

الفصل السابع

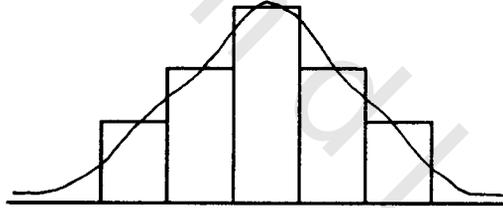
التوزيع الطبيعي Normal Distribution

إن فكرة التوزيع الطبيعي مألوفة لدينا من موضوعات الفصول السابقة .
ونتناول في هذا الفصل نوعاً هاماً جداً من أنواع التوزيعات التكرارية
يُعرف بتوزيع المنحنى الطبيعي " Normal Curve " . ولا تقتصر فائدة
التوزيع الطبيعي على أن أعداداً كبيرة من التوزيعات الأمبريقية تأخذ
تقريباً « شكل التوزيع الطبيعي ولكنها تمتد لتشمل الاستخدامات النظرية
في مجال الإحصاء الاستقرائي " Inductive Statistics " . ويهدف التحليل
في هذا الفصل إلى توضيح خصائص المنحنى الطبيعي كما يهدف لمساعدة
القارئ للتعرف على طرق استخدام الجداول الاحصائية المبنية على توزيعات
المنحنى الطبيعي . ويُعرض موضوع التوزيع الطبيعي في هذا الفصل ضمن
موضوعات الإحصاء الوصفي بدلاً عن الإحصاء الاستقرائي ، وذلك لسببين
أساسيين أولهما : أن المنحنى الطبيعي يمكن استخدامه لاعطاء تفسير
لمفهوم الانحراف المعياري ، وثانيها : - أنه من المفيد للقارئ أن يكون ملماً
في بداية فصول هذا الكتاب بفكرة التوزيع الطبيعي قبل الدخول في
موضوع الاختبارات الاحصائية التي تتطلب معرفة تامةً واستخدامات عديدةً
للتوزيع الطبيعي . وعليه كلما أحسن القارئ فهم موضوعات هذا الفصل ،
قلت الصعوبات التي قد تواجهه مستقبلاً ، عند الحديث عن الإحصاء
الاستقرائي واختبارات الفروض .

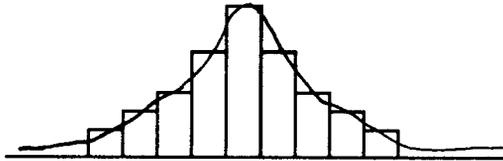
٧-١ التوزيعات التكرارية المحدودة وغير المحدودة:-

إن التوزيعات التكرارية التي تمت مناقشتها حتى الآن تتعلق بمتغيرات
ذات مفردات محدودة " Finite Number of Cases " ، ومن الضروري أن تكون

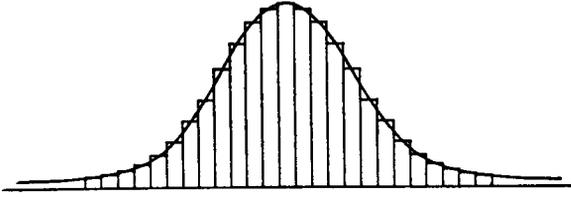
جميع التوزيعات الامبريقية من التوزيعات المحدوده ، على الرغم من أنها قد تتضمن اعداداً كبيرة جداً من المفردات . وغالباً ما يكون من المفيد لعلماء الرياضيات أن يدرسوا التوزيعات التكرارية المبنيه على أعداد كبيرة جداً وغير محدوده من المفردات بدلاً من التعامل مع التوزيعات الامبريقية ذات الشكل المشرشر "Japped" كما هو الحال فى المدرج التكرارى (Histo-gram) أو المضلع التكرارى (Frequency Polygon) . ومن المحتمل فهم المنحنيات الممهدة " Smoothed Curves " والمبنيه على مفردات كبيرة وغير محدوده لصياغتها فى معادلات رياضية مبسطة نسبياً . ويعتبر التوزيع الطبيعى أحد هذه المنحنيات . وقبل أن نبدأ فى الحديث عن هذا النوع من التوزيعات التكرارية يصبح من الضرورى معرفة الطريقة التى استخدمت فى إعداد المنحنى الممهد .



- أ -



- ب -



الشكل رقم (٧ - ١)

يوضح المقارنة بين المنحنيات الممهدة والمدرجات التكرارية التي لها أطوال فئات مختلفة

دعنا نبدأ بمدرج تكرارى يحتوى على خمس فئات « أنظر الشكل رقم (٧ - ١) » أ . ولتبسيط شرح التوزيع الطبيعى نفترض أن توزيع هذه الفئات متماثل . ولقد سبق أن أوضحنا أن زيادة عدد الفئات دون تغيير المجموع الكلى للتكرارات « ن » [المفردات] ربما يجعل شكل المدرج غير منتظم ، ولنفترض أن عدد التكرارات قد ازداد هو الآخر . وفى هذه الحالة قد يكون من الممكن استخدام أعداد كبيرة من فئات صغيرة كما هو موضح فى الشكل رقم « (٧ - ١) ب . ولكل من هذه الفئات الصغيرة تكرارات كافية للمحافظة على انتظام شكل المدرج وإذا ما زادت التكرارات مرة أخرى ، يمكن استخدام مستطيلات أكثر مع المحافظة على الشكل المنتظم للمدرج [انظر الشكل « (٧ - ١) ج »] . ولقد رسمت المنحنيات الممهدة بتوصيل النقاط التى تتوسط الضلع الأعلى لكل مستطيل . ومن الواضح أن شكل المستطيلات يزداد فى تقاربه من المنحنيات الممهدة كلما زاد عدد المستطيلات « أى كلما قل عرض المستطيل » . دعنا نتخيل أن هنالك تزايداً مستمراً فى عدد التكرارات وبالتالي يقل طول الفئات أكثر

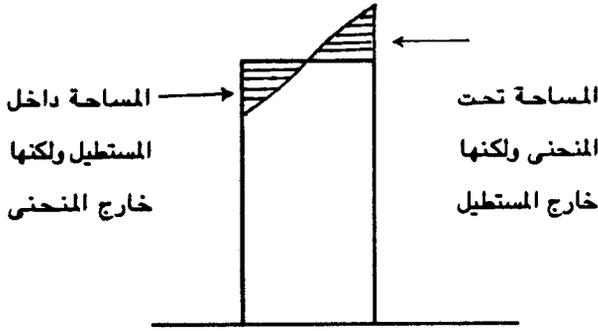
فأكثر ، حتى يبدو تماثل بين شكل المستطيلات وشكل المنحنى الممهد لدرجة لا نستطيع معها التمييز بين الشكلين . ويشار إلى المنحنى الممهد الناتج عن المستطيلات ذات القواعد المتناقصة على الدوام بأنه التوزيع التكرارى الحدّي * . وعلى الرغم من أننا لا نستطيع أن نتخيل وجود عدد غير محدود من المفردات « التكرارات » ؛ إلا أننا نستطيع أن ندرك مثل هذا العدد الكثير جداً من المستطيلات ، التى يقارب شكلها شكل المنحنى الممهد فى حدود الدرجة المطلوبة من الدقة . ويجب أن نذكر أن مساحة كل مستطيل تعتبر ممثلة لعدد المفردات « التكرارات » التى تقع داخل تلك الفئة . وكما أوضحنا سابقاً فى الفصل الرابع فإنه من المعتاد أن نعتبر أن مجموع مساحة المستطيلات تساوى واحداً صحيحاً . وعليه فإذا كانت نسبة التكرارات للفئة الأولى تمثل ١٠ . فإن هذه النسبة نفسها تمثل المساحة الحقيقية للمستطيل الأول . ومع أننا لا نستطيع أن نتخيل أعداداً غير محدودة من التكرارات إلا أننا نستطيع إدراك وجود أعداد كبيرة من المستطيلات التى تقارب تمثيل المنحنى الممهد لدرجة معينة من الدقة . ولا بد من أن نتذكر أن مساحة كل مستطيل يمكن استخدامها لتمثل نسبة التكرارات للفئة المعينة . وكما سبقنا الإشارة فى الفصل الرابع فإنه من المألوف أن نعتبر مساحة جميع المستطيلات تساوى واحداً صحيحاً . فإذا كانت نسبة التكرارات فى الفئة الأولى تساوى ١٠ . ، فإن هذا الرقم يمثل المساحة الحقيقية للمستطيل الأول ونلاحظ أن المساحة تحت المنحنى الممهد لأى فئة يمكن أن تقارب مساحة المستطيل المناظر لتلك الفئة . ويتضح ذلك من الشكل رقم (٧-٢) .

(١) سوف يتم أيضاً نقاش فكرة «الحد» Limit فى القسم الأول من الفصل التاسع .

ولربما أمكن إعطاء الفكرة حججياً أكثر بدهاءة بالرجوع إلى سلسلة غير محدودة مثل :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$$

والتي يلاحظ أنها تقترب أكثر فأكثر إلى القيمة (١.٠) كلما أضيفت كسور جديدة دونما بلوغ لهذه القيمة الحدية أبداً .



الشكل رقم (٧ - ٢)

يوضح مقارنة المساحات تحت المنحنى ونحت المستطيل

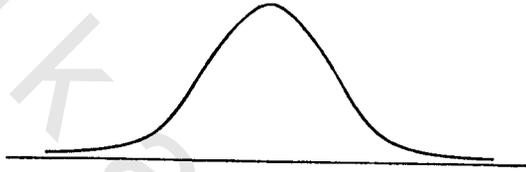
وكلما زاد عدد المستطيلات أصبحت المساحة الكلية للمستطيلات أكثر تقارباً من المساحة تحت المنحنى الممهد . ويمكن ملاحظة ذلك من الشكل رقم « ٧ - ٢ » حيث تصبح المساحة المظلمة أصغر فأصغر نسبياً متى ما زاد عدد المستطيلات . ويمكن الحصول على المساحة تحت المنحنى الممهد بجمع مساحات المستطيلات الكثيرة « مستطيلات غير محدودة العدد . وبما أن مساحة جميع المستطيلات تساوى واحداً صحيحاً فإن المساحة تحت المنحنى الممهد هي الأخرى تساوى واحداً صحيحاً . فالطريقة التي شرحناها هنا تماثل بالضبط الطريقة الخاصة بموضوع التفاضل والتكامل في علوم الرياضيات

(٧ - ٢) الشكل العام للمنحنى الطبيعي : -

يعتبر المنحنى الطبيعي حالة خاصة للمنحنى الممهد المتماثل . وبما أن المنحنى الطبيعي من المنحنيات الممهدة والمتماثلة تماماً ، والذي تنبني توزيعاته على أعداد غير محدودة من المفردات ، يمكن أن يمثل بالتوزيعات التكرارية التي تتضمن البيانات الحقيقية . ويأخذ المنحنى الطبيعي شكل

الجرس " Bell Shaped " وله عدد من الخصائص الاحصائية الهامة ، التي سنوضح بعضها فى الفقرات التالية من هذا الفصل . وبما أن المنحنى الطبيعي متماثل وذو منوال واحد ، فإن المتوسط الحسابى والوسيط والمنوال تتطابق تماماً فى قيمها .

ويوضح الشكل رقم « ٧ - ٢ » الصورة العامة للتوزيع الطبيعي .



الشكل رقم (٧ - ٣)

الشكل العام للمنحنى الطبيعي

وتعتبر المعادلة الرياضية للمنحنى الطبيعي بسيطة نسبياً ، وخاصة للمتخصص فى علم الرياضيات . وقد لا يضطر القارئ لاستخدام المعادلة أدناه للعمليات الحسابية ، لأن كثيراً من الجداول الاحصائية قد صُممت لهذا الغرض . ويمكن استخدام المعادلة الاحصائية لتوضيح وإثبات بعض الخصائص لهذا التوزيع النظرى . وتكتب المعادلة الرياضية على النحو

التالى :

$$(٧ - ١) \quad \left(\frac{(س - س_0)}{\sigma} \right)^2 \times \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} = ص$$

حيث تشير قيمة (ص) إلى ارتفاع المنحنى عند أى قيمة معينة « س » .
 وبما أن « هـ » و « ع » من القيم الثابتة وتساوى ٢٧٢ و ٣١٤ على التوالى فإن المعادلة أعلاه تتضمن مؤشرين هما المتوسط الحسابى (س) والانحراف المعياري « ع »^(١) . ويمكننا التعرف على شكل المنحنى الطبيعى بالتحديد إذا ما علمنا المتوسط الحسابى والانحراف المعياري لأى توزيع من التوزيعات التكرارية الطبيعية . وهذا يعنى وجود أعداد كثيرة من المنحنيات الطبيعية المختلفه ويعتمد شكل كل منحنى من هذه المنحنيات على قيم المتوسط الحسابى والانحراف المعياري . وعلينا أن نتذكر أن قيمة التعبير الرياضى ذى الأس السالب " Negative Exponent " يمكن أن تكتب فى صيغة مقلوبة " Reciprocal " بحيث ينزل التعبير من البسط إلى المقام ويرفع التعبير إلى أس موجب . وعليه يمكن كتابة المعادلة (٧ - ١) على النحو التالى :-

$$ص = \frac{1}{\sqrt{\frac{(س - \bar{س})^2}{ع^2}}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{٢٧٢}}} \times ع$$

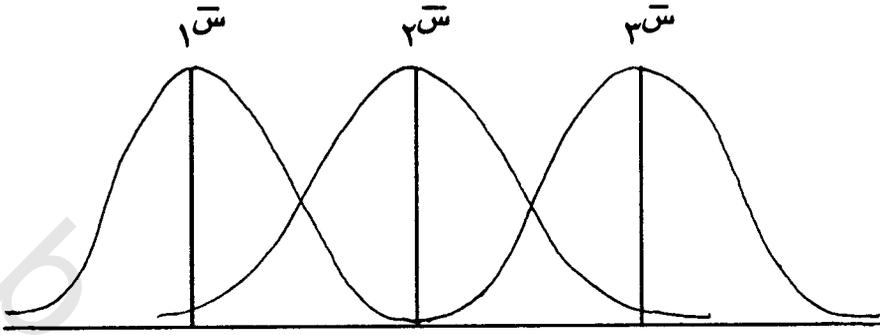
حيث استبدلنا الثابت « هـ » بقيمته التقريبية (٢٧٢) . وإذا ما افترضنا أن الانحراف المعياري « ع » له قيمة ثابتة ، يمكننا حساب قيمة « س » عندما تبلغ « ص » قيمتها القصوى [Value of X for Maximum Value of Y] ومن الواضح أن قيمة « ص » ستصل إلى حدها الأقصى ، عندما تبلغ قيمة المقام للتعبير - الموجوده بين القوسين الكبيرين فى المعادلة رقم « ٧ - ٢ » - حدها الأدنى " Minimum Value " . وبما أن هذا

(١) هناك رموز أخرى للمتوسط الحسابى والانحراف المعياري التى سنتعرض لها عند الحديث عن الاحصاء الاستقرائي . وتكتب - فى العادة - معادلة المنحنى الطبيعى بالرموز : « لـ » ، (وتقرأ «ميوه») وتشير إلى المتوسط الحسابى؛ و « س » (وتقرأ «سيجما ») وتشير إلى الانحراف العياري .

المقام ، يحتوى على عدد موجب يزيد عن واحد صحيح ، ومرفوع لأس " Power " ، فلا يمكن أن تكون قيمته سالبة ، لأن قيمة تربيع العدد الحقيقي " Real Number " لا تقل عن صفر . ولذلك فإن قيمة المقام ستصل إلى حدها الأدنى عندما تكون قيمة الأس صفرًا . وبالتأكيد فإن قيمة الأس تصبح صفرًا عندما تصبح قيمة « س » مساوية لقيمة المتوسط الحسابى « س - س = صفر »

وعندما تتساوى قيمة « س » ، مع قيمة المتوسط الحسابى ؛ فإن قيم المنوال والمتوسط الحسابى والوسيط تتطابق وتبلغ \bar{S} . ولقد سبق أن أشرنا إلى هذه الحقيقة من قبل ، دون التعرض لإثباتها . كما أننا نلاحظ أن المعادلة أعلاه تمثل منحنى متماثلًا حول المتوسط الحسابى \bar{S} وبما أن القيمة (س - س) مرفوعة إلى الاس (٢) فلا يمكن أن تكون سالبة وعليه فإن إنحرافات القيم عن المتوسط الحسابى (س) ستنتج عنها قيم متماثلة لـ « ص » على جانبي المتوسط الحسابى .

إن المعادلة الخاصة بأى منحنى طبيعى معين يمكن الحصول عليها باستخدام قيم مناسبة للمتوسط الحسابى « س » والانحراف المعيارى « ع » . والشكل رقم « ٧ - ٤ » يوضح المنحنيات الطبيعية التى لها نفس الانحرافات المعيارية ولكنها تختلف فى متوسطاتها الحسابية . ومن الجانب الآخر فإن المنحنيات التى لها انحرافات معيارية مختلفة ستختلف فى قممها " Peaked ness " كما هو واضح من الشكل « ٧ - ٥ » . وكلما قلت قيمة الانحراف المعيارى زادت قمة المنحنى .



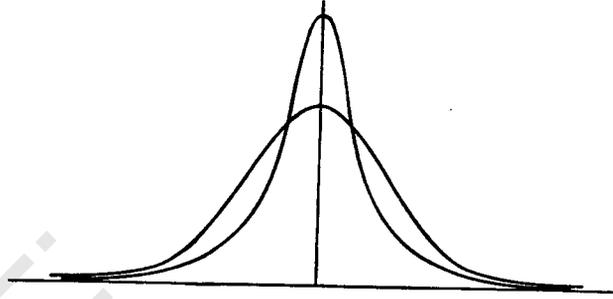
الشكل رقم (٧ - ٤)

يوضح مقارنة المنحنيات الطبيعية التي لها نفس الانحرافات
المعيارية وتختلف في متوسطاتها الحسابية .

وتجدر الإشارة إلى أنه ليست كل منحنيات شكل الجرس المتماثلة من
فصيلة المنحنيات الطبيعية .

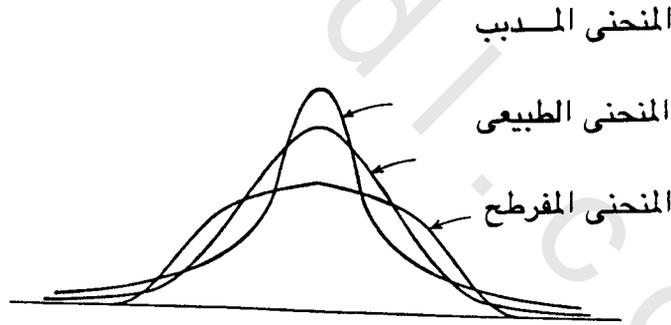
إن اختلاف قمم المنحنيات في الشكل رقم « ٧ - ٥ » ، يعزى فقط
لاختلافات الانحرافات المعيارية . ومن الملاحظ أن المنحنيات في الشكل رقم
« ٧ - ٥ » من فصائل التوزيعات الطبيعية . وبصفة عامة ، فإن المنحنيات
المتماثلة ذات المنوال الواحد ، إما أن تكون ذات قمم عالية أو تفلطح كبير
مقارنة بالمنحنيات الطبيعية . والشكل رقم « ٧ - ٦ » يوضح لنا عدداً لمثل
هذه المنحنيات . وتُمَيِّز المنحنيات الأعلى قمماً عن المنحنيات الطبيعية بأن
يطلق على الأولى صفة المنحنيات المدببة " Leptokurtic " . أما المنحنيات
الأكثر تفلطحاً من المنحنيات الطبيعية ، فتسمى المنحنيات المفلطحة " Platy
kurtic curves " . وعلى عكس المنحنى الطبيعي ، فإن المعادلات الرياضية

للمنحنيات المدبية ، والمنحنيات المفلطحة ، تتضمن مقاييس أخرى بجانب مقاييس المتوسط الحسابى والانحراف المعيارى .



الشكل رقم (٧ - ٥)

يوضح مقارنة اثنين من المنحنيات الطبيعية التى لها نفس المتوسط الحسابى وتختلف فى انحرافاتهما المعيارية

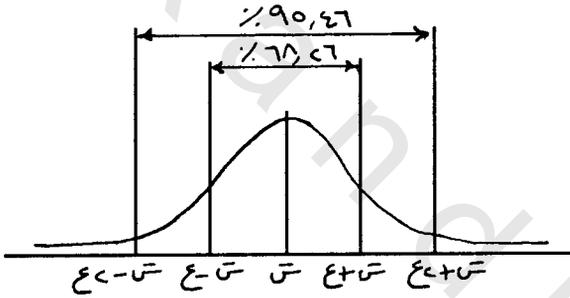


الشكل رقم (٧ - ٦)

يوضح مقارنة منحنى طبيعى بمنحنيات لها نفس الانحراف المعيارى ولكنها تختلف فى قممها

٧ - ٣ المساحات تحت المنحنى الطبيعي : -

غالباً ما يصبح من الضروري تحديد نسبة التكرارات « المفردات » التي تقع في فئة معينة . ومن حسن الحظ فإن للمنحنى الطبيعي خاصية هامة تجعل عملية تحديد هذه النسبة بسيطة نسبياً . وبغض النظر عن قيم المتوسط الحسابي ، والانحراف المعياري لأي منحنى طبيعي ، فإن هناك مساحة ثابتة « نسبة التكرارات » بين المتوسط الحسابي والإحداثي السيني " ordinate " الذي يبعد مسافة « مقياسة بوحدات الانحراف المعياري » معينة من المتوسط الحسابي . والشكل رقم « ٧ - ٧ » يساعد في توضيح الجملة السابقة .



الشكل رقم (٧ - ٧)

المساحات تحت المنحنى الطبيعي

وإذا ما انتقلنا إلى نقطة تبعد انحرافاً معيارياً واحداً على يمين المتوسط الحسابي ، فإننا سنجد أن نسبة المساحة التي تقع بين المتوسط الحسابي وهذه النقطة تبلغ « ٠.٣٤١٣ » . وبما أن المنحنى الطبيعي متماثل ، فإن ضعف هذه المساحة « ٠.٦٨٢٦ » ستكون محصورة بين الإحداثيين اللذين يبعدان انحرافاً معيارياً واحداً على جانبي المتوسط الحسابي . وبمعنى آخر ، فإن

أكثر « بقليل جداً » من ثلث التكرارات ينحصر دائماً بين انحراف معيارى واحد على جانبي المتوسط الحسابى .

وبالمثل فإن المساحة بين المتوسط الحسابى ، والإحداثى الذى يبعد إنحرافين معياريين عن المتوسط الحسابى تساوى دائماً ٤٧٧٣ر٠ . ولهذا فإن مساحة أكبر قليلاً من ٩٥٪ من جملة المساحة تحت المنحنى الطبيعى ستكون محصورة بين إحداثيين أفقيين ، يبعدان انحرافين معياريين على جانبي المتوسط الحسابى . وعلى الرغم من أن المنحنى الطبيعى يمتد إلى ما لا نهاية على جانبي المتوسط الحسابى ، إلا أنه من الناحية العملية ، فإن جميع التكرارات « تقريباً » تكون محصورة بين إحداثيين أفقيين ، تبعدان ثلاثة انحرافات معياريه على جانبي المتوسط الحسابى . وسنشرح فى هذا الفصل الطريقة التى يمكن أن نحدد بها المساحة التى تنحصر بين أى إحداثيين على المحور السينى . فإذا انتقلنا على سبيل المثال ١٩٦ر انحرافاً معيارياً على جانبي المتوسط الحسابى ، فإن المساحة المحصورة بين هذين الإحداثيين ستبلغ ٩٥٪ من إجمالى المساحة تحت المنحنى الطبيعى تقريباً ، كما أن ٩٩٪ من إجمالى المساحة تحت المنحنى الطبيعى ستكون محصورة بين الاحداثيين اللذين يبعدان ٢ر٥٨ إنحرافاً معيارياً عن المتوسط الحسابى . وبالطبع فإن المسافات أو الأبعاد عن المتوسط الحسابى لاتحتاج أن تكون دائماً من مضاعفات الانحراف المعيارى تماماً .

وتعطينا هذه الخاصية للمنحنى الطبيعى تفسيراً للانحراف المعيارى ؛ وتقدم لنا تصوراً ذهنياً للدلالة الإحصائية لهذا المقياس من مقاييس التشتت . هناك عددٌ من التوزيعات التكرارية الإمبريقية التى تشابه التوزيع الطبيعى (بخاصيته المذكورة) إلى درجة تكفى لكى تستمر هذه العلاقات بين المساحات تحت المنحنى والانحراف المعيارى ، بصورة معقولة . وحتى فى حالة توزيعات الدخول الشهرية التى تميل إلى الالتواء فى اتجاه الدخول

العالية ، فإننا غالباً ما نلاحظ أن ثلثي التكرارات « تقريباً » تبعد انحرافاً معيارياً واحداً على جانبي المتوسط الحسابي . ومع أن المنحنى الطبيعي يعطى تفسيراً للانحراف المعياري ؛ إلا أن الخاصية المذكورة أعلاه لا يمكن استخدامها لتعريف معنى الانحراف المعياري والجدير بالذكر أن تعريف الانحراف المعياري يتضح من معادلته الرياضية التي سبق الإشارة إليها في الفصل السادس . ومن الملاحظ أن الخاصية أعلاه تنطبق فقط على التوزيعات الطبيعية والتوزيعات التي تقارب التوزيعات الطبيعية .

ومن الممكن تحويل قيم لمنحنى طبيعي معين إلى درجات معيارية، في جدول إحصائي واحد ، يُستخدم في تحديد نسبة التكرارات (المفردات) لفئة تكرارية معينة . ونوضح ذلك بالمثال التالي :-

نفترض أن المتوسط الحسابي لمنحنى طبيعي معين يساوي ٥٠ ، وأن الإنحراف المعياري يساوي ١٠ ، والمطلوب حساب نسبة التكرارات التي تنحصر بين الفئة (٦٥ - ٥٠) . وفي البداية نحدد كم انحرافاً معيارياً تبعد القيمة ٦٥ عن المتوسط الحسابي (٥٠) . وللإجابة على هذا السؤال نحسب الفرق بين القيمتين ٦٥ و ٥٠ الذي يساوي ١٥ ثم نقسم هذا الفرق على قيمة الانحراف المعياري لتصبح النتيجة ١.٥ . وعموماً فإننا نستخدم المعادلة الحسابية أدناه للحصول على تلك النتيجة :-

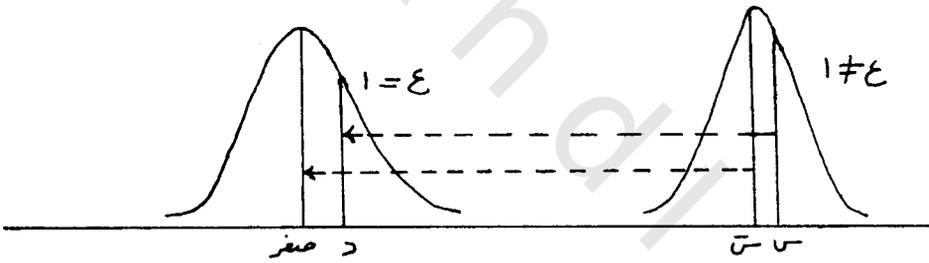
$$d = \left(\frac{s - \bar{s}}{e} \right) \quad (٧-٣)$$

$$\therefore ١.٥ = \left(\frac{٥٠ - ٦٥}{١.٠} \right) = d$$

حيث تشير « س » إلى قيمة الإحداثى على المحور السينى كما تشير « د » إلى عدد الانحرافات المعيارية لانحراف قيمة الإحداثى عن المتوسط الحسابى « د = الدرجة المعيارية » . وقبل الحديث عن كيفية استخدام القيمة العددية « د » لتحديد نسبة التكرارات التى تقع بين المتوسط الحسابى والإحداثى المناظر لقيمة « د » دعنا نقدم تفسيراً بديلاً لقيمة « د » . فى البداية نفكر فى التعبير عن ذلك بتحويل قيم المتغير « س » إلى قيم المتغير « د » بحيث يصبح توزيع المتغير « س » طبيعياً بانحراف معيارى « ع » ومتوسط حسابى « س » ، كما يصبح توزيع المتغير الجديد « د » طبيعياً بانحراف معيارى واحد صحيح ، ومتوسط حسابى يساوى صفرأ (١) . ويسمى التوزيع الأخير بالتوزيع الطبيعى المعيارى Standardized Normal " Distribution " كما تعرف « د » بالقيمة المعيارية " Standard Score " . والشكل رقم « ٧ - ٨ » يوضح كيفية تحويل قيم المتغير « س » إلى قيم المتغير « د » وتطرح قيمة الثابت « س » من كل قيمة من قيم المتغير « س » . ومن الملاحظ أن عملية طرح قيمة الثابت « س = ٥٠ » من قيم المتغير « س » تعنى فى الحقيقة تحريك كل قيمة من قيم المتغير « س » ٥٠ وحدة إلى اليسار . وبهذه العملية نكون قد حركنا المنحنى الطبيعى إلى موقع نقطة الأصل ١ وإلى احداثى الصفر " Origin " . وهذه العملية خاصة بقيمة البسط فى المعادلة رقم « ٧ - ٢ » ؛ ثم تقسم كل قيمة من انحرافات القيم عن وسطها الحسابى (س و - س) على الانحراف المعيارى . وبهذه الطريقة نكون قد ضغطنا المنحنى الأسمى فى حالة زيادة

(١) ونترك اثبات هذه الحقيقة كتمرين للقارئ» انظر السؤال رقم (٢) فى تمرين الفصل

قيمة الانحراف المعياري عن واحد صحيح ، أو نشرنا المنحنى الأصلي في حالة ما تَقَلَّ قيمة الانحراف المعياري عن واحد صحيح . وهذا يمكننا من أن نفكر أولاً في تحريك الموقع الأصلي للمنحنى الطبيعي ، ثم نغير الانحراف المعياري حتى يمكن بسط المنحنى الطبيعي فوق المنحنى الطبيعي المعياري . وفي الحقيقة فإن القسمة بقيمة الانحراف المعياري ، تعنى أننا قد غيرنا الوحدات على المحور الأفقى بحيث تعادل المسافة التى تبلغ « ١٠ » وحدات على المحور الأفقى « المحور السينى » وحدة واحدة على محور الدرجات المعيارية « د » .



الشكل (٧ - ٨)

يوضح مقارنة المنحنى الطبيعي المعياري بالمنحنى الطبيعي العام

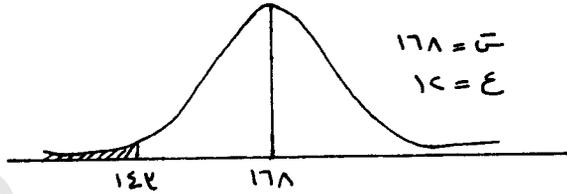
وبصرف النظر عن التفسير الذى يُعطى للدرجات المعيارية فإن قيمة « د » عندما تساوى « ١٥ » تعنى أن الاحداثى الأفقى « يبعد ٥ر١ انحرافاً معيارياً عن المتوسط الحسابى . وفى حالة المنحنى الطبيعي

المعياري ، فان هذه القيمة تعنى أن الإحداثى الأفقى يقع على بعد ١٥ على المحور الأفقى للدرجات المعيارية « د » . والجداول الاحصائية التى حسبت على أساس المنحنى الطبيعى المعيارى توضح بالضبط المساحات التى تقع تحت المنحنى وتنحصر بين احداثيات أفقية محددة . ويعتبر الجدول « ج » فى الملحق رقم « ٢ » أحد هذه الجداول الاحصائية . والقيم المعيارية « د » موضحة أفقياً على الجانب الهامشى الأيمن ورأسياً فى الصف الأول للجدول « ج » . ويتضح الرقمان الأول والثانى لقيمة الدرجة المعيارية « د » بقراءة العمود الأول « رأسياً » . أما الرقم الثالث لقيمة الدرجة المعيارية فيتضح من الصف الأول فى الجدول (ج) . أما الأرقام الأخرى الموضحة فى الجدول (ج) ، فانها تشير إلى نسبة المساحة التى تنحصر بين المتوسط الحسابى « د⁻ = صفر » والإحداثى الذى يناظر قيمة الدرجة المعيارية « د » . فى المثال أعلاه نلاحظ أن ٤٣٣٢.٠ من مساحة المنحنى تنحصر بين « د⁻ = صفر و « د = ١٥ » . أما إذا ما كانت قيمة الدرجة المعيارية « د = ١٥٢ » ، فإن المساحة المناظرة لهذه الدرجة تصبح ٤٣٥٧.٠

٧ - ٤ توضيحات أخرى لاستخدام الجدول الطبيعى :-

نفترض أننا نرغب فى معرفة المساحة المظللة للمنحنى الطبيعى الموضح فى الشكل رقم « ٧ - ٩ » فان قيمة الدرجة المعيارية فى هذه الحالة تصبح :-

$$20.8 - = \frac{20 -}{12} = \left(\frac{168 - 143}{12} \right) = د$$

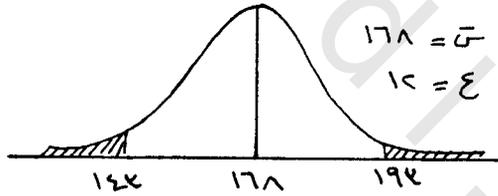


الشكل (٧ - ٩)

يوضح المنحنى الطبيعي ، حيث يمثل الجزء المظلل مساحة الطرف الأيسر

إن القيمة السالبة للدرجة المعيارية « د » تعنى ببساطة أن المساحة المظلة تقع على يسار المتوسط الحسابى . ويمكننا أن نتجاهل إشارة الدرجة المعيارية عند استخدامنا لجدول التوزيع الطبيعي لأن المنحنى الطبيعي متماثل تماماً . ونلاحظ من الجدول « ج » أن المساحة بين المتوسط الحسابى والدرجة المعيارية ($د = ٢٠.٨$) تبلغ ٠.٠٤٨١٢ . وبما أن إجمالي المساحة تحت المنحنى تساوى واحداً صحيحاً ، فإن المساحة على يسار المتوسط الحسابى يجب أن تبلغ ٠.٥ . وذلك نسبة لتماثل المنحنى الطبيعي . وللحصول على المساحة المظلة فى الشكل رقم « ٧ - ٩ » نطرح المساحة بين المتوسط الحسابى والإحداثى « د » $= ٢٠.٨$ من المساحة الكلية التى تقع على يسار المتوسط الحسابى . وعليه فإن نسبة التكرارات التى تساوى أو تقل قيمتها عن ١٤٣ تبلغ ($٥٠٠٠ - ٠.٤٨١٢$) ، أى ٠.١٨٨ .

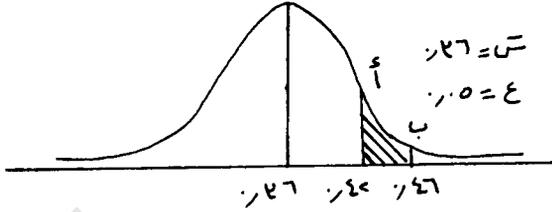
وهذا يعنى أن أقل من ٢ ٪ من التكرارات قيمها تساوى أو تقل عن ١٤٣ .
 إن نوع المسألة الموضحة فى هذا المثال من المسائل العامة والكثيرة
 الاستخدام عند اختيار الفروض التى تتضمن دائماً طرفى "Tails" التوزيع
 التكراري . ولهذا فإننا غالباً ما نكون راغبين فى معرفة المساحة التى تقع
 فى طرف واحد من طرفى المنحنى . وإذا ما أردنا أن نحصل على إجمالى
 المساحات خارج المنطقة المحددة بـ 168 ± 25 [انظر المساحات المظلمة
 فى الشكل رقم (٧ - ١٠)] ، فإننا ببساطة ، نضاعف المساحة التى
 حصلنا عليها فى المثال أعلاه لأن المساحتين المظلتين تتساويان تماماً .



الشكل رقم (٧ - ١٠)

المنحنى الطبيعي ، الأجزاء المظلمة تمثل المساحات

عند طرفى المنحنى



الشكل رقم (٧ - ١١)

المنحنى الطبيعي - الجزء المظلل يمثل

المساحة بين الاحداثيتين

ولنأخذ مثلاً آخر . دعنا نفترض أننا نريد معرفة المساحة المظللة في الشكل رقم (٧ - ١١) ، وتحسب هذه المساحة بطرح نسبة التكرارات التي تنحصر بين المتوسط الحسابي ، والإحداثي «أ» ، من نسبة التكرارات التي تنحصر بين المتوسط الحسابي ، والإحداثي «ب» . إن الدرجات المعيارية «د» التي تناظر النقطة «ب» والنقطة «أ» تساوي ٢ر٠ و ١ر٢ على التوالي . وعليه تصبح : -

نسبة التكرارات بين المتوسط الحسابي و « ب » = ٤٧٧٣ر٠ .

ونسبة التكرارات بين المتوسط الحسابي و « أ » = ٣٨٤٩ر٠ .

∴ نسبة التكرارات بين « أ » و « ب » = ٩٢٤ر٠ .

{ أي : ٤٧٧٣ر٠ - ٣٨٤٩ر٠ = ٩٢٤ر٠ }

وعليه فإن ما يزيد قليلاً عن ٩ ٪ من التكرارات تنحصر بين القيم ٤٢ ر. و٤٦ر. وتجدر الإشارة إلى أنه إذا ما أردنا معرفة المساحة بين الإحداثيين على طرفي المتوسط الحسابي، فإننا نحصل على النتيجة بعملية الجمع بدلاً من عملية الطرح.

وسوف نلجأ - بدءاً من الفصل الحادي عشر - إلى استخدام مكثف للتوزيع الطبيعي في الإختبارات حول المتوسطات الحسابية لمختلف المجتمعات الإحصائية. وسوف يتضح أنه، وبصرف النظر عن شكل التوزيع لأي مجتمع من هذه المجتمعات، فإن المتوسطات الحسابية لعينات بأحجام كبيرة بدرجة معقولة تؤخذ من هذه المجتمعات تأخذ دائماً شكل التوزيع الطبيعي على وجه التقريب.

تمرين الفصل السابع: -

(١) لقد سبق أن أوجدنا المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات الخاصة بالسؤال الأول في تمرين الفصل الرابع، أجب عن الأسئلة الآتية من بيانات السؤال المذكور أعلاه:-

(أ) ما نسبة ال ٦٥ مفردة التي تقع داخل انحراف معياري واحد على جانبي المتوسط الحسابي.

(ب) ما نسبة ال ٦٥ مفردة التي تقع داخل انحرافين معياريين على جانبي المتوسط الحسابي.

(ج) ما نسبة ال ٦٥ مفردة التي تقع داخل ثلاثة انحرافات معيارية على جانبي المتوسط الحسابي.

إلى أي مدى تمثل هذه النتائج الإجابات التي نتوقعها إذا ما كان التوزيع طبيعياً تماماً.

أجب عن نفس الأسئلة أعلاه مستخدماً بيانات السؤال رقم (٢) من تمرين الفصل الرابع؟

قارن نتائج السؤالين أعلاه لتوضيح الاختلافات الخاصة ببيانات السؤال الأول والثاني من تمرين الفصل الرابع.

(٢) إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي يساوى ٨٠ ، والانحراف المعياري يساوى ١٢ ، أجب عن الأسئلة الآتية :-

أ - ما نسبة التكرارات (المفردات) التي تقع بين القيمتين ٨٠ و ٩٣ (الاجابة = ٣٦.٦ ٪) .

ب - ما نسبة التكرارات (المفردات) التي تقع بين القيمتين (٧٠ و ١٠٥)؟

ج - ما نسبة التكرارات التي تقل قيمها عن القيمة ٦٨ ؟

د- احسب عدد الانحرافات المعيارية اللازمة للتحرك على جانبي المتوسط الحسابي ، لتحصل على طرفين يحتوى كل منهما على : - أولاً ٢٪ من إجمالي المساحة تحت المنحنى . ثانياً ١٠٪ من إجمالي المساحة تحت المنحنى ؟

هـ - ما قيمة المفردة التي تأتي ٤٪ من المساحة تحت المنحنى بعدها (بمعنى آخر حدد موقع المُئين رقم ٩٦ ؟

(٣) أثبت أن قيم المتوسط الحسابي ، والانحراف المعياري للمنحنى الطبيعي المعياري ، تساوى صفرأ ، وواحدأ صحيحأ على التوالي (لتسهيل عملية الحل ، أعد كتابة معادلة المنحنى الطبيعي فى صيغة القيم المعيارية ،

$$\left[\frac{(س - \bar{س})}{ع} = د \right] \text{ باستخدام المعادلة الرياضية الآتية :}$$

(٤) عادة ما يعامل علماء النفس درجات اختبارات المقدرة والكفاءة كمتغيرات فترية . أجب عن الأسئلة أدناه مستخدماً البيانات الآتية :-

- لقد تم تحويل درجات اختبارات المقدرة والكفاءة إلى درجات معيارية .

- إن المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للدرجات الخام (قبل تحويلها

إلى قيم معيارية (١١٧ و ٢٨٥ على التوالي .

- نفترض أن الدرجات الخام تتوزع توزيعاً طبيعياً : -

أ - ما نسبة الدرجات الخام التي تقع بعد درجة ١٣١ ؟ وما نسبة الدرجات
الخام التي تقع قبل الدرجة ٧٩ ؟

ب - ما هي الدرجات الخام التي تقابل الربيع الأول والربيع الثاني والربيع
الثالث ؟