الفصل الثاني عشر

التقدير الأحادي Point And Interval Estimation
والتقدير التراوحي

حتي الآن فإن مناقشة الإستدلال الإحصائي Statistical inference اختص فقط باختبار الفرضيات . وقد يكون هناك أيضاً إهتمام بتقدير المعالم المجتمعية Population Parameters . وهذا هو الموضوع الذي سنتناوله في الفصل الثاني عشر . فبعد مناقشة المبادئ المعنيه بالتقدير estimation سوف نتقدم لمناقشة التداخلات بين التقدير واختبار الفرضية Test of Hypothesis وبعد هذا سوف نناقش التعديلات المطلوبة للتوزيع التائي t - Distribution والتناسبات Proportions . وأخيراً فإننا سنتناول المسألة العامة في تحديد حجم العينة مدعمة بمختلف طرق التقديرات .

ربما تكون قد لاحظت في الفصلين السابقين وفي عدد من المسائل العملية عدم جدوي إختبار الفرضية ، لأننا لانستطيع تحديد قيمة إفتراضية بعينها لمعلم إحصائي ما ، قل مثلاً المتوسط الحسابي « سَ» . سنعرف الان كيف أن طرق التقديرات تمثل بديلاً مفيداً جداً للاختبارات الفعلية في مثل هذه الحالات .وبالإضافة إلي هذا فإن إخصائي علم الاجتماع ربّما يكون مهتماً مباشرة بالتقديرات بدلاً من إختبار الفرضيات . وعلى سبيل المثال فإن الهدف العلمي للدراسة في المسوحات الميدانية Survey research ربّما يكون لتقدير نسب الأشخاص الذين يستعملون منتوجاً معيناً أو يدلون بأصواتهم في انتخابات . أو ربما يكون ضرورياً أن نقدر الدخل الوسيط median income في منطقة ما ، أو متوسط عدد الأطفال للأسرة الواحدة. إن إختبار فرضيات محدودة في هذه الحالات ربما يكون مفيداً ، إنما

التقدير يظل هو الإجراء الأكثر وضوحاً .

وهناك في الأساس نوعان من أنواع التقديرات : تقدير أحادي Point estimation وتقدير تراوحي Interval estimation . ففي التقدير الأحادي نكون مهتمين بقيمة واحدة هى أحسن القيم التي يمكن أن تستخدم لتقدير معلمٍ إحصائي ما ؛ فمثلاً يمكن تقدير الدخل الوسيط في مدينة نيويورك ليكون ١٠و٥٠٠ دولار. وعلي أية حال فإننا كثيراً ما نبحث عن هادٍ يقودنا إلي معرفة مدي دقة التقدير الذي حصلنا عليه . فنحن نود التنبؤ بأن المعْلَم الذي حصلنا عليه يقع في نقطة ما داخل مدي يَحُدُّه جانبا التقدير الأحادي . وهكذا فإننا ربما نود وضع تعبير مثل « الدخل الوسيط في مدينة نيويورك يقع بين ١٠٠٠٠ و١١٠٠٠دولار » . إن هذين النوعين من التقديرات سوف يتم نقاشهما في فصول الجزء الثاني من هذا الكتاب .

١٢ - ١ التقدير الأحادي Point Estimation

المشكلة المتمثلة في : ماهو المؤشر الإحصائي للعينة Sample Statistic الذي يكون مناسباً استخدامه لتقدير معلم إحصائي للمجتمع ، Population Parameter تبدو لأول وهلة سهلة جداً ولاتعدو أن تكون مسألة إحساس عام . فإذا أراد الشخص أن يقدر المتوسط في مجتمع البحث Population mean [أو الوسيط أو الإنحراف المعياري] فلماذا لايستخدم المتوسط الحسابي للعينة Sample mean [أو الوسيط أو الإنحراف المعياري] ؟ فبالرغم من أن الإحساس أو الشعور العام سوف لن يضللنا كثيراً في هذه الحالات ، إلا أننا سنري أن المسألة ليست بمثل هذه البساطة . من الواضح أنه باستطاعتنا تقدير المتوسط الحسابي لمجتمع ما بعدة طرق . فبالإضافة إلي متوسط العينة يمكننا استخدام وسيط العينة Sample median أو منْوال العينة Sample Mode كما يمكن استخدام عدد ما ، يقع في نصف المسافة بين القيمتين الطرفيتين . وباستطاعتنا كذلك إستخدام قيمة المفردة الثالثة عشرة كتقدير لمتوسط مجتمع ما . بعض هذه الإجراءات ستكون أفضل من بعضها الآخر ، وبذلك فإننا نحتاج إلي مواصفات معينة نستطيع بواسطتها أن نقيِّم أي نوع من أنواع التقدير لنقرر بالضبط كم هو جيد هذا النوع . إن إخصائي علم الإجتماع وهو يستخدم الإحصاء كوسيلة تطبيقية ، قلما يهتم بمثل هذه المواصفات .وهو عادة ، وببساطة ، ينصح باستخدام تقدير معين وعلى ذلك فإنه يبدو أنــه مــن الأوفق أن نعرف أي نوع من المواصفات يستخدمه إخصائي الإحصاء الرياضي عندما يقرِّر هو أي نوع من أنواع التقديرات يستخدم . إن أهم إثنين من المواصفات هما : التحيُّز bias والكفاءة efficiency . وسيتم مناقشة كل واحد من هذين الإثنين علي حدة. أما فيما يختص بالمواصفات الأخري كالكفاية ، التناسق Consis-tency « ومبدأ الجوازية الكبري »

Principle of maximum likelihood

فيمكنك الرجوع إلي بعض الكتب المنهجية المتقدمة .

التحيّز Bias :-

يقال عن تقدير ($\hat{\theta}$) معْلمٍ إحصائي (θ) لمجتمع ما أنه تقدير غير متحيز Unbiased estimate إذا كان متوسط توزيع معايناته The mean of its sampling distribution يساوي بالضبط قيمة المعلم الذي يجري حسابه أي أن متوقع $(\hat{\theta}) = (\theta)$. وبمعني آخر ، فإن القيمة المتوقعة للتقدير في المدي البعيد هي المعلم نفسه (١) . لاحظ أنه لم يذكر أي شيء هنا عن قيمة لأي عينة معينة . وطبقًا لهذا التعريف فإن المتوسط الحسابي ($\bar{س}$) للعينات

العشوائية يكون تقديراً غير متحيز لـ (س̄) (μ) طالما أن « س̄» هي المتوسط أو القيمة المتوقعة لتوزيع عينات « س̄ » (($\bar{X}$)) ٠وهذا لايعني ، علي أية حال ، أننا نتوقع أن أية قيمة معينة ل « س̄ » سوف تساوي «س»، علاوة علي أننا سوف لانعرف أبداً وفي أيٍّ مسألة حقيقية أو فعلِيّة ماإذا كان متوسط العينة يطابق في الواقع متوسط المجتمع ٠فيجب أن تعلم جيداً أن تعبير « التحيز» كما هو مستعمل في هذا السياق يشير إلي نتائج علي المدي البعيد ٠ وربما تكون قد تعودت في البحوث العملية على هذا التعبير ليشير إلى مزايا معينة للعينة التّي قمت بسحبها ٠

لقد ذكر في الفصل السابق أن الانحراف المعياري للعينة «ع» ((S)) متحيز تحيزاً طفيفاً عندما يستخدم كتقدير ل «عـ »« σ » الانحراف المعياري لمجتمع البحث ٠ وكما أنّ للمتوسط الحسابي للعينة « س̄ » توزيع عينات ، فإن للإنحراف المعياري للعينة «ع» توزيع معايناته الخاصة به . وبمعني آخر فإن الانحرافات المعيارية للعينة ستكون موزعة علي الانحراف المعياري الفعلي للمجتمع «عـ » بنفس الطريقة التي بها تكون المتوسطات الحسابية للعينة موزعة علي المتوسط الحسابي للمجتمع الذي سحبت منه العينة «س» ٠ وعلى أية حال ، فإنه يمكن أن يثبت رياضياً أن في العينات العشوائية يكون المتوسط الحسابي لتوزيع عينات التباين «ع٢» مساوياً لـ :

(١) التقدير المتسق هو الذي يتصف بتحيُّزٍ يمكن إهماله في العينات الكبيرة ٠ وبتعبير آخر اذا اخترنا كميتين موجبتين صغيرتين إختياراً اعتباطياً ، وأعطينا هاتين الكميتين الرمزين ((E)) و ((N)) فإنه إذا كان احتمال ($|\theta - \hat{\theta}| > E$) $> N$ يصح لعدد محدد من حجم العينة «ن» ، فإن التقدير « $\hat{\theta}$ » يقال عنه أنّه متسّق ٠ إن فكرة الإتسّاق (Consistency) مهمة عند التعامل مع نوع معين من أنواع المؤشرات يستخدم في نمط متقدم من أنماط تحليل المتغيرات المتعددة ولكنه سوف لايستخدم في هذا الكتاب .

$\left[\frac{(ن - ١)}{ن}\right] \times ع_{ـ}٢$ ،

وليس مساوياً ل = «عـ٢» . ولذلك فإن «ع٢» هي تقدير متحيز لتباين المجتمع «عـ٢» . ولإيجاد تقدير غير متحيز لتباين المجتمع «عـ٢»فإننا نأخذ القيمة كما في المعادلة التالية :

$$\frac{ن}{ن - ١} \times ع^٢ = \frac{ن}{ن - ١} \; \sum_{و=١}^{و=ن} \frac{(س_و - \bar{س})^٢}{ن}$$

$$= \frac{\sum_{و=١}^{و=ن} (س_و - \bar{س})^٢}{ن - ١}$$

$$= \hat{ع}_{ـ}٢$$

وبما أن متوسط توزيع عينات تباين العينة «ع٢» يساوي $\frac{ن-١}{ن} \times ع_{ـ}٢$ ،

فإننا نرى أن لتباين المجتمع غير المتحيز – أي «$\hat{ع}_{ـ}٢$» توزيع عينات بمتوسط يساوي تماماً مايلي :

$$توقع\ (\hat{ع}_{ـ}٢) = \frac{ن}{ن - ١} \left[\frac{ن-١}{ن} \times ع_{ـ}٢\right] = ع_{ـ}٢ \ .$$

وبالرغم من أن السبب الأساسي في أن «$\hat{ع}_{ـ}٢$» هي التقدير غير المتحيز (وليس ع٢) هو أن الرياضيات هي التي فعلت فعلتها في هذا المنحى، إلا أن التفسير المحسوس أحياناً يعطي في صورة مفهوم درجات الحرية Degrees of Freedom . وهو مفهوم يتردد ذكره كثيراً في الفصول اللاحقة . وعدد درجات الحرية يساوي عدد القيم أو الكميات المجهولة ناقصاً عدد المعادلات المستقلة التي تربط هذه المجهولات . ولعلك تذكر أنه للوصول إلى حل موحد لمنظومة من المعادلات الجبرية الآنيَّة Simultaneous algebraic equations كان من الضروري أن يكون لديك عدد من المعادلات مساوياً لعدد

المجهولات unknowns . وهكذا فإنه لكي تجد قيمة المجهولات س،ص ،ز،لابد من أن تكون هناك ثلاث معادلات تربط هذه المتغيرات . فإذا كانت هناك معادلتان فقط بدلاً من ثلاث ، كان باستطاعتنا أن نعين أي قيمة نرتضيها لأحد المتغيرات قل مثلاً «ز» . وهكذا فإن قيمة المتغيرين المتبقيين «س» ، «ص» يمكن أن تحدد بواسطة حل المعادلتين الآنيتين .

إذا كان هناك خمسة مجهولات وثلاث معادلات فقط لتحل آنياً ، فيمكننا أن نعين قيماً إعتباطية لأي اثنين من المجهولات الخمسة ويمكن بذلك تحديد قيمة المجهولات المتبقية . وهكذا تكون هناك درجتان من درجات الحرية في هذه الحالة طالما كان لنا الخيار في تعيين قيمٍ لأي متغيرين نختارهما من المتغيرات الخمسة. ولحساب انحراف معياري من قيم العينة ، يتعين علينا أن نستفيد من معادلة تربط بين قيم مختلف مفردات العينة إلي « ن » متغير سيني وبين المتوسط لحسابي لها .وبمعني آخر المعادلة :

$$\bar{س} = \frac{\sum_{و=1}^{ن} س_و}{ن}$$

وإذا علمنا قيمة المتوسط الحسابي للعينة « $\bar{س}$ » فيمكن أن نعطي قيماًإعتباطية لمفردات العينة ناقصاً واحد صحيح (ن- ١) من قيم

« $س_و$ » ، ولكن يتم تحديد أخر قيمة بإستخدام هذه المعادلة . وطالما أننا أفتقدنا درجة حرية واحدة في عملية تحديد قيمة المتوسط الحسابي للعينة والذي أخذت عنه الانحرافات ، يجب علينا أن نقسّم علي حجم العينة ناقصاً واحد صحيح (ن-١) بدلاً من أن نقسم على حجم العينة الكلي (ن) للحصول

على التقدير غير المنحاز لتباين المجتمع «ع٢» . فلو فضلت أن تفكر في هذا الشأن علي هذا النحو تستطيع أن تقدّر أننا قد عدّلنا عدد الحالات شيئًا ما للتعويض عن حقيقة أننا أخذنا الانحرافات عن المتوسط الحسابي للعينة ، وليس عن المتوسط الحسابي الحقيقي لمجتمع البحث كله . ونكون بالضرورة قد استفدنا حالة واحدة عند حساب المتوسط الحسابي للعينة . وستجد أن التقديرات غير المتحيزة تتحقق بتكرار أكبر لو أننا قسمنا على درجات الحرية عوضًا عن تقسيمنا علي مجموع الحالات أوالمفردات كلها .

الكفاءة Efficiency

كفاءة التقدير تشير إلى درجة تجمع توزيع العينات على القيمة الحقيقية أو الفعلية للمعلم المجتمعي . فإذا كان التقدير غير متحيّز فإنّ هذا التجمّع (Clustering يمكن أن يقاس بواسطة الخطأ المعياري (Standard error) للتقدير : فكلما كان الخطأ المعياري صغيرًا كانت كفاءة التقدير كبيرة[٢].(م) إذن فالكفاءة دائمًا نسبية ، لايمكن أن يوجد تقدير يمكن أن يكون كفئًا كلية، إذْ أن هذا يعني أنه لاتوجد أخطاء في إختيار العينة (Sampling errors) على الإطلاق . على أنه يمكننا أن نقارن تقديرين من التقديرات ونقول أن أحدهما أكثر كفاءة من الآخر . فافترض مثلاً أن لدينا

---

(٢) إذا كان التقدير متحيزًا فإن كفاءته يتم تقييمها باستخدام متوسط مربع الخطأ (mean square error) والذي يتضمن إنحرافات حول القيمة الحقيقية للمعلم « θ » بدلاً عن التقدير المتحيز لهذا المعلم .

مجتمعًا له توزيع طبيعي . إذن عند أخذ عينه عشوائية منه ، فإن الخطأ المعياري للمتوسط الحسابي لهذه العينة يساوي($\frac{ع}{\sqrt{ن}}$) .

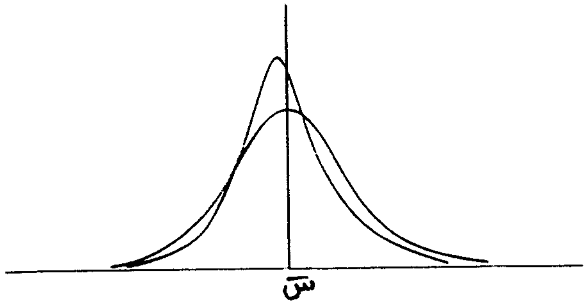
فإذا استخدم وسيط هذه العينة لتقدير المتوسط الحسابي لمجتمع العينة ، فإن الخطأ المعياري للوسيط يصبح تقريبًا : ($\frac{١٫٢٥٣ \times ع}{\sqrt{ن}}$) للعينات العشوائية .(٣)

ولذلك فإنه طالما أن الخطأ المعياري للمتوسط الحسابي أقل من الخطأ المعياري للوسيط ، فإن المتوسط الحسابي يكون هو التقدير الأكثر كفاءة . وهذا بالطبع هو السبب في تفضيل استخدام الوسط الحسابي للعينة بدلاً عن وسيطها حتي عندما يتساوي التقديران كما هو الحال في المجتمع الذي له توزيع طبيعي . ونقول إن المتوسط الحسابي أقل تعرضًا لتقلبات إختيار العينة - أي أنه أكبر كفاءة (٤) .

من بين الصفتين اللتين ناقشناهما ، فإن الكفاءة هي الأكثر أهمية . ولو أن لتقديرين من التقديرات نفس الكفاءة فسنختار من بينهما بالطبع التقدير الأقل تحيزًا . وهذا يوضح لماذا نفضل استخدام « $\hat{ع}$ » بدلاً عن نظيرتها « ع» . ولكن فإن تقديرًا ذا كفاءة وبدرجة تحيز طفيفة يفضل على نظيره غير المتحيز ولكنه بدرجة كفاءة أقل . وإن مخططًا بسيطًا كالذي يبدو أدناه يساعدك على فهم هذه الصورة .

(٣) هنا يتساوي كل من المتوسط الحسابي والوسيط لمجتمع العينة - أي في حالة التوزيع الطبيعي .

(٤) ليس صحيحًا دائماً أن المتوسط الحسابي هو التقدير الأكثر كفاءة رغم أن هذا هو الحال في معظم المجتمعات ، خصوصًا تلك التي يكون فيها لانحراف عن التوزيع الطبيعي ليس كبيرًا جدًا . لاحظ أن مسألة الكفاءة النسبية هي مسألة تختلف جذريًا عن مسألة ماهو المقياس الأكثر مواءمة كمقياس وصفي للنزعة المركزية Central Tendency . فالأخير يختص فقط بمسألة كيفية الحصول على أحد أحسن المقاييس ليمثل بيانات العينة .



الشكل (١٢ – ١)

ففي الشكل (١٢ – ١) نجد أن المنحني ذا القيمة الأعلي ، بتحيزه الطفيف ، سيكون الافضل طالما أننا ، وفي أي تجربة من التجارب ، نكون في وضع أكثر احتمالاً للحصول علي تقدير للعينة يكون أقرب لِلْمَعْلَم ، بالرغم من أننا وفي المدي البعيد نميل إلي التقليل من قيمة المعلم بقدر ضئيل. وفي أي تجربة ، كلما نكون أكثر إحتمالا للحصول على تقدير للعينة نكون أكثر إقترابًا من معلم مجتمع البحث . إن المعرفة بأن التقديرات يمكنها في المدى البعيد أن تتوحد لتعطي تقديرًا صحيحًا لمعلم مجتمع البحث فيها بعض العزاء ، لو أن التقدير لاي عينة من العينات يحتمل أن يكون بعيداً جداً من المعلم المراد إيجاده (٥) .

(٥) إذا أراد الشخص أن يضع افتراضات قوية حول توزيع المجتمع الطبيعي مثلاً ، فهناك طريقة جديرة بالاهتمام تسمي طريقة «تقدير الجوازية الكبري maximum likelihood Estima-tion) والتي تؤمن تقديرات بأعلى كفاءة ممكنة . ويعني ذلك أننا أذا علمنا أن التقدير هو تقدير نو جوازية كبري فإنه بذلك يكون معلوماً أن له ميزات قصوى لايمكن أن تحتمل أي تطوير . وعلى أية حال فإن المعرفة العلمية «لمبدأ الجوازية الكبري » تتطلب خلفية عن الرياضيات وعن نظرية الاحتمالات .

١٢- ٢ التقدير التراوحي * Interval Estimation

ربما تستحضر أنك عندما كنت تدرس الفيزياء الأولية ، كنت قد علّمت كيف توزن قطعة من الخشب عدة مرات ثم تأخذ القيمة المتوسطة ، وعليه تعين مدى ممكنًا للخطأ . وهكذا يمكن أن تكون قد عيّنت بأن وزن كتلة الخشب يساوي ١٠٢ ± ٢ جرامًا بمعني أنك تقدر بأن الوزن الفعلي يقع بين مائة (١٠٠) جرام ومائة وأربعة (١٠٤) جرامات . وبهذا العمل فإنك تكون قد سمحت بمدي محدد لطريقة القياس ، وحدّدت كم أنت واثق من الدقة المتحصل عليها عند استخدام هذه الطريقة . وبما أنه لايخطر ببالك أبدًا إلا أنه قد يساورك بعض الشك في أن القيمة الحقيقية قد لاتقع في المدي أوالمجال المتحصل عليه . فلو أن المجال جُعل أوسع مما هو عليه الآن ستكون أكثر تأكيداً بأن القيمة الفعلية تقع داخله .وهكذا ربما تكون أكثر إيجابية في قولك إن القيمة الفعلية تقع بين ٩٨ و ١٠٦ جرامات . وترغب في الرهان بآخر دولار لديك بأن القيمة الفعلية تقع بين «٢» و «٢٠٢» من الجرامات . عند الحصول على تقديرات تراوحية للمعالم فإننا نفعل بالضرورة نفس الشيئ الذي يفعله الفيزيائي « إخصائي علم الطبيعة» عدا أننا سنكون في وضع يؤهلنا لتقييم الإحتمال الدقيق للخطأ .

---

* في بعض الترجمات يطلق عليه التقدير «الفتري » أو التقدير «الفاصل» – [المترجم .]

إن الطريقة الفعلية المستخدمة للحصول علي تقدير تراوحي أو مايطلق عليه « درجة الثقة » بسيطة جدًا ولاتحتوي في الحقيقة علي أية أفكار جديدة وأساسية .

أولاً علينا مجرد توضيح كيفية الحصول علي المدي ، وبعد ذلك يمكننا اختبار لماذا اختير المدي بهذه الكيفية .

إن المرء ليقرر أولاً بخصوص المخاطر التي سوف يقبل أن يخوضها بإقدامه علي الوقوع في خطأ إعتبار أن المعلم يقع في «مجال الثقة » في حين أنه في الواقع لايقع في ذلك المجال . دعنا نقول أنه قرر بأنه يقبل بأن يكون مخطئًا خمس مرات من بين كل مائة مرة ، وبمعني آخر ، فإنه يستخدم مايطلق عليه ٩٥بالمائة (٩٥٪) من درجة الثقة [٦] أي بدرجة ترقي إلى ٩٥٪ . والمجال Interval يُتَحصَّل عليه بالسير باتجاهي التقدير الآحادي [التقدير الأحادي مثل متوسط العينة Sample mean] بعدد من مضاعفات الخطأ المعياري التي تتقابل مع مستوي الثقة المختار . وهكذا فإنه لتقدير المتوسط الحسابي لمجتمع البحث «س» نتحصل على مجال بالصورة التي تلي إذا استخدمنا درجة ثقة ٩٥٪ .

$$\bar{\text{س}} \pm 1.96 \times \text{ع}_{\bar{\text{س}}} = \bar{\text{س}} \pm \frac{1.96 \times \text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}} .$$

حيث الرقم ١,٩٦ يقابل المنطقة الحرجة في مخطط المنحني الطبيعي باستخدام مستوي دلالة ٠٥, مع اختبار ذي الطرفين Two - tailed test . فإذا كان متوسط مجتمع العينة $\bar{\text{س}} = 15$

(٦) لاحظ أنه في حالة مجالات الثقة ، فإننا نشير إلي الوحدة [واحد صحيح unity] ناقصًا إحتمال الخطأ .وهذا يشير إلي أن لنا «ثقة » الصواب بدرجة ٩٥٪ .

والانحراف المعياري لمجتمع البحث = عـ = ٥

وحجم مجتمع العينة = ن = ١٠٠ ،

فإن مجال الثقة يكون :

$$١٥ \pm ١,٩٦ \times \frac{٥}{\sqrt{١٠٠}} = ١٥ \pm ٩٨و٠ .$$

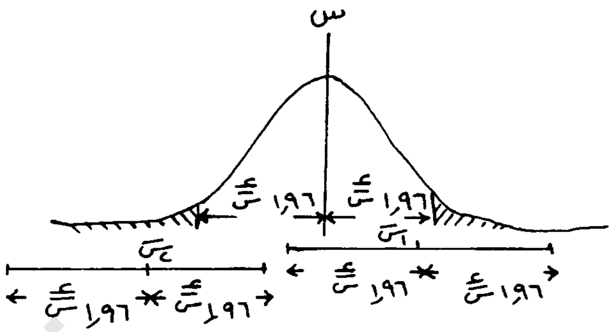
وبمعني آخر فإن المجال يتراوح بين ١٤,٠٢ و ١٥,٩٨[٧] . ولفهم المجالات التي يتحصل عليها بهذه الطريقة نحتاج إلى الرجوع إلي مانعرفه عن توزيعات المعاينة ، في هذه الحالة توزيع عينات المتوسط الحسابي . دعنا نفترض أن لدينا توزيعًا طبيعيًا للعينة بمتوسط « $\bar{س}$ » وإنحرافًا معياريًا

« $\frac{ع}{\sqrt{ن}}$ » . لأغراضنا ، هناك نوعان من متوسطات العينة :

١- تلك التي لاتقع في المنطقة الحرجة ٢- تلك التي تقع في المنطقة الحرجة[٨] . دعنا نفترض أولاً أننا تحصلنا على متوسط « $\bar{س}$ » (أنظر الشكل ١٢-٢) لايقع في المنطقة الحرجة .

(٧) إن نقاط النهايات للقيم يشار إليها بحدود الثقة .

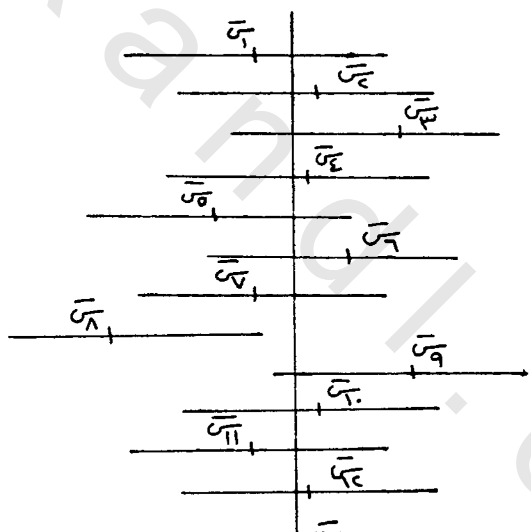
(٨) هنا ، عندما نشير إلي المنطقة الحرجة فإننا نعلم أننا نتعامل مع توزيع معاينة حقيقي طالما أننا نستخدم القيمة الصحيحة للمتوسط الحسابي لمجتمع البحث حتي ولو أنها غير معلومه بدلاً من استخدام قيمة افتراضية .



الشكل (١٢ -٢) مقارنة مجالات ثقة بتوزيع عينات المتوسط الحسابي ، يوضح لماذا أن مجالات الثقة بدرجة ٩٥٪ تحتوي على « س » ٩٥٪ من المرات ٠

نعرف أن هذا المتوسط « سَ » يجب أن تضمه القيمة ١,٩٦ × عـ سَ من قيمة «سَ » أي متوسط مجتمع البحث (المترجم) . فلو بنينا مجالاً في كلا الجانبين من جوانب توزيع « سَ » بقطع مسافات تساوي ١,٩٦ × عـ سَ فإننا لذلك لابد من أن نجتاز « سَ» (متوسط توزيع المعاينة) ، بغض النظر عما إذا كانت « سَ » تقع إلى يمين أو إلي يسار « سَ » ٠وبالمثل ، فإنه إذا كان المتوسط « سَ » المتحصل عليه يقع داخل المنطقة الحرجة (أنظر « سَ٢ » في الشكل ١٢ - ٢) فإن هذا المتوسط « سَ » يكون أبعد من ١,٩٦ خطأ معياراً من « سَ » ، ومجال الثقة بالتالي لايمتد إلى حد قيمة « سَ » ٠ ولكننا نعلم أيضاً أننا في ٩٥٪ من المرات سوف نتحصل على أوساط حسابية « سَ » لاتقع في المنطقة الحرجة ٠ وبتعبير آخر ، فإننا نعلم أن في ٥٪ فقط من المرات نتحصل علي مجالات أو فترات بهذه الكيفية سوف لاتحتوي على المَعْلَم ٠ والباقي ٩٥٪ من المرات فإن هذه الكيفيةستنتج متوسطات للعينة قريبة جداً من المعلم ، بحيث أن مجالات الثقة المتحصل

عليها سوف تحتوي في الواقع على « المعلم »· إن بعض كلمات تحوطية تكون ضرورية عند تفسير مجالات الثقة Confidence intervals . فالطالب المبتدئ معرّض لأن يستخدم جملاً مبهمة مثل «أنا واثق ٩٥٪ بأن « المعلم » داخل المجال · وبهذا فإنه ربما لايلاحظ بوضوح بأن « المعلم » هو قيمة محددة Fixed value وبأن المجالات هى التي تتغير من عينة إلى أخرى · وطبقًا لتعريفنا« للاحتمال » فإن احتمال وقوع «المعلم » في أي مجال معيَّن هو إما «صفر » أو واحدٌ صحيحٌ طالما أن «المعلم » إما أن يكون داخل المجال المحدد المتحصل عليه أو خارجه . إن مخططًا بسيطًا يشير إلي القيمة الثابتة «للمعلم » – في هذه الحالة « سَ » وتباين المجالات يساعدك على فهم التفسير الصحيح بوضوح أكثر ·



الشكل (١٢ – ٣) – تـوزيـع مختلف مجالات الثقة حول قيمة ثابتـه « للمعلم » « س »

الشكل (١٢ –٣) يؤكد علي أن ثقة الفرد تكون في الطريقة التي استخدمت أكثر منها فى أيِّ مجال معيَّن من مجالات الثقة · ويمكننا القول بأن الطريقة المثلي هي تلك التي بموجبها ، وفي المدي البعيد ، ٩٥٪ من

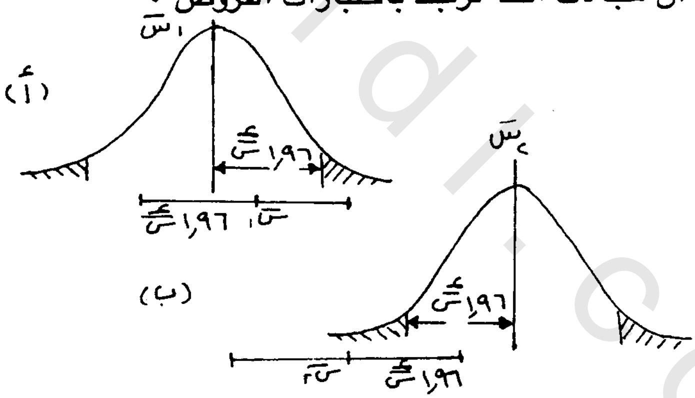
المجالات المتحصل عليها تحتوي على « المَعْلَمْ » الحقيقي والثابت . فيجب عليك الحرص علي ألا تفترض أن المجال المعيَّن الذي تحصلت عليه يتضمن أي ميزة خاصة لاتحتوي عليها مجالات أخري شبيهة يمكن أن يُتحصل عليها من عينات أخري . أحياناً يقال بأنه إذا سحبت عينات متكررة فإن ٩٥٪ من متوسطات هذه العينات سوف يقع داخل مجال الثقة الذي حسبه الفرد بالفعل [مثلاً ، ١٥ ± ٩٨,] . وهذا بالطبع يعني ضمنياً أن المتوسط الحسابي الذي تحصل عليه في عينة الباحث « $\bar{س}$ » يساوي بالضبط متوسط أية عينة سحبت من مجتمع البحث « س » ، أو هو علي الأقل قريب جداً من « س » . في الحقيقة فإن المجال المعيَّن المتحصّل عليه ربما يكون بعيداً جداً خارج الخط بحيث أن عدداً قليلاً جداً من متوسطات العينة يقع داخله . كما هو الحال دائماً مع الاستدلال Statistical inference ، فإن ثقتنا ليست في نتيجة عينة بعينها ولكن في الطريقة Procedure التي استخدمت للوصول إلى تلك النتيجة .

من الممكن أن يعين احتمال الخطأ risk of error علي أيِّ مستوي مطلوب باستخدام مضاعفات الخطأ المعياري المناسب. إنمّا لابد لك من ملاحظة أنه بتقليلك احتمال الخطأ فإنه يكون بالضرورة أن تزيد طول المجال أو سعته إلا إذا زدت في نفس الوقت عدد الحالات أو المفردات . فكلما زاد طول المجال قل – في الحقيقة – مايمكن أن يقوله الفرد عن « المَعْلَم » المراد . فالقول بأن وسيط دخل الأسرة في نيويورك يتراوح بين ١٠٠٠ دولارو ٢٥٠٠٠ دولار لايعدو كونه ذكر الشيء الذي يبدو واضحاً . وهكذا فإن الباحث يواجه بمعضلة : فيمكنه القول بأن « المَعْلَم » يقع في مجال ضيق جداً لكن احتمال الخطأ هنا يكون كبيراً . ومن جانب آخر يمكنه أن يزيد طول المجال ويكون بذلك متأكداً من صحة مذهبه ذاك . وإن الذي سيُختار فعلُه بالضبط يعتمد

على طبيعة الحالة nature of The Situation . وفيما أن مجالي الثقة ٩٥٪ و ٩٩٪ يستخدمان تقليديًا ، يجب التأكيد علي أنه ليس هناك أي شيء مقدس عن هذه المستويات .

مجالات الثقة Confidence intervals
واختبارات الفروض and Tests of hypothesis

مع أن الغرض المباشر والواضح لوضع مجال الثقة لتقدير ما ، هو لبيان درجة دقة التقدير ، فإن مجالات الثقة تكون أيضًا اختبارات ضمنية implicit Tests لسلسلة متكاملة من الفرضيات [٩] . وهي اختبارات ترد ضمنيًا لكون أن فرضيات محددة لم ترد في الحقيقة وإنما هي فقط موحاة أو يفهم منها ذلك implied . وفي مجال الثقة يكون لدينا اختبار ضمني لأي قيمة ممكنه من قيم «سَ» يمكن أن تفترض . الشكل (١٢-٤) أدناه يوضح كيف أن مجالات الثقة ترتبط باختبارات الفروض .



الشكل (١٢ -٤) مقارنة مجال ثقة بدرجة ٩٥٪ باختبارات فروض علي مستوي دلالة ٠٥, ، ويعكس عدم رفض للمتوسط الحسابي المفترض (سَ١) والذي يقع داخل المجال ، ولكنه يعكس رفضًا للمتوسط الحسابي المفترض (سَ٢) الذي يقع خارج مجال الثقة .

(٩) يجب التأكيد علي أنه رغم أن التقدير التراوحي واختبار الفرضية يشتملان كلاهما علي أفكار متقاربة جدا إلا إنهما طريقتان مختلفتان تمامًا .

يمكنك أن توجه تركيزك الآن إلي مجال الثقة المضروب حول « س̄ » . فهب أنّنا بدلاً من الحصول على مجال كهذا ، قمنا بافتراض عدة قيم بديلة ل « س »ثم عمدنا إلى اختبار هذه الفروض . وللتبسيط ، افترض أنّ قيمة التباين «ع٢» معطاة ، واستخدم مستوي دلالة ٠٥, ٠ كما إستخدم اختبار «ذو الطرفين » . أولاً :

هب أننا افترضنا قيمة مثل « س » (الشكل ١٢-٤ (أ)) تقع حقيقة داخل مجال الثقة المشار اليه فإن المتوسط الحسابي للعينه س̄ – من ثم – سوف لايقع في المنطقة الحرجة ، وإذن فالفرضية سوف لا ترفض عند مستوي دلالة ٠٥, ٠ . ومن ناحية أخرى ، فإننا لو افترضنا قيمة خارجة عن نطاق المجال مثل «س٢» (الشكل ١٢-٤ «ب») فإن المسافة بين س المفترضة وبين س̄ الفعلية ستكون أكبر من ١,٩٦ × ع س̄ .وبذلك فإن الفرضية الثانية المشار إليها كان يمكن أن ترفض ، فيكون من الواضح إذن- إذا قمنا بافتراض قيم معينة ل : س وتقع هذه القيم في أي مكانٍ داخل مجال الثقة – أننا لانستطيع رفض هذه الفرضيات أو الفروض عند مستوي الدلالة المناسب . وإذا افترضنا قيماً ل: س تقع خارج نطاق مجال الثقة ، نكون علي علم بأن هذه الفروض سوف ترفض . وهكذا فإنه وبحصولنا علي مجال ثقة معيَّن ، فإنه يمكننا القول – وبنظرة عابرة – كيف يمكن أن تكون النتائج فيما لو اختبرنا أية فرضية معينة . لو أن طبيعة مشكلتنا هذه هى في كوننا لم نقم باقتراح أيٍّ فروض بعينها لكونها فُضِّلت على الأخرى ، فإنه يكون من الواضح أنّ البديل العملي لمجموع سلسلة من

الاختبارات سوف يكون الحصول على مجال ثقة وحيد [١٠]. فيجب أن تقنع نفسك بأن الأمثلة التي تطرقنا إليها في الفصل السابق يمكن معالجتها أيضًا ، وبنفس السهولة ، باستخدام طريقة مجال الثقة .

الافتراضات المصاحبة لمجالات الثقة assumptions made For Confidence Intervals

إن استخدام مجالات الثقة لايغنينا عن ضرورة وضع افتراضات عن طبيعة مجتمع البحث وعن الطريقة التي استخدمت في سحب العينة . أساسًا، فإن الافتراضات المصاحبة لمسألة مجال الثقة هي كتلك التي تتطلبها أي اختبارات جاءت ضمنية ؛ غير أنه بالطبع ليس ضروريًا افتراض قيمة معينة للمعلم المراد تقديره . وتجدر الإشارة هنا إلي أن العينة العشوائية هي دائمًا المفترضة في هذا الكتاب . كذلك فإنه إذا استخدم التوزيع الطبيعي للعينة فإننا إما أن نفترض مجتمع بحث طبيعي ، أو نحوز علي عينة كبيرة بما فيه الكفاية. فإذا استخدم اختبار التوزيع التائي t - test Distribution أو بعض توزيعات المعاينة الأخري ،فإن الافتراضات المعتادة المستخدمة في الاختبارات المقارنة يجب أن يؤخذ بها .

---

(١٠) وعلي أية حال ، يجب ملاحظة أننا عندما نختبر فرضية معينه نحصل علي قيمة احتمالية محددة(ح = ٠٫٣٢) والتي لانحصل عليها عادة فيما يختص بمجال الثقة .

١٢–٣ مجالات الثقة لمسائل مغايرة : – confidence intervals for other Types of problems

حتي الآن فإن مناقشة مجالات الثقة لم تتعد الحالات التي يكون فيها المعلم المراد تقديره هو متوسط مجتمع البحث «س̄» عندما يكون الانحراف المعياري « ع » معلومًا . فإذا عكسنا المسألة فإن التعديلات الإجرائية تكون عادية تمامًا ويكون الفهم الأساسي لمجالات الثقة وعلاقتها باختبار الفروض باقيًا كما هو .إن مجال الثقة لمعلم ما يُتَحصل عليه دائمًا بأخذ تقدير المعلم المعني وإحاطته بمجال يكون إتساعة (طوله) دالاً على الخطأ المعياري للتقدير [11] – أي لتقدير المعلم .

فإذا كان لابد من إستخدام التوزيع التائي لأن «ع» مجهولة فإننا بكل بساطة نستفيد من تقدير الخطأ المعياري ، ونستبدل الناتج المتحصل عليه [باستخدام جداول التوزيع الطبيعي] بالعدد المماثل له في جدول التوزيع التائي ، وكأننا نستخدم اختبار ذي الطرفين . وهكذا فإنه لمجال ثقة بدرجة ٩٩٪ للمتوسط الحسابي و ٢٤ درجة للحرية سنتحصل علي :–

$$\bar{\text{س}} \pm \text{٢,٧٩٧} \times \hat{\text{ع}}_{\bar{\text{س}}} = \bar{\text{س}} \pm \text{٢,٧٩٧} \times \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن} - \text{١}}} \ .$$

لو أن المثال في الجزء (١١–٣) من الفصل السابق استخدم في الحل بمجال ثقة ٩٩٪ فإن النتيجة سوف تكون :

$$\text{٥٢} \pm \text{٢,٧٩٧} \left(\frac{\text{١٢}}{\sqrt{\text{٢٤}}} \right) = \text{٥٢} \pm \text{٦,٨٥} \ .$$

---

(١١) وعلي أية حال ، ففي بعض الحالات كما في حالة مجال الثقة لمعاملات الارتباط مثلاً ، فإن التقدير الآحادي لايقع بالضبط في نصف المجال (أنظر الجزء ١٨ – ١ بالجزء الثاني من الكتاب) .

ولذلك فإن مجال الثقة بدرجة ٩٩٪ يمتد من ٤٥,١٥ إلى ٥٨,٨٥ · ولذا نري أن النتيجة بعاليه تتناسق مع التي تحصل عليها في السابق (يعني ٠٠١, ‹ح‹٠١,) في أن « س » بقيمة ٦٠هي في الواقع خارج المجال المحسوب ، وبذلك نعلم أن الفرضية ستكون مرفوضة عند مستوي دلالة ٠١,[لاختبار ذي الطرفين] . وبالمثل فإننا نستطيع أن نحصل على مجالات ثقة للتناسب Proportions . فإذا استعضنا عن « $\bar{\text{س}}$ » بالتناسب «$\text{ح}_{\bar{\text{س}}}$» وعن $\sqrt{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}$ بالاتي = $\sqrt{\frac{\text{ح}_{\bar{\text{س}}} \times \text{ك}_{\bar{\text{س}}}}{\text{ن}}}$ فإن مجال الثقة بدرجة ٩٥٪

سيكون : $\text{ح}_{\bar{\text{س}}} \pm ١,٩٦ \sqrt{\frac{\text{ح}_{\bar{\text{س}}} \times \text{ك}_{\bar{\text{س}}}}{\text{ن}}}$. وسنواجه هنا صعوبة لم نكن قد واجهناها من قبل عندما أمكن إفتراض قيمة معينة للتناسب «ح $\bar{\text{س}}$».

وطالما أنه من الواضح أن «$\text{ح}_{\bar{\text{س}}}$» لاتكون معلومة يكون ضروريًا بالتالي أن نقدِّر الخطأ المعياري · فإن إجراء ين بسيطين أحدهما أكثر محافظة more conservative عن الآخر يمكن أن يوحي بهما · أولاً :طالما أن حجم العينة لابد أن يكون كبيرًا لتبرير إستخدام جداول التوزيع الطبيعي ، فإن قيمة التناسب «$\text{ح}_{\bar{\text{س}}}$» تكون عادة تقديرًا معقولاً ل «ح $\bar{\text{س}}$» ولذلك لو قمنا ببساطة باستبدال «$\text{ح}_{\text{س}}$» بقيمة التناسب « $\text{ح}_{\bar{\text{س}}}$ » واستبدلنا قيمة التناسب «ك $\bar{\text{س}}$ » بـ «$\text{ك}_{\bar{\text{س}}}$» ، يمكننا الحصول علي مجال يمكن أن يكون قريبًا جدًا من المجال الصحيح ·

وهكذا فإننا في المثال الموضح في الجزء (١١-٤) بالفصل السابق كان يمكن أن نحصل علي مجال ثقة بدرجة ٩٦٪ كما يلي :

$$\text{ح}_{\bar{\text{س}}} \pm ٢,٠٥٤ \sqrt{\frac{\text{ح}_{\bar{\text{س}}} \times \text{ك}_{\bar{\text{س}}}}{\text{ن}}} = ,٥٥ \pm ٢,٠٥٤ \sqrt{\frac{(,٥٥)(,٤٥)}{١٢٥}}$$

$$= ,٥٥ \pm ,٠٩١٤$$

لو أن الباحث اعترض علي استخدام تقدير للخطأ المعياري دون أن يصحح بطريقة أو بأخري الخطأ الإضافي الناتج عن عملية اختبارالعينة ، ربما فضل طريقة أكثر محافظة للحصول على ذلك المجال .

وحيث أن ناتج الضرب ح × ك يصل إلي أكبر قيمة عددية ممكنة عندما تكون (ح = ك = ٥,) فإنه . يتبع ذلك أن أوسع مجال أو أطوله يمكن الحصول عليه هو ٥, كتقدير ل : «ح س » [١٢] وطالما أن مجالا أضيق يكون دائمًا هو المطلوب ، فنحن نكون محافظين بحصولنا علي مجال هو من الوسْع بأقصي مايمكن أن يكون بغض النظر عن قيمة «ح س » . وباستخدام الطريقة الأكثر محافظة هذه نتحصل على مجال مختلف إلى حدٍ ما :

$$٥٥و \pm ٢,٠٥٤ \sqrt{\frac{(٥,)(٥,)}{١٢٥}} = ٥٥, \pm ٠٩١٩,$$

لاحظ أن المجال الثاني هذا يختلف* اختلافًا طفيفًا جدًا عن المجال الأول. فحيثما كانت ٣, $\leq$ ح $\leq$ ٧, فإن الطريقتين تعطيان نفس النتائج تقريبًا. ولو أن « ح س » كانت إما كبيرة جدًا أو على العكس من ذلك صغيرة جدًا ، فإن طريقة المحافظة ربّما تعطي مجالاً واسعًا جدًا . ولو تردّد الشخص في إستخدام الطريقة الأولى التي تقدّر فيها «ح س » بواسطة «ح س » يكون من الممكن أن نجمع الطريقتين لنحصل على مجال أكثر معقولية . وعلى ذلك فهذه الطريقة أيضًا محافظة ؛ فنستفيد أولاً من الطريقة الأكثر محافظة للحصول على مجال ثقة تقريبي . افترض أن هذا المجال يمتد من ١, إلي ٢٥, مع قيمة « ح س » تساوي ١٧٥, . سنكون عندئذٍ متأكدين بقدر معقول بأن القيمة الحقيقية ل «ح س » هى في مكان ما داخل هذا المجال التقريبي

(١٢) يجب أن تقنع نفسك بأنّ هذا صحيح .

* أوسع منه بقليل جدًا .

[و المحافظ] . ولحساب المجال الأكثر دقة نعتبر تقديرنا ل : «ح سـ» هـو القيمة التي هي في المجال التقريبي الأقرب إلى ٥, ٠ وفي المثال الرقمي السابق سنختار القيمة ٢٥, طالما أن استخدام هذه القيمة في معادلة الخطأ المعياري ينتج عنه مجال أوسع من أيِّ مجال يمكن أن يتواجد بالمدى ١٠, إلى ٢٥, ٠ ويمعنى آخر فإنه بدلاً من أن نستخدم «ح سـ» الحقيقية [أي ١٧٥,] نختار أكبر قيمة نعتقد أن ح سـ يمكن أن تأخذها . ولذلك نحسب مجال الثقة الذي هو بدرجة ٩٥٪ كما يلي :

$$\text{١٧٥,} \pm \text{١,٩٦}\sqrt{\frac{(\text{٢٥,})(\text{٧٥,})}{\text{ن}}}$$

المجال أعلاه سوف يكون أوسع ، ولذلك فهو أكثر محافظة من ذلك الذي تُحصّل عليه باستخدام «ح سـ» تحت الجذر التربيعي ومع ذلك فهو لايتعرض لاستخدام القيمة ٥, التي نظن أنها كبيرة جداً .

١٢-٤ تحديد حجم العينة Determining the Sample Size

تمشياً مع ممارسة تقديم أفكار قليلة وجديدة في وقت واحد ، فقد أجلنا مسألة كيفية تحديد حجم العينة إلي مابعد عملية جمع البيانات . إن أحد الأسئلة التي توجه باستمرار إلي الإحصائي هو « كم من المفردات نحتاج للدراسة ؟» والإجابة تعتمد بالطبع على الذي يريد الشخص أن يفعله بنتائج العينة ؟ وبتحديد أدق ، هناك عدة حقائق يجب أن تحدد قبل أن نعطي إجابة شافية .وعموماً فالذي يجب أن نفعله هو أن نقتفي الأثر راجعين To work backwards مستخدمين البيانات التي نتوقع الحصول عليها من أجل تحديد حجم العينة غير المعلوم . وإلي الان فنحن نأخذ حجم العينة كعدد معلوم . المعالم الإحصائية كالمتوسط الحسابي للعينة وكانحراف العينة

المعياري يمكن الحصول عليها من نتائج العينة .فمتى قررنا مستوي الدلالة لاختبار ما ، أو درجة الثقة المرغوب فيها ، يمكننا عندئذٍ وضع جميع هذه القيم في معادلة تحديد إتساع مجال الثقة ، أو إن كنا سنرفض أو سنقبل الفرضية الصفرية The null hypohesis . في مثل هذه المشكلة التي

نحن بصددها في هذا الجزء علي أية حال سوف يكون حجم العينة مجهولا. وهذا يعني أنه لكي يتسني لنا حل المعادلة لمعرفة «ن» يتحتم علينا أن نعرف كل كمية من الكميات المتبقية في المعادلة . وعندما نضع كل هذه القيم في المعادلة فإن الحل للحصول علي «ن» لايكون أكثر من مسألة جبرية . وسنستخدم الان مسألة من مسائل مجالات الثقة لتبيان هذه العملية : إفترض أننا نود أن نعرف كم عدد الحالات أو المفردات المطلوبة لتقدير متوسط عدد السنوات الدراسية التي أنهيت بواسطة أشخاص وُلد أباؤهم بالخارج . قبل أن نستطيع تحديد الإجابة على هذا السؤال سوف نحتاج الآن لتوفر المعلومات التالية :-

١- مستوى الثقة الذي يستخدم

٢- درجة الدقة التي نود من خلالها تقدير المعلم

٣- تقديرات معقولة لقيم معالم يمكن أن تظهر في المعادلة

مثلاً ربما نودّ تقدير الوسط الحسابي في حدود دِقة تساوي +_ ١, من سنة دراسية ونستخدم مجال ثقة ٩٥٪ . لاحظ أن كلا هاتين الكميتين لابدّ من أن تحددا طالما ، علي سبيل المثال ، يمكننا دائمًا أن نحصل على دقة في حدود +_ ١٠, ٠من سنه واحدة لو سمحنا لأنفسنا بالتعامل مع إحتمال عالٍ للخطأ . والآن نستخدم هذه القيم في المعادلة الخاصة بمجال الثقة :

$$\bar{س} \pm ١,٩٦ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$

إن معرفة مجال الثقة المطلوب أو المرغوب مكنتنا من إدخال القيمة ١,٩٦. وحيث أنّنا نرغب في دقة تساوي +ـ ٠,١ ، أو إتساع مجال بمجموع ٠,٢، فإننا نعرف أن القيمة : $\frac{١,٩٦ \times ع}{\sqrt{ن}}$

لابد لها من أن تساوي ٠,١٠ ورغم أن قيمة « $\bar{س}$ » تكون مجهولة فإننا نري للتو أنها غير مطلوبة في هذه المسألة طالما أننا نود أن نحصل علي مجال باتساع معين بغض النظر عن قيمة « $\bar{س}$ » . إفترض الآن أننا نود حل المعادلة :-

$$٠,١ = \frac{١,٩٦ \times ع}{\sqrt{ن}}$$

للحصول على «ن» . لاتزال هناك قيمة مجهولة – قيمة «عـ» . ولكن كيف يمكننا الحصول على «عـ» قبل جمع البيانات ؟ من الواضح أنّ قيمة «عـ» يجب أن يتم تقديرها بطريقة يمكن أن تتعدّي في وجه من الوجوه – البيانات التي سوف تجمع . المهم أنّنا يجب أن نقدم على تخمين تنويري لقيمتها إمّا باستخدام المعرفة المنوطة بالخبرة Expert knowledge ، أو باستخدام نتائج دراسات سابقة ، أو ربّما دراسة ميدانية استكشافية بنوع ما . عادة تكون الدراسة الإستطلاعية Pilot Study مرتفعة التكاليف . ولذلك فإنّ الثقل يوضع في الاعتماد على الطريقتين الأُخريَيْن . في الحقيقة فإنّ أكثر الطرق كفاءة تكون بتحديد قيمة «عـ» بدقة ولكن إذا كان هذاسيتم فإنّه من المحتمل ألاّ يكون هناك داعٍ لسحب عينة من الأساس.نلاحظ أن نوعية التقدير الضروري في هذه المسألة من المسائل تختلف إختلافًا جذريًا من تلك التي استخدمت في تقدير «عـ» من بيانات عينة ما . ولذلك ليس هناك داعٍ لتقدير «عـ» بواسطة «$\hat{ع}$» أو لاستخدام

التوزيع التائي . فإذا كان لابد من أن نخمن علي أية حال فإنّ من الممكن لنا أيضاً أن نخمّن قيمة «عـ» بدلاً من تخمين قيمة «عـ» أو قيمة « ع». في هذا المثال افترض أنه علي أساس أحسن المعلومات المتاحة نقدر أن تكون قيمة «عـ» ٥ , ٢سنة بالتقريب . مستخدمين هذه القيمة للحصول علي حجم العينة المطلوب سيكون لدينا المعادلة :-

$$\text{،١٠} = \text{١,٩٦} \times \sqrt{\frac{\text{٢,٥}}{\text{ن}}}$$

$$\text{أو} \quad \sqrt{\text{ن}} = \frac{\text{١و٩٦} \times \text{٢و٥}}{\text{،١٠و}} = \text{٤٩}$$

ولذلك فإنّ حجم العينة «ن» = ٢٤٠١ مفردة . لاحظ أننا في عمليّة الحل للوصول إلي قيمة «ن» وضعنا جميع الكميات ماعدا « $\sqrt{\text{ن}}$ » في جهة واحدة من كفتي المعادلة ثم إختصرنا . وأخيراً ربّعنا كلا جهتي المعادلة للتخلص من الجذر التربيعي . فمن المؤكد أننا لانملك أكثر من أن نتّحصل علي قيمة تقريبية لحجم العينة المرغوب طالما أن المعالم تقدر تقديراً . فمن المؤكد أنه ليس هناك مبرّر لأخذ ٢٤٠١ مفردة بالضبط علي سبيل المثال . وبالرغم من ذلك فإنّ هذا التقريب يعطي عادة نتائج مقبولةذهنياً عن عدد الحالات أو المفردات الضرورية . إننا عادة وفي التطبيقات العملية ندرس أكثر من متغير واحد وهي الحقيقة التي يمكن أن تعقّد الصورة بشكل كبير . وأيضاً فإننا عادة ماتحدنا الأموال المتاحة، وكثيراً مانركن إلى أيٍّ من درجات الدقة استطعنا أن نحصل عليها . ومع ذلك فإنه عادة مايكون اجدي أن نحسب حجم العينة المطلوب كهادٍ إلي تصميم البحث . ومع أن مسألة تحديد حجم العينة سوف لاتناقش في الفصول القادمة مقترنة مع طرق إحصائية أخرى ستجد أن هناك عدة تمارين تتطلب منك تقدير «ن» في أنواع أخري من المسائل . وفي كل الحالات فإنّ التطبيقات واضحة حتى وإن

كنا في بعض الأحيان نحتاج إلي مزيد من إستخدام عمليات الجبر .

تمارين الفصل الثاني عشر :-

١- أوجد مجالات الثقة للتمارين ٣، ٤و ٥ بالفصل ١١. هل نتائجك متناسقة مع تلك التي وجدت في التمارين السابقة ؟ كيف تعرّف ذلك ؟ [الإجابة للتمرين «٥» = ٤٧و إلى ٦١و].

٢- أخذت عينة عشوائية تتكون من ٢٠٠ أسرة من مجتمع ما ، ووجدْت أنه في ٣٦٪ من هذه الأسر يقوم الزوج بإصدار نصف القرارات المالية . ماهو مجال الثقة [بدرجة ٩٩٪] لنسبة الأسر التي فيها يقوم الزوج بإصدار نصف مثل هذه القرارات ؟ في أية صورة بالتحديد يعطيك مجال الثقة اختبارات فروض بصورة ضمنية ؟

٣- كم من الحالات أو المفردات سوف نحتاجها لبناء مجال ثقة بدرجة ٩و٩٩ ٪للوسط الحسابي علماً بأن مجمل مجال الثقة لايزيد عن ٥٠٠ دولار والانحراف المعياري قُدّر بـ١٣٠٠ دولار ؟ [الإجابة : ن = ٢٩٥]

٤- لو اعتقدت بأن نسبة الذين يمتلكون مساكن في مجتمع سكني معين هى ٧٥, تقريباً ، كم من الحالات سوف تحتاج لأجل الحصول علي مجال ثقة بدرجة ٩٥٪ بحيث لايكون أوسع من ٠٣, [مجموع الإتساع] عندما تعبر عن الاتساع في صورة تناسب Proportions ؟ افترض أن نسبة مالكي أو ملاك المساكن قُدّرت بـ : ٥, ٠ ، كم من الحالات سيُحتاج إليها من ثم ؟

٥- باستخدام حقيقة أن في المجتمعات ذات التوزيع الطبيعي [المجتمعات المتماثلة] يكون لتوزيع المعاينة للوسيط خطأ معياري تقريبي يساو ي

$\frac{١,٢٥٣ \times ع}{\sqrt{ن}}$ ؛ يمكننا وضع مجال ثقة لوسيط العينة . إفترض أنه في التمرين (٣) بعاليه أردت أن تضع مجال ثقة بنفس الاتساع [أو الطول] لوسيط العينة . استعمل نفس تقدير الانحراف المعياري لمعرفة كم من الحالات سنحتاج ؟ وما الذي تظهره نتيجتك فيما يختص بالكفاءات النسبية للوسط الحسابي ؟ والوسيط ؟

[الإجابة : ن = ٤٦٣]

٦- إن أعضاء في مجموعة عمل لوكالة ما طلبوا منك معرفة حجم العينة العشوائية المطلوب لتقدير النسب المئوية الحقيقية للأشخاص الذين يرغبون في دعم برنامجهم . بافتراض أن باستطاعتهم تحديد طبيعة المجتمع المستهدف وأنه سوف لاتوجد مشاكل ترتبط بأخطاء القياس أو مصاعب ترتبط باختيار العينة . ماهي المعلومات الاضافية التي ستطلبها منهم قبل محاولة الإجابة علي سؤالهم ؟ حدد هذه المعلومات الإضافية بنفسك واستمر في حل المسألة .

٧- لقد أُوْرِدَتْ حجج بأن مجال الثقة بدرجة ٩٥٪ يمثّل سلسلة من الإختبارات ذات الطرفين الضمنية بمستوى دلالة ٠,٠٥ وضّح لماذا أن مجال الثقة بدرجة ٩٥٪ لايمثل ضمنياً اختبار «ذو الطرف الواحد »

One - Tailed Test بمستوى دلالة ٠,٠٥ ؟