Combination أ ك ك ث . ويجب أن نحتفظ بهاتين الحالتين مميزتين هكذا ، نسبة لأن عدد التباديل في كل حالة يختلف عنه في الأخرى . وإذا أخذنا العينة مستخدمين قانون « السحب بارجاع (بإعادة) » فإن إحتمال الحصول على « آس » ace في سحبه واحدة يكون $\frac{١}{١٣}$ كما يكون كذلك إحتمال الحصول على « ملك » king ، بينما يكون إحتمال الحصول على «ث» هو $\frac{١١}{١٣}$. ولذلك فإن إحتمال الحصول على « آس » ace واحد بالضبط و « ملكين » 2 kings أو أكثر ، يساوى

$$٤ \times \left(\frac{١}{١٣}\right)^{٤} + ١٢ \times \left(\frac{١}{١٣}\right)\left(\frac{١١}{١٣}\right)^{٣} = \frac{١٣٦}{٢٨٥٦١} = ٠٠٠٤٨ر٠$$

إفترض الآن أننا نود إيجاد إحتمال الحصول على « آس » ace واحد بالضبط وعلى الأقل ورقتين من نوع الكوُبة (2 hearts) في أربع سحبات باستخدام « السحب باعادة » . هكذا نرى أن تعقيداً إضافياً قد دخل الصورة طالما أن « الآس » ace يمكن أن يكون أحد أوراق الكوُبة hearts . يكون من الأيسر الآن أن نُمَّيز بين أربعة أنواع من الأوراق : « آ س » الكوُبة ace of hearts (أ ق) باحتمال اختيار $\frac{١}{٥٢}$ ؛ آسات لا تنتمى لأوراق

الكويه hearts (أ ق̅) باحتمال اختيار $\frac{٣}{٥٢}$ ؛ أوراق الكوبة من غير «آس» الكوبة (أ̅ ق) احتمال اختيار $\frac{١٢}{٥٢}$ وأخيراً الحصول على ورقة ليست آساً وليست من الكُوبة non ace non hearts (أ̅ق̅) باحتمال إختيار $\frac{٣٦}{٥٢}$.

وبطبيعة الحال فإن مجموع هذه الإحتمالات يساوى واحداً صحيحاً unity طالما أنها متمانعة وشاملة .

سنَعْرِضْ فى الخطوة التالية ، التوافيق Combinations التى تنتج بالضبط «آس » واحد واثنين أو أكثر من الكُوبة hearts ، وسنحسب بعد ذلك عدد التباديل لكلٍّ ، فيكون لدينا ما يلى : -

أ - بالضبط ورقتان من الكُوبة (2 hearts)

أ ق ، أ̅ ق ، أ̅ق̅ ، أ̅ق̅

$$= \left(\frac{٤\,!}{٢\,!}\right)\left(\frac{١}{٥٢} \times \frac{١٢}{٥٢} \times \frac{٣٦}{٥٢} \times \frac{٣٦}{٥٢}\right) = \text{ر٠٢٥٥٢}$$

أ ق̅ ، أ̅ ق ، أ̅ق ، أ̅ق̅

$$= \left(\frac{٤\,!}{٢\,!}\right)\left(\frac{٣}{٥٢} \times \frac{١٢}{٥٢} \times \frac{١٢}{٥٢} \times \frac{٣٦}{٥٢}\right) = \text{ر٠٢٥٥٢}$$

ب - بالضبط ثلاث أوراق من الكُوبة (hearts)

أ ق ، أ̅ ق ، أ̅ق ، أ̅ق̅

$$= \left(\frac{٤!}{٢!}\right)\left(\frac{١}{٥٢} \times \frac{١٢}{٥٢} \times \frac{١٢}{٥٢} \times \frac{٣٦}{٥٢}\right) = \text{ر٠٠٨٥١}$$

أ ق̄ ، أ̄ ق ، أ ق̄ ، أ ق̄

$$= \left(\frac{٤!}{٣!}\right)\left(\frac{٣}{٥٢} \times \frac{١٢}{٥٢} \times \frac{١٢}{٥٢} \times \frac{١٢}{٥٢}\right) = \text{ر٠٠٢٨٤}$$

ج – بالضبط أربع من أوراق الكُوبة (hearts)

أ ق ، أ̄ ق ، أ̄ ق ، أ̄ ق

$$= \left(\frac{٤!}{٣!}\right)\left(\frac{١}{٥٢} \times \frac{١٢}{٥٢} \times \frac{١٢}{٥٢} \times \frac{١٢}{٥٢}\right) = \text{ر٠٠٠٩٤}$$

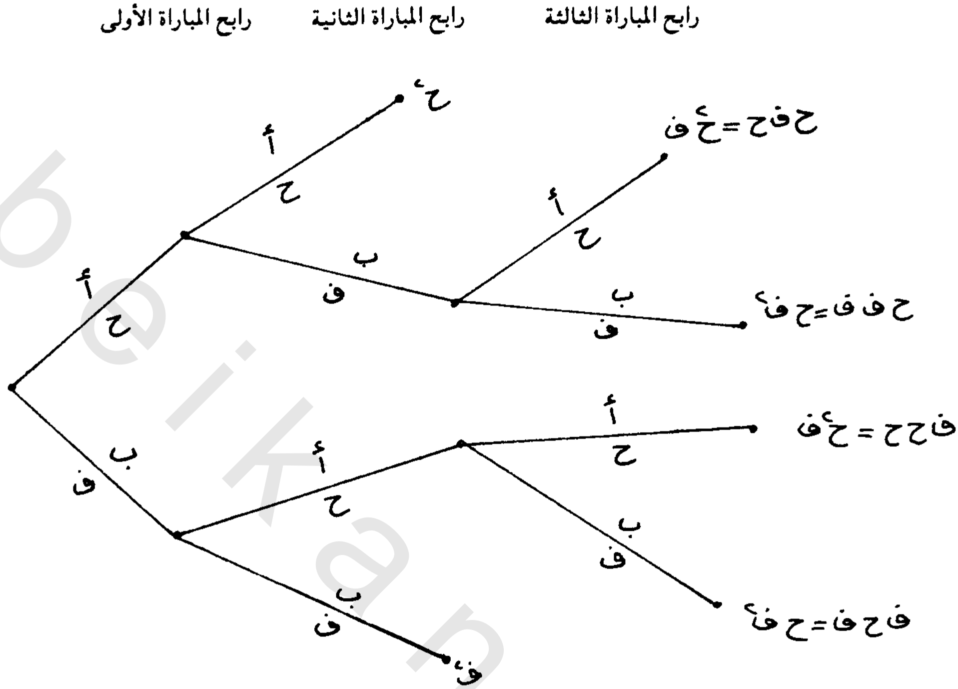
المجموع للاحتمالات أعلاه = ر٠٦٣٣٣

وبجمع هذه الإحتمالات ذات الأحداث المتمانعة mutually exclusive نحصل على مجموع إحتمال يساوى ر٠٦٣

ومثال أخير ، دعنا نستعرض حالة يكون فيها منالأفضلأن نرسم ما يطلق عليه « مخطط الشجرة » tree diagram ونمثل عليه جميع الإحتمالات على إختلافها . قد يتفق أحياناً أن ينتهى تسلسل معين من الأحداث فى نقاط مختلفة إعتماداً على نتائج الأحداث (أو الوقائع) السابقة . وأكثر التأكيدات المتعارف عليها فى هذا الشأن فى أحداث الرياضة البدنية

(athletic events) التى يعلن فوز فريق ما فيها عندما يكسب مباراتين من مجموع ثلاث مباريات ، أو ربما أربعة مباريات من مجموع سبع مباريات . وذلك عندما لا يكون هناك أى معنى لمتابعة الدخول فى مزيد من المباريات بمجرد أن كسب الفريق عدداً محدداً منها .

إفترض أن هناك فريقين «أ» و « ب » يلعبان فى سلسة من المباريات تعتمد قاعدة « اثنان من ثلاث » صفة للنصر . هب كذلك أن الفريق « أ » هو الأحسن وأنه بناءً على تقييم أدائه السابق أُعْطِي إحتمال ٦و للفوز بأية مباراة من المباريات . وبالطبع إن كان المثال أكثر واقعية فإنه يرتضى حقيقة أن احتمالات الفوز بأية مباراة قد تتغير تبعًا لنتائج المباريات السابقة، وهذا يمكن أن يُتناول باستخدام الطريقة التى سوف تُقترح . ولكن، لأجل تبسيط الأمور ، دعنا نعتبر أن احتمال فوز الفريق « أ » في أية مباراة ، ونرمز له بالحرف « ح » (نجاح) = ٦و. وبذلك؛ يكون « ف » (إخفاق) = ٤و تمثل هي الأخرى فرص الفريق « ب » للفوز بأية مباراة . كما أن المحاولات المتتالية تعتبر بذلك مستقلة عن بعضها البعض (independent) . ما هو احتمال فوز الفريق « أ » بسلسلة المباريات ؟ وما هى الإحتمالات الفردية لكل تسلسل ممكن من النجاحات « ح » ومرات الاخفاق (أو الخسارة) « ف » ؟ يمكننا أن نخطط المنظومات المكنة كما هو مبين فى الشكل التالى : الفرع الأعلى من مخطط الشجرة يمثل الإمكانات المكنة بافتراض أن (أ) قد كسب المباراة الأولى ، فى حين أن الفرع الأدنى يمثل احتمالات الكسب الأولى للفريق «ب» . فاذا كسب الفريق (أ) الفوز بالمباراة الثانية بعد فوزه فى المباراة الأولى فإن المنظومة تنتهي ، وان الفريق «أ» سوف يكسب باحتمال «ح٢» . وعلى أية حال فانه إذا كسب الفريق (أ) المباراة الأولى وكسب الفريق «ب» المباراة الثانية فإنه يجب لعب مباراة ثالثة.



فإذا كسب الفريق «أ» المباراة الثالثة فإن المنظومة تنتهي ويكسب (أ) باحتمال ح^{٢} × ف . ولكن إذا كسب الفريق «ب» المباراة الثالثة فانه سيكسب المنظومة باحتمال ح × ف^{٢} . وهذا النوع من المنظومات ينتج عنه مخطط شجرة متماثل تماما ، مع أنَّ من الواضح أن الشخص قد يعثر على مسابقات تتضمن إعاقات تؤدى إلى مخطط شجرة غير متماثل . ومثال ذلك إن الفريق (أ) ربما يكسب أربع مباريات فى حين أن الفريق «ب» يكسب ثلاث مباريات فقط . فى هذه الحاله فإن احتمالات الامكانات المختلفة يمكن أن تحتسب على النحو التالى :

السلاسل (المنظومات) التى يكسب فيها الفريق «ب» (ف=٤ر)	السلاسل (المنظومات) التى يكسب فيها الفريق «أ» (ح=٦ر)
ف٢ = ١٦٠ر	ح ٢ = ٣٦٠ر
ح ف ف = ٠٩٦ر	ح ف ح = ١٤٤ر
ف ح ف = ٠٩٦ر	ف ح ح = ١٤٤ ر
٣٥٢ر	إحتمالات الفوز بالسلاسل = ٦٤٨ر

كما نرى فى الجدول أعلاه فإن مجموع الإحتمالات يساوى واحداً صحيحاً وهي حقيقة يمكن أيضاً إثباتها جبريا كما يلي : -

ح٢ + ٢ح٢ف + ٢ح ف٢ + ف٢ = ح٢ + ٢ ح ف (ح + ف) + ف٢

= ح ٢ + ٢ ح ف + ف ٢ = (ح + ف) ٢ = ١

٩ - ٤ القيم المتوقعة والعُزوم

Expected Values and Moments

هناك فكرة - ربما يرجع أصلها إلى نادى ليلى للعب - تحمل بين طياتها تطبيقات إحصائية مهمة . والفكرة مفادها أنه إذا أعيدت تجربة ما عدداً كبيراً من المرات حيث يُؤْتَى برهانات مختلفة على النتائج ، فإنه يجب إمكانية حساب « الأرباح » (أو الخسائر) المتوقعة تحت افتراضات مختلفة تختص بطبيعة المباراة أو اللعبة التى تُلعب . ولأخذ مثال بسيط جداً ، افترض أنك ترمى بقطعة نقود معدنية وتراهن في كل مرة علي الواجهة الأمامية - أي «الصورة» . وأنه في كل مرة تحصل فيها على واجهة أمامية «صورة»

تكسب دولارًا واحداً . ولكن فى كل مرة تحصل فيها على واجهة خلفية (كتابة) (tail) تخسر دولارين . فبافتراض أن قطعة النقود المعدنية سليمة honest يكون من الواضح أنك لا تريد أن تظل تلعب طويلاً . ولكن كيف يمكنك حساب أرباحــــك (أو خسائرك) المتوقعة فى أمثلة أكثر تعقيداً ؟

هذا المثــال البسيط يفترض فى الحس السليم أن يقوم بضرب إحتمال كل نتيجة (لو أن هذه النتيجة تحققت بالفعل) بالمكسب أو الخسارة ثم يتم الجمع بعد ذلك ، وبهذا فإننا سوف نحصل - لنجاحنا المتوقع - على القيمة

$$(١) \times \left(\frac{١}{٢}\right) + (-٢) \times \left(\frac{١}{٢}\right) = -٥ر٠.$$

وهذا يعنى أنه في المتوسط ، يتوقع الفرد خسارة ٥٠ سنتاً ($\frac{١}{٢}$ دولار)

فى التجربة الواحدة . وبالطبع فإن المكاسب أو الخسائر الحقيقية للفرد قد تختلف عن هذه القيمة المتوقعة ، بيد أننا لو اعتمدنا على نظرية الإحتمالات ولعبنا اللعبة عدداً كبيراً جداً من المرات فإن مجموع خسائرنا المتوقعة يجب أن يكون (٥ر) × ن ، حيث تشير « ن » إلى عدد التجارب .

ومثال ثانٍ ، افترض أننا نود أن نرمى بزهرة نرد (die) واحدة ونتحصل علي دولار واحد إذا كان الوجه المشاهد بعد الرمية زوجياً even ، ونخسر دولارين إذا كان فردياً ١ أو ٣ ، ولكن نكسب ثلاثة دولارات لو ظهر على الوجه العدد ٥ . وبافتراض أن لأىٍ وجه من وجوه الزهرة فرصة متساوية للظهور ، فإن مكاسبنا المتوقعة ستكون كما يلي : -

$$(-٢) \times \left(\frac{١}{٦}\right) + (١)\left(\frac{١}{٦}\right) + (-٢) \times \left(\frac{١}{٦}\right) + (١)\left(\frac{١}{٦}\right) + (٣)\left(\frac{١}{٦}\right)$$
$$+ (١) \times \left(\frac{١}{٦}\right) = \frac{١}{٣}$$

= ٣٣٣ر٠ دولاراً فى اللعبة الواحدة .

وعموما فإنه إذا كان هناك عدد « ك » من النتائج الممكنة = س$_{١}$ ، س$_{٢}$، ..... س$_{ن}$، وأن إحتمال (س$_{و}$) يرمز له ب : إحتمال (س$_{و}$) ، فإننا يمكن أن نُعرِّف القيمة المتوقعة للمتغير « س » ويستدل عليها بالرمز : متوقع (س) بأنها (١) : -

متوقع (س) = مجـ$_{و = ١}^{و = ك}$ (س$_{و}$) × إحتمال (س$_{و}$)

في الأمثلة التي صغناها حتى الآن تكون قيم « س$_{و}$ » الفردية في شكل مدفوعات payoffs (بالدولار) لكل مجموعة من مجموعات النتائج لكن فكرة القيمة المتوقعة يمكن إدراكها بصورة أكثر عمومية .

(١) لفائدة الطلاب الذين اعتادوا على عمليات التفاضل والتكامل الأساسية يمكن الإشارة إلى أن تعريف القيم المتوقعة يمكن أن يتوسع ليشمل التوزيع الإحتمالى المستمر Continuous probability distribution الذي تم إيضاحه بواسطة المنحنى الإحتمالى الطبيعي . فإذا كانت دالة (س) تمثل ارتفاع المنحنى عند أى نقطة (س) ، فإن تفاضل دالة س (دس) [f (x) dx] تمثل إحتمال الإنحصار بين الفترة س و س + د س ولذلك يمكننا أن نعرف متوقع (س) كما لو أنه يساوى : -

$$\text{توقع س} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \text{س د (س) د س .}$$

$$E(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

افترض ، مثلاً ، أن لدينا عدد « ن » من الأفراد لهم درجات (أو قيم) علي المتغير « س » . فلو أننا اخترنا منهم مجموعة من السكان إختياراً عشوائياً سيكون لكل فردٍ فيها إحتمال $\frac{١}{ن}$ لكي يتم اختياره ضمن المجموعة المختارة . ما هى القيمة المتوقعة E (x) للمتغير « س » ؟ في هذه الحالة سيكون لدينا : -

$$\text{توقع (س)} = \text{س}_{١} \times \text{إحتمال (س}_{١}\text{)} + \text{س}_{٢} \times \text{إحتمال (س}_{٢}\text{)} + \cdots + \text{س}_{ن} \times \text{إحتمال (س}_{ن}\text{)}.$$

$$= (\text{س}_{١} + \text{س}_{٢} + \cdots + \text{س}_{ن}) \times \frac{١}{ن} = \bar{\text{س}} \quad *$$

ونكون بهذا قد حصلنا على النتيجة المهمة القائلة بأن القيمة المتوقعة ل : «س» E (x) هى متوسط « س » - أى المتوسط الحسابى لها - بافتراض أن العينة مأخوذة عشوائياً .

بدءاً من الفصل القادم سوف نستخدم - وبصورة مكثفة - التوزيعات الإحتمالية Probability distributions والتى يطلق عليها توزيعات المعاينة Sampling distribution .

وبتعبير أدق ، فإن هذه التوزيعات لا نهائية infinite طالما أنها تشير إلى إحتمالات ، يمكن تفسيرها فقط فى إطار المحدودية . ورغم هذا قد نشير إلى التوزيعات الإحتمالية هذه بأن لها قيماً متوقعة من الممكن فهمها بالطريقة التى سيرد ذكرها . لنتخيل عينات عشوائية سحبت بانتظام من مجتمع ما ، إذا كان هذا المجتمع له متوسط حسابى يرمز له بالحرف الإغريقي μ (ميو) فإن متوقع (س) باعتبار (س) متغيراً من متغيرات المجتمع - يساوى μ ، أى متوقع (س) = $\bar{\text{س}}$ μ $E(x) = \mu$.

---

* « $\bar{\text{س}}$ » يعنى المتوسط الحسابى للمتغير « س » .

وسنحتاج أيضًا لمعرفة القيم المتوقعة لمعالم أُخرى مثل متوسط العينة « سَ » وهو بالمثل له قيمة متوقعة - أى متوقع (سَ) - تساوى « سَ » « μ » فى حالة العينة العشوائية . وهناك تعبير آخر له أهمية فى الإحصاء وهو : متوقع [س - متوقع (س)]٢ E [x -E (x)] 2 . وفى حالة العينات العشوائية التى يكون فيها متوقع (سَ) = سَ ، فإن هذا التعبير يساوى :

$$\underset{و=١}{\overset{و=ن}{\text{مجـ}}} (س_و - سَ)^٢ \times \text{إحتمال}(س_و) = \frac{١}{ن} \times \underset{و=١}{\overset{و=ن}{\text{مجـ}}} (س_و - سَ)^٢ ،$$

وبتعبير آخر ، يساوى تباين « س » . ورغم أننا سوف لن نستخدم رمز القيمة المتوقعة على نحو أساسى إلا أنه توجد إشارات إليه فى بعض الكتب المنهجية الأكثر تقدمًا ، لأنه يُستخدم كثيراً هنا في براهين الإحصاء الرياضى mathematical statistics .

وهناك مفهوم آخر لا نستغله هنا لكنه مفيد في التوصل إلى بعض الإشتقاقات derivations ، ألا وهو مفهوم العُزوم moments . فالقيمة المتوقعة للمتغير (س ك) يشار إليها ب : «العزم رقم «ك» حول نقطة الأصل Kth moment about the origin ولذلك فإن العزوم الأول حول الأصل هو بكل بساطة الوسط الحسابي سَ μ . ولعل من المفيد الإشارة إلى العزوم ذوات الرتب الأعلى حول الوسط الحسابي. فإذا علمنا أن القيمة المتوقعة في التعبير (س - سَ) ك - أي متوقع (س - سَ)ك - يشار إليها بأنها عزوم ك حول الوسط الحسابي، فإن التباين The Variance يكون بذلك هو العزوم الثاني حول الوسط

الحسابى ، والعزوم الثالث (س٣) μ_3 ينتج مقياساً للإلتواء Skewness ، والعزوم الرابع (س ٤) μ_4 ينتج مقياساً للتفلطح Kurtosis . والمقياس :

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

والذى يكون صفراً عندما يكون التوزيع متماثلاً -symmetrical هو المقياس التقليدي للإلتواء Skewness والذى يمكن استخدامه بديلاً للمقياس المشار إليه فى الفصل السادس .

٩ - ٥ الاستقلالية والمعاينة العشوائية:

Independence & Random Sampling

إن كل الاختبارات الإحصائية التى ستناقش فى هذا الكتاب تستفيد من فرضية أن هناك استقلالية بين الأحداث . ولذلك فإن الاحتمالات الشرطية Conditional Probabilities يجب ألا تستخدم فى حالة ضرب الإحتمالات(١) . وبمعنى آخر ، فإنه يفترض أن تكون هناك استقلالية (أى أن اختيار فرد من أفراد العينة لا يؤثر مطلقًا على اختيار فرد آخر يضاف إليها) عند اختيار العينة . ولأن هناك كثيراً من الحالات التى يتم فيها خرق هذه الفرضية ، يتحتم على الفرد أن يتساءل دائمًا عما إذا كان افتراض الإستقلالية قد تحقق أم لا فى أية مسألة مَعْنِيَّة بهذا الإفتراض .

---

(١) سوف يتضح هذا فى حالة توزيع « ذو الحدين » الذى سوف تتم مناقشته فى الفصل اللاحق . أما فى حالة الاختبارات الأخرى فيتعين عليك ببساطة أن تسلم بحقيقة هذا القول ، على أية حال .

ولعله يكون مفيداً أن نشير إلى بعض أمثلة فى بعض الحالات التى يتم فيها إغفال هذه الفرضية - أى فرضية الاستقلالية الإحصائية . يتحصل الإحصائيون عادة على ما يطلق عليه العينة العشوائية Simple random Sample (أو العينة العشوائية البسيطة) لكى يتسنى لهم تحقيق افتراض الاستقلالية الإحصائية إضافة إلى تحقيق إمكانية إعطاء أى فرد فى المجتمع فرصة متساوية للظهور فى العينة . وباستخدام جدول للأرقام العشوائية أو وسيلة أخرى مماثلة يمكن للفرد الحصول على عينة بذات الطريقة - بالضرورة - التى يسحب بواسطتها أوراقًا من حزمة ورق اللعب مخلوطة بصورة جيدة ، أو أرقامًا فى « لعبة البِنْقو » bingo game . والعينة المختارة عشوائيًا ، ليست لها ميزة إعطاء كل فرد فى المجتمع المبحوث ، فرصة متساوية في الإختيار فحسب ، وإنما أيضًا إعطاء فرصة متساوية فى الإختيار لكل مجموعة من الأفراد (١) .

وخلاصة القول ، مما سبق ذكره ؛ هو أنه ما دمنا ، عمليًا ، نختار دائماً «بدون إرجاع » ؛ فإن افتراض الإستقلالية لا يتحقق كما ينبغي . ولكن كلما كان مجتمع البحث كبيراً مقارنة مع العينة المأخوذة منه ، فإنه يجوز - وبقدر كبير من الإطمئنان - إهمال هذا القدر (من النَّيْل من الاستقلالية) الذى لا يُعْتَدُّ به . ويتمثل هذا الخرق الطفيف لشرط الاستقلالية فى حقيقة أنه لا أحد يعطى فرصة الاختيار لمرة ثانية . فمثلاً إذا اختير خمسمائة شخص من مجموع مائة ألف شخص فإن الفرصة تكون ضئيلة للغاية لاختيار أىٍّ من هؤلاء الخمسمائة للمرة الثانية فى حالة إرجاع (أوإعادة)

---

(١) فى الفصل الحادى والعشرون (بالجزء الثانى من الكتاب) سوف يتم التمييز بين أنواع أخرى من ا لعينات مثل : العينات المنتظمة ، والطبقية والعنقودية .

اسمه ثانيةً إلى قائمة المائه ألف شخص . وبالمثل فإنه قد ينشأ فرق - وإن كان يعد من الناحية العملية قليلا نسبيا - عندما تُرْجع بعد السحب ، فقط ثلاث أوراق للعب من حزمة ورق اللعب . ولكن إذا كنا سنسحب خمسا وثلاثين ورقة فإن ذلك يشكل فرقًا معتبراً . وإذا كانت العينة كبيرة مقارنة بمجتمعها المسحوبة منه ، فإنه يمكن تطبيق معامل تصحيح Correction Factor ما ليعوض عن « عدم الإرجاع » (١) Lack of replacement .

ورغم أن المشاكل التى نجابهها نتيجة إخفاقنا فى الإرجاع Failure to replace ليست خطيرة ، إلا أن الاخفاق فى إعطاء كل مجموعة Combination من الأفراد فرصة متساوية للظهور فى العينة ، يمكن أن ينتج عنه خرق خطير لفرضية الاستقلالية . هب أن شخصاً أراد أن يصنف أوراق لعب إلى أوراق لعب إلى أربع مجموعات ، إحداهما تتكون من ال « سباتى » clubs ، وأخرى يتكون من « البستونى » Spades ، .... إلخ ، وأنه أراد أن يختار إحدى هذه المجموعات إختياراً عشوائياً . من الواضح أن أىٍّ ورقة من ورق اللعب تكون لها فرصة اختيار متساوية : (١ : ٤) ولكن وبالتأكيد ليست كل التوافيق Combinations بالمكنة ناهيك عن إمكانية تساوى إحتمال اختيارها . فبمعرفة أن أول ورقة هى البستونى Spade نعرف توّاً أن كل الأوراق المتبقية فى العينة هى من « البستونى » Spades .

لنفس السبب المذكور سالفاً ، نجد أن العينتين المساحية والعنقودية المستعملتين بكثرة فى المسوحات الإجتماعية لا تفيان بفرضية الإستقلالية. فمثلاً إذا اختير مائة مربع Block من مدينة ما ، إختياراً عشوائيًا ثم أُخِذَت

---

(١) أنظر الجزء (٢١ -١) [فى الجزء الثانى من الكتاب] .

الأسرة الثالثة فى كل واحدٍ من هذه المربعات وضُمَّت إلى العينة فإنه من الواضح أن ليس كل التوافيق Combinations أوالمجموعات الأسرية لها فرص متساوية للظهور فى العينة . وعلى سبيل المثال ، فإن أسرتين فى ذات المربَّع يكون لهما فرصة أكبر للظهور فى ذات العينة ، من أسرتين أخريين فى مربَّعين مختلفين . وبما أن مربعات المدن تكون أكثر تجانساً نسبياً ، فيما يتعلق ببعض المميزات مثل الدخل ، ومستوى تعليم رب الأسرة؛ فإن نتيجة هذا النوع من العينات ، تكون أقل دقة من نتيجة عينة عشوائية بذات الحجم . ويكون هذا أكثر ظهوراً للعيان إذا تخيلنا حالة تكون فيها جميع المربعات متجانسة تمامًا (كما هو الحال فى مثال المجموعات الأربع لأوراق اللعب) . وفى هذه الحالة سنحتاج لمعرفة المعلومات عن أسرة واحدة فقط من كل مربع وبذلك يكون عدد الحالات المدروسة (حجم العينة) هو - بالضرورة - عدد المربعات المختارة ، مما يعنى حجمًا أصْغَرَ بكثير ل « ن » . وكما سوف نرى فى الفصل الحادى والعشرين بالجزء الثانى لهذا الكتاب ، فإنه يكون من الممكن أن نتحصل على بعض النتائج المفرطة فى التضليل ، لو أنه بناءً على عينة طبقية مثل هذه ، يستخدم الباحث إختبارات إحصائية ، تفترض عينة عشوائية . ويجدر بالذكر أن مشكلة مماثلة يمكن أن تُجابه ، كلما كان الإهتمام بالأفعال السلوكية للأفراد . افترض ، مثلا ، أن أخصائيا فى علم الإجتماع النفسي يجرى تجربة يستخدم فيها ثلاثين حالة ، وكل حالة من هذه الحالات تصدر خمسين حكماً منفصلاً . يكون العدد الكلى للأحكام ، بذلك ، الف وخمسمائة حكم وربما يغرى هذا العدد الباحث لإستخدامه فى اختبار إحصائى مفترضاً أنه - أى هذا العدد من الأحكام - يشكل عينة عشوائية من الأحكام لمجتمع ما . لكن من الواضح أنه يكون من غير المعقول فى

أغلب الأحوال ، الافتراض بأن أحكام الشخص الواحد تكون مستقلة إحصائياً عن بعضها البعض ٠ فمن المحتمل جداً أن تؤثر الأحكام الثلاثين الأولى لهذا الشخص على أحكامه المتبقية طالما أن لهذا الشخص ذاكرة – الشئ الذى لا يتوفر لقطع النقود المعدنية (١) ٠

أفترض أن عالم اجتماع مهتم (فى الأساس) بأزواج (Pairs) الأشخاص بدلاً من اهتمامه بالفرد كوحدة ٠ فيمكن مثلاً أن يكون لديه مجموعة تتكون من عشرين شخصاً ، كلٌ منهم فى تفاعل مع جميع الآخرين. وبذلك يكون عنده (٢٠ × ١٩) / ٢ أو ١٩٠ زوجًا من الأشخاص ، ولكن لا يمكن له أن يكون فى وضع يمكن معه أن يعتبر كل زوج من الأزواج مستقلاً عن الآخرين ٠ فمن الواضح ، مثلاً أن (سميث وبراون) Smith - Brown يحتمل أن تعطى بعض المعلومات عن زوجىْ (Smith - Jones) أو (Brown - Jones) طالما أن الأشخاص أنفسهم يظهرون فى عدة أزواج (Pairs) ٠ أيضاً ، علماء البيئة ، وعلماء الأجناس وعلماء الاجتماع الآخرين المهتمين بالتعميمات على المجموعات السكانية ، مجتمعات أو وحدات مجتمعية تعريفية أخرى ؛ يحتاجون بدورهم للإهتمام بعدم الإستقلالية الإحصائية فى

---

(١)إن مسألة التعامل مع ملاحظات أو قياسات متكررة على نفس الأفراد هذه يجب ألا تخلط مع مسألة كون اختيار هؤلاء الأفراد قد تم عشوائيًا أم لا فى الأساس ٠ أن مثل هذه القياسات المتكررة عادة ما تستخدم فى التصميمات التجريبية وبغرض تقييم أخطاء القياس ٠ وينصح القارىء بالرجوع إلى المراجع الخاصة بالتصميمات التجريبية التى يتضمنها الفصل السادس عشر (بالجزء الثانى من الكتاب) وكذلك ينصح الرجوع إلى أخطاء القياس التى يتضمنها الفصل الثامن عشر (بالجزء الثانى من الكتاب) ٠

كثير من أعمالهم . ويبدو هنا أن المشكلة تنبع من حقيقة أن الوحدات المختارة لا تكون - دائماً - متميزة distinct بما فيه الكفاية . فحدود المجتمع أو المجموعة السكانية يمكن أن تكون صعبة التعريف مع أن وحدة واحدة كهذه يمكن أن تستظل بأخرى ، فى عدم حتمية إمكانية تعيين النقاط الفاصلة بينهما (١) (أى بين وحدة تتبع لمجتمع Society ما وأخرى تتبع لمجموعة سكانية ما Community) . فمثلاً إذا استخدمت الدوائر التعدادية (Census tracts) فى مدينة ما كوحدات ، فإنه يظل ممكنًا التنبؤ بالذى يحدث فى وحدة ما ، من جراء معرفة الحادث فى وحدة ملاصقة . فمثلاً إذا كان معدل الإنحراف delinquency rate مرتفعًا فى دائرة ما ، فإنه يمكن أن يكون مرتفعًا أيضًا فى الدائرة المجاورة حيث أنه من الممكن أن تكون بعض عصابات الإنحراف نفسها قد سحبت من كلتا الدائرتين . حقيقة ، يمكن الإحساس بأن « شيئاً ما خطأ » يدور فيما يتعلق بافتراض الإستقلالية . وذلك بملاحظة أنه حينما كانت الوحدات ليست متمايزة بوضوح ، يكون من الممكن أن يتضخم عددها لأىٍّ حجم مرغوب ، وذلك ببساطة ، عن طريق «تقسيم الكعكة إلى عدة قطع صغيرة » .

لذلك فإنه إذا لم تكن هناك مجتمعات فى هذا العالم بما يكفى للحصول على دلالة إحصائية ، يمكن للفرد أن يقسم أى مجتمع إلى عشر مناطق

---

(١) تكون هذه الحالة مشابهة - إلى حد ما - للحالة التى تكون فيهامجموعة أوراق اللعب حيث أن كل ورقة تستظل تدريجيًا بالأوراق الأخرى بحيث يصعب تحديد نهاية إحدى الأوراق وبداية الأخرى . كما أن أى ورقة تكون قادرة على التأثير على القيمة القبلية Face value لجاراتها الأقرب .

صغيرة وبذلك نتحصل على ما مجموعه عشرة أمثال «الحالات (Cases) . وثمة مسألة مماثلة تحدث فى حالة ما يسمى ببيانات السلاسل الزمنية (time - series data) عندما تكون « الحالات » هى أيضًا « الملاحظات » للوحدة نفسها ولمختلف الفترات الزمنية .

ليس من الممكن – فى كتاب كهذا – مناقشة حلول لمسائل ، تحتوى على تجاوزات لقانون الاستقلالية الإحصائية . وحسب معرفة الكاتب ، فإن كثيراً من هذه المسائل لم توضع لها حلول بما يكفى . ورغم صعوبة تقييم خطورة الأخطاء التى تحدث عندما لا تتحقق بعض الشروط كشرط الإستقلالية ، نكون دائماً على أرضية سليمة كلما تأكد لنا أن الفرضيات المطلوبة فى أىٍّ اختبار قد تحققت . أما إذا لم تتحقق فإنه من النادر إمكانية تحديد مدى مفارقتنا لهذه الإفتراضات . وليكون موقفك سليماً يجب أن تنمى عادة اختبار أىٍّ افتراض . ولو كان لديك سبب لمراجعة صحة افتراض معين، يجب عليك أن تأخذ فى الإعتبار وبكل جدية ، إمكانية الاستفادة من طريقة أخرى لا تتعرض لافتراض كهذا . فمثلاً يمكنك أن تقرر الاستفادة من وحدة تحليل مختلفة – الشخص ذاته بدلاً من مشاهداته السلوكية ، أو أزواج الأشخاص ، أو الأفراد المنحرفين ذاتهم بدلاً عن معدلات الانحراف فى دائرة تعدادية .

بالرغم من أن علماء الإجتماع والآخرين الذين يستخدمون الإحصاء التطبيقى يميلون أحيانًا إلى تجاهل الافتراضات ، وبذلك يتوصلون إلى استنتاجات ليست مؤسسة علمياً ، يمكن لهذه الإستنتاجات أيضًا أن تكون، بالمقابل ، مغالية فى المثالية ، وطالما أننا لا نتعامل مع حالات بسيطة مثل رمى قطعة معدنية ، أوسحب أوراق اللعب من حزمة ورق اللعب ، فإنه يمكن

دائمًا التساؤل فيما لو كانت أىٍّ طريقة ما لا تتفق مع الطريقة المثلى . وأنه ليمكن أن تصل بالشخص درجةُ التخوف من إمكانية خرق الافتراضات إلى حد رفضه استخدام أى وسيلة إحصائية . وخصوصًا فى ميدان يتصف بدراسات استكشافية ووسائل علمية غير دقيقة نسبيًا ، فإنه يكون بالضرورة اتخاذ حلول وسط Compromises تتواءم مع الواقع . ويبدو أن أكثر الطرق عقلانية هى تلك التى تقتصر على أقل حلول وسطى ممكنة فى حدود النهج العلمى .

التمارين

١ - إذا رُمى بزهرة نرد سليمة مرة واحدة : - ما هو إحتمال

أ - الحصول على ٦ ؟

ب - عدم الحصول على ٦ ؟

ج - الحصول على ١ أو ٦ (الإجابة $\frac{١}{٣}$)

د - الحصول على ١ وَ ٦ ؟

هـ - إما الحصول على رقم أَحادى Odd number أو الحصول على ٦ ؟

٢ - ما هو احتمال الحصول على أىٍّ من الآتى ذكره فى ثلاث سحبات من رزمة ورق اللعب [الأوراق مخلوطة خلطًا جيدًا] :

أ - ثلاث « جاكس » Jacks [بإعادة] ؟

(الإجابة $\frac{١}{٢١٩٧}$)

ب – ثلاث « جاكس » Jacks [بدون إعادة] ؟

(الإجابة ($\frac{١}{٥٥٢٥}$)

جـ – واحد « بستونى » Spade ، كُوبة heart ، « ديناری » diamond (بأی ترتيب) ، [بأرجاع] ؟ .

د – آسين تماماً exactly two aces ، [بإرجاع] ؟ .

هـ – على الأقل آ س واحد one ace ، [بارجاع] ؟

(دليل للإجابة = ما هو البديل لعبارة : على الأقل آس one ace] ؟

(الإجابة $\frac{٤٦٩}{٢١٩٧}$)

و – على الأقل آس واحد one ace وعلى الأقل ملك واحد one king ، [بإعادة] ؟ (دليل : فى «و» أعلاه وفى تمارين معينة من التى ستتبع ، يكون من الأوفق أن تقسم المسألة إلى ثلاث مراحل :

(١) – عين مختلف توافيق أوراق اللعب التى ستنتج على الأقل آس واحد one ace ، وعلى الأقل ملك واحد one king ، مثلاً : آس واحد one ace ، ملك واحد one king ، وورقة أخرى ؛ آسين Two aces ، ملك واحد one king .... الخ .

(٢) حدد احتمال الحصول على هذه الأوراق بأى ترتيب كان .

(٣) لكلٍّ من هذه التوافيق حدد عدد التراتيب الممكنة .

٣ – هب أن ألفاً من الطلاب الجدد سئلوا عن أذواقهم الموسيقية فوجد أن أربعمائة منهم يحبون الموسيقى الكلاسيكية ، وفقط مائة من هؤلاء

الأخيرين يحبون موسيقى « الروك » ، وأربعمائة شخص ، لا يحبون أيًّا من نوعى الموسيقى المشار إليهما . ويحبُ الباقون موسيقى « الروك » فقط .

أ - لو أن أحد الطلبة اختير عشوائيًا من بين هؤلاء الأشخاص ، وأن «أ» هو حدث كون (الطالب) يحب الموسيقى الكلاسيكية قَ « ب » واقعة (حدث) كونه يحب موسيقى الروك ، ما هو احتمال (أ) ؟ إحتمال (ب) ؟ إحتمال (أ / ب) ؟ احتمال (ب / أ) ؟.

ب - اثبت بالأرقام أن : -

احتمال (أ قَ ب) = احتمال (أ) × احتمال (ب / أ)

= احتمال (ب) × احتمال (أ / ب)

ج - ما هو احتمال الحصول على شخص يحب نوعًا واحدًا من نوعى الموسيقى المعنيين ولكن ليس كلا النوعين .

د - مع ملاحظة أن الشخص يمكن له أن يتذوق أحد أربعة أنواع من الأذواق (يحب كلا نوعى الموسيقى ، لا يحب أيًا منهما ، ... الخ) ما هو الإحتمال بأن ثلاثة أشخاص زملاء فى فصل دراسي (اختيروا عشوائيًا) يكون لديهم جميعًا منظومة الأذواق ذاتها ؟ (افترض الاختيار بإعادة) [الإجابة = ١٠ر]

هـ - ما هو احتمال الحصول على : اثنين (على الأقل) من محبى الموسيقى الروك من مجموعة ثمانية أشخاص ؟ (افترض اختيارًا عشوائيًا بإرجاع) .

٤ - من بيانات الجدول أدناه ، دع «أ» يرمز إلى حدث الحصول على «ذكر»

، «ب» يرمز إلى حدث الحصول على شخص متعلم تعليمًا جامعيًا وَ «ج» حدث الحصول على شخص بدرجة تحامل عالية .

المستوى التعليمي والنوع / درجة التحامل	تعليم جامعى		تعليم عام	
	ذكور	إناث	ذكور	إناث
عاليـــة	١٠٠	٥٠	٢٠٠	٢٥٠
منخفضة	١٥٠	١٠٠	١٥٠	٢٠٠
المجمـوع	٢٥٠	١٥٠	٣٥٠	٤٥٠

أ - أحسب احتمال («أ» وَ «ب» وَ «ج») فى سحبة واحدة

أ - أحسب احتمال («أ» وَ «ب» وَ «ج») فى سحبة واحدة بدون استخدام معادلة . أثبت أن المعادلة ل : احتمال («أ» وَ «ب» وَ «ج») صحيحة من واقع البيانات العددية لهذا التمرين .

ب - احسب احتمال («أ» أو «ب» أو «ج») فى سحبة واحدة بدون استخدام معادلة . (ستحتاج لتطوير المعادلة : احتمال («أ» أو «ب» أو «ج») .

ج - ما هو احتمال الحصول - بالتحديد - على (١) أحد الذكور المتعلمين تعليماً جامعيًا ، (٢) إحدى الإناث من ذوات التعليم الجامعى ، (٣) شخص واحد بدرجة تحامل عالية فى عينة عشوائية تتكون من ثلاثة

أشخاص (افترض السحب بإرجاع) .

٥ - البيانات فى الجدول أدناه تصنف طلبة مبتدئين في علم الإجتماع بجامعة متشجان حسب تطلعاتهم أو تطلعات أزواجهم / زوجاتهم (طبقًا لنوع المستجيب) المهنية .

التطلعات / النوع	تطلعات عالية	تطلعات متواضعة	المجموع
ذكر	٤٣	١٠	٥٣
أنثى	٧١	٩٣	١٦٤
المجموع	١١٤	١٠٣	٢١٧

افترض أن عليك أن تسحب - من مجموع المائتين والسبعة عشر طالباً وطالبة هؤلاء - بعض الأشخاص عشوائياً .

أ - ما هو إحتمال الحصول على فرد واحد من هذا المجتمع بتطلعات عالية؟ ما هو إحتمال الحصول على فردٍ واحدٍ بتطلعات عالية مع العلم أن هذا الشخص ذكر ؟ هذا الشخص أنثى ؟

ب - أفترض أن عليك أن تختار بعض الأشخاص من هذا المجتمع إختياراً عشوائيًا (بدون إرجاع) ؛ وفى كل مرة تُخَمِّن ما إذا كان الفرد بتطلعات عالية أو متواضعةٍ ، كم من المرات يمكنك التخمين بأن الفرد ذو

تطلعات عالية ؟ تطلعات متواضعة ؟ ولماذا ؟ وفى مائتين وسبع عشرة محاولة ، كم من الأخطاء تتوقع حدوثها (الاجابة ١٠٢) .

ج – افترض أن نوع الشخص معروف ذكر أو أنثى . فإذا عُلِم أن الشخص ذكر ، كم خطأ تتوقع ارتكابه بتصنيفك ثلاثة وخمسين ذكرًا كونهم إما مع مجموعة ذوى التطلعات العالية أو مع مجموعة ذوى التطلعات المتواضعة؟ كم من الأخطاء المتوقعة بذات المعنى بالنسبة للإناث ؟ (الإجابات : ١٠ ، ٧١) .

د – كيف يمكنك أن تنشئ مؤشرًا يبين التخفيض النسبى Proportional reduction للأخطاء لو أن نوع المستجيب بات معلوماً ، بالمقارنة مع الأخطاء المتوقعة فى حالة عدم معرفة نوع المستجيب ؟

(كما سوف نرى فى الفصل الخامس عشر (فى الجزء الثاني من الكتاب) فإن مثل هذا المؤشر يمكن استخدامه لقياس قوة أو درجة العلاقة بين نوع المستجيب وتطلعاته المهنية) .

٦ – استخدم « مخطط الشجرة » لتقييم جميع الإحتمالات لبطولة رياضية عالمية (لأحسن سبعة ألعاب) بافتراض أن احتمال أن يكسب فريق «الرابطة القومية» أيٍّ لعبة من الألعاب هو ٦ر٠ افترض أنه بعد ثلاث ألعاب كسب فريق «الرابطة الأمريكية» اثنين منها وكان النصر حليف فريق « الرابطة القومية » فى لعبة واحدة . مبتدئًا باللعبة الرابعة ، كيف تنشئ « مخطط شجرة » جديد لتقييم احتمال فوز فريق « الرابطة القومية » بالبطولة .

٧ – بمساعدة مخطط فِنْ (Venn diagram) ، طوِّر معادلة عامة ل : إحتمال («أ» أو «ب» أو «ج» أو «و») عندما تكون جميع هذه الأحداث ليست

متمانعة. كيف يمكن أن تعمم «قاعدة الجمع » هذه لتشمل عدد « ك » من الأحداث فى الحالة العامة ؟ (دليل : تمعن فى العلامات التى تسبق الحدود المختلفة) .

٨ – كم تبديلاً Permutation ممكنًا لإحدى وثلاثين مدينة مميزة بالولايات كما يلى : – ثمانى مدن من ولاية واشنطن ، تسعة مدن من ولاية أيركون، وأربع عشرة مدينة من كاليفورنيا ؟

٩ – هب أنك اخترت ولاية واحدة اختياراً عشوائيًا من بين خمسين ولاية، وأن البيانات الافتراضية المبينة بالجدول أدناه تربط نوع الولاية بالانتماء الحزبى لحاكم هذه الولايات : –

الحاكم (الانتماء الحزبي)	نوع الولاية		
	صناعية	زراعية	مختلطة
ديمقراطي	١٦	٤	١٥
جمهوري	٢	٨	٥
الجملة	١٨	١٢	٢٠

أ – فى عينة (بدون إعادة) تتكون من أربع ولايات ما إحتمال الحصول على ولاية صناعية واحدة (بالضبط) ، ولاية زراعية واحدة (بالضبط) ، وولايتين مختلطتين ؟ .

ب - فى عينة (باعادة) تتكون من ثلاث ولايات ما إحتمال الحصول على :
على الأقل ولاية واحدة حاكمها جمهورى ، وولايتين (بالضبط) مختلطتين؟ كيف يتم تعديل حساباتك لهذا الإحتمال فى حالة اختيارك للعينة مستخدماً طريقة (الإختيار بدون إعادة) ؟ .

ج - فى عينة (بدون إعادة) تتكون من اثنى عشرة ولاية ما إحتمال الحصول على ولايتين (بالضبط) من كل نوع من أنواع الولايات الست؟ ما هو هذا الإحتمال فى حالة (الاختيار بإرجاع) ؟